

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

GIORGIE EDUARDO RODRIGUES AMORIM

**AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS NAS
CURVATURAS MODAIS NA DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO

2015

GIORGIE EDUARDO RODRIGUES AMORIM

**AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS NAS
CURVATURAS MODAIS NA DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso Superior de Engenharia Civil do Departamento de Construção Civil– DACOC – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, para obtenção do título de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

CAMPO MOURÃO

2015



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

AVALIAÇÃO NUMÉRICA DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS NA DETECÇÃO DE DANOS EM VIGAS

por

Giorgie Eduardo Rodrigues Amorim

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 10h 20min do dia 19 de Novembro de 2015 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Ronaldo Rigobello

(UTFPR)

Prof. Me. Jeferson Rafael Bueno

(UTFPR)

Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira

(UTFPR)

Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

Prof. Dr. Marcelo Guelbert

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me acompanhar e me guiar em toda essa jornada. Que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de toda minha vida, e não somente nestes anos como universitário. Por ter me dado forças para vencer cada dificuldade encontrada, a distância de casa e a saudade da família.

Aos meus pais, Eluizio e Maria Aparecida, que apesar de todas as dificuldades me ajudaram a fortalecer e que para mim foi muito importante. Agradeço por acreditarem no meu sonho e fazerem dele parte dos seus.

Ao meu orientador, Professor Dr. Marcelo Rodrigo Carreira pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos. E principalmente por acreditar no meu potencial e me proporcionar grandes ensinamentos.

A minha irmã Juliana, minhas tias Maria Alice e Maria Aparecida por estarem sempre presentes na minha vida, me incentivando e me apoiando em toda essa trajetória. Agradeço por todo cuidado, preocupação e contribuição valiosa.

Agradeço a todos os professores por me proporcionarem os valiosos conhecimentos, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. Terão sempre os meus eternos agradecimentos.

À Empresa Nieri Engenharia Civil, principalmente aos Engenheiros Gilson e Camila, por dedicarem tempo, cada ensinamento e lição que contribuíram para que esse sonho fosse realizado.

Agradeço aos meus amigos e aos colegas de curso, que considero como minha segunda família, por me apoiarem e participarem de momentos bons e ruins durante parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida.

Por fim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

AMORIM, G. E. R. **Avaliação numérica do método das diferenças nas curvaturas modais na detecção de danos em vigas**. 2015. 43 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2015.

Durante toda sua vida útil, as estruturas estão submetidas a ações que podem ocasionar danos como deterioração natural, corrosão e fadiga dos materiais empregados. Danos não detectados em estágios iniciais podem levar a falhas e comprometer a integridade e segurança da estrutura. O monitoramento e análise de possíveis danos podem ser feitos por técnicas que não alteram suas propriedades, denominadas de Avaliação Não Destrutiva (AND). Dentre as diversas técnicas de AND, os ensaios dinâmicos têm recebido grande atenção na engenharia civil pelo potencial de identificar danos em estágios iniciais a partir da medição das características dinâmicas da estrutura antes e após o dano. Nesse contexto, este trabalho teve como objetivo avaliar numericamente via método dos Elementos Finitos, a aplicação do método das Diferenças nas Curvaturas Modais para a detecção de danos em vigas e determinar o número necessário de modos de vibração de flexão para identificar os danos. Na modelagem numérica foi usado o programa *Calculix*, com o qual se obteve os oito primeiros modos de vibração. As variações nas curvaturas modais foram determinadas de forma aproximada por diferenças finitas. A identificação do dano foi obtida pela comparação entre as diferenças nas curvaturas modais da viga íntegra com as vigas danificadas. O método se mostrou eficiente identificando em todos os casos os defeitos modelados. E concluiu-se que a aplicação do método para a detecção de danos em vigas necessita de pelo menos três modos de vibração para localizar com boa precisão a posição do dano.

Palavras-chave: Detecção de danos. Curvaturas modais. Análise modal.

ABSTRACT

AMORIM, G. E. R. Numerical evaluation of the method of curvature modal differences in the damage detection in beams. 2015. 43 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2015.

The structures, during its lifetime are subject to actions which can bring on damages as natural deterioration, corrosion and fatigue of the materials used. Damages not detected in early stages can lead to fails, committing the structure's integrity and safety. The monitoring and analysis of possible damages can be performed by techniques that do not change your properties, named Non Destructive Evaluation (NDE). Among several NDE techniques, the dynamic tests have received great attention in civil engineering from the potential of identify damages in early stages as from the measurement of structure's dynamics characteristics before and after the damage. This work had as aims to evaluate numerically, by Finite Element Method, the application of the Changes in Curvature Mode Shapes method for damage detection in beams and determine the minimal number of mode shapes to identify the damages. In the numerical modeling was used the Calculix software, wherewith there was obtained eight bending mode shapes. The changes in the modals curvatures were determined of approximate manner by finite differences. The damage's identification was obtained by the comparison between the changes in the modal curvatures of the intact beam with the damaged beams. The method proved to be efficient identifying in all cases the modeled defects. And was concluded that the application of the method to the detection of damages in beams require at least three mode shapes to locate with good precision the damage position.

