

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

FERNANDO DO CARMO PEREIRA

**ESTUDO DO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM PISOS POR MEIO DE
ABSORVEDORES DE MASSA SINTONIZADA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO

2014

FERNANDO DO CARMO PEREIRA

**ESTUDO DO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM PISOS POR MEIO DE
ABSORVEDORES DE MASSA SINTONIZADA**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso superior de Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo R. Carreira

CAMPO MOURÃO

2014



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

**ESTUDO DO CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM PISOS POR MEIO DE ABSORVEDORES
DE MASSA SINTONIZADA**

por

Fernando do Carmo Pereira

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 13h50min do dia 05 de fevereiro de 2015 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Ronaldo Rigobello
(UTFPR)

Prof. Dr. Jorge Luís Nunes de Góes
(UTFPR)

Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira
(UTFPR)
Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

Prof. Dr. Marcelo Guelbert

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

À memória de meu avô, Braz Ribeiro do Carmo,
carpinteiro de profissão, engenheiro de vocação.
Com ele aprendi a fascinação pela arte de
engenharia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro a Deus, pois sem Ele nenhuma vitória seria conquistada. Agradeço à força pra vencer a distância de casa e a saudade da família, por cada dificuldade superada, por me mostrar que realizar um sonho é possível e por sempre estar ao meu lado. À Ele toda honra e glória. Agradeço à Virgem Maria por sua intercessão e proteção.

Aos meus pais, Tomaz e Maria, pela educação, amor, confiança, apoio e respeito, sem eles nada disso seria possível, serei eternamente grato. À minha irmã Elisângela pela amizade e companheirismo, por sempre me dar forças e acreditar em minha capacidade, ao meu cunhado Douglas, pela amizade e apoio. Às minhas avós, Rosa e Evangelista, exemplos de fé e sabedoria, agradeço pelo carinho e ensinamentos. E aos meus sobrinhos Giovana e Tarcísio pela alegria e motivação que despertam em minha vida.

Ao meu orientador, professor Dr. Marcelo Rodrigo Carreira por sua paciência, dedicação e empenho no desenvolvimento deste trabalho. Também sinto-me grato e honrado pelo convite e oportunidade de participação em seu projeto de Iniciação Científica. Seus ensinamentos foram primordiais.

Ao professor Dr. Jorge Góes pela tutoria durante minha participação no grupo PET – Civil, experiência fascinante de crescimento acadêmico e profissional. Também agradeço a todos os “Petianos” pelo bom trabalho realizado e pela amizade gerada durante esses anos de convivência.

À todos professores do DACOC pelos valiosos ensinamentos, que me acompanharão durante toda minha carreira profissional.

Ao Centro Acadêmico de Engenharia Civil e a Pórticos Empresa Jr., dos quais participei durante minha graduação desenvolvendo e debatendo ideias, obrigado pela oportunidade e experiência.

Aos meus amigos do Grupo de Jovens “Sal da Terra e Luz do Mundo”, Danilo, Dieni, Paulo Henrique, Jean, Leandro e João Paulo, amigos pela fé que sempre me apoiaram.

Aos meus colegas de curso, Mariana, Akemy, Julia, Paulo, Marcos, Luana, Carol, Vanessa, Tâmy, Othon, Lilian, Lara, Alécia, Ana Flávia e João Luiz por juntos formamos uma família, compartilhando momentos bons e ruins, sempre apoiando um ao outro. Agradeço imensamente a esses verdadeiros amigos, que levarei por toda vida.

Por fim, mas não menos importante, agradeço à todos que de certa forma colaboram para a realização desta conquista.

“I can do all things through christ which strengthens me”
(Filipenses, 4:13)

“Tudo posso Naquele que me fortalece” (Filipenses, 4:13)

RESUMO

PEREIRA, Fernando do C. **Estudo do controle de vibrações em pisos por meio de absorvedores de massa sintonizado**. 2014. 78 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento Acadêmico de Construção Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Campo Mourão, Campo Mourão, 2014.

Os avanços das técnicas de análise e dimensionamento estrutural associados à produção de materiais estruturais com melhores propriedades mecânicas têm permitido nos últimos anos a construção de estruturas mais leves, esbeltas e flexíveis. O aumento na esbelteza dos elementos estruturais tem levado ao surgimento de problemas relacionados com a vibração excessiva das estruturas, sobretudo em lajes e pisos de edifícios. As vibrações excessivas nas lajes e pisos podem ser atenuadas de forma eficiente fixando-se na parte inferior da laje um Absorvedor de Massa Sintonizada (AMS), internacionalmente conhecido como “*Tuned Mass Dampers*” (TMD’s). Esses dispositivos são constituídos por uma massa ligada à estrutura por intermédio de uma mola disposta em paralelo com um amortecedor. O presente trabalho tem por objetivo avaliar a eficiência de um AMS para o controle de vibrações em lajes de piso pré-fabricadas de concreto armado e lajes de madeira submetidas à ação do caminhar de uma pessoa. Após uma análise da literatura internacional sobre controle de vibrações, foi selecionado um método de dimensionamento mais adequado para o AMS. O método foi testado em um modelo matemático de uma laje de concreto sujeita a ação do caminhar de uma pessoa. Propositivamente, as lajes estudadas neste trabalho apresentavam ressonância com o 2º harmônico do caminhar de uma pessoa. Para um carregamento de caminhar normal, com frequência do harmônico fundamental em 2,24 Hz para a laje de concreto e 2,15 Hz para a laje de madeira a aceleração máxima no meio do vão alcançou em ambos os casos uma tal magnitude que proporciona desconforto aos usuários. O AMS foi dimensionado segundo os ábacos de Moutinho (1998) com o objetivo de limitar o pico de aceleração em 0,5% de g, na simulação com o AMS instalado na laje de concreto, a aceleração no meio do vão caiu para 0,3% de g sendo considerada aceitável. O método também foi testado para uma laje de madeira, porém seria necessária a adição de uma massa superior à recomendada pela literatura, portanto não seria viável a adição de um AMS a estrutura. Conclui-se que quando plausível a incorporação de um sistema de controle passivo, como no caso da laje de concreto, o método de dimensionamento por meio de ábacos proposto por Moutinho (1998) é de fácil aplicação e conduz a resultados satisfatórios.

Palavras-chave: Absorvedor de Massa Sintonizada (AMS), Piso, Vibrações.

ABSTRACT

PEREIRA, Fernando do C. **Study of floor vibration control through tuned mass dampers.** 2014. 78 f. Final Paper (Civil Engineering) – Academic Department of Civil Construction of the Federal Technological University – Campo Mourão Campus, Campo Mourão, 2014.

The progress of structural analysis and design techniques regarding to the production of structural materials with improved mechanical properties has been allowing, in recent years, the construction of lighter, more slender and more flexible structures. The increase in the slenderness of the structural elements has been leading to the occurrence of problems related to the excessive vibration of the structures, especially in building floor slabs. The excessive vibrations in floor slabs can be reduced in an efficient way by fixing in the inferior part of the slab a Tuned Mass Damper (TMD). This device consists of a mass connected to the structure through a spring placed in parallel to a damper. The present paper has the goal evaluate the efficiency of TMDs for vibration control in prefabricated reinforced concrete floor slabs and timber slabs subjected to the action of human-induced vibrations. After an analysis of the international literature on vibration control, it was selected a more adequate design method to the TMD. The method was tested in a mathematical model of a concrete slab subjected to the action of walking of one person. On purpose, the slabs studied in this paper presented resonance with the 2nd harmonic of loading. For a loading of normal walking, with frequency of the fundamental harmonic in 2.24 Hz for the concrete slab and 2.15 Hz for the timber slab, the maximum acceleration in the midspan reached, in both cases, such magnitude that causes discomfort to the users. The TMD was designed according to Moutinho's (1998) abacuses, with the goal of limiting the peak of acceleration in 0.5% of g, in the simulation with the TMD installed in the concrete slab, the acceleration in the midspan decreased to 0.3% of g, being considered acceptable. The method was also tested for a timber slab, however it would be necessary to add a superior mass than recommend by the literature, therefore adding a TMD to the structure would not be practicable. It can be concluded that, when plausible the implement of a passive control system, such as the case of the concrete slab, the design method through abacuses proposed by Moutinho (1998) is easily applicable and leads to satisfactory results.

Keywords: Tuned Mass Damper (TMD), Floor, Vibration.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema com um grau de liberdade	9
Figura 2 - Equilíbrio de Forças.....	9
Figura 3 – Gráfico da resposta a vibração livre de um sistema subamortecido	13
Figura 4 – Relação entre taxa de frequência e taxa de amortecimento	13
Figura 5 - Sistema com dois graus de liberdade.....	15
Figura 6 - Diagrama de Corpo Livre	16
Figura 7 - Absorvedor de Massa Sintonizada em um Sistema de um Grau de Liberdade	21
Figura 8 - Detalhe de um AMS na Millenium footbridge - Londres.....	23
Figura 9 - Detalhe de um AMS no Estádio do Morumbi - São Paulo.....	24
Figura 10 - Modelo teórico de um AMS Aplicado a uma estrutura sem amortecimento	25
Figura 11 - Modelo teórico de um AMS aplicado a uma estrutura com Amortecimento	27
Figura 12 - Curvas de Amplificação Máxima do Deslocamento do Sistema Principal	29
Figura 13 - Curvas para determinação do valor Ótimo de q	29
Figura 14 - Curvas para a determinação do valor ótimo de ξ^2	30
Figura 15 - Curvas de amplificação máxima do deslocamento relativo entre as massas	30
Figura 16 - Painel Duplo T de concreto pré-fabricado.....	33
Figura 17 - Seção transversal da Laje.....	34
Figura 18 - Corte da laje com as camadas de acabamento	34
Figura 19 – Laje de madeira.....	35
Figura 20 - Seção transversal da Laje.....	36
Figura 21 - Corte da laje de madeira com as camadas de acabamento	37
Figura 22 - Carregamento dinâmico do caminhar de uma pessoa.....	39
Figura 23 - Dimensionamento do AMS para a laje pré-fabricada de concreto	42
Figura 24 - Dimensionamento do AMS para a laje de madeira	43
Figura 25 - - Fator de amplificação dinâmica da estrutura.....	46
Figura 26 - Aceleração da laje sem o absorvedor instalado	46
Figura 27 - Fator de amplificação dinâmica do sistema laje/AMS	48
Figura 28 - Aceleração do sistema laje/AMS.....	48
Figura 29 - Sobreposição das curvas de Amplificação Dinâmica.....	49
Figura 30 - Sobreposição das curvas de Aceleração	49
Figura 31 - Fator de amplificação dinâmica da estrutura	50
Figura 32 - Aceleração da laje sem o absorvedor instalado	51

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Coeficientes Dinâmicos.....	19
Quadro 2 - Características dos movimentos	19
Quadro 3 - Lista de estruturas equipadas com AMS (Passivo).....	22
Quadro 4 - Lista de estruturas equipadas com AMS (Ativo)	23
Quadro 5 - Propriedades dos elementos que compõe a estrutura da laje	34
Quadro 6 - Propriedades dos elementos que compõe a estrutura da laje.	36
Quadro 7 - Propriedades dos elementos que compõe a estrutura da laje	37
Quadro 8 - Propriedades dinâmicas da laje pré-fabricada de concreto	40
Quadro 9 - Propriedades dinâmicas da laje de madeira.....	41
Quadro 10 - Resultado do dimensionamento da laje.....	45
Quadro 11 - Propriedades dinâmicas do AMS	47
Quadro 12 - Resultado do dimensionamento da laje.....	50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	5
2 OBJETIVOS.....	7
2.1 OBJETIVO GERAL.....	7
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	7
3 REVISÃO DE LITERATURA	8
3.1 FUNDAMENTOS DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS	8
3.1.1 Sistemas discretos com um grau de liberdade (GDL)	8
3.1.1.1 Vibração livre amortecida	10
3.1.1.2 Resposta à solitação harmônica	13
3.1.2 Sistemas discretos com dois graus de liberdade (2 GDL)	15
3.1.2.1 Vibração forçada com amortecimento.....	17
3.2 EXCITAÇÃO DEVIDO AO CAMINHAR DE UMA PESSOA.....	18
3.3 CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM LAJES DE PISO POR MEIO DE AMS	20
3.4 CRITÉRIOS PARA O DIMENSIONAMENTO DE ABSORVEDORES DE MASSA SINTONIZADA	24
3.4.1 Dimensionamento de AMS para estruturas sem amortecimento.....	25
3.4.2 Dimensionamento de AMS para estruturas com amortecimento	27
4 METODOLOGIA.....	33
4.1 DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL DAS LAJES	33
4.1.1 Dimensionamento estrutural da laje pré-fabricada de concreto	33
4.1.2 Dimensionamento estrutural da laje de madeira.....	35
4.2 ANÁLISE DINÂMICA DAS LAJES	37
4.2.1 Análise dinâmica da laje pré-fabricada de concreto armado	39
4.2.2 Análise dinâmica da laje de madeira.	40
4.3 DIMENSIONAMENTO DO ABSORVEDOR DE MASSA SINTONIZADO - AMS	41
4.4 ANÁLISE DINÂMICA DAS LAJES APÓS A INSTALAÇÃO DO AMS	44
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	45
5.1 LAJE PRÉ-FABRICADA DE CONCRETO	45
5.1.1 Dimensionamento estrutural.....	45
5.1.2 Análise dinâmica da laje antes da instalação do AMS	45
5.1.3 Dimensionamento do AMS	47
5.1.4 Análise dinâmica da laje após a instalação do AMS	47
5.2 LAJE DE MADEIRA.....	50
5.1.1 Dimensionamento estrutural.....	50
5.1.2 Análise dinâmica da laje antes da instalação do AMS	50
5.1.3 Dimensionamento do AMS	51
6 CONCLUSÕES	53
7 REFERÊNCIAS	55
APÊNDICE A – Memorial de cálculo da análise dinâmica na laje pré-moldada de concreto armado	58
APÊNDICE B – Memorial de cálculo da análise dinâmica na laje pré-moldada de concreto armado após a instalação do AMS.....	61
APÊNDICE C – Memorial de cálculo da análise dinâmica na pré-moldada de madeira	69

1 INTRODUÇÃO

Os avanços das técnicas de análise e dimensionamento estrutural associados à produção de materiais estruturais com melhores propriedades mecânicas têm permitido nos últimos anos a construção de estruturas mais leves, esbeltas e flexíveis. Se por um lado tais avanços proporcionaram redução no custo final da estrutura e permitiram alcançar modernas formas arquitetônicas, por outro, o aumento na esbeltez dos elementos estruturais tem levado ao surgimento de problemas relacionados com a vibração excessiva das estruturas, sobretudo em pisos de edifícios.

O fenômeno da vibração em pisos pode surgir também pela introdução de carregamentos dinâmicos não previstos em projeto como a utilização de edifícios comerciais para funcionamento de academias de ginástica.

Embora as ações dinâmicas decorrentes das atividades humanas sobre os pisos provoquem vibrações pouco significativas do ponto de vista da segurança estrutural essa ação pode gerar desconforto e até mesmo a sensação de insegurança nos usuários se a intensidade da vibração atingir níveis elevados.

Esse fenômeno pode ser agravado quando, além da baixa rigidez, a estrutura apresenta reduzido amortecimento estrutural. Nesses casos, cargas dinâmicas de baixa intensidade podem produzir vibração de intensidades apreciáveis devido ao fenômeno da amplificação dinâmica. Tal fenômeno pode produzir danos nos revestimentos e fadiga estrutural, além dos já citados problemas relacionados ao conforto à vibração.

No Brasil, a atual versão da norma NBR 6118 (ABNT, 2014) fixa valores de frequências críticas mínimas para algumas estruturas de concreto armado e recomenda afastar o máximo possível a frequência natural da estrutura dessas frequências. Contudo, o texto normativo não apresenta valores de frequências críticas para pisos residenciais. Nesses casos, a norma exige que seja feita uma análise dinâmica acurada em conformidade com normas internacionais.

Uma forma clássica de resolver o problema de vibração excessiva de lajes piso já executadas consiste em aumentar a rigidez da estrutura. Nesse caso, promove-se um afastamento da frequência fundamental para além da frequência crítica, reduzindo-se os efeitos da ressonância. Contudo, essa solução nem sempre é fácil de ser concretizada, quer por entraves de caráter arquitetônico, de caráter econômico ou mesmo estrutural já que o aumento na rigidez implica no aumento do peso da estrutura.

As vibrações excessivas nas lajes piso podem ser atenuadas de forma eficiente fixando-se na parte inferior das mesmas um Absorvedor de Massa Sintonizada (AMS), internacionalmente conhecido como “*Tuned Mass Dampers*” (TMD’s). Esses dispositivos são constituídos por uma massa ligada à estrutura por intermédio de uma mola disposta em paralelo com um amortecedor. A respectiva frequência natural do conjunto pode ser sintonizada. O interesse prático dessa sintonização resulta da necessidade da mola e do amortecedor aplicarem forças contrárias ao movimento, exercendo uma ação de atenuação das vibrações.

Tal dispositivo deve ser dimensionado para atenuar a vibração da laje de modo que a mesma atenda aos critérios de conforto definidos em normas internacionais como a ISO 2631-2 (ISO, 1989), ISO 2631 10137 (ISO, 2007) e DIN 4152 (DIN, 1975).

Percebe-se, entretanto, uma carência de estudos relativos ao projeto desse mecanismo para ser instalado em lajes de piso. Neste contexto é que se desenvolveu esse trabalho, no qual foi estudado o controle de vibrações indesejadas empregando um absorvedor de massa sintonizada (AMS). O absorvedor de massa sintonizada estudado neste trabalho é do tipo passivo, ou seja, não necessita de energia externa para atenuar as vibrações da laje.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Avaliar a eficiência de um AMS no controle de vibrações em lajes de piso submetidas à ação do caminhar de uma pessoa.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar os fundamentos teóricos da análise dinâmica de estruturas;
- Compreender o comportamento de sistemas discretos com dois graus de liberdade submetidos à solicitação harmônica;
- Identificar um método de dimensionamento de AMS para aplicação em lajes de piso pré-fabricadas em concreto armado e para lajes de piso em madeira;
- Verificar, por meio de simulações teóricas, a eficiência dos AMS no controle de vibrações de lajes de piso de concreto e de madeira.

3 REVISÃO DE LITERATURA

3.1 FUNDAMENTOS DE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

A análise dinâmica das estruturas busca encontrar os deslocamentos, velocidades e acelerações de uma estrutura sujeita a ações dinâmicas. Ação dinâmica é caracterizada pela sua mudança no tempo, podendo variar sua magnitude, direção ou posição (DIOGENES, 2010).

O surgimento de novos materiais associado ao avanço em sistemas estruturais possibilitou à construção civil executar estruturas mais leves, esbeltas e com vãos maiores, tornando-as mais vulnerais aos efeitos gerados pelos carregamentos dinâmicos, como por exemplo, o vento, a presença de equipamentos e atividades humanas (JUNGES, 2010).