Keywords: Damage detection. Modal curvatures. Modal analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema com um GDL: Sistema Massa, Mola e Amortecedor.....	15
Figura 2 – Diagrama de Corpo Livre.	15
Figura 3 – Sistema com dois GDL.	17
Figura 4 – Diagrama de Corpo Livre da massa 1.	18
Figura 5 – Diagrama de Corpo Livre da massa 2.	18
Figura 6 – Viga em vibração transversal.	20
Figura 7 – Forças em um elemento infinitesimal dx.	21
Figura 8 – Frequência natural e modos de vibração de uma viga prismática com extremidades livres.	22
Figura 9 – Relações decorrentes de um elemento em flexão.	25
Figura 10 – Discretização do elemento.	28
Figura 11 – Interface do programa Calculix versão 2.8.	29
Figura 12 – Localização dos danos nos diferentes casos analisados.	29
Figura 13 – Diferença Absoluta nas Curvaturas Modais entre as vigas V0 e V1.....	37
Figura 14 – Diferença Absoluta nas Curvaturas Modais entre as vigas V0 e V2.....	38
Figura 15– Diferença Absoluta nas Curvaturas Modais entre as vigas V0 e V3.....	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Relação dos casos dos danos com as vigas e suas reduções.....	30
Tabela 2 – Frequências Naturais vigas V0 e V1.....	31
Tabela 3 – Frequências Naturais vigas V0 e V2.....	31
Tabela 4 – Frequências Naturais vigas V0 e V3.....	32

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - 1º modo de flexão da viga íntegra.....	32
Gráfico 2 - 2º modo de flexão da viga íntegra.....	32
Gráfico 3 - 3º modo de flexão da viga íntegra.....	33
Gráfico 4 - 4º modo de flexão da viga íntegra.....	33
Gráfico 5 - 5º modo de flexão da viga íntegra.....	33
Gráfico 6 - 6º modo de flexão da viga íntegra.....	33
Gráfico 7 - 7º modo de flexão da viga íntegra.....	34
Gráfico 8 - 8º modo de flexão da viga íntegra.....	34
Gráfico 9 - 1º Modo de flexão das vigas.	34
Gráfico 10 - 2º Modo de flexão das vigas	35
Gráfico 11 - 3º Modo de flexão das vigas.	35
Gráfico 12 - 4º Modo de flexão das vigas.	35
Gráfico 13 - 5º Modo de flexão das vigas.	36
Gráfico 14 - 6º Modo de flexão das vigas	36
Gráfico 15 - 7º Modo de flexão das vigas.	36
Gráfico 16 - 8º Modo de flexão das vigas.	37

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 OBJETIVOS	12
2.1 OBJETIVO GERAL.....	12
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
3 JUSTIFICATIVA	13
4 REFERENCIAL TEÓRICO	14
4.1 ANÁLISE MODAL TEÓRICA	14
4.1.1 SISTEMAS DISCRETOS	14
4.1.1.1 MODELOS DISCRETOS COM UM GRAU DE LIBERDADE	14
4.1.1.2 MODELOS DISCRETOS COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE	17
4.1.2 MODELO CONTÍNUO PARA VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA	20
4.2 DETECÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS	23
4.2.1 MÉTODO DAS ALTERAÇÕES DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS	23
4.2.2 MÉTODO DAS ALTERAÇÕES DOS MODOS DE VIBRAR	24
4.2.3 MÉTODO DAS ALTERAÇÕES DAS CURVATURAS MODAIS	25
5 MÉTODO	28
5.1 ANÁLISE NUMÉRICA.....	28
5.2 DETECÇÃO DOS DANOS PELO MÉTODO NAS CURVATURAS MODAIS	30
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	31
6.1 VARIAÇÕES NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO.	31
6.2 DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS.....	37
7 CONCLUSÕES.....	40
REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

As estruturas, desde as mais simples até as mais complexas, são submetidas a vários tipos de carregamentos estáticos e dinâmicos durante sua vida útil. A associação desses carregamentos a fenômenos capazes de alterar a composição química e física de seus materiais constituintes podem produzir diferentes tipos de danos, conforme a forma e o tipo da estrutura. Em consequência desses danos, sua durabilidade e capacidade de carga podem ser afetadas, surgindo problemas como fissuras e vibrações excessivas.

Quando há dúvidas sobre a integridade da estrutura, é interessante realizar uma avaliação das condições globais da mesma a fim de detectar possíveis danos em estágios iniciais e evitar maiores danos à mesma.

Essa avaliação pode ser feita por inspeção visual acompanhada por ensaios não destrutivos. A análise por inspeção visual é realizada por um técnico e consiste na observação e avaliação dos elementos que compõem a estrutura. Entretanto, essa técnica apresenta algumas limitações, como a presença de locais inacessíveis à observação e a possibilidade de erros na avaliação. Os ensaios não destrutivos são usados para medir alguma propriedade física e mecânica de um material ou componente estrutural e a partir dessa propriedade estimar o estado da estrutura.

Nos últimos anos, a aplicação de ensaios dinâmicos como métodos de avaliação não destrutiva para determinação das propriedades mecânicas de elementos estruturais tem crescido significativamente. Entre as razões para isso destacam-se os avanços na informática e na microeletrônica que possibilitaram a construção de computadores e microprocessadores capazes de realizar a aquisição o condicionamento e a análise dos sinais e, principalmente, à boa correlação entre os modelos físico e matemático dos ensaios.

Entre os métodos de avaliação não destrutiva com maior aplicabilidade estão os fundamentados nas alterações das frequências naturais, dos valores de amortecimento ou nas mudanças na energia de deformação modal e também o método das Diferenças nas Curvaturas Modais proposto por Pandey et al. (1991), com o objetivo de localizar o dano em uma estrutura a partir das alterações nas curvaturas dos modos de flexão.

As duas primeiras técnicas são úteis para detectar a presença de defeitos. Porém, não permitem a localização precisa do dano, pois danos em locais diferentes podem produzir alterações de mesma magnitude tanto no amortecimento quanto nas frequências naturais. Já os métodos baseados em alterações nos modos de deformação como o Método das Diferenças nas Curvaturas Modais permite a identificação e localização de danos conforme relatos de estudos em modelos numéricos. Dawari (2013) estudou a aplicação desse método em vigas simples biapoiadas e engastadas, em que os resultados numéricos demonstraram a eficácia em localizar diversos danos.

O dano em uma estrutura geralmente se caracteriza por uma perda de rigidez ou de massa localizada. Em geral a perda de massa é baixa e considerada desprezível (HEARN, 1991). A perda de rigidez pode ser causada por uma redução na seção transversal ou de inércia da mesma, que se reflete na diminuição da frequência natural e modifica os modos de vibração da estrutura.