O projetista, na maioria das vezes, não leva em consideração as atividades humanas, como por exemplo, o ato de caminhar, correr, dançar ou pular sobre uma estrutura. Desse fato podem ocorrer problemas gerados pela vibração excessiva dos pisos, que gera desconforto e pode prejudicar a vida útil das estruturas.

Silva (2009) define vibração como “o movimento periódico realizado por uma partícula, um sistema de partículas ou um corpo rígido que oscila em torno de um ponto de equilíbrio”.

3.1.1 Sistemas discretos com um grau de liberdade (GDL)

A massa, rigidez e amortecimento são propriedades físicas essenciais de qualquer sistema mecânico ou estrutural submetido a uma força externa de excitação ou carga dinâmica (CLOUGH e PENZIEN, 2003). A Figura 1 esquematiza um sistema de um grau de liberdade.

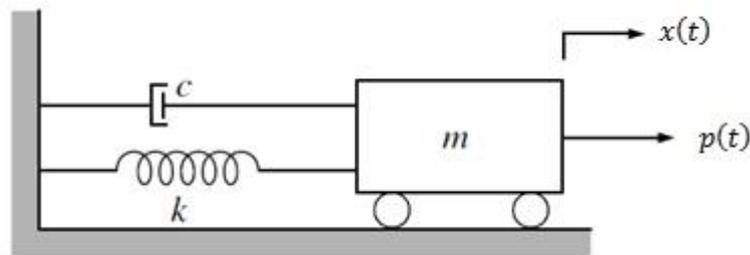


Figura 1 – Sistema com um grau de liberdade
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

A massa m de todo sistema está incluída no bloco rígido restringido por roletes que permitem apenas o movimento de translação na direção x . A mola de rigidez k , não possui massa e é responsável por fornecer a resistência elástica ao deslocamento. A dissipação de energia é causada pelo amortecedor c . A ação dinâmica externa que provoca a resposta do sistema é a força $p(t)$ (CLOUGH e PENZIEN, 2003).

Segundo Silva (2009), um dos métodos para obter-se a equação do movimento para um sistema com um único grau de liberdade, consiste em desenvolver um diagrama de corpo livre (DCL) em um instante qualquer e representar as forças externas e de inércia.

A partir de uma variação do princípio de D'Alembert para corpos rígidos, a equação do movimento pode ser obtida pelo equilíbrio dinâmico de todas as forças que atuam no bloco de massa m . A Figura 2 mostra todas as forças atuantes no sistema.

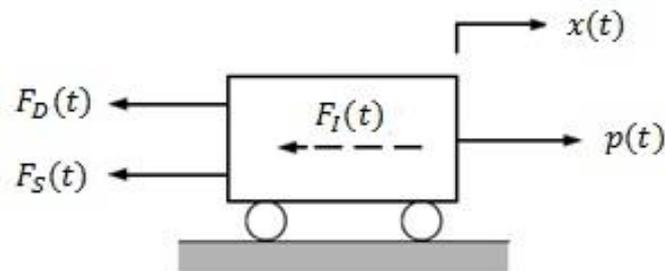


Figura 2 - Equilíbrio de Forças
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

$$p(t) = F_I(t) + F_D(t) + F_S(t) \quad (1)$$

Onde,

$F_I(t)$ = Força de inércia;

$F_D(t)$ = Força no amortecedor;

$F_S(t)$ = Força na mola;
 $p(t)$ = Excitação dinâmica.

Sendo cada uma dessas forças, função do deslocamento $x(t)$ ou de uma de suas derivadas no tempo:

$$F_I = m\ddot{x} \quad (2)$$

$$F_D = c\dot{x} \quad (3)$$

$$F_S = kx \quad (4)$$

Portanto, a equação do movimento pode ser representada como:

$$p(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx \quad (5)$$

Sendo,

m = massa do corpo;

c = coeficiente de amortecimento viscoso;

k = coeficiente de rigidez;

\ddot{x} = aceleração

\dot{x} = velocidade

x = deslocamento

3.1.1.1 Vibração livre amortecida

Quando o sistema possui o coeficiente de amortecimento c diferente de zero, têm-se vibrações livres amortecidas. Nesse caso, como a vibração é livre $p(t) = 0$. Portanto a equação do movimento passa a ser:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6)$$

A equação (6) é uma equação diferencial de segunda ordem no tempo que possui como solução a equação (7) (BOYCE; DIRPIMA, 2006).

$$x(t) = Ae^{\beta t} \quad (7)$$

A constante A depende das condições iniciais do sistema. Após se obter as derivadas de 1° e 2° da ordem da equação (7), e substituí-las na equação (6) é possível encontrar os valores de β e então obter a resposta total da equação do movimento, que inclui dois termos na forma da equação (7).

$$x(t) = Ae^{\left(-\frac{c}{2m} + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t} + Be^{\left(-\frac{c}{2m} - \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t} \quad (8)$$

De acordo com Clough e Penzien (2003), é definido como coeficiente de amortecimento crítico o valor que zera o termo dentro da raiz na equação (8).

$$C_c = 2m\omega_n \quad (9)$$

Onde,

C_c = coeficiente de amortecimento crítico;

ω_n = frequência angular natural não amortecida.

O amortecimento real de uma estrutura pode ser especificado e medido em termos do fator de amortecimento adimensional ξ , que é definido pela equação (10).

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (10)$$

Substituindo a equação (10) na equação (8), é possível encontrar a sua solução final.

$$x(t) = A_1 e^{\omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})t} + A_2 e^{\omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})t} \quad (11)$$

Como o valor de c é positivo, a resposta do sistema dependerá do valor do fator de amortecimento ξ , portanto se $\xi > 1$ o amortecimento é supercrítico, caso $\xi = 1$ o amortecimento é crítico, e por fim se $0 < \xi < 1$ o amortecimento é subcrítico.

Segundo Clough e Penzien (2003), “ $\xi < 20\%$ (subcrítico) é o caso mais comum da maioria das estruturas na prática”. Com base nas relações trigonométricas da fórmula de Euler e dos números complexos a solução é obtida pela equação (12).

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[x \cos(\omega_d t) + \left(\frac{\dot{x} + \xi\omega_n x}{\omega_d} \right) (\text{sen } \omega_d t) \right] \quad (12)$$

Sendo a frequência circular ω_d definida na equação (13).

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (13)$$

A equação (12) pode ser escrita alternativamente na forma:

$$x(t) = A e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \theta) \quad (14)$$

Onde A é a amplitude máxima de deslocamento.

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad (15)$$

E sendo θ o ângulo de fase do movimento:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{x_0 \omega_d}{\dot{x}_0 + \xi\omega_n x_0} \right) \quad (16)$$

A Figura 3 ilustra o gráfico da resposta de um sistema com amortecimento subcrítico sujeito a um deslocamento inicial x_0 e velocidade inicial zero, que oscila com uma frequência circular constante ω_d .

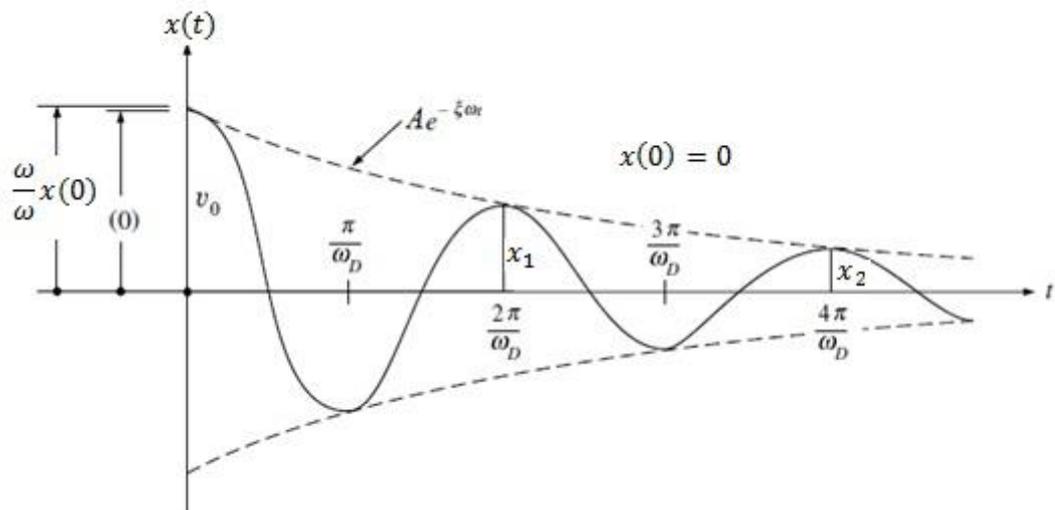


Figura 3 – Gráfico da resposta a vibração livre de um sistema subamortecido
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

A relação entre a razão de amortecimento e razão de frequências pode ser representada graficamente, conforme ilustra a Figura 4, o resultado é um círculo de raio unitário.

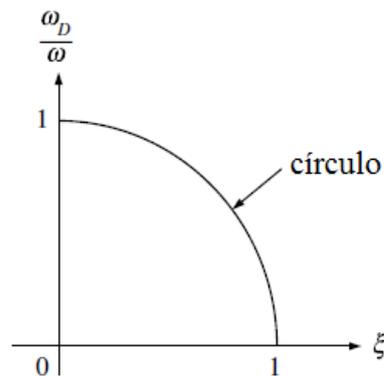


Figura 4 – Relação entre taxa de frequência e taxa de amortecimento
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003)

3.1.1.2 Resposta à solicitação harmônica

A rotação de uma massa desbalanceada ou a ação do caminhar de uma pessoa sobre um piso podem introduzir vibrações nas estruturas reais. Essa vibração não é causada somente devido a uma perturbação inicial, mas também em função de forças de excitação externa $P(t)$, que pode ser um carregamento periódico.

No caso de rotação de massas desbalanceadas, a força de excitação é do tipo harmônica. Quando a força periódica não for harmônica ela pode ser modelada como uma soma de funções harmônicas usando a Série de Fourier.

Considerando que o sistema com 1 GDL esteja submetido a uma excitação harmônica, da forma:

$$P(t) = P_0 \cos \omega t \quad (17)$$

A equação do movimento é representada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \cos \omega t \quad (18)$$

Segundo Silva (2009), a equação (18) é uma equação diferencial ordinária linear e não-homogênea (EDOLNH). A solução da equação do movimento envolve a soma de duas soluções, uma primeira homogênea $x_h(t)$ que representa a resposta inicial da estrutura à aplicação do carregamento transiente, e uma segunda, a solução particular $x_p(t)$ que é a resposta estacionária.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (19)$$

A solução particular para a equação (18) é:

$$x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (21)$$

Os termos seno e cosseno aparecem porque nem sempre a resposta do sistema amortecido está em fase com o carregamento. As constantes A e B são definidas como:

$$A = \frac{P}{k} \left[\frac{2\xi\alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\xi^2\alpha^2} \right] \quad (22)$$

$$B = \frac{P}{k} \left[\frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + 4\xi^2\alpha^2} \right] \quad (23)$$

Para o caso de $\xi < 1$ (amortecimento subcrítico) a solução homogênea do movimento é:

$$x_h = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 \text{sen}\omega_d + A_2 \text{cos}\omega_d) \quad (24)$$

As constantes A_1 e A_2 são determinadas a partir das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$:

$$A_1 = \frac{x_0}{\omega_D} + \frac{\xi x_0}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{P}{k\sqrt{1-\xi^2}} \left[\frac{\xi(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2 + 4\xi^2\alpha^2} \right] \quad (25)$$

$$A_2 = x_0 - \frac{P}{k} \left[\frac{(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2 + 4\xi^2\alpha^2} \right] \quad (26)$$

A soma das equações (21) e (24) resulta na solução geral:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A_1 \text{sen}\omega_d + A_2 \text{cos}\omega_d) + (A \text{sen}\omega t + B \text{cos}\omega t) \quad (27)$$

3.1.2 Sistemas discretos com dois graus de liberdade (2 GDL)

Os sistemas com dois graus de liberdade (2 GDL) são resolvidos por meio de equações diferenciais que contenham duas variáveis de deslocamento, uma para cada GDL. Essas equações estão acopladas na maioria dos sistemas, isto significa que cada equação utiliza as duas variáveis de deslocamento.

A Figura 5 ilustra um sistema composto por duas massas ligadas por um amortecedor (c_2) e uma mola de acoplamento (k_2):

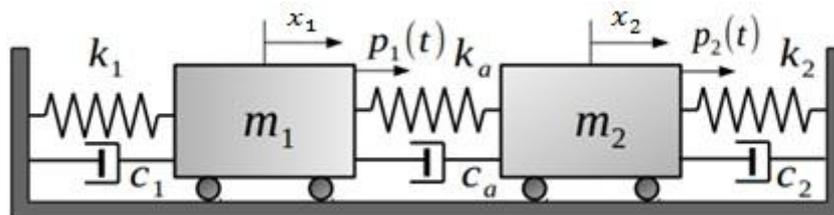


Figura 5 - Sistema com dois graus de liberdade
Fonte: Rao (2011)

As forças externas que agem sobre as massas e os respectivos diagramas de corpo livre são mostrados na Figura 6.

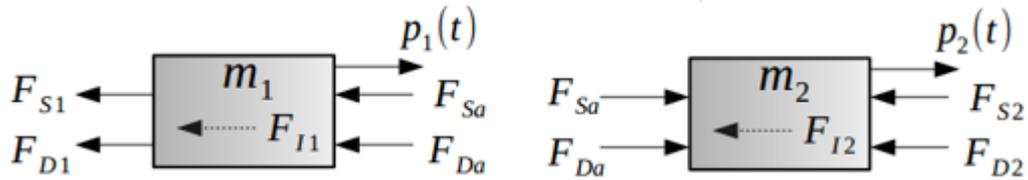


Figura 6 - Diagrama de Corpo Livre
Fonte: Rao (2011)

A aplicação da segunda lei de Newton para cada uma das massas resulta nas equações do movimento.

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)c_a + k_1 x_1 + (x_1 - x_2)k_a = p_1(t) \quad (28)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 - (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)c_a + k_2 x_2 - (x_1 - x_2)k_a = p_2(t) \quad (29)$$

As equações (28) e (29) podem ser representadas matricialmente.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{p(t)\} \quad (30)$$

Sendo as matrizes quadradas de ordem $(n \times n)$ e os vetores coluna de ordem n . A matriz de massa é dada por:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

A matriz de amortecimento é descrita como:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

A matriz de rigidez é igual:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \quad (33)$$

O vetor de deslocamento é apresentado pela equação (34), sendo sua derivada primeira o vetor velocidade, e sua derivada segunda o vetor aceleração.

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Por fim, o vetor de forças é do tipo:

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Logo, a equação (30) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_a & -c_a \\ -c_a & c_2 + c_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

3.1.2.1 Vibração forçada com amortecimento

No caso anterior, a matriz de amortecimento é cheia, causando o acoplamento das coordenadas. De acordo com Rao (2011), através da proporcionalidade do amortecimento em relação à massa e a rigidez e utilizando as condições de ortogonalidade é possível desacoplar as equações do movimento.

Considera-se um sistema no qual a matriz de amortecimento pode ser expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez. Esse modelo de amortecimento é chamado de amortecimento proporcional à massa e a rigidez, também conhecido amortecimento de Rayleigh, conforme é definido na equação (37).

$$[C] = a_0[M] + a_1[K] \quad (37)$$

Sendo a_0 e a_1 constantes de proporcionalidade.

No domínio modal, onde as coordenadas estão desacopladas, a resposta do movimento usando o amortecimento proporcional à massa e a rigidez é dada pela equação (38).

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + [C_m]\{\dot{q}\} + [K_m]\{q\} = \{P_m\} \quad (38)$$

Onde $[C_m]$ é a matriz de amortecimento modal expressa pela equação (39).

$$[C_m] = [a_0[A]^T[M] + a_1[A]^T[K]][A]\{\dot{q}\} \quad (39)$$

3.2 EXCITAÇÃO DEVIDO AO CAMINHAR DE UMA PESSOA

Na Engenharia Civil há duas categorias de ações que agem sobre as estruturas, são elas as ações estáticas e as ações dinâmicas. As ações estáticas são constantes, ou apresentam variações insignificantes ao longo do tempo, como por exemplo, o peso próprio da estrutura. As ações dinâmicas se caracterizam por variações significativas ao longo do tempo, na sua grandeza, ponto de aplicação ou na sua direção, mobilizando forças de inércia. São exemplos de ações dinâmicas, o vento, os terremotos, o tráfego de veículos em pontes, e o movimento de pessoas em pisos e passarelas.

A excitação devido ao caminhar de uma pessoa é uma ação dinâmica periódica, visto que se repete num intervalo de tempo aproximadamente constante. O movimento de pessoas introduz forças na direção vertical, transversal e longitudinal, porém a primeira possui uma grandeza muito superior às outras (ROCHA, 2012).

O problema de vibrações excessivas em pisos é ocasionado quando as lajes apresentam frequências naturais próximas às frequências que caracterizam o carregamento gerado pela atividade humana. Surge então a necessidade de conhecer a comportamento dinâmico das estruturas, e a natureza das cargas que atuam sobre elas, que podem produzir vibrações elevadas, gerando desconforto humano e podendo até comprometer a segurança da estrutura (SANTOS, M., 2009).

O fato de cada autor sugerir diferentes harmônicos, possibilita à força devido ao caminhar humano ser modelada de várias formas. Bachmann e Ammann (1987), utilizam uma

série de Fourier com 5 harmônicos. A equação (40) mostra a fórmula utilizada para descrever o passo.

$$F(t) = P(1 + \sum \alpha_i \cos(2\pi i f_p t + \phi_i)) \quad (40)$$

Sendo:

$F(t)$ = carregamento resultante;

t = instante de tempo;

P = peso da pessoa;

α_i = coeficiente dinâmico para a força harmônica;

f_p = frequência do passo;

ϕ_i = ângulo de fase do harmônico;

i = múltiplos do harmônico (1, 2, 3, etc.).

Os coeficientes dinâmicos para a força harmônica (α_i) e os ângulos de fase (ϕ_i) utilizados nessa formulação estão descritos no Quadro 1.

Harmônico (i).	Coeficiente dinâmico (α_i).	Angulo de fase (ϕ_i)
1	0,40	0
2	0,10	$\pi/2$
3	0,10	$\pi/2$

Quadro 1 - Coeficientes Dinâmicos.

Fonte – Bachmann e Ammann (1987).

A frequência, a velocidade e comprimento do passo variam para cada indivíduo. Os valores aproximados por testes são apresentados no Quadro 2 (BACHAMANN; AMMANN, 1987).

Tipo de atividade	f_p (Hz)	V_s (m/s)	L_s (m)
Andar devagar	1,7	1,1	0,6
Andar normal	2	1,5	0,75
Andar rápido	2,3	2,2	1
Correr devagar	2,5	3,3	1,3
Correr rápido	>3,2	5,5	1,75

Quadro 2 - Características dos movimentos

Fonte - Bachmann e Ammann (1987).

3.3 CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM LAJES DE PISO POR MEIO DE AMS

A amplitude de vibração de um sistema mecânico pode ser controlada associando-se à esse sistema um dispositivo composto por uma massa auxiliar suspensa por meio de molas e amortecedores. Harris e Piersol (2002) afirmam que esses dispositivos são divididos em duas classes:

- 1) Absorvedor Dinâmico: Caso o sistema principal seja excitado por uma força ou deslocamento que possui uma frequência constante ou por uma força que tenha frequência múltipla de uma rotação constante, é possível reduzir significativamente sua amplitude de vibração conectando-se uma massa auxiliar ao sistema principal por meio de uma mola, de forma que a frequência natural do sistema de controle seja igual à de excitação. Esse sistema de massa auxiliar conta somente com o amortecimento intrínseco da mola, logo, possui amortecimento desprezível.
- 2) Absorvedor Amortecido ou Amortecedor de Massa Auxiliar: Quando não é plausível incorporar amortecimento a uma estrutura que vibra excessivamente, pode-se adicionar amortecimento através de um sistema de massa auxiliar ligado à estrutura. Neste caso um amortecedor é associado em paralelo com a mola do sistema de controle.

Esses tipos de dispositivos de controle são denominados dispositivos de controle passivo, quando para o seu desempenho não é necessário recorrer a uma fonte de energia externa. Caso seja necessário a aplicação de forças à estrutura através de atuadores alimentados por fontes de energia externa o AMS é classificado como dispositivo de controle ativo (LIMA, 2007).

O princípio de funcionamento dos sistemas de controle passivo é relativamente simples. O AMS é sintonizado em uma frequência próxima à frequência natural do sistema principal de forma que vibre em oposição de fase com esse. Dessa maneira, quando o sistema principal vibra ocorre uma transferência da energia da estrutura para o sistema de controle. A Figura 7 esquematiza o sistema principal ligado ao sistema secundário, o índice d refere-se ao AMS.

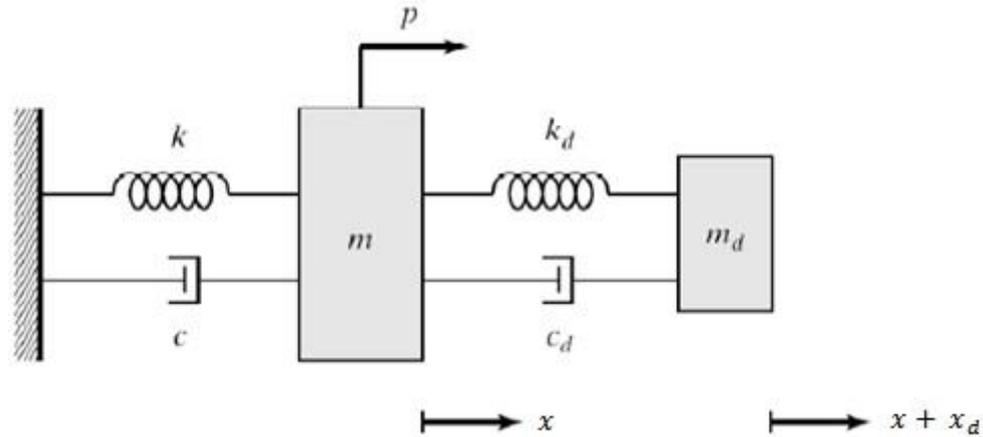


Figura 7 - Absorvedor de Massa Sintonizada em um Sistema de um Grau de Liberdade
Fonte: Oliveira (2012).

O AMS deverá ser ajustado para um determinado valor de frequência, massa e amortecimento ótimos, e a sua sintonização é de fundamental importância para o êxito no controle da vibração. Pequenos desvios na avaliação desses parâmetros poderão traduzir uma perda de eficiência considerável do dispositivo de controle (SANTOS, N., 2009).

De acordo com Oliveira (2012), foi na engenharia mecânica que se iniciou a aplicação do AMS, e após a década de 60 esse passou a ser utilizado também na engenharia civil visando controlar as vibrações causadas pelo vento em pontes, edifícios altos, torres e chaminés. O desenvolvimento de estudos sobre os AMS possibilitou estender a sua utilização pelo mundo todo, tornando sua aplicação cada vez mais frequente.

Países como Estados Unidos e Japão, por exemplo, utilizam muito esse dispositivo para atenuar as vibrações ocasionadas por terremotos e vento. O Quadro 3 apresenta exemplos de aplicação de AMS de controle passivo e o Quadro 4 mostra exemplos de utilização de AMS de controle ativo.

ABSORVEDOR DE MASSA SINTONIZADO (PASSIVO)				
Nome e tipo da estrutura	Cidade / País	Tipo e número de absorvedores	Data de instalação (aprox.)	Outras informações (massa, frequência natural, amortecimento efetivo, etc.)
CN TowerTV antena (553m)	Toronto, Canadá	AMS	1973	-
John Hancock Building (244m)	Boston, USA	AMS (2)	1977	0,14 Hz 2 x 300 t

				ξ : 4%
City Corp Center	New York, USA	AMS	1978	0,16 Hz 370 t ξ : 1% (sem AMS) ξ : 4% (com AMS)
Torre de Sydney	Sydney, Austrália	AMS tipo pêndulo	1980	0,10;0,50 Hz 220 t
Al Khobar (02 chaminés)	Arábia Saudita	AMS	1982	0,44 Hz 7 t
Ruwais Utilities (chaminé)	Abu Dhabi	AMS	1982	0,49 Hz 10 t
Deutsche Bundespost torre de resfriamento (278m)	Nornberg, Alemanha	AMS	1982	0,67 Hz 1,5 t
Yanbu Cement Plant chaminé (81m)	Arábia Saudita	AMS	1984	0,49 Hz 10t
Hydro-Quebec wind generator	Canadá	AMS	1985	0,7 – 1,2 Hz 18 t
Chiba Port Tower (125m)	Chiba, Japão	AMS (2)	1986	0,43-0,44 Hz 10, 15 t
Pylon, Aratsu Bridge (Ponte estaiada)	Japão	AMS	1987	-
Pylon, Yokohama Bay Bridge (Ponte Estaiada)	Yokohama, Japão	AMS	1988	-
Bin Quasim Usina Térmica (70m)	Paquistão	AMS	1988	0,99 Hz 4,5 t
Tiwest Plant Rutilo chaminé (43m)	Austrália	AMS	1989	0,92 Hz 0,5 t
Fukuoka Tower (151 m)	Fukuoka, Japão	AMS (2)	1989	0,31-0,33 Hz 25, 30 t

Quadro 3 - Lista de estruturas equipadas com AMS (Passivo)

Fonte: Oliveira (2012).

ABSORVEDOR DE MASSA SINTONIZADO (ATIVO)				
Nome e tipo da estrutura	Cidade / País	Tipo e número de absorvedores	Data de instalação (aprox.)	Outras informações (massa, frequência natural, amortecimento efetivo, etc.)
Sendagaya Intes Edifício de Escritórios (58 m)	Tóquio, Japão	AMSA (2)	1991	0,59 Hz 72 t

ORC Torre Symbol 2000 (188 m)	Osaka, Japão	AMSA (2)	1992	0,21 Hz 200 t
Aeroporto Internacional de Kansai	Osaka, Japão	AMSA (2) Pêndulo Invertido	1993	0,8 Hz 10 t
Yokohama Landmark Tower (296 m)	Yokohama, Japão	AMSA (2)	1993	0,185 Hz 340 t
C Office Tower (130 m)	Tóquio, Japão	AMSA	1993	0,34 Hz 200 t
KS Project (121 m)	Kanazawa	AMSA	1993	100 t
Shinjuku Park Tower (227 m)	Tóquio, Japão	AMSA (3)	1994	330 t

Quadro 4 - Lista de estruturas equipadas com AMS (Ativo)
Fonte: Oliveira (2012).

A fim de ilustrar a aplicação de AMS no controle de vibrações excessivas em estruturas, a Figura 8 apresenta a *Millenium footbridge* em Londres onde no ano de 2001 foi realizado obras a fim de conter o desconforto de seus utilizadores.



Figura 8 - Detalhe de um AMS na *Millenium footbridge* - Londres.
Fonte: Adaptado de GERB (2014).

Também no Brasil há exemplos de utilização de AMS, a empresa “GERB controle de vibrações” executou a aplicação desses dispositivos no estádio do Morumbi em São Paulo no ano de 1998, conforme é retratado na Figura 9.



**Figura 9 - Detalhe de um AMS no Estádio do Morumbi - São Paulo.
Fonte: Adaptado de GERB (2014).**

3.4 CRITÉRIOS PARA O DIMENSIONAMENTO DE ABSORVEDORES DE MASSA SINTONIZADA

O processo de dimensionamento de um AMS tem como objetivo a diminuição da amplitude de vibração de uma estrutura qualquer para níveis de vibração considerados admissíveis. Em pavimentos de edifícios, as ações de origem humana assumem-se como as condicionantes do nível de vibração.

De acordo com o tipo e uso de uma estrutura ela possui determinadas cargas, e o primeiro passo no dimensionamento de um AMS é a identificação dessas cargas atuantes e a análise para se concluir qual resulta na situação mais desfavorável.

No caso de pisos de edifícios, quando a resposta da estrutura a essa carga crítica é maior que o valor da aceleração máxima permitida por norma, o cálculo dos parâmetros que regem o dimensionamento de um AMS deve ser em função dessa aceleração.

A adição de um absorvedor de vibrações em um sistema com um grau de liberdade dá origem a um sistema mecânico com dois graus de liberdade. Nesse novo sistema, uma frequência natural é inferior e outra é superior à frequência natural inicial da estrutura com um grau de liberdade. Essas duas frequências existentes no sistema se distanciam da frequência de excitação, o que impede que aconteçam fenômenos de ressonância para uma determinada banda de frequências de excitação (MOUTINHO, 1998).

Segundo Santos, N., (2009), com a utilização de absorvedores é possível teoricamente conter por completo o movimento da massa principal, eliminando toda a vibração para qualquer que seja a frequência de solitação. Isso já não é possível com os

amortecedores, estes por sua vez apenas atenuam os níveis de vibração, porém o amortecimento inserido na estrutura proporciona deslocamentos pequenos em condições de ressonância, diferente do absorvedor, e possibilita uma banda de frequências de excitação mais larga, o que torna os absorvedores (AMS) um sistema mais eficiente.

3.4.1 Dimensionamento de AMS para estruturas sem amortecimento

Nesta seção é apresentado o método de dimensionamento de um absorvedor de massa sintonizada aplicado a uma estrutura sem amortecimento. Nesse sistema a estrutura é caracterizada pela massa m_1 e por sua rigidez k_1 e o AMS é composto pela massa m_2 , pela sua rigidez k_2 e amortecimento c_2 , conforme ilustra a Figura 10.

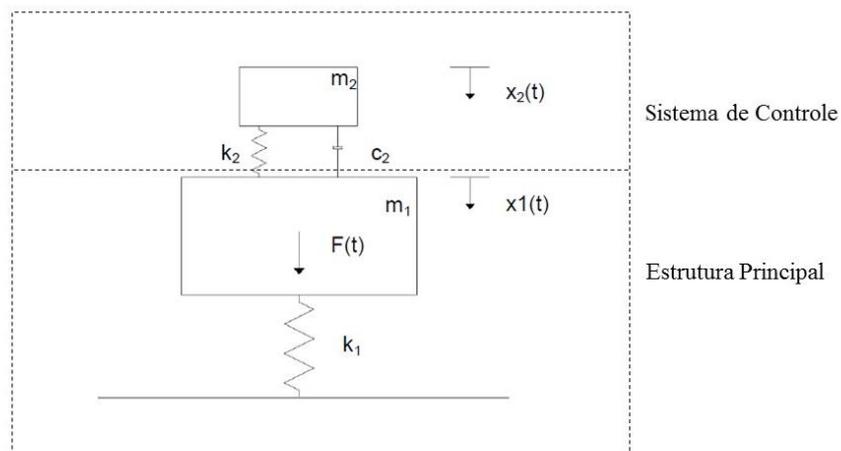


Figura 10 - Modelo teórico de um AMS Aplicado a uma estrutura sem amortecimento
Fonte: Santos, N., (2009).

De acordo com Paredes (2008), quando a massa da estrutura (m_1) é excitada por um carregamento harmônico com frequência ω , a sua amplitude (x) pode ser obtida através do fator de amplificação dinâmica (G), que é a razão entre o deslocamento dinâmico ($k_1 X_1$) e o deslocamento estático (F_0),

$$G(r_1) = \frac{k_1 X_1}{F_0} \quad (41)$$

Sendo,

$$G(r_1) = \sqrt{\frac{(2\xi r_1 q)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{\{r_1^4 - [1 + (1 + \mu)q^2]r_1^2 + q^2\}^2 + (2\xi r_1^2 q)^2 [1 - r_1(1 + \mu)]^2}} \quad (42)$$

Sendo q a razão entre as frequências do sistema

$$q = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (43)$$

r_1 representa a razão entre a frequência de excitação (ω) e frequência natural do sistema sem o AMS.

$$r_1 = \frac{\omega}{\omega_1} \quad (44)$$

μ , é o quociente entre a massa da estrutura e a massa do AMS

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} \quad (45)$$

E ξ_2 é o coeficiente de amortecimento do AMS

$$\xi_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{k_2 m_2}} \quad (46)$$

A situação ideal é quando as duas frequências do sistema possuem amplitudes iguais, de forma que os deslocamentos máximos alcançados para as frequências de ressonância são os mínimos que poderão ocorrer entre todas as configurações possíveis. O dimensionamento ótimo de um AMS passa por escolher os seus parâmetros, para que resulte em uma curva cujas amplitudes máximas encontram-se ao mesmo nível (SANTOS, N., 2009).

Para que essa situação ideal ocorra é necessário determinar valores ótimos de q , e do coeficiente de amortecimento. Para tanto, deve-se usar as expressões de cálculo propostas por Rao (2011) que são apresentadas a seguir:

$$q_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (47)$$

$$\xi_{2opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (48)$$

3.4.2 Dimensionamento de AMS para estruturas com amortecimento

Uma estrutura modelada como um grau de liberdade pode ser representada por uma massa m_1 , rigidez k_1 e por um amortecedor de constante c_1 , que são ligados à massa m_2 do AMS por uma mola de rigidez k_2 e um amortecedor de constante c_2 , conforme a Figura 11.

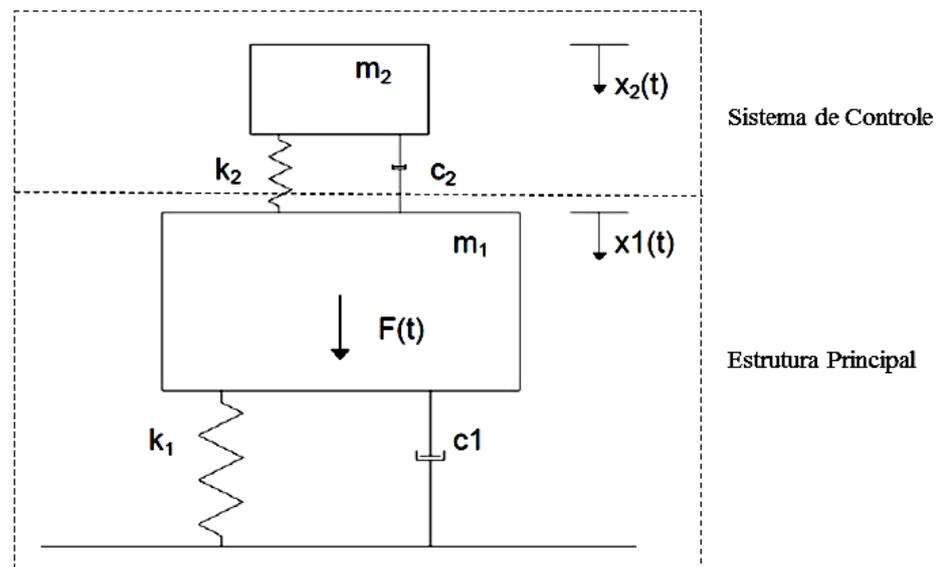


Figura 11 - Modelo teórico de um AMS aplicado a uma estrutura com Amortecimento
Fonte: Santos, N., (2009).

De acordo com Paredes (2008), a amplificação dinâmica da estrutura quando o sistema é excitado por uma carga harmônica, é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{x_1}{x_{1,est}} = \sqrt{\frac{(2r_1\xi_2)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{(2r_1)^2[\xi_2(r_1^2(1 + \mu) - 1) + \xi_1(r_1^2 - q^2)^2] + (\mu q^2 r_1^2 - (r_1^2 - 1)(r_1^2 - q^2) + (2r_1)^2 \xi_1 \xi_2)}} \quad (49)$$

Para estruturas que possuem amortecimento, o cálculo do AMS parte do mesmo princípio que o abordado nas estruturas sem amortecimento, nesse caso, também é almejado que a amplitude da resposta para as duas frequências do sistema seja a mesma e simultaneamente a de menor valor possível.

De acordo com Rocha (2012) quando o valor do amortecimento da estrutura é menor que 1%, este é considerado baixo e permite desprezá-lo, podendo-se utilizar as expressões de q_{opt} e ξ_{2opt} apresentadas no item 3.4.1 para o dimensionamento do AMS.

Nos sistemas com amortecimento maior que 1%, a negligência do coeficiente de amortecimento estrutural ($\zeta_1=0$) acarreta em erros significativos o que não condiz com a precisão que o processo de sintonização requer, portanto, se faz necessário recorrer a outro processo de dimensionamento para o AMS (ROCHA, 2012).

Moutinho (1998) apresenta uma solução para o cálculo das variáveis existentes no dimensionamento de um AMS ligado a uma estrutura com amortecimento. Ele desenvolveu ábacos para sintonização desse dispositivo.

Nas Figuras 12 a 15, encontram-se apresentados os quatro ábacos que possibilitam a determinação das características do AMS: sua massa (m_2), sua rigidez (k_2), seu coeficiente de amortecimento (ζ_2), e a amplitude de deslocamento relativo entre as duas massas. Os ábacos representam a solução da equação (49), obtida por métodos numéricos.

Moutinho (1998), afirma que a desenvolvimento dos ábacos baseia no estudo da equação (49), impondo que a amplitude dos máximos da curva da amplificação seja a mesma e a de menor valor possível. Portanto, os valores obtidos na leitura dos ábacos são valores ótimos para as variáveis que definem o AMS.