Nesse contexto, pretende-se com este trabalho complementar o trabalho inicialmente desenvolvido por Bonetti (2014) e avaliar por meio numérico, a aplicação do método das Diferenças nas Curvaturas Modais para detecção de danos em vigas.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Avaliar numericamente a aplicação do método das Diferenças nas Curvaturas Modais para detecção de danos em vigas.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender a teoria de sistemas contínuos para análise de vibração transversal de vigas;
- Conhecer os princípios básicos da análise modal teórica de estruturas;
- Compreender o método de detecção de danos a partir das Diferenças nas Curvaturas Modais;
- Realizar a análise modal, pelo método dos elementos finitos, de vigas com danificação em diferentes posições;
- Determinar o número mínimo de modos de vibração de flexão necessários, em ensaios com vigas em suspensão livre, para obter resultados precisos na detecção de danos pelo método das Diferenças nas Curvaturas Modais.

3 JUSTIFICATIVA

As técnicas de Avaliação Não Destrutiva (AND) têm ganhado grande importância para as engenharias, principalmente em pesquisas desenvolvidas na linha dentro da engenharia civil. Isso se deve ao fato da AND permitir o exame das propriedades e a avaliação da integridade dos materiais e componentes estruturais possibilitando a detecção de possíveis danos ocorridos durante a vida útil da estrutura, sem afetar sua futura utilização.

O presente trabalho emprega a AND para detecção e localização de danos em vigas metálicas por meio de análise numérica. O método das Diferenças nas Curvaturas Modais empregado nesse trabalho foi proposto por Pandey *et al* (1991). Trata-se de um procedimento relativamente simples de detecção de danos mediante a análise das diferenças nas curvaturas dos modos de vibrar entre a estrutura íntegra e a estrutura danificada.

O trabalho apresenta um método de grande utilidade para detecção de danos em estruturas civis, levando em consideração que sua recuperação é o procedimento mais viável e econômico comparado com a sua reconstrução. Contudo, é preciso determinar quantos modos devem ser medidos nos ensaios para se determinar a posição dos danos com boa precisão. Dessa maneira pretende-se com este trabalho contribuir para a aplicação desse método determinando numericamente o número mínimo de modos de vibração para detectar os danos com precisão satisfatória.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 ANÁLISE MODAL TEÓRICA

Segundo He e Fu (2001), análise modal é um processo para determinar as características dinâmicas inerentes de um sistema em forma de frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração, usando-os para formular um modelo matemático para o seu comportamento dinâmico.

Silva (2000) define vibração como uma resposta repetitiva, periódica ou oscilatória de um sistema mecânico. As vibrações podem ocorrer de forma livre ou podem ser forçadas em um sistema através de alguma excitação.

Um sistema em vibração inclui um meio para armazenar energia potencial, um meio para armazenar uma energia cinética e um meio de perda gradual de energia. Segundo Rao (2011), a vibração de um sistema envolve a transferência alternada de sua energia potencial para energia cinética e vice-versa.

O grau de liberdade de sistema dinâmico é definido pelo número mínimo de coordenadas independentes, necessárias para que a haja a determinação dos deslocamentos em todas as partes do sistema a qualquer instante. Rao (2011) define sistemas discretos como um sistema com um número finito de graus de liberdade e sistemas contínuos como um sistema com um número infinito de graus de liberdade.

Um sistema modelado como sistema discreto é fundamentado por equações diferenciais ordinárias, já um sistema modelado como sistema contínuo é fundamentado por equações diferenciais parciais (NASCIMENTO, 2011).

4.1.1 SISTEMAS DISCRETOS

4.1.1.1 MODELOS DISCRETOS COM UM GRAU DE LIBERDADE

As propriedades físicas fundamentais de um sistema estrutural em vibração são sua massa, propriedades de rigidez e amortecimento. A figura 1 ilustra um esboço de um sistema simples de um grau de liberdade.

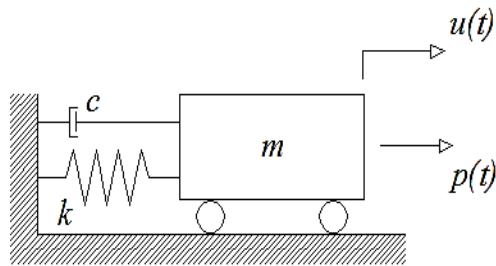


Figura 1 – Sistema com um GDL: Sistema Massa, Mola e Amortecedor.
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003).

Em que:

$u(t)$ = Deslocamento;

$p(t)$ = Força de excitação;

m = Massa;

k = Rigidez do sistema;

c = Amortecimento.

O equilíbrio dinâmico pode ser obtido utilizando o princípio de D' Alembert (1). Considerando o sistema em movimento, as forças externas entram em equilíbrio, quando for adicionado ao sistema uma força inercial com sentido contrário ao movimento e sendo esta obtida pelo produto da massa da partícula pela sua aceleração. A figura 2 ilustra o diagrama de corpo livre da massa do sistema.

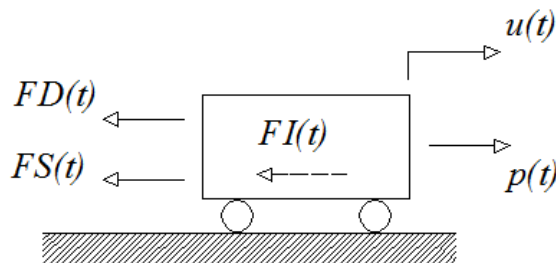


Figura 2 - Diagrama de Corpo Livre.
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003).

$$FI(t) + FD(t) + FS(t) = p(t) \quad (1)$$

Sendo:

$FI(t)$ = Força de inércia

$FD(t)$ = Força no amortecedor

$FS(t)$ = Força na mola (restitutiva);

$p(t)$ = Excitação dinâmica.