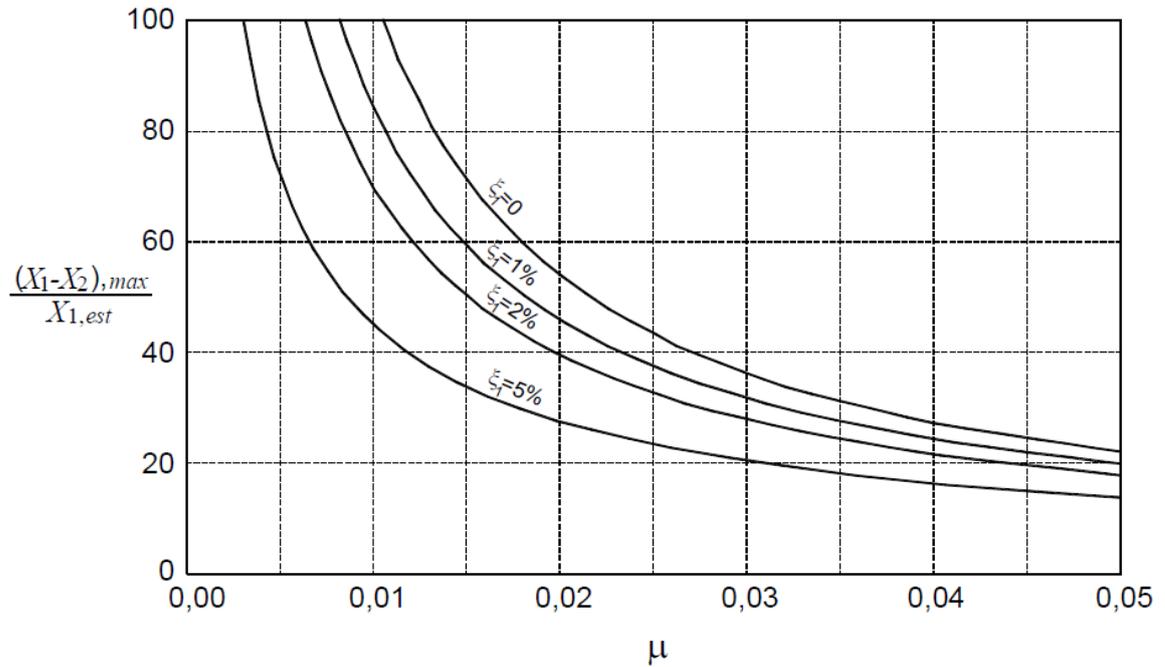


Figura 12 - Curvas de Amplificação Máxima do Deslocamento do Sistema Principal
Fonte: Moutinho (1998).

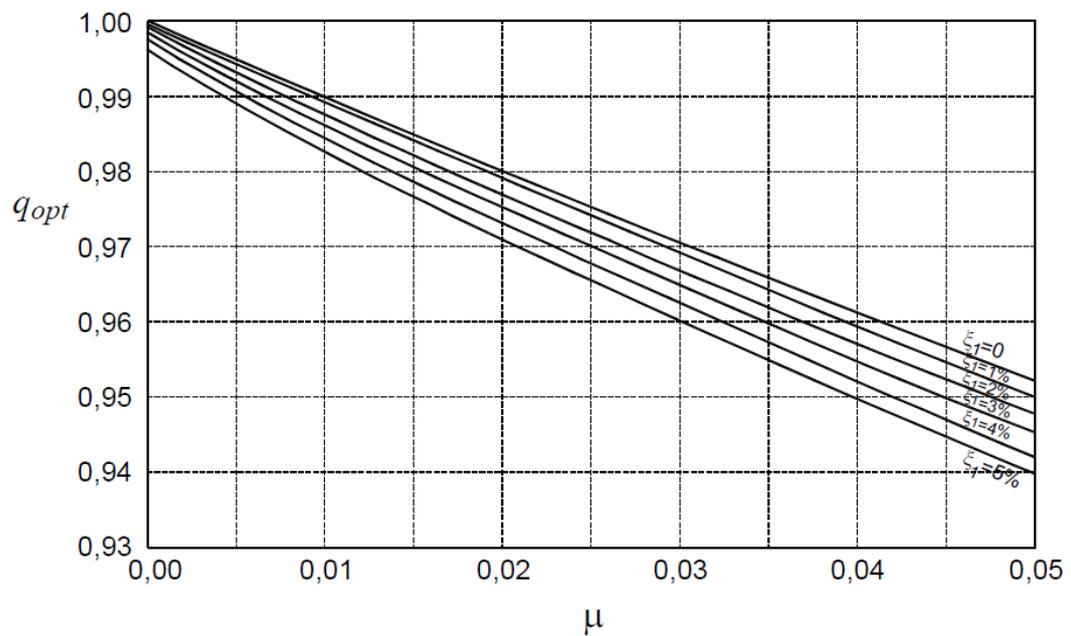


Figura 13 - Curvas para determinação do valor Ótimo de q
Fonte: Moutinho (1998).

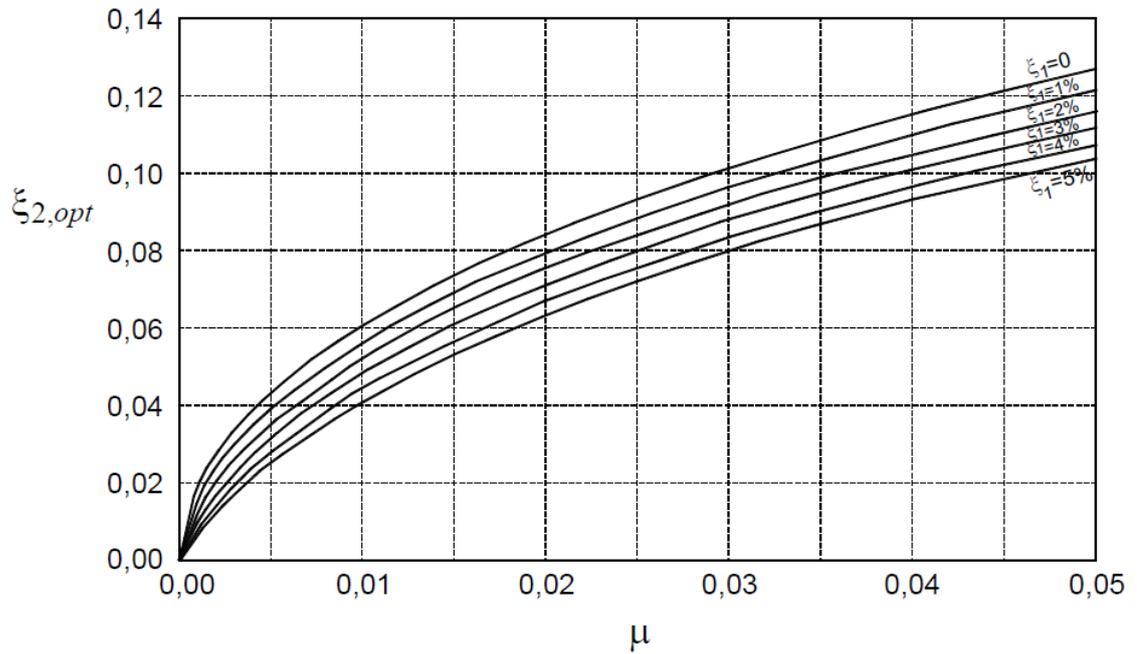


Figura 14 - Curvas para a determinação do valor ótimo de ξ_2
 Fonte: Moutinho (1998).

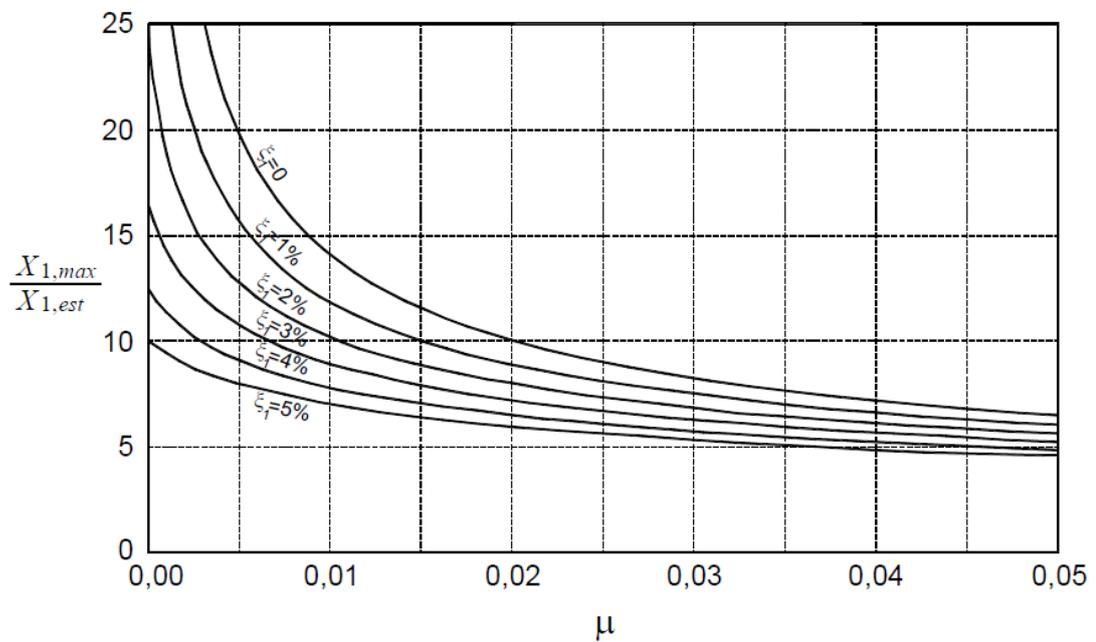


Figura 15 - Curvas de amplificação máxima do deslocamento relativo entre as massas
 Fonte: Moutinho (1998).

Segundo Moutinho (1998), o cálculo do deslocamento máximo admissível, utilizado para a leitura dos ábacos está expresso na equação (50):

$$X_1 = \frac{a_{adm}}{\omega_n^2} \quad (50)$$

Sendo,

a_{adm} é a aceleração admissível

ω_n é a frequência angular

O deslocamento estático da estrutura, de acordo com Moutinho (1998) é dado por:

$$X_{1,est} = \frac{P\alpha_i}{k_{1n}} \quad (51)$$

Sendo,

$P\alpha_i$ é a amplitude harmônica condicionante;

k_{1n} é a rigidez modal corresponde com o modo de vibração da frequência ω_n .

A amplitude harmônica condicionante é a amplitude do harmônico do carregamento em ressonância com a estrutura.

Como trata-se de um sistema 1 GDL, então a rigidez modal correspondente com o modo de vibração da frequência ω_n equivale a rigidez k desse sistema.

Conhecido os deslocamentos é possível determinar o fator de amplificação dinâmica admissível através da razão entre o deslocamento máximo admissível e o deslocamento estático da estrutura. A partir do cálculo do fator de amplificação, é possível ler no ábaco o valor de μ mínimo e utiliza-lo a fim de que $a \leq a_{adm}$.

O AMS deve ser colocado no ponto de máxima amplitude do modo de vibração, tornando a sua utilização mais eficiente, pois necessita da adição de uma massa menor, o que torna a solução mais viável economicamente (SANTOS, N., 2009).

Segundo Santos, N. (2009) a eficiência do AMS é inversamente proporcional ao amortecimento da estrutura. O AMS torna-se menos eficiente conforme aumenta-se os valores de ξ_1 , tornando a sua utilização quase que sem significado em estruturas que possuem um coeficiente de amortecimento superior a 5%.

A utilização de uma massa para o absorvedor que represente mais do que 2% da massa do pavimento ($\mu > 2\%$), é uma solução pouco recomendável. Visto que nesse caso, as curvas de amplificação tem uma variação reduzida a partir deste valor, o que significa na perda de eficiência do sistema de controle (SANTOS, N., 2009).

4 METODOLOGIA

Os itens a seguir apresentam os métodos empregados para a análise do desempenho do Absorvedor de Massa Sintonizada (AMS) instalado em uma laje pré-fabricada de concreto armado e em uma laje composta por vigas de madeira e chapa de OSB, expostas ao carregamento do caminhar humano.

4.1 DIMENSIONAMENTO ESTRUTURAL DAS LAJES

4.1.1 Dimensionamento estrutural da laje pré-fabricada de concreto

A estrutura analisada nessa seção é uma laje de piso pré-fabricada em concreto armado, constituída por painéis de duplo T conforme ilustrado na Figura 16.

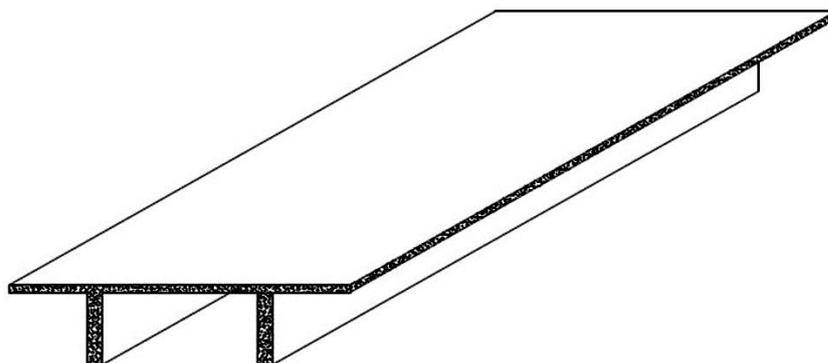


Figura 16 - Painel Duplo T de concreto pré-fabricado

As dimensões da seção transversal da laje e o seu comprimento foram extraídos do PCI DESIGN HANDBOOK (2001). A Figura 17 apresenta as dimensões em centímetros que foram consideradas para os painéis. Foi adotado para o painel um vão igual a 11 metros.

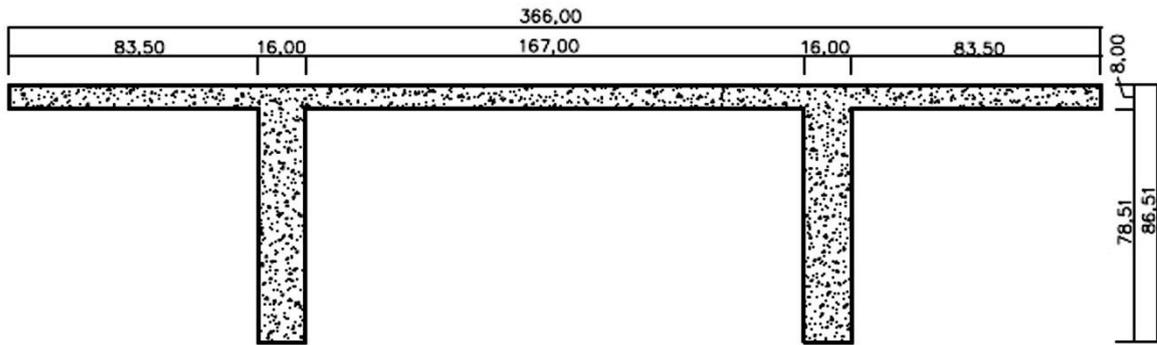


Figura 17 - Seção transversal da Laje

As dimensões da seção transversal e do comprimento da laje, foram convenientemente selecionados de forma que a laje estivesse propositalmente em ressonância com o 2º harmônico do caminhar, para que fosse possível simular o caso de uma laje com um problema de vibração excessiva.

Foi adotada para o concreto uma resistência característica à compressão (f_{ck}) igual a 25 MPa, e o módulo de deformação tangente inicial (E_{ci}) igual a 28 GPa. O aço utilizado nas armaduras é do tipo CA-50, implicando que a resistência característica do aço à tração (f_{yk}) é de 500 MPa.

A Figura 18 exibe um corte da laje, no qual é possível identificar as camadas de acabamento que foram consideradas para a estimativa das ações permanentes que atuam sobre a estrutura.

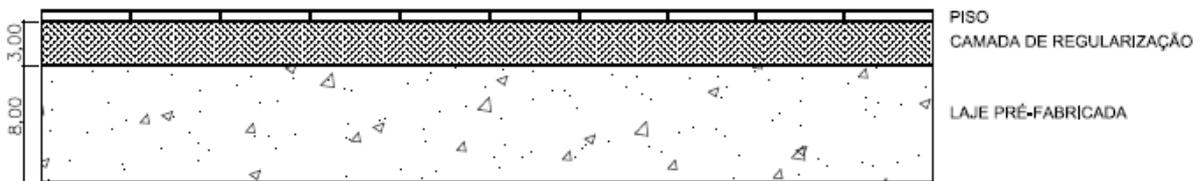


Figura 18 - Corte da laje com as camadas de acabamento

O Quadro 5 apresenta as propriedades dos elementos que compõe a estrutura e seu revestimento.

Elemento	Material	Propriedades
Laje pré-fabricada	Concreto armado	25 kN/m ³
Regularização (contra-piso)	Argamassa de cimento e areia	21 kN/m ³
Piso	PVC com cola	0,10 kN/m ²

Quadro 5 - Propriedades dos elementos que compõe a estrutura da laje

Esta laje foi considerada como um pavimento de escritório comercial, portanto a ação acidental (q) é igual a 2 kN/m^2 segundo a norma NBR 6120 “Cargas para o cálculo de estruturas de edificações” (ABNT, 1980). O cobrimento nominal é foi adotado igual a 25 mm considerando o ambiente como classe de agressividade I.

A laje foi dimensionada de acordo com a norma NBR 6118 (ABNT, 2014) e atendeu às exigências quanto aos Estados Limites de Serviço (ELS) e Estados Limites Últimos (ELU).

4.1.2 Dimensionamento estrutural da laje de madeira

A segunda laje a ser estudada neste trabalho é uma laje de madeira, composta por uma placa de OSB (*Oriented Strand Board*) suportada por vigas de madeira da espécie *Pinus elliottii* dispostas a cada 60 cm, conforme ilustra a Figura 19.

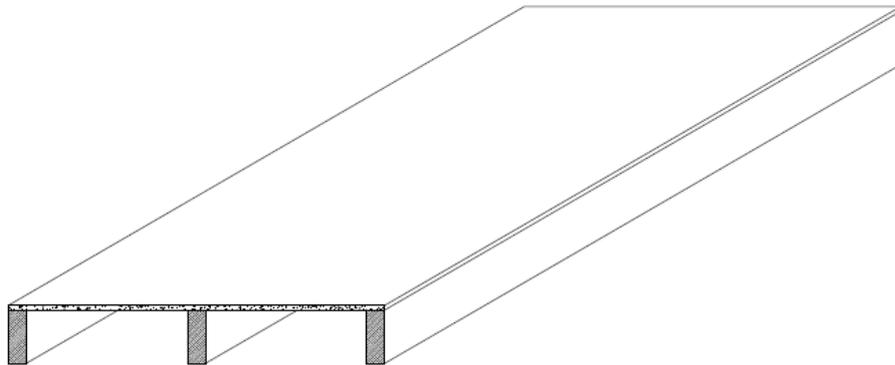


Figura 19 – Laje de madeira

Essa laje foi projetada para vencer um vão igual a 5 metros. Para a definição das dimensões da seção transversal da laje foi consultado o manual OSB PERFORMANCE BY DESIGN (2005), a Figura 20 apresenta os valores em centímetros utilizados no dimensionamento.