Fazendo as adequadas substituições e considerando o amortecimento do tipo viscoso, obtém-se a equação do movimento (2).

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (2)$$

Admitindo-se que o sistema seja conservativo, logo com o amortecimento nulo ($\{c\} = \{0\}$) e vibração livre ($\{p(t)\} = \{0\}$), obtém-se a equação (3) que é uma equação diferencial homogênea.

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (3)$$

Dividindo a equação (3) pela massa “ m ” e definindo a frequência natural ω_n como:

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)} \quad (4)$$

Tem-se,

$$\ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0 \quad (5)$$

A solução homogênea para o caso particular de m e k serem constantes é mostrada na equação (6)

$$u_h = A \cos(\omega_n t + \theta) \quad (6)$$

Em que:

A = Amplitude

$$A = \sqrt{(u_0)^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \quad (7)$$

$\theta = \hat{\text{Ângulo de fase}}$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-\dot{u}_0}{u_0 \omega_n} \right) \quad (8)$$

Sendo:

$m = \text{Massa (kg)}$;

$k = \text{Rigidez (N/m)}$.

$\omega_n = \text{Frequência natural (rad/s)}$;

E as condições iniciais:

$u_0 = \text{Deslocamento inicial (m)}$;

$\dot{u}_0 = \text{Velocidade inicial (m/s)}$.

4.1.1.2 MODELOS DISCRETOS COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE

Nenhum corpo é totalmente rígido ou desprovido de massa, as estruturas reais têm mais de um grau de liberdade, e na maioria dos casos somente um GDL pode não oferecer a precisão desejada. Na sequência será apresentado um sistema com dois GDL para compreensão da técnica necessária para o estudo das propriedades dinâmicas de sistemas com n -graus de liberdade. A figura 3 ilustra um esboço de um sistema simples com dois graus de liberdade.

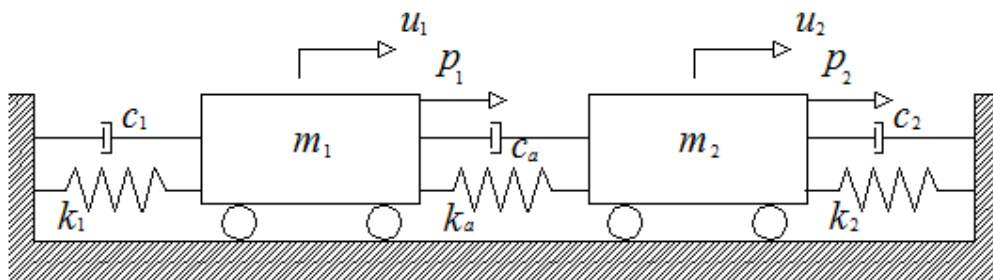


Figura 3– Sistema com dois GDL.

Fonte: Adaptado de Soriano (2014).

As equações dos movimentos (9) e (10) são obtidas por meio de equilíbrio dinâmico das forças que atuam nos blocos de massa “ m_1 ” e “ m_2 ”. As figuras 4 e 5 ilustram os diagramas de corpo livre. E tendo que FD_a e FS_a são respectivamente, força no amortecimento e força na mola do acoplamento.

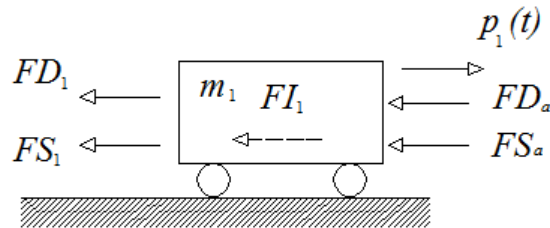


Figura 4– Diagrama de Corpo Livre da massa 1.
Fonte: Adaptado de Soriano (2014).

$$m_1\ddot{u}_1(t) + c_1\dot{u}_1(t) - c_a(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k_1u_1 - k_a(u_1 - u_2) = p_1(t) \quad (9)$$

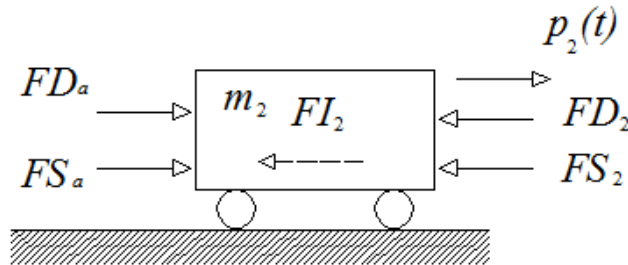


Figura 5– Diagrama de Corpo Livre da massa 2.
Fonte: Adaptado de Soriano (2014).

$$m_2\ddot{u}_2(t) + c_2\dot{u}_2(t) - c_a(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + k_2u_2 - k_a(u_1 - u_2) = p_2(t) \quad (10)$$

Representando as equações (9) e (10) matricialmente, e admitindo amortecimento nulo ($\{c\} = \{0\}$) e vibração livre ($\{p(t)\} = \{0\}$). A equação do movimento pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_a & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Ou de uma forma mais simplificada:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{0\} \quad (12)$$

Em que:

$[M]$ = Matriz de massa;

$[k]$ = Matriz de rigidez;

$\{\ddot{u}\}$ = Vetor da aceleração;

$\{u\}$ = Vetor do deslocamento.

Logo a solução homogênea para o caso com dois graus de liberdade é dada por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega_n t + \theta) \quad (13)$$

Substituindo a equação (13) e sua derivada segunda na equação do movimento (11), obtém-se o problema de autovalores e autovetores (14).

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_a - m_1 \omega_n^2 & -k_a \\ -k_a & k_2 + k_a - m_2 \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Resolvendo a equação (14) utilizando a solução trivial, em que $\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, encontram-se os autovalores (frequências naturais), e após isso é feita a substituição dos valores obtidos na equação (14) descobrindo os autovetores (modos de vibração).