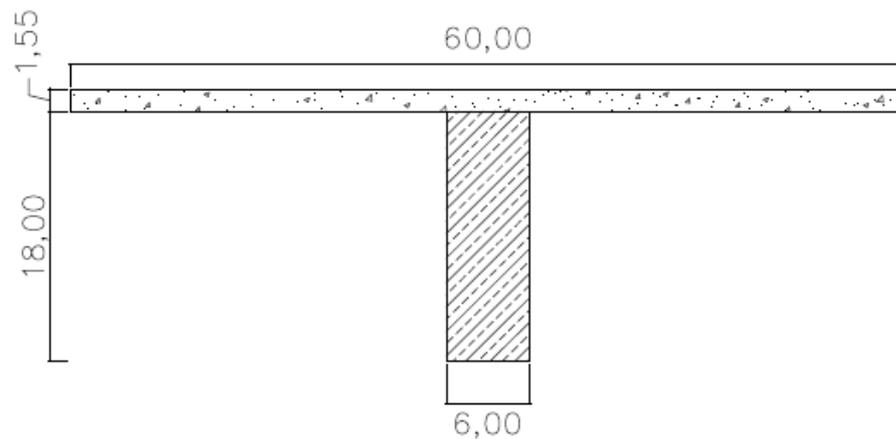


Figura 20 - Seção transversal da Laje

Assim como na laje de concreto, as dimensões deste painel foram escolhidas intencionalmente, a fim de que a laje entre em ressonância com o 2º harmônico do caminhar resultando em um caso de vibrações excessivas que compromete o conforto dos utilizadores.

É importante destacar que para o estudo realizado neste trabalho a ligação entre a viga e a placa de OSB foi considerada rígida.

O nome científico da espécie de madeira escolhida para o dimensionamento é *Pinuss elliotii var. elliotii*, no Quadro 6 encontra-se os valores médios que caracterizam essa espécie, esses foram retirados da NBR 7190 (ABNT, 1997).

Nome científico (coníferas)	$P_{ap(12\%)}$ (kg/m ³)	f_{c0} (MPa)	f_{t0} (MPa)	f_{90} (MPa)	f_v (MPa)	E_{c0} (MPa)	n
<i>Pinuss elliotii var. elliotii</i>	560,00	40,40	66,00	2,50	7,40	11.889,00	21

Quadro 6 - Propriedades dos elementos que compõe a estrutura da laje.

Fonte: Adaptado da NBR 7190 (1997).

Para a determinação das ações permanentes que atuam sobre a estrutura foi considerado uma camada de acabamento, como é ilustrado na Figura 21.

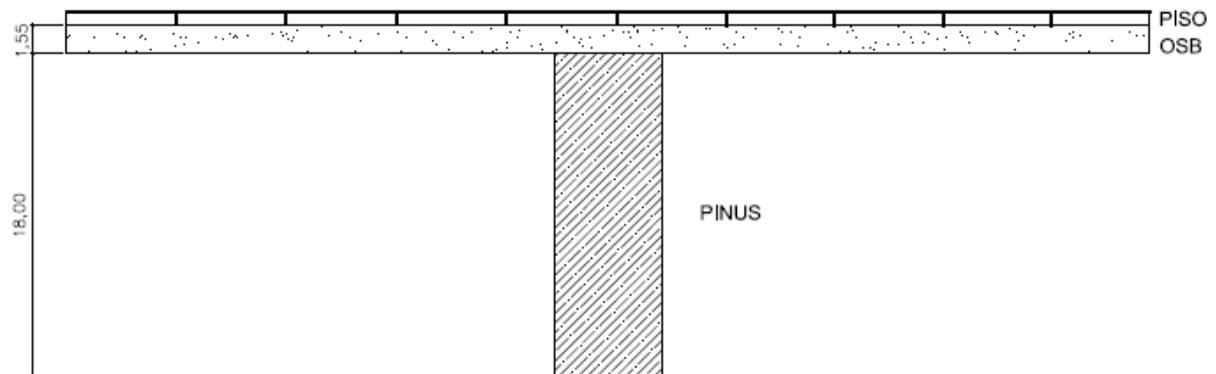


Figura 21 - Corte da laje de madeira com as camadas de acabamento

As propriedades dos elementos que fazem parte da estrutura e compõe o seu revestimento são apresentadas no Quadro 7.

Elemento	Propriedades
Viga de Pinus elliottii	0,560 kN/m ³
Placa de OSB	0,648 kN/m ³
Piso de PVC com cola	0,100 kN/m ²

Quadro 7 - Propriedades dos elementos que compõe a estrutura da laje

Para estimar a ação acidental (q), essa laje foi considerada como um pavimento de escritório comercial, deste modo, segundo a norma NBR 6120 (ABNT, 1980) o valor da ação acidental é igual a 2 kN/m².

O dimensionamento desta laje seguiu as exigências da norma NBR 7190 (ABNT, 2011) e atende aos Estados Limites de Serviço (ELS) e Estados Limites Últimos (ELU).

4.2 ANÁLISE DINÂMICA DAS LAJES

Os cálculos da análise dinâmica foram realizados com o auxílio da versão *trial* do software Mathcad.

As lajes foram modeladas como um sistema discreto de um grau de liberdade (GDL) conforme ilustra a Figura 1.

Para se obter a rigidez da estrutura é necessário recorrer a conceitos de teoria das estruturas. A laje pode ser analisada como uma viga simplesmente apoiada. Dessa forma, é possível calcular a rigidez (k) para uma carga unitária concentrada no meio do vão empregando-se os conceitos de teoria das estruturas.

$$k = \frac{48E_{\text{din}}I_{\text{eq}}}{L^3} \quad (52)$$

Sendo :

k = rigidez (N/m);

L = vão (m);

E_{din} = módulo de elasticidade dinâmico (Pa);

I_{eq} = momento de inércia equivalente (m^4).

De posse dos valores de massa (m) e rigidez (k) da estrutura se torna possível determinar o valor da frequência natural da laje (ω_n), através da equação 53.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (53)$$

Para avaliar os efeitos da caminhada humana sobre as lajes foi escolhido o tipo de andar normal de uma pessoa com uma massa de 80 kg, e a carga foi considerada aplicada no ponto de maior amplitude modal, isto é, no meio do vão. A frequência do caminhar foi adotada como sendo 2,24 Hz para a laje pré-fabricada de concreto armado e 2,15 Hz para a laje de madeira. Considerou-se propositalmente esses valores a fim de que a laje esteja em ressonância com o segundo harmônico da caminhada para simular uma situação hipotética de vibração excessiva.

A Figura 22 ilustrada o carregamento dinâmico do caminhar de uma pessoa.

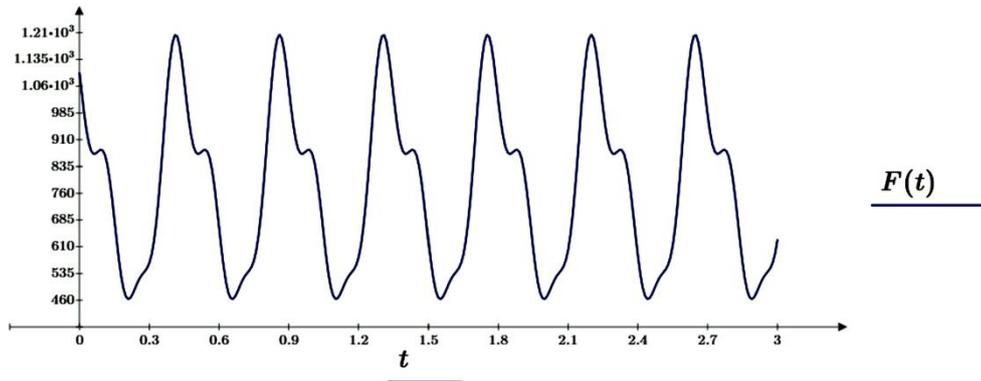


Figura 22 - Carregamento dinâmico do caminhar de uma pessoa

Neste trabalho, a verificação do conforto à vibração foi feita comparando a aceleração de pico da laje com o limite de aceleração limite de 0,5% de “g” (sendo $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$) conforme Murray, Allen e Unger (1997).

4.2.1 Análise dinâmica da laje pré-fabricada de concreto armado

Para a análise dinâmica da laje pré-fabricada de concreto foi considerado apenas um painel duplo T, com largura igual a 3,66 metros e comprimento de 11 metros. O carregamento do caminhar foi aplicado no ponto de maior amplitude dos deslocamentos, esse carregamento somente varia no tempo e não no espaço, ou seja, a pessoa marcha sobre a laje sem sair do lugar.

Toda a massa da laje foi considerada como sendo massa vibrante na estrutura.

O módulo de elasticidade dinâmico para este caso é definido como uma majoração de 20% do módulo estático, conforme é dado pela equação 54 (MAST, 2001).

$$E_{\text{din}} = 1,2 \times E_{\text{ci}} \quad (54)$$

Sendo:

E_{din} = módulo de elasticidade dinâmico

E_{ci} = módulo de deformação tangente inicial

Bachmann e Ammann (1995) indicam que para concreto armado pode-se adotar para o amortecimento adimensional ξ do concreto valores entre 2% e 6%. Portanto, neste trabalho foi adotado um ξ médio, ou seja, $\xi = 4\%$.

O Quadro 8 apresenta as propriedades da laje pré-fabricada de concreto em estudo.

Propriedades	Valores
Massa (m_1)	10.379,20 kg
Rigidez (k_1)	$8,24 \times 10^6$ N/m
Frequência natural (ω_{n1})	28,176 rad/s
Módulo de elasticidade dinâmico (E_{din})	$2,856 \times 10^{10}$ N/m ²
Amortecimento adimensional (ξ_1)	4%
Inércia Efetiva (I_{eq})	0,008 m ⁴

Quadro 8 - Propriedades dinâmicas da laje pré-fabricada de concreto

4.2.2 Análise dinâmica da laje de madeira.

De forma a manter aproximadamente a mesma taxa de carregamento por metro para as duas lajes, foi adotada para a laje de madeira uma largura de 3,60 metros o que se aproxima da largura do painel duplo T da laje pré-fabricada de concreto armado. Portanto, para a análise dinâmica considerou a dimensão da laje como sendo de 3,60 x 5 m, com a carga concentrada aplicada no meio do vão, neste caso a carga também foi aplicada no ponto de maior amplitude dos deslocamentos.

Diferente da laje em concreto, nesta situação o módulo de elasticidade estático é majorado em apenas 3% para se obter o módulo de elasticidade dinâmico (CARREIRA et al, 2003).

$$E_{din} = 1,03 \times E_{ci} \quad (55)$$

Sendo:

E_{din} = módulo de elasticidade dinâmico

E_{ci} = módulo de deformação tangente inicial

Segundo Weckendorf et al (2008), o amortecimento adimensional ξ é igual a 2,54%, para estruturas de madeira. Para este caso, toda a massa da laje foi considerada como sendo massa vibrante na estrutura.

As propriedades da laje de madeira estudada neste trabalho são apresentadas no Quadro 9.

Propriedades	Valores
Massa (m_1)	4.052,00 kg
Rigidez (k_1)	$2,175 \times 10^6$ N/m
Frequência natural (ω_{n1})	23,171 rad/s
Módulo de elasticidade dinâmico (E_{din})	$1,225 \times 10^{10}$ N/m ²
Amortecimento adimensional (ξ_1)	2,54%
Inércia Efetiva (I_{eq})	0,00046 m ⁴

Quadro 9 - Propriedades dinâmicas da laje de madeira

4.3 DIMENSIONAMENTO DO ABSORVEDOR DE MASSA SINTONIZADO - AMS

Visto que o amortecimento das estruturas é maior que 1%, esse não pode ser desprezado, logo é necessário recorrer ao método de dimensionamento do AMS através de ábacos propostos por Moutinho (1998).

Conhecendo o amortecimento adimensional da estrutura (ξ_1) e, de posse dos valores de deslocamento estático ($x_{1,est}$) e de deslocamento máximo admissível (x_1), é possível obter o resultado da relação entre eles e a partir daí, iniciar a leitura dos ábacos. Primeiro se identifica o valor da relação entre as massas do sistema (μ), em seguida o valor da relação entre as frequências naturais (q) e, por fim, determina-se o valor de amortecimento adimensional do AMS (ξ_2).

A Figura 23, indica o procedimento seguido para o dimensionamento do AMS para a laje pré-fabricada de concreto armado.

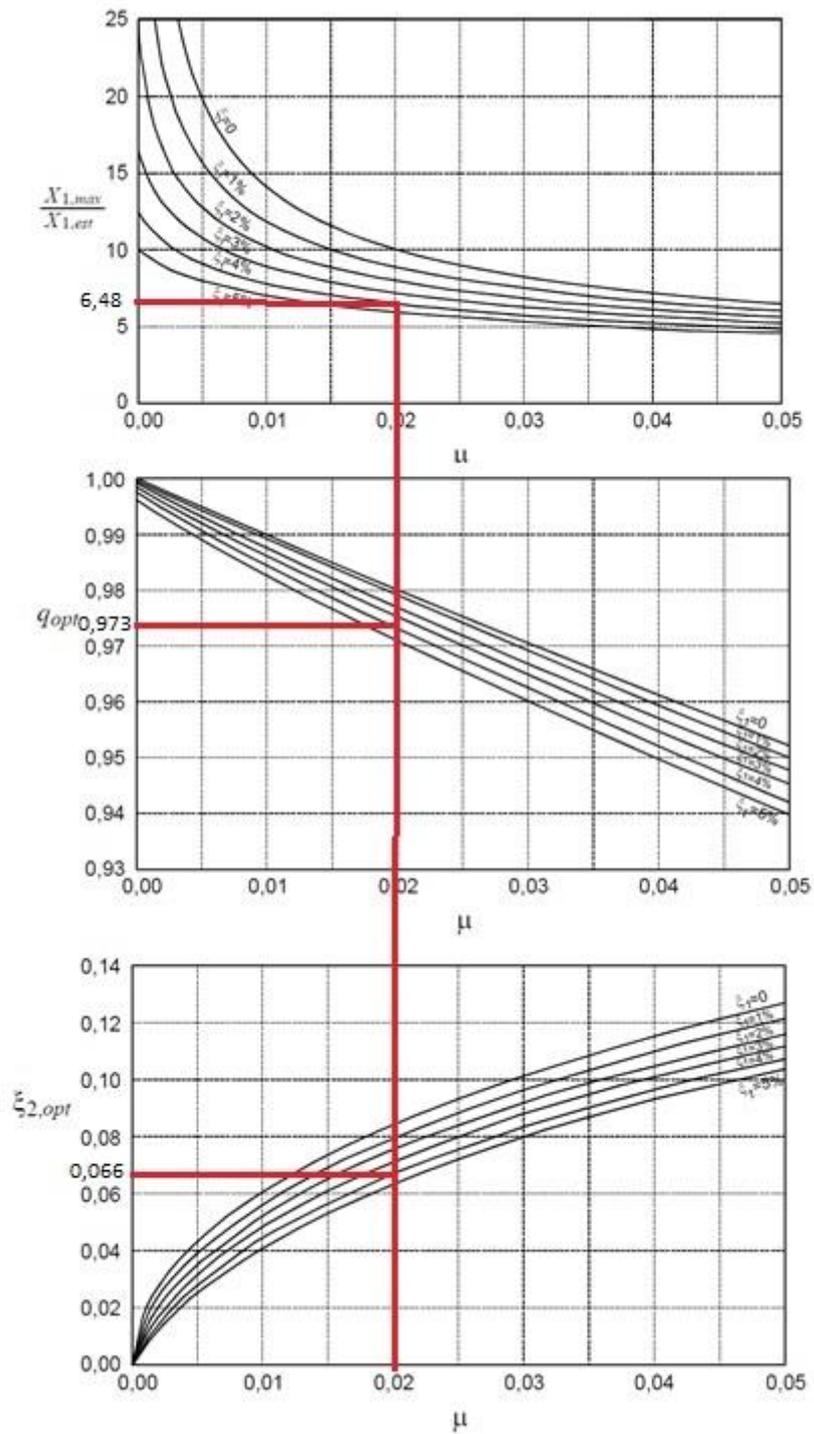


Figura 23 - Dimensionamento do AMS para a laje pré-fabricada de concreto

A Figura 24 ilustra o dimensionamento segundo Moutinho (1998) do AMS para a laje de madeira.

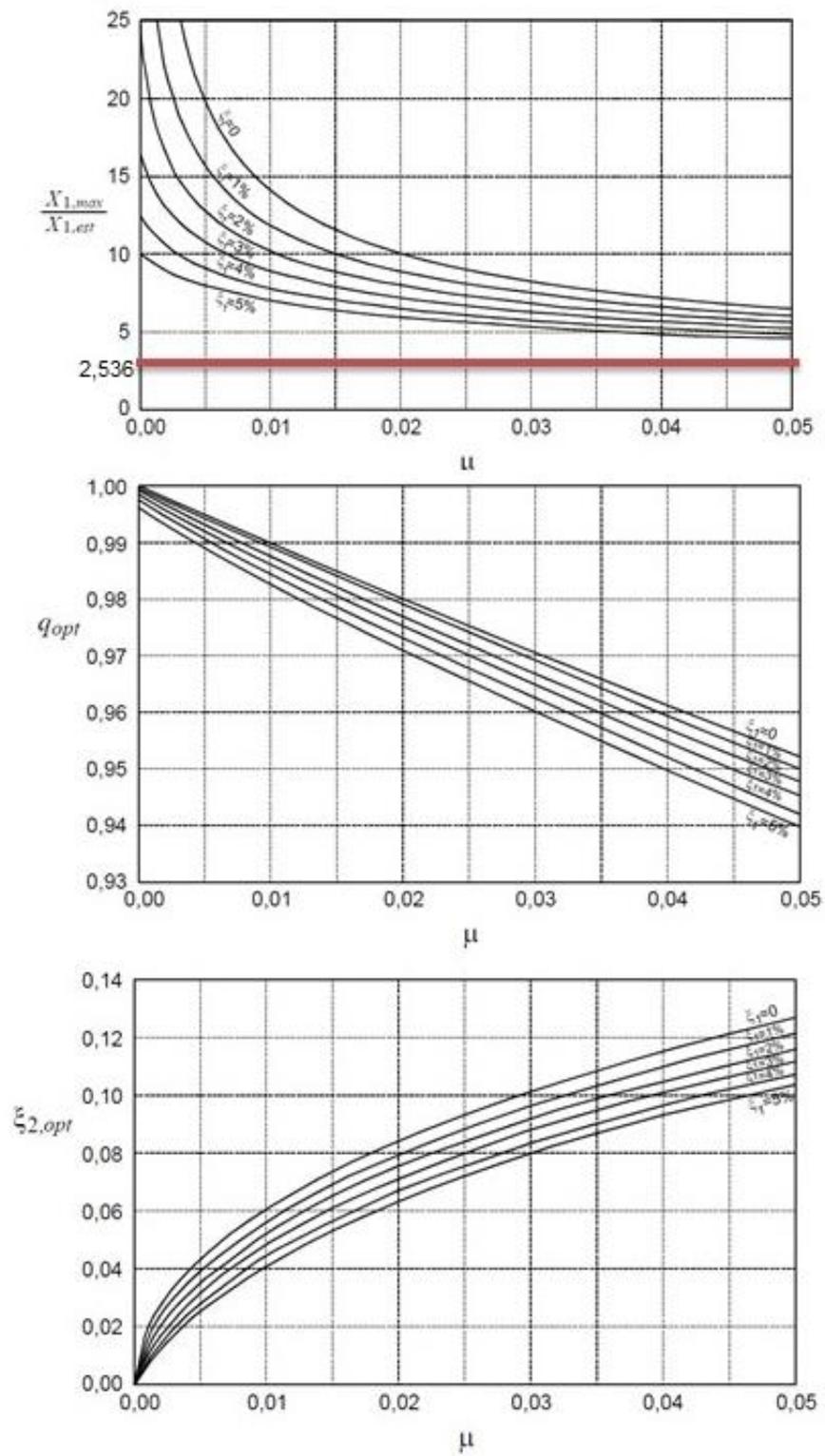


Figura 24 - Dimensionamento do AMS para a laje de madeira

4.4 ANÁLISE DINÂMICA DAS LAJES APÓS A INSTALAÇÃO DO AMS

Por fim, após o dimensionamento e sintonização do AMS e diante da sua inserção no sistema estrutural das lajes, pretende-se analisar se foi possível reduzir a aceleração de forma que as lajes estejam dentro dos limites estabelecidos. Dessa forma, pretende-se avaliar os resultados obtidos com o anseio de demonstrar a eficiência da aplicação de um AMS.