Para que haja grande precisão nos resultados o ideal seria a consideração de infinitos graus de liberdade, mas na prática essa condição é impossível de ser alcançada (CARREIRA, 2012). Dessa maneira, em situações onde se requer grande precisão na determinação do comportamento dinâmico, com o no modelo matemático da Avaliação Não Destrutiva por vibração transversal, por exemplo, faz-se necessário o uso de modelos contínuos.

4.1.2 MODELO CONTÍNUO PARA VIBRAÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA

Nos sistemas discretos é admitido que a massa, o amortecimento e a constante de mola estão concentrados em certos pontos no sistema. Já nos modelos de sistemas contínuos, esses parâmetros são considerados distribuídos ao longo do comprimento dos elementos. (RAO, 2006).

Seja uma viga reta em vibração transversal como ilustrada na figura 6.

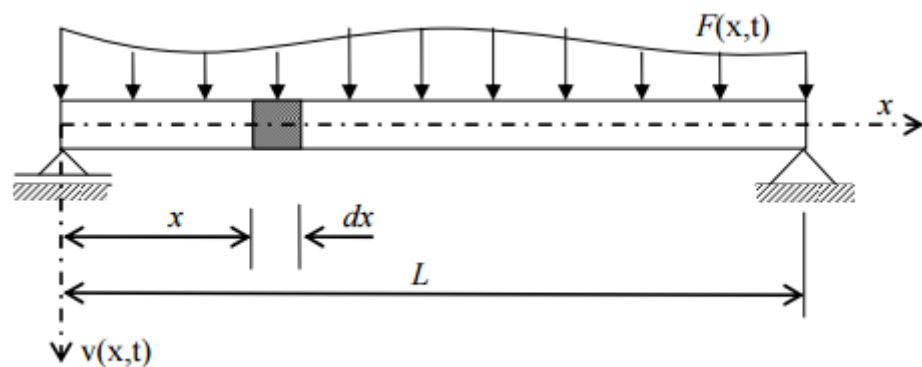


Figura 6– Viga em vibração transversal.
Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (2003).

Tendo como propriedades físicas importantes a rigidez a flexão $EI(x)$ e a massa por unidade de comprimento $m(x)$, ambas variando ao longo do comprimento da viga. O carregamento $F(x,t)$ pode variar no tempo e no espaço. Dessa forma os deslocamentos transversais também são funções dessas variáveis. A equação do movimento (15) dessa viga pode ser obtida pelo equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal, ilustrado na figura 7.

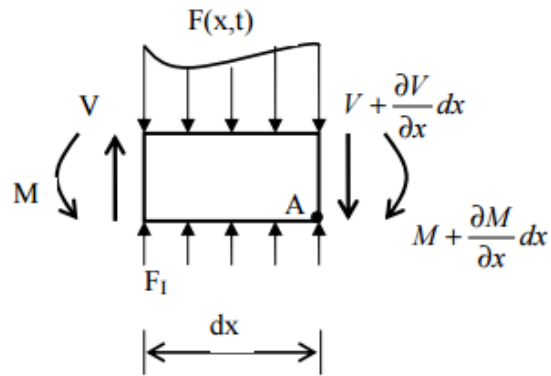


Figura 7– Forças em um elemento infinitesimal dx .
Fonte: Carreira (2008).

$$m(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (15)$$

Sendo:

$m(x)$ = Massa por unidade de comprimento;

$u(x, t)$ = Deslocamento transversal da viga;

E = Módulo de elasticidade do material da viga;

$I(x)$ = Momento de inércia da seção transversal;

x = Coordenada na direção longitudinal da viga;

t = Tempo.

Tendo a equação (15) uma função de duas variáveis, a solução dessa equação pode ser representada por uma função de duas variáveis (16).

$$u(x, t) = A(x)q(t) \quad (16)$$

Em que:

$q(t)$ = variação do movimento no tempo.

$$q(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (17)$$

$A(x)$ = amplitude do deslocamento ao longo do comprimento.

$$A(x) = C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x + C_5 \cosh \lambda x + C_6 \sinh \lambda x \quad (18)$$

Sendo:

C_1 a C_6 = constantes;

ω = frequência natural de vibração;

λ = constante de separação.

Aplicando as condições iniciais encontram-se C_1 e C_2 , e com as condições de contorno encontram-se C_3 a C_6 .

A constante de separação de variáveis é relacionada com as frequências naturais pela equação (19).

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2 m(x)}{EI} \quad (19)$$

Neste trabalho será considerado que a viga esteja na condição de suspensão livre. Os pontos nodais dos quatro primeiros modos de vibração de uma viga com extremidades livre-livre são apresentados na figura 8.

Condição de Contorno	Modo	Formas e Pontos Nodais	Condições de Contorno	Equação da frequência	λL
Livre-livre	1	Movimento de corpo rígido	$A''(0)=0$		0,000
	2	0.224 0.776	$A'''(0)=0$	$\cos(\lambda L)$	4,730
	3	0.132 0.50 0.868	$A''(L)=0$	$\cosh(\lambda L)=1$	7,853
	4	0.094 0.356 0.644 0.906	$A'''(L)=0$		10,966

Figura 8– Frequência natural e modos de vibração de uma viga prismática com extremidades livres.

Fonte: Stokey, 2002 (apud CARREIRA, 2012, p.60).

4.2 DETECÇÃO DE DANOS EM ESTRUTURAS

Para a avaliação da qualidade dos produtos utilizados na construção civil, o ideal é empregar técnicas capazes de identificar defeitos sem afetar o seu desempenho futuro (CARREIRA, 2012). Essas técnicas podem ser denominadas de Avaliação Não Destrutiva (AND), e são fundamentadas na medição de alguma característica física que tem relação direta com a resistência mecânica da estrutura ou componente estrutural em análise.

Entre os métodos mais utilizados recentemente nas engenharias civil e mecânica para a localização de danos, estão às aplicações de técnicas de análise modal. Nessas técnicas, o dano é localizado mediante a comparação de características da estrutura íntegra e danificada. Assim sendo há técnicas fundamentadas nas alterações das frequências naturais e/ou modos de vibração bem como métodos baseados nas variações na energia de deformação e o método proposto por Pandey et al. (1991) no qual o defeito é localizado mediante as diferenças nas curvaturas modais entre a estrutura íntegra e danificada.

4.2.1 MÉTODO DAS ALTERAÇÕES DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

O surgimento de alterações nas propriedades físicas de um elemento estrutural leva a variações na sua frequência natural, pois, esta é relacionada proporcionalmente com a raiz quadrada do quociente da rigidez pela massa. Com isso para que haja variações nas frequências é necessário alterações com valores significativos na rigidez, devido à raiz quadrada da equação.

Os defeitos existentes em uma estrutura além de causar uma mudança na sua rigidez, também pode afetar a distribuição de propriedades como massa e amortecimento, podendo ocasionar uma alteração na resposta dinâmica da estrutura.

O método demonstra algumas limitações na identificação das alterações de frequência, pois para que haja uma variação expressiva é necessária a existência de danos consideravelmente grandes, tendo que se fazer medições precisas para garantir resultados satisfatórios. Outra limitação é que o método não localiza o dano, pelo fato da frequência natural ser uma propriedade global do elemento estrutural (GUERREIRO, 2014).

Owolabi et al.(2001) utilizaram o método de forma experimental para detectar danos em vigas com apoios simples e engastadas. Foram analisadas as alterações nas frequências dos três primeiros modos de flexão com o dano variando e reduzindo sua inércia. Os autores relataram a obtenção de resultados considerados satisfatórios na identificação da presença do dano. Contudo, os mesmos relatam, que há a necessidade de outra técnica para a localização do dano.

Gadeá (2002) também aplicou o método para identificar danos em estruturas simples e em uma plataforma fixa de petróleo de forma numérica. Foram analisados dois modos de flexão em dois sentidos e dois modos de torção. O autor atingiu os objetivos propostos, demonstrando a eficiência do método, conseguindo identificar danos, mesmo em situações poucos favoráveis.

4.2.2 MÉTODO DAS ALTERAÇÕES DOS MODOS DE VIBRAR

O dano presente em uma estrutura geralmente se caracteriza por uma perda de rigidez, que por sua vez pode ser causada por uma redução na seção transversal ou inércia do elemento estrutural. Essa variação de rigidez ocasiona alterações nas frequências e modos naturais de vibração. E como as distribuições de tensões em uma estrutura não é uniforme para cada frequência natural de vibração, afetará cada modo de vibração de forma diferente (BRASILIANO, 2002).

O método é baseado na comparação dos modos de vibração. Esta técnica utiliza-se de diversos critérios para a identificação do dano. Os mais comuns são: o indicador denominado *MAC (Modal Assurance Criterion)*, que permite uma comparação global entre os valores da estrutura danificada e íntegra. E o *COMAC (Coordinate Modal Assurance Criterion)*, que permite comparar os valores modais em cada ponto da estrutura (GUERREIRO, 2014).

Fayyadh e Razak (2011) utilizaram a técnica baseada nas alterações dos modos de vibração numericamente em uma viga de concreto armado. Foram analisados seis modos normais de vibração e os autores concluíram que todos os modos mostraram boa sensibilidade para a identificação do dano.

4.2.3 MÉTODO DAS ALTERAÇÕES DAS CURVATURAS MODAIS

Os métodos baseados nas alterações da frequência permitem a detecção de danos de modo simples, mas a sua localização é outro problema. Como é o caso da existência de danos em duas localizações distintas que resultam numa mesma variação na frequência (GUERREIRO, 2014).

Tendo em vista que os métodos para a detecção de danos apenas os identificava e não apontava sua posição, Pandey et al. (1991) propuseram um método no qual o dano é localizado a partir das diferenças nas curvaturas dos modos de vibração de flexão.

Para a análise do método, considera-se a seção de uma viga ilustrada na figura 9.

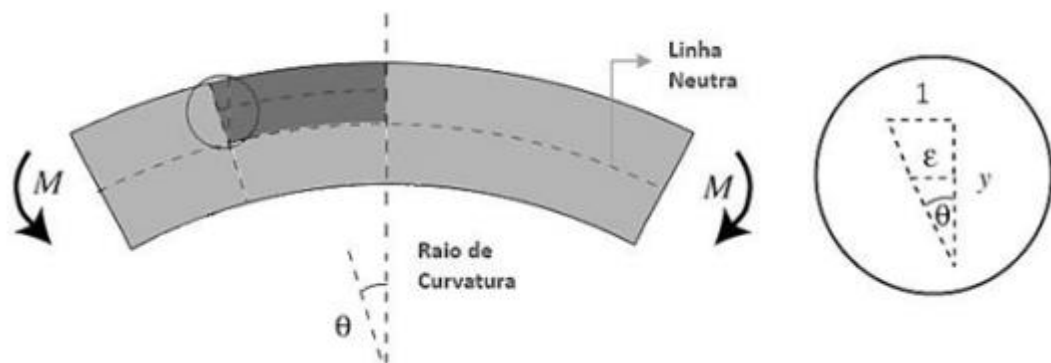


Figura 9– Relações decorrentes de um elemento em flexão.
Fonte: Guerreiro (2014).

Pela definição de curvatura, é possível estabelecer as relações apresentadas abaixo:

$$\theta = \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{y} \quad (20)$$

$$\varepsilon = \frac{y}{R} = ky \quad (21)$$

Em que:

ε é a deformação axial;

R é o raio de curvatura;

θ é o ângulo de flexão;

y é a distância da linha neutra a uma fibra da viga;

k é a curvatura.