Na análise dinâmica das lajes após a instalação do AMS o conjunto formado pela laje e o absorvedor foi modelado como um sistema de 2 graus de liberdade, os cálculos foram realizados com o auxílio da versão *trial* do software Mathcad.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 LAJE PRÉ-FABRICADA DE CONCRETO

5.1.1 Dimensionamento estrutural

Os resultados do dimensionamento dos perfis T da laje de madeira são apresentados no Quadro 10.

Nº Barras	Φ (mm)	Área Aço (cm ²)	Estádio	Flecha Total (m)
06	12,5	7,5	II	0,044

Quadro 10 - Resultado do dimensionamento da laje

Na verificação da flecha observou-se a necessidade de aplicar uma contra flecha de 0,0125 m, pois o valor da flecha total foi maior do que o limite de $Lx/350$ conforme recomenda a norma NBR 6118 (ABNT, 2014).

5.1.2 Análise dinâmica da laje antes da instalação do AMS

Através da análise dinâmica realizada na laje foi possível construir o gráfico que é apresentado na Figura 25, que ilustra a curva do fator amplificação dinâmica da estrutura (G) em função da relação entre as frequências do sistema (α).

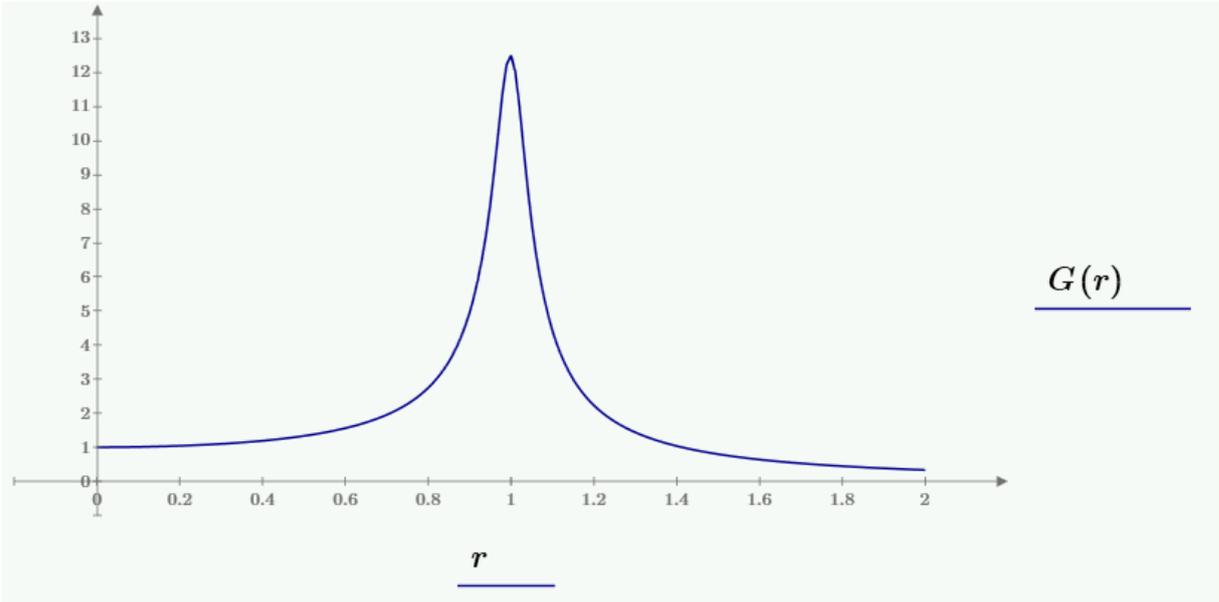


Figura 25 - - Fator de amplificação dinâmica da estrutura

É notório que os valores do fator de amplificação dinâmica são máximos quando a relação entre as frequências se aproxima de 1, essa região é conhecida como faixa de ressonância.

Quando a laje foi analisada a priori, obteve-se a Figura 26 onde é apresentada a aceleração da laje, quando esta é excitada pelo caminhar de uma pessoa.

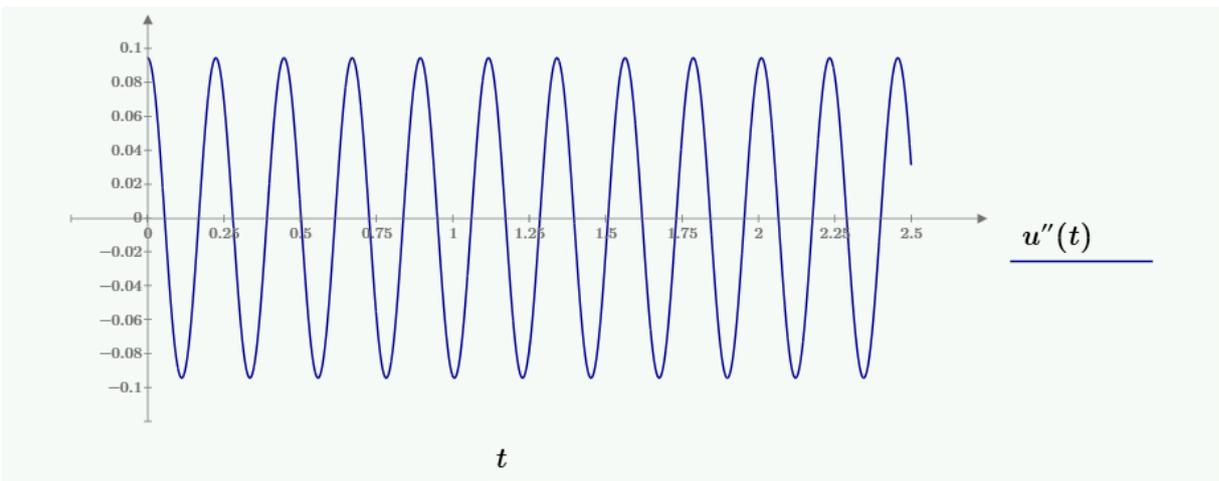


Figura 26 - Aceleração da laje sem o absorvedor instalado

Vale destacar que o maior valor de aceleração expresso no gráfico ($0,095 \text{ m/s}^2$) ultrapassa o valor limite, ou seja, a aceleração máxima é maior do que a aceleração máxima admissível, que é de aproximadamente $0,049 \text{ m/s}^2$. Este fato justifica a necessidade da

instalação do AMS com a intenção de diminuir o valor máximo da aceleração para um valor admissível.

5.1.3 Dimensionamento do AMS

Visto que se faz necessário a utilização do AMS, foi preciso recorrer ao modelo de dimensionamento apresentado na metodologia deste trabalho e de posse dos ábacos desenvolvidos por Moutinho (1998) determinou-se as características do absorvedor. O Quadro 11 apresenta as propriedades do AMS, resultantes do processo de dimensionamento.

Propriedades	Valor
Deslocamento estático ($x_{1,est}$)	$9,52 \times 10^{-6}$
Deslocamento dinâmico máximo admissível (x_1)	$6,17 \times 10^{-5}$
Relação entre deslocamento estático e deslocamento máximo admissível ($x_1/x_{1,est}$)	6,48
Relação entre as massas do sistema (μ)	0,02
Relação entre as frequências naturais (q)	0,973
Amortecimento adimensional do AMS (ζ_2)	0,066
Massa (m_2)	207,58 kg
Rigidez (k_2)	$1,56 \times 10^5$ N/m
Amortecimento do AMS (c_2)	751,198 N.s/m

Quadro 11 - Propriedades dinâmicas do AMS

6.1.4 Análise dinâmica da laje após da instalação do AMS

Após o dimensionamento do AMS, como já referido neste trabalho, foi realizada uma nova análise dinâmica, agora com o novo sistema formado pela laje e pelo absorvedor. A Figura 27 mostra o fator de amplificação dinâmica (G) do sistema com o AMS instalado.

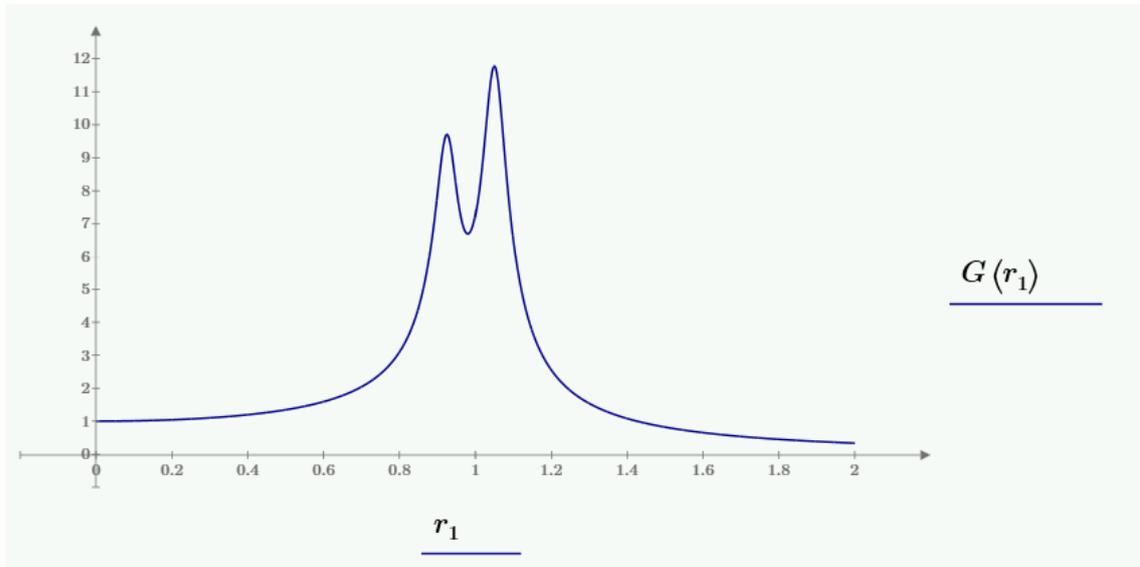


Figura 27 - Fator de amplificação dinâmica do sistema laje/AMS

Percebe-se que os valores máximos da amplificação são menores quando comparados com os da laje sem o AMS, conforme apresentado na Figura 25. Nota-se também, que na região onde os valores de r_1 são próximos a 1 a Figura 27 apresenta uma queda na curva da amplificação, o que implica que a presença do AMS atenua o efeito da ressonância na estrutura.

Após toda a análise dinâmica do novo sistema equivalente a um de 2 graus de liberdade, é factível a criação de uma nova curva de aceleração que está expressa na Figura 28.

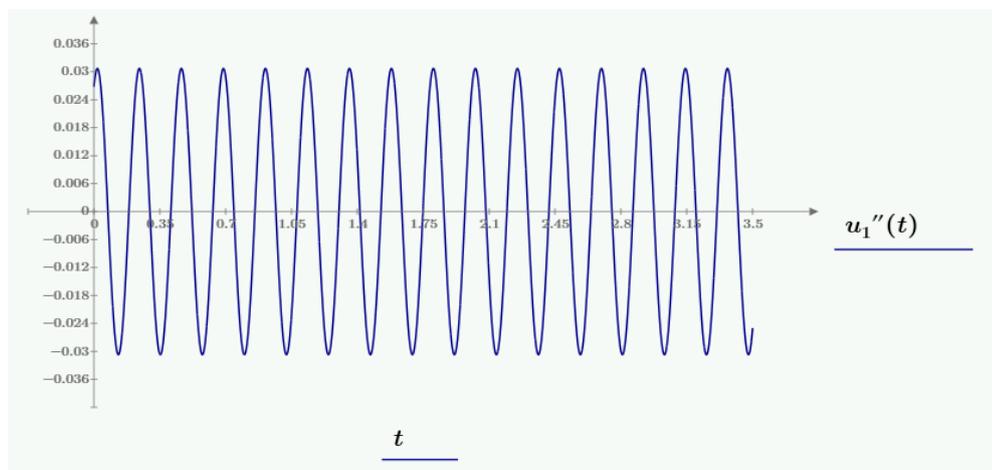


Figura 28 - Aceleração do sistema laje/AMS

Pode-se observar que, com a presença do AMS o maior valor de aceleração ($0,031 \text{ m/s}^2$) é menor que o máximo valor admissível ($0,049 \text{ m/s}^2$), o que garante a eficiência do absorvedor.

Para facilitar a visualização de que a instalação do AMS na laje estudada resulta em efeitos benéficos do ponto de vista da dinâmica a Figura 29 apresenta a sobreposição das curvas de amplificação dinâmica para o caso sem o AMS e após a sua instalação.

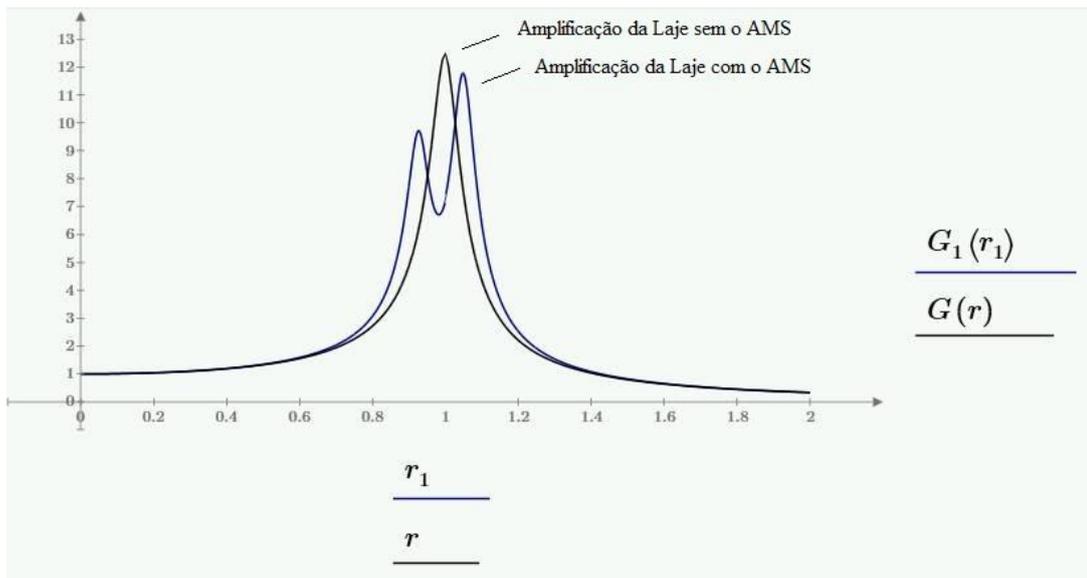


Figura 29 - Sobreposição das curvas de Amplificação Dinâmica

E por fim, é exposto na Figura 30 a sobreposição das curvas de aceleração onde se torna evidente a grande redução dos valores máximos de aceleração na estrutura.

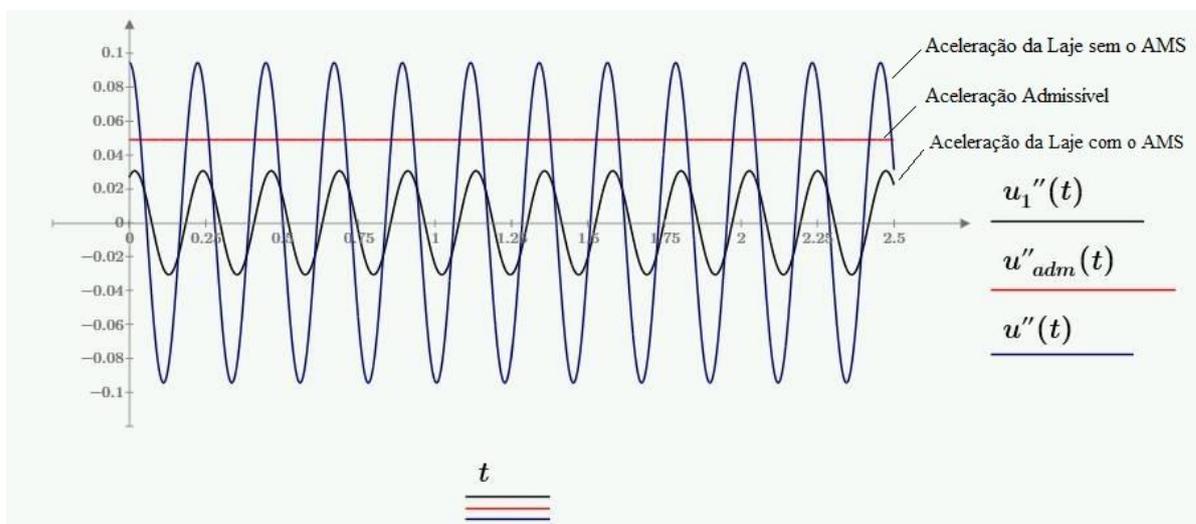


Figura 30 - Sobreposição das curvas de Aceleração

5.2 LAJE DE MADEIRA

5.1.1 Dimensionamento estrutural

O Quadro 12 apresenta os resultados do dimensionamento das vigas de madeira que sustentam as placas de OSB das lajes, essas vigas estão espaçadas em 60 cm conforme sugere o manual OSB PERFORMANCE BY DESIGN (2005).