Considerando que o material seja homogêneo e comporte-se de maneira linear-elástica, substituindo na equação (21) a lei de Hooke ($\varepsilon = \sigma/E$) e também a fórmula da flexão ($\sigma = My/I$), pode-se definir a expressão da curvatura em função do momento fletor e da rigidez da flexão da seção, apresentada na equação (22).

$$k = \varnothing'' = \frac{M}{EI} \quad (22)$$

Sendo:

\varnothing'' é a curvatura da seção;

M é o momento fletor na seção;

E é o módulo de elasticidade;

I é o momento de inércia da seção.

As curvaturas modais (23) podem então ser obtidas com recurso a segunda derivada dos deslocamentos modais, obtidos através de diferenças finitas centradas.

$$\varnothing_q'' = \frac{\varnothing_{q-1} - 2\varnothing_q + \varnothing_{q+1}}{h^2} \quad (23)$$

Em que:

\varnothing_q'' é o valor da curvatura no ponto q ;

\varnothing_{q-1} é o valor do deslocamento no ponto $q-1$;

\varnothing_q é o valor do deslocamento no ponto q ;

\varnothing_{q+1} é o valor do deslocamento no ponto $q+1$;

h é o comprimento de cada elemento.

Portanto, para cada um dos modos de vibração, o valor absoluto da diferença das curvaturas das estruturas danificada e íntegra deve ser máximo na zona com defeito.

O método possui algumas limitações, tais como dificuldade na medição dos graus de liberdade do elemento estrutural, principalmente considerando os de rotação, devido a restrições dos equipamentos.

A análise realizada por Pandey (1991) ocorreu de forma numérica por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) nos cinco primeiros modos de deformação em uma viga simplesmente apoiada e também para uma viga em balanço. Foi verificado que todos os modos obtiveram variações maiores na região onde o dano estava localizado e que o método se mostrou mais sensível para modos maiores, tendo a diferença aumentada a cada passo.

Dawari e Vesmawala (2013) realizaram ensaio de forma numérica em uma viga simplesmente apoiada utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), e obtiveram as três primeiras frequências naturais e seus respectivos modos normais de vibração. Obtiveram resultados satisfatórios. A máxima diferença para cada um dos casos ocorreu nas zonas danificadas, mesmo para o cenário de múltiplos danos.

Guerreiro (2014) realizou ensaios numéricos em três modelos analíticos: uma viga biapoiada, uma viga engastada e um pórtico, em três diferentes refinamentos dos elementos. Por meio de MEF utilizando o programa de cálculo *SAP2000*, o autor obteve os cinco primeiros modos de vibração. Foi constatado que a qualidade dos resultados depende do refinamento da malha, quanto maior o refinamento melhor os resultados. Notou também que pelo fato do pórtico ser uma estrutura bidimensional, este possui uma dependência dos graus de liberdade horizontais e verticais, o que leva a um comportamento mais instável. E, por último, evidenciou que este método permite identificar mais do que um dano, mas que possui sensibilidade suficiente para detectar a severidade deste.

Bonetti (2014) realizou ensaios em duas vigas metálicas, sendo que as diferenças nas curvaturas modais foram calculadas para os três primeiros modos de flexão. Com isso foi apontado que na diferença relativa em um dos casos não foi identificado o dano. Já para o caso das diferenças absolutas apresentaram resultados razoáveis para o dano localizado $0,1L$, tendo os três modos indicados o dano. Para o caso com dano localizado $0,5L$ os resultados não apontaram precisamente a localização do dano, devido o fato de um dos modos ter um ponto nodal localizado no mesmo local do dano e os outros modos, um deles possuir ruídos de ensaio.

5 MÉTODO

Os itens a seguir apresentam os métodos empregados para o desenvolvimento desse trabalho.

5.1 ANÁLISE NUMÉRICA

A primeira parte no estudo foi a definição de uma malha utilizando o programa *GMSH* versão 2.10.1, com o qual foi gerada uma malha unidimensional com elementos de barra de três nós. No programa *Calculix* esses elementos são denominados B32R. A malha foi discretizada com refinamento de 1 mm, totalizando 2001 elementos e dentre esses foram selecionados 21 pontos espaçados entre si de 100 mm, ilustrado na figura 10.

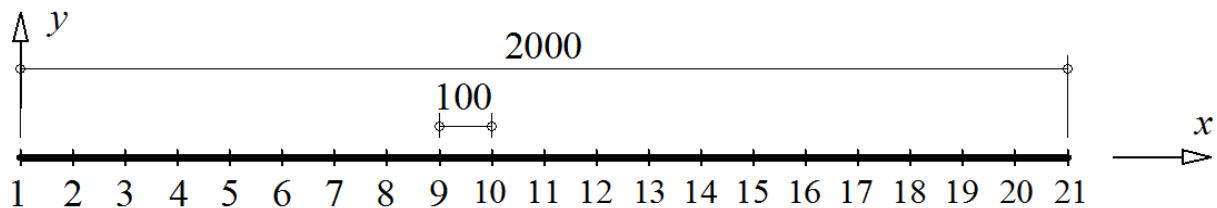


Figura 10- Discretização do elemento.
Fonte: Autoria Própria.

A malha gerada foi salva no padrão de arquivo de dados do programa ABAQUS (*.inp). O arquivo com extensão .inp foi editado no editor SciTE no qual foi possível definir as propriedades do material, as condições de contorno bem como o tipo de análise.

Foram admitidas as seguintes propriedades para as vigas: módulo de elasticidade $E=210$ GPa, densidade 7850 kg/m³ e seção retangular de 30×30 mm.

Dando continuidade ao estudo, o próximo passo foi a análise modal no qual foi utilizado programa *CALCULIX* versão 2.8. Este programa é um *software* livre para a análise por meio de elementos finitos, criado por Klaus Wittig e Guido Dhondt. O programa foi utilizado para a análise modal das vigas. Foram determinados os oito primeiros modos de flexão e suas respectivas frequências naturais e deslocamentos modais, desconsiderando os modos de deformação axial e os de torção.