Dimensão da viga (cm)	σ_{c0d} (MPa)	τ_d (MPa)	u_{ef} (m)	L_1 (m)
6 x 18	7,566	0,720	0,009	1,862

Quadro 12 - Resultado do dimensionamento da laje

5.1.2 Análise dinâmica da laje antes da instalação do AMS

Considerando a laje como um sistema de 1 grau de liberdade foi realizada a análise dinâmica, da qual foi possível obter o gráfico apresentado na Figura 31 que exibe a curva do fator de amplificação dinâmica da estrutura (M) que está em função da relação entre as frequências do sistema (α).

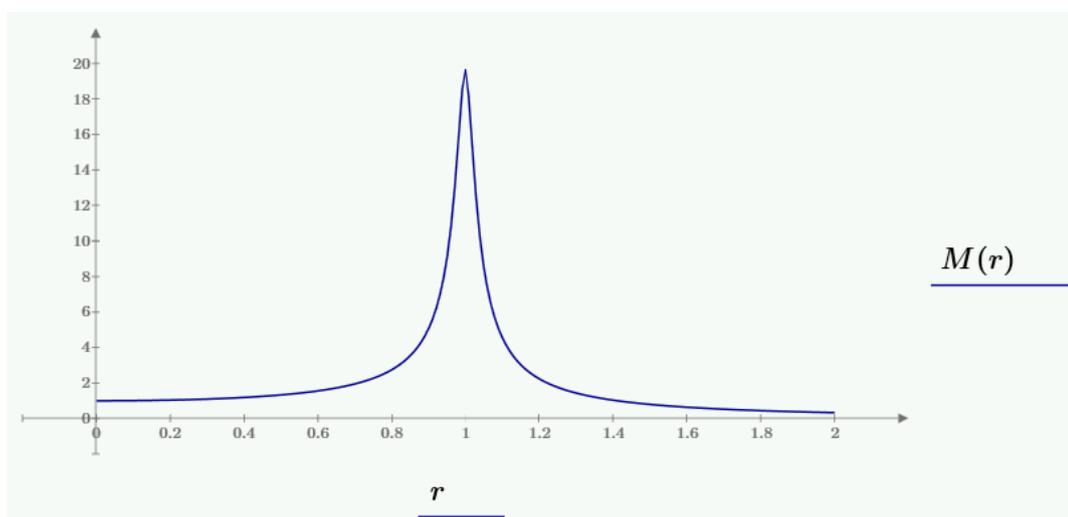


Figura 31 - Fator de amplificação dinâmica da estrutura

Vale destacar que assim como acontece na laje de concreto armado, próximo da região de ressonância a curva de amplificação dinâmica registra os seus valores máximos.

A partir da análise dinâmica se torna exequível o gráfico da aceleração da laje, esse é apresentado na Figura 32. Essa aceleração é resultado da excitação provocada pelo caminhar de uma pessoa no meio do vão da laje.

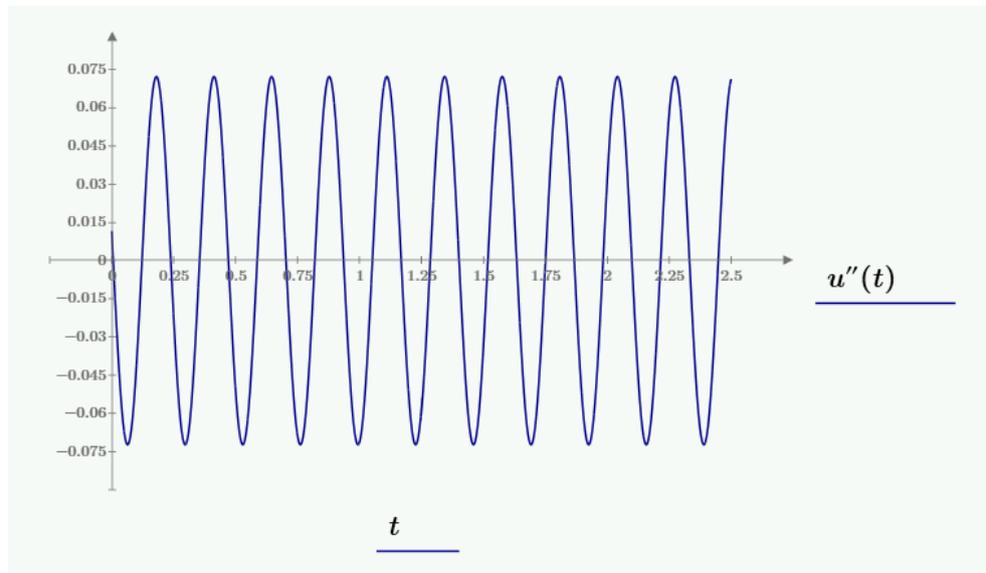


Figura 32 - Aceleração da laje sem o absorvedor instalado

Tendo a aceleração de pico ($0,049 \text{ m/s}^2$) como valor limite para a aceleração da laje, pode-se perceber que a estrutura não apresenta conforto aos seus usuários, visto que o máximo valor de aceleração ($0,073 \text{ m/s}^2$) é superior ao valor limite. Desse fato parte a necessidade do dimensionamento de um AMS para ser acoplado na estrutura com o anseio de reduzir os valores de aceleração para níveis aceitáveis.

5.1.3 Dimensionamento do AMS

Conforme exposto na seção anterior, a laje de madeira em estudo possui níveis de vibrações excessivos, portanto se fez necessário o estudo do dimensionamento de um AMS. Como o amortecimento adimensional da estrutura em madeira é maior que 1% não é viável a utilização da formulação proposta Rao (2011), portanto o método aplicado foi o proposto por Moutinho (1998), que consiste na utilização de ábacos.

Para a utilização dos ábacos é necessário definir o valor da relação entre deslocamento estático e deslocamento máximo admissível ($x_1/x_{1,est}$), neste caso o resultado foi igual a 2,536. Esse valor tornou inviável a utilização dos ábacos, pois, quando aplicado na curva de amortecimento (ξ) resultaria em uma relação entre massas (μ) muito maior que 0,05.

A fim de diminuir a aceleração nessa laje seria necessária a aplicação de uma massa significativa, porém a literatura citada neste trabalho sugere que a relação entre massas (μ) deve variar entre 0,01 a 0,05, para que não haja um acréscimo muito elevado de massa na estrutura o que pode comprometer a sua estabilidade.

O objetivo desse trabalho é dimensionar absorvedores de massa sintonizada (AMS). No caso dessa laje de madeira a aplicação desses sistemas de controle passivos não é viável, devido a grande massa que seria necessária para absorver as vibrações, portanto não foi realizado o seu dimensionamento.

6 CONCLUSÕES

Como era pretendido neste trabalho, foi identificado um método de dimensionamento de Absorvedores de Massa Sintonizada específico para lajes de piso.

Propositalmente, a laje pré-moldada de concreto armado estudada neste trabalho apresentava ressonância com o 2º harmônico (4,48 Hz) do caminhar de uma pessoa. Para um carregamento de caminhar normal, com frequência do harmônico fundamental em 2,24 Hz a aceleração máxima no meio do vão alcançou a magnitude de 0,97% de g.

O AMS foi dimensionado segundo os ábacos de Moutinho com o objetivo de limitar o pico de aceleração em 0,5% de g.

Na simulação com o AMS instalado na laje, a aceleração no meio do vão caiu para 0,3% de g sendo considerada aceitável.

No segundo caso estudado neste trabalho, o da laje de madeira, a estrutura está próxima da ressonância com o 2º harmônico (4,48 Hz), com um carregamento provocado por uma pessoa caminhando no meio do vão a uma frequência igual a 2,15 Hz, aceleração atinge valores próximos a 0,74% de g.

Para a laje de madeira não foi possível dimensionar o AMS, devido à necessidade da utilização de uma grande relação entre massas.

Visto que um demasiado acréscimo de massa não é interessante do ponto de vista estrutural, se faz necessário recorrer a outras alternativas. Nesse caso o mais interessante seria incorporar amortecimento na estrutura e, posteriormente adicionar um AMS à mesma.

Contudo a inserção de amortecimento na laje de madeira depois de executada é de grande dificuldade, tornando-se às vezes inviável. Portanto o controle da vibração nesse caso poderá se tornar objetivo de estudo em trabalhos futuros, onde o anseio principal seja analisar formas de adicionar amortecimento em estruturas de madeira já executadas.

Vale destacar que os problemas com vibrações excessivas poderiam ser evitados se fosse realizada a análise dinâmica da estrutura na fase de projeto, evitando situações como ocorreu na laje de madeira, onde se torna inviável a instalação de um sistema de controle.

Entretanto, verificou-se que quando possível acopla-los à estrutura, os AMS são eficientes sistemas de controle passivo e proporcionam uma redução significativa da aceleração da estrutura garantindo o atendimento das condições de serviço no que tange ao conforto à vibração.

Por fim, conclui-se que o método de dimensionamento por meio de ábacos proposto por Moutinho (1998) é de fácil aplicação e conduz a resultados satisfatórios.

7 REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

_____. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de edificações – Procedimento. Rio de Janeiro, 1980.

_____. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira – Procedimento. Rio de Janeiro, 1997.

_____. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira – Procedimento. Rio de Janeiro, 2011.

BACHMANN et al. **Vibration Problems in Structures**. Birkhäuser. Boston. ISBN 0-8176-5148-9.,1995.

BACHMANN, Hugo. : AMMANN, Walter. **Vibration in structures induced by man and machine**. 3. ed. Zurique: International Association for Bridge and Structural Engineering, 1987.

BOYCE, William E.: DIPRIMA, Richard C. **Elementary differential equations and boundary value problems**. 3. ed. Nova York: John Wiley and Sons, INC. 2001.

CARREIRA, Marcelo R. et al. **Avaliação de Técnicas e Não-Destrutivas Aplicadas à Madeira de Pinus sp**, Rio de Janeiro, III American Conference For Nondestructive Testing, jun-jul, 2003.

CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. 3 ed. Computers & Structures, 2003.

DIÓGENES, Hildebrando. J. F. **Análise tipológica de elementos e sistemas construtivos pré moldados de concreto do ponto de vista de sensibilidade a vibração em serviço**. 2010. 210 f. Dissertação de (Mestrado) – Escola de engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

GERB. **Controle de Vibrações por Absorvedores Dinâmicos: Projetos ao Redor do Mundo**. Disponível em: <<http://www.gerb.com.br/index.php?id=1040>>. Acesso em: 15 jun. 2014.

HARRIS, Cyril M.; PIERSOL, Allan G. **Harris' shock and vibration handbook**. 5ª ed. Fifth Edition, 2002.

JUNGES, Paulo. **Análise de Vibrações de uma Laje Mista de Concreto e Perfis de Prfv Induzidas por Atividades Humanas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2010.

LIMA, Daniel. V. F. **Controle de Vibrações Induzidas em Uma Laje de Academia de Ginástica com a Utilização de Amortecedores de Massa Sintonizados**. 2007. 148 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

MAST, Robert F. **Vibration of precast prestressed concrete floors**. PCI Journal, Washington, nov/dec. p.76-86, 2001.

MOUTINHO, Carlos M. R. **Controlo Passivo e Activo de Vibrações em Pontes de Peões**. 1998. 201 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Especialização em Estruturas) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 1998.

MURRAY, Thomas. M.; ALLEN, David. E. e UNGER, Eric. E. **“Floor Vibrations Due to Human Activity”**, AISC/CISC Steel Design Guide Series – No. 11, American Institute of Steel Construction, Chicago, 1997.

OLIVEIRA, Fernando. O. **Critérios de projeto para amortecedor tipo pêndulo para controle de vibrações em edifícios altos**. 2012. 87 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2012.

OSB Performance by Design. **Oriented Strand Board in Wood Frame Construction**. U.S. Edition, 2005.

PAREDES, Miguel M. **Utilização de Amortecedores de Massas Sintonizadas no Controlo de Vibrações em Estruturas**. 2008. 144 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Especialização em Estruturas) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2008.

PCI PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **PCI design handbook**. 5 ed. 2001

RAO, Singiresu S. **Mechanical vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

ROCHA, João R. dos S. P. **Estudo Dinâmico da Ponte Pedonal da Rabada em Santo Tirso**. 2012. 104 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil – Especialização em Estruturas) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2012.

SANTOS, Marcos. D. S. dos. **Análise Numérica do Controle de Vibrações em Lajes de Edifícios Utilizando Amortecedores de Massa Sintonizados**. 2009. 171 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

SANTOS, Nelson F. **Estudo e controlo de vibrações em lajes de edifícios. Dissertação de Mestrado**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP. Porto. 2009.

SILVA, Samuel da. **Vibrações Mecânicas**. Foz do Iguaçu: UNIOSTE, 2009. 13 p.

WECKENDORF, Jean. et al. **Damping Characteristics of Timber Flooring Systems with Respect to Low-Frequency Vibration Modes**. 2008.

APÊNDICE A – Memorial de cálculo da análise dinâmica na laje pré-moldada de concreto armado

DADOS DA LAJE:

$$\text{Inércia efetiva --- } I_{eq} := 0.008$$

$$\text{Comprimento --- } l := 11$$

$$\text{Massa --- } m := 10379.2$$

$$\text{Módulo de Elasticidade ---- } E_{c,din} := 2.856 \cdot 10^{10}$$

$$\text{Rigidez --- } k := \frac{48 \cdot E_{c,din} \cdot I_{eq}}{l^3} \quad k = 8.24 \cdot 10^6$$

CARREGAMENTO DO CAMINHAR HUMANO

$$m_p := 80 \quad f_p := 2.24 \quad t := 0, 0.01 \dots 3$$

$$p_p := m_p \cdot 9.80665 \quad p_p = 784.532$$

$$p_1 := p_p \cdot 0.4 \quad p_1 = 313.813$$

$$p_2 := p_p \cdot 0.1 \quad p_2 = 78.453$$

$$p_3 := p_p \cdot 0.1 \quad p_3 = 78.453$$

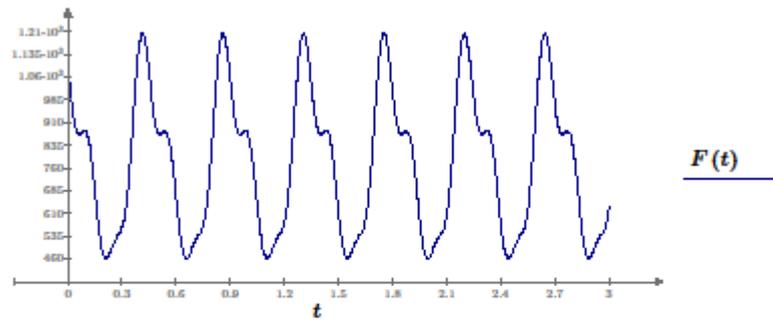
$$p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \omega' := \begin{bmatrix} 2 \cdot \pi \cdot f_p \\ 4 \cdot \pi \cdot f_p \\ 6 \cdot \pi \cdot f_p \end{bmatrix}$$

$$F_1(t) := p_1 \cdot \cos(\omega'_{0,0} \cdot t) \quad f_1 := f_p \quad f_1 = 2.24$$

$$F_2(t) := p_2 \cdot \cos\left(\omega'_{1,0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad f_2 := 2 \cdot f_p \quad f_2 = 4.48 \quad \text{harmônico ressonante}$$

$$F_3(t) := p_3 \cdot \cos\left(\omega'_{2,0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad f_3 := 3 \cdot f_p \quad f_3 = 6.72$$

$$F(t) := p_p + F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$$



CONDIÇÕES INICIAIS

- Deslocamento inicial

$$u_0 := \frac{(p_p \cdot l^3)}{48 \cdot E_{c,din} \cdot I_{eq}} \quad \text{logo} \quad u_0 = 9.521 \cdot 10^{-5}$$

- Velocidade inicial

$$u_0' := 0$$

RESPOSTA ESTACIONÁRIA AO SEGUNDO HARMONICO DO CAMINHAR

$$p(t) = -p_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$P_0 := -p_2 \quad \omega := \omega'_{1,0}$$

$$\omega_n := \sqrt[2]{\frac{k}{m}} \quad \omega_n = 28.176$$

$$f_n := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} \quad f_n = 4.484$$

$$\alpha := \frac{\omega}{\omega_n} \quad \alpha = 0.999$$

$$\xi = 0.04$$

$$C := \frac{P_0}{k} \cdot \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2} \right) \quad C = -1.191 \cdot 10^{-4}$$

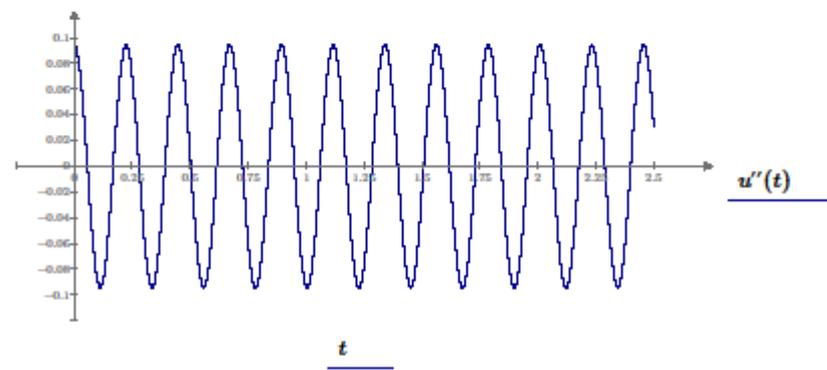
$$D := \frac{P_0}{k} \cdot \left(\frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2} \right) \quad D = -2.85 \cdot 10^{-6}$$

$$u(t) := (C \cdot \cos(\omega \cdot t) + D \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

$$u'(t) := \frac{d^1}{dt^1} u(t)$$

$$u''(t) := \frac{d^2}{dt^2} u(t)$$

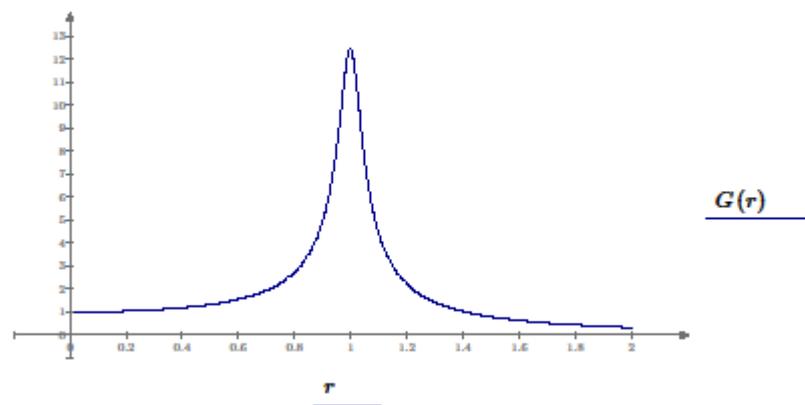
$$t := 0, 0.0001 \dots 2.5$$



Amplificação dinâmica

$$G(r) := \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}$$

$$r := 0, 0.01 \dots 2$$



APÊNDICE B – Memorial de cálculo da análise dinâmica na laje pré-moldada de concreto armado após a instalação do AMS

DADOS DA LAJE

$$\text{Inércia efetiva --- } I_{eq} := 0.008$$

$$\text{Massa --- } m_1 := 10379.2$$

$$\text{Dimensões --- } l := 11$$

$$\text{Módulo de Elasticidade ---- } E_{c,din} := (2.856 \cdot 10^{10})$$

$$\text{Rigidez --- } k_1 := \frac{48 \cdot E_{c,din} \cdot I_{eq}}{l^3} \quad k_1 = 8.24 \cdot 10^6$$

$$\text{Amortecimento --- } \xi_1 := 0.04$$

DADOS DO ABSORVEDOR

$$\mu := 0.02$$

$$\xi_2 := 0.066$$

$$q := 0.973$$

$$m_2 := \mu \cdot m_1 \quad m_2 = 207.584$$

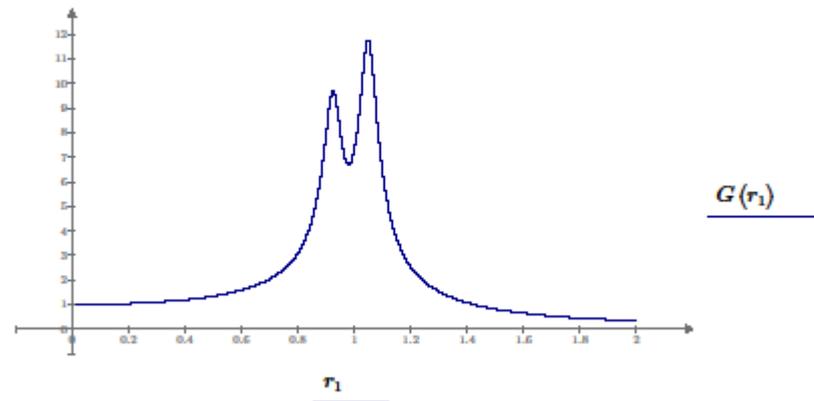
$$k_2 := \mu \cdot q^2 \cdot k_1 \quad k_2 = 1.56 \cdot 10^5$$

$$c_2 := 2 \cdot \xi_2 \cdot \sqrt{k_2 \cdot m_2} \quad c_2 = 751.198$$

Amplificação dinâmica

$$G(r_1) := \sqrt{\frac{(2 \cdot \xi_2 \cdot r_1 \cdot q)^2 + (r_1^2 - q^2)^2}{(r_1^4 - (1 + (1 + \mu) q^2) r_1^2 + q^2)^2 + (2 \xi_2 \cdot r_1 \cdot q)^2 \cdot (1 - r_1^2 \cdot (1 + \mu))^2}}$$

$$r_1 := 0,0.0001..2$$



CARREGAMENTO DO CAMINHAR HUMANO

$$m_p := 80$$

$$f_p := 2.24$$

$$t := 0, 0.01 \dots 2.00$$

$$p_p := m_p \cdot 9.80665$$

$$p_p = 784.532$$

$$p_1 := p_p \cdot 0.4$$

$$p_1 = 313.813$$

$$p_2 := p_p \cdot 0.1$$

$$p_2 = 78.453$$

$$p_3 := p_p \cdot 0.1$$

$$p_3 = 78.453$$

$$p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \omega' := \begin{bmatrix} 2 \cdot \pi \cdot f_p \\ 4 \cdot \pi \cdot f_p \\ 6 \cdot \pi \cdot f_p \end{bmatrix}$$

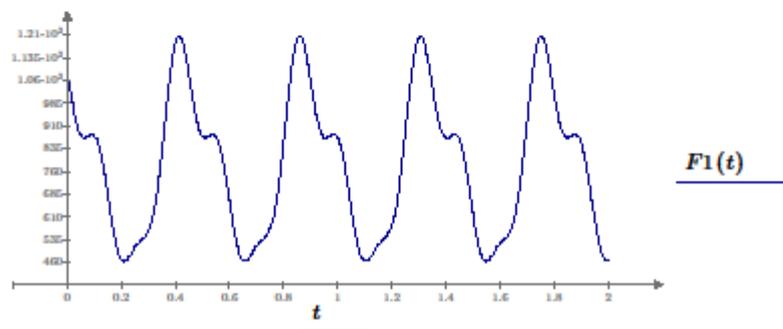
$$f_1(t) := p_1 \cdot \cos(\omega'_{0,0} \cdot t)$$

$$f_2(t) := p_2 \cdot \cos\left(\omega'_{1,0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_3(t) := p_3 \cdot \cos\left(\omega'_{2,0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F1(t) := p_p + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$$

$$F2(t) := 0$$



AUTOVALORES

$$\Delta := ((k_1 + k_2) \cdot m_2 + (k_2) \cdot m_1)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (k_1 \cdot k_2)$$

$$\Delta = 2.25 \cdot 10^{17}$$

$$\lambda_1 := \frac{((k_1 + k_2) \cdot m_2 + (k_2) \cdot m_1) - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \quad \lambda_1 = 670.152$$

$$\omega_{n1} := \sqrt{\lambda_1} \quad \omega_{n1} = 25.887$$

$$\lambda_2 := \frac{((k_1 + k_2) \cdot m_2 + (k_2) \cdot m_1) + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot m_1 \cdot m_2} \quad \lambda_2 = 890.323$$

$$\omega_{n2} := \sqrt{\lambda_2} \quad \omega_{n2} = 29.838$$

AUTOVETORES

$$A_{0,0} := 1 \quad s_1 := \frac{(k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega_{n1}^2)}{k_2} \quad s_1 = 9.23$$

$$A_{1,0} := \text{if}(|s_1| > 1, 1, s_1) \quad A_{1,0} = 1$$

$$A_{0,0} := \text{if}\left(A_{1,0} = 1, \frac{1}{s_1}, 1\right) \quad A_{0,0} = 0.108$$

$$A_{0,1} := 1 \quad s_2 := \frac{(k_1 + k_2 - m_1 \cdot \omega_{n2}^2)}{k_2} \quad s_2 = -5.417$$

$$A_{1,1} := \text{if}(|s_2| > 1, 1, s_2) \quad A_{1,1} = 1$$

$$A_{0,1} := \text{if}\left(A_{1,1} = 1, \frac{1}{s_2}, 1\right) \quad A_{0,1} = -0.185$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.108 & -0.185 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B := A^T \quad L := A^{-1}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.108 & 1 \\ -0.185 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 3.414 & 0.63 \\ -3.414 & 0.37 \end{bmatrix}$$

RESOLUÇÃO PELO MÉTODO MODAL

$$M := \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1.038 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 207.584 \end{bmatrix}$$

$$K := \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 8.396 \cdot 10^5 & -1.56 \cdot 10^5 \\ -1.56 \cdot 10^5 & 1.56 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Amortecimento proporcional à massa e a rigidez

Então:

$$a_0 := \frac{2 \cdot \omega_{n1} \cdot \omega_{n2}}{\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2} \cdot (\omega_{n2} \cdot \xi_2 - \omega_{n1} \cdot \xi_1) \quad a_0 = 6.552$$

$$a_1 := \frac{2 \cdot \omega_{n1} \cdot \omega_{n2}}{\omega_{n2}^2 - \omega_{n1}^2} \cdot \left(\frac{-1}{\omega_{n2}} \cdot \xi_2 + \frac{1}{\omega_{n1}} \cdot \xi_1 \right) \quad a_1 = -0.005$$

$$C := a_0 \cdot M + a_1 \cdot K$$

$$C = \begin{bmatrix} 2.873 \cdot 10^4 & 729.912 \\ 729.912 & 630.263 \end{bmatrix}$$

Matriz de massa modal

$$M_m := B \cdot M \cdot A \quad M_m = \begin{bmatrix} 329.407 & -9.663 \cdot 10^{-13} \\ -9.948 \cdot 10^{-13} & 561.304 \end{bmatrix}$$

$$M_{m_{1,1}} = 561.304 \quad M_{m_{0,0}} = 329.407$$

Matriz de rigidez modal

$$K_m := B \cdot K \cdot A \quad K_m = \begin{bmatrix} 2.208 \cdot 10^5 & -7.567 \cdot 10^{-10} \\ -7.276 \cdot 10^{-10} & 4.997 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Matriz de amortecimento modal

$$C_m := B \cdot C \cdot A \quad C_m = \begin{bmatrix} 1.126 \cdot 10^3 & -3.183 \cdot 10^{-12} \\ -3.126 \cdot 10^{-12} & 1.34 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Vetor de cargas modais

$$P_1 := -P_2$$

$$P_2 := 0$$

$$P := B \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -8.499 \\ 14.483 \end{bmatrix}$$

- Deslocamento inicial no domínio modal

$$\text{Deslocamento inicial da laje: } u_{0,1} := \frac{(p_p \cdot l^3)}{48 \cdot E_{c,din} \cdot I_{eq}} \quad \text{logo} \quad u_{0,1} = 9.521 \cdot 10^{-5}$$

$$D_1 := \frac{P_{0,0}}{K_{m_{0,0}}} \cdot \left(\frac{Z \cdot \xi_{m1} \cdot \alpha_1}{\left((1 - \alpha_1^2)^2 + (2 \cdot \xi_{m1} \cdot \alpha_1)^2 \right)} \right) \quad D_1 = -1.026 \cdot 10^{-4}$$

$$D_2 := \frac{P_{0,0}}{K_{m_{0,0}}} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_1^2}{\left((1 - \alpha_1^2)^2 + (2 \cdot \xi_{m1} \cdot \alpha_1)^2 \right)} \right) \quad D_2 = 1.304 \cdot 10^{-4}$$

$$q_1(t) := (D_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + D_2 \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

2°

$$\omega_{n,m2} := \sqrt[2]{\frac{K_{m_{1,1}}}{M_{m_{1,1}}}} \quad \omega_{n,m2} = 29.838$$

$$c_{c,m2} := 2 \cdot M_{m_{1,1}} \cdot \omega_{n,m2} \quad c_{c,m2} = 3.35 \cdot 10^4$$

$$\xi_{m2} := \frac{C_{m_{1,1}}}{c_{c,m2}} \quad \xi_{m2} = 0.04$$

$$\omega_{D2} := \omega_{n,m2} \cdot \sqrt[2]{1 - \xi_{m2}^2} \quad \omega_{D2} = 29.814$$

$$\alpha_2 := \frac{\omega}{\omega_{n,m2}} \quad \alpha_2 = 0.943$$

$$D_3 := \frac{P_{1,0}}{K_{m_{1,1}}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \xi_{m2} \cdot \alpha_2}{\left((1 - \alpha_2^2)^2 + (2 \cdot \xi_{m2} \cdot \alpha_2)^2 \right)} \right) \quad D_3 = 1.228 \cdot 10^{-4}$$

$$D_4 := \frac{P_{1,0}}{K_{m_{1,1}}} \cdot \left(\frac{1 - \alpha_2^2}{\left((1 - \alpha_2^2)^2 + (2 \cdot \xi_{m2} \cdot \alpha_2)^2 \right)} \right) \quad D_4 = 1.791 \cdot 10^{-4}$$

$$q_2(t) := (D_3 \cdot \cos(\omega \cdot t) + D_4 \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

□ □ □

$$\mathbf{q}(t) := \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

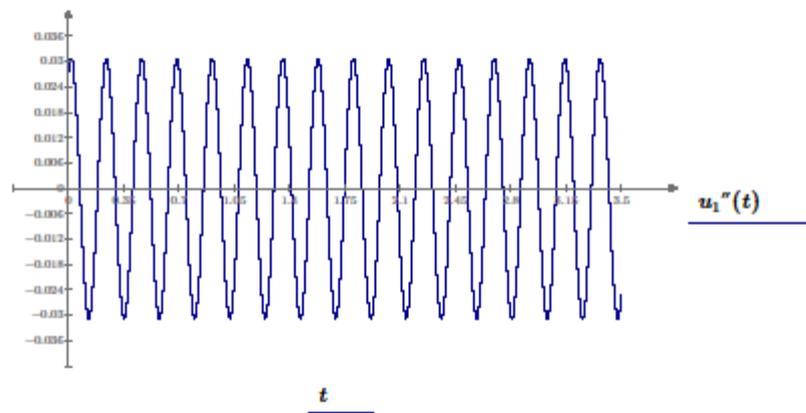
$$\mathbf{u}(t) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}(t)$$

$$u_1(t) := \mathbf{u}(t)_{0,0}$$

$$u_1'(t) := \frac{d^1}{dt^1} u_1(t)$$

$$u_1''(t) := \frac{d^2}{dt^2} u_1(t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 3.5$$



APÊNDICE C – Memorial de cálculo da análise dinâmica na pré-moldada de madeira

DADOS DA LAJE:

Comprimento --- $l := 5$

Inércia --- $I := 4.626 \cdot 10^{-4}$

Módulo de Elasticidade ----- $E := 11.889 \cdot 10^9$

$$E_{c,din} := 1.03 \cdot E \quad E_{c,din} = 1.225 \cdot 10^{10}$$

Cálculo da massa

$$\text{Viga } \rho_1 := 560 \quad \text{Kg/m}^3 \quad m_1 := \rho_1 \cdot 0.18 \cdot 0.06 \cdot l$$

$$\text{OSB } \rho_2 := 648 \quad \text{Kg/m}^3 \quad m_2 := \rho_2 \cdot 0.0155 \cdot 0.6 \cdot l$$

$$\text{Piso } \gamma_1 := 10 \quad \text{N/m}^2 \quad m_3 := \left(\frac{\gamma_1}{9.80665} \right) \cdot 0.6 \cdot l$$

$$\text{Sobrecarga } \gamma_2 := 2000 \quad \text{N/m}^2 \quad m_4 := \left(\frac{\gamma_2}{9.80665} \right) \cdot 0.6 \cdot l$$

Considerando 6 painéis

$$m := (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \cdot 6 \quad m = 4.052 \cdot 10^3 \quad \text{Kg}$$

$$\text{Rigidez --- } k := \frac{48 \cdot E_{c,din} \cdot I}{l^3} \quad k = 2.175 \cdot 10^6$$

CARREGAMENTO DO CAMINHAR HUMANO

$$m_p := 80 \quad f_p := 2.15 \quad t := 0, 0.01 \dots 3$$

$$p_p := m_p \cdot 9.80665 \quad p_p = 784.532$$

$$p_1 := p_p \cdot 0.4 \quad p_1 = 313.813$$

$$p_2 := p_p \cdot 0.1 \quad p_2 = 78.453$$

$$p_3 := p_p \cdot 0.1 \quad p_3 = 78.453$$

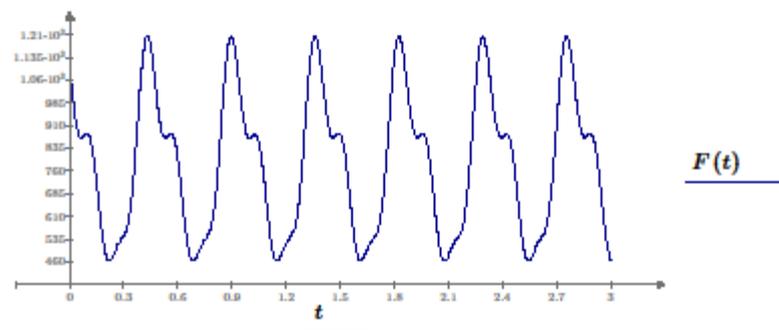
$$p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad \omega' := \begin{bmatrix} 2 \cdot \pi \cdot f_p \\ 4 \cdot \pi \cdot f_p \\ 6 \cdot \pi \cdot f_p \end{bmatrix}$$

$$F_1(t) := p_1 \cdot \cos(\omega'_{0,0} \cdot t) \quad f_1 := f_p \quad f_1 = 2.15$$

$$F_2(t) := p_2 \cdot \cos\left(\omega'_{1,0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad f_2 := 2 \cdot f_p \quad f_2 = 4.3$$

$$F_3(t) := p_3 \cdot \cos\left(\omega'_{2,0} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad f_3 := 3 \cdot f_p \quad f_3 = 6.45$$

$$F(t) := p_p + F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$$



CONDIÇÕES INICIAIS

- Deslocamento inicial

$$u_0 := \frac{(p_p \cdot l^3)}{48 \cdot E_c \cdot d_{in} \cdot I} \quad \text{logo} \quad u_0 = 3.607 \cdot 10^{-4}$$

- Velocidade inicial

$$u_0' := 0$$

RESPOSTA ESTACIONÁRIA AO SEGUNDO HARMONICO DO CAMINHAR

$$p(t) = -p_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$P_0 := -p_2 \quad \omega := \omega'_{1,0}$$

$$\omega_n := \sqrt[2]{\frac{k}{m}} \quad \omega_n = 23.171 \quad f_n := \frac{\omega_n}{2 \cdot \pi} \quad f_n = 3.688$$

$$\alpha := \frac{\omega}{\omega_n} \quad \alpha = 1.166$$

$$\xi = 0.0254$$

$$C := \frac{P_0}{k} \cdot \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \alpha}{(1 - \alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2} \right) \quad C = -1.609 \cdot 10^{-5}$$

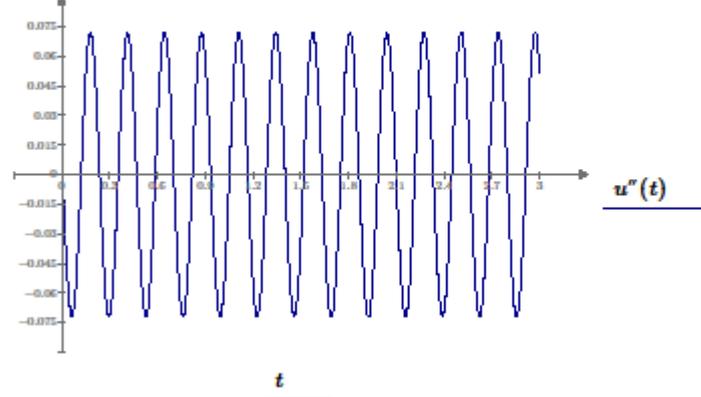
$$D := \frac{P_0}{k} \cdot \left(\frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \alpha)^2} \right) \quad D = 9.765 \cdot 10^{-5}$$

$$u(t) := (C \cdot \cos(\omega \cdot t) + D \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

$$u'(t) := \frac{d^1}{dt^1} u(t)$$

$$u''(t) := \frac{d^2}{dt^2} u(t)$$

$$t := 0.00001 \dots 2.5$$



Amplificação dinâmica

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot r)^2}}$$

$$r = 0, 0,01 \dots 2$$