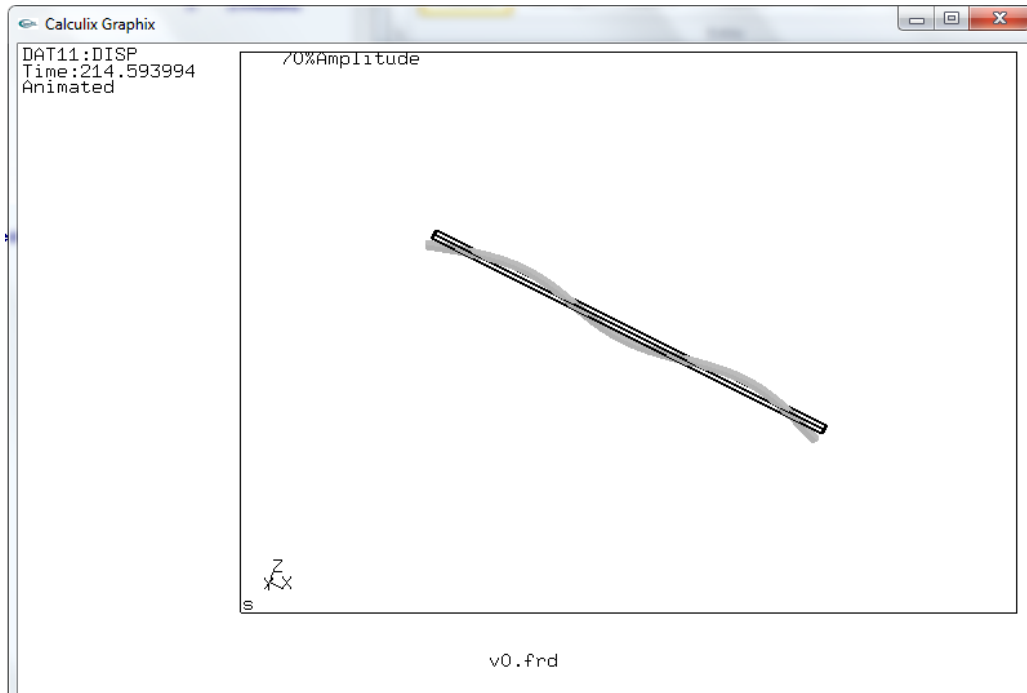


Figura 11– Interface do programa Calculix versão 2.8.
Fonte: Klaus Wittig e Guido Dhondt.

Supondo-se que os danos em uma estrutura afetará somente a matriz de rigidez, foi modelada a mudança por uma redução no momento de inércia da seção. A Figura 12 ilustra os locais onde foram simulados os danos de 40% no momento de inércia para cada caso, com alterações nas propriedades de 10 elementos resultando na extensão do dano em 10 mm.

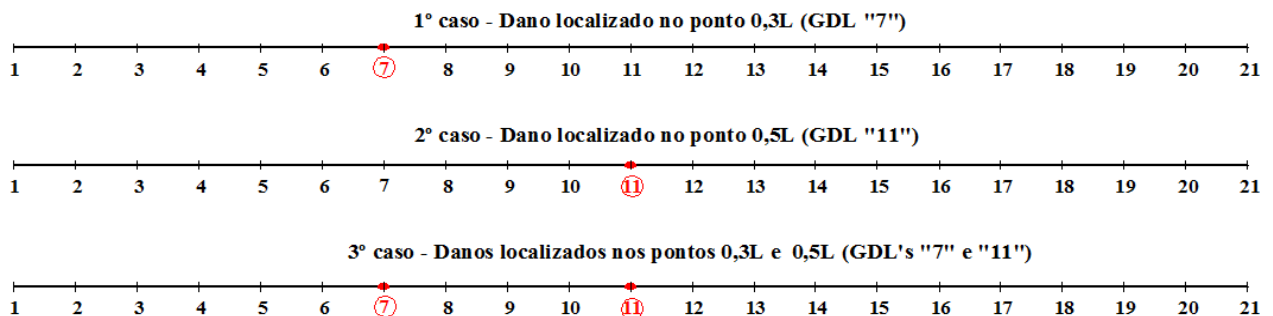


Figura 12– Localização dos danos nos diferentes casos analisados.
Fonte: Autoria Própria.

A tabela 1 apresentam as denominações das vigas de acordo com os casos de danos e suas reduções na inércia e área por elemento.

Tabela 1- Relação dos casos dos danos com as vigas e suas reduções.

Viga	Caso	GDL's	Redução de inércia	Redução de área
V_0	Viga Íntegra	-	-	-
V_1	1º Dano	“7”	40%	22,56%
V_2	2º Dano	“11”	40%	22,56%
V_3	3º Dano	“7” e “11”	40%	22,56%

Fonte: Autoria Própria.

5.2 DETECÇÃO DOS DANOS PELO MÉTODO NAS CURVATURAS MODAIS

Com a análise modal foram obtidas as frequências naturais e os deslocamentos modais verticais dos 21 GDL's ao longo do comprimento das vigas para os oito primeiros modos de flexão. Com os deslocamentos nos 21 GDL's de cada modo foi utilizada a equação (23) para determinar as curvaturas modais das vigas.

Posteriormente, para cada GDL, foram calculadas as diferenças absolutas entre as curvaturas modais das vigas íntegras e danificadas conforme equação (24).

$$D_j = |\phi_j^d - \phi_j^i| \quad (24)$$

Sendo:

D_j = diferença absoluta na curvatura modal do GDL j;

ϕ_j^d = curvatura modal no GDL j da viga danificada;

ϕ_j^i = curvatura modal no GDL j da viga íntegra;

Com as diferenças nas curvaturas foram construídos gráficos “Diferença na Curvatura Modal x Grau de Liberdade” nos quais é identificada a posição do dano.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

6.1 VARIAÇÕES NAS FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO.

A tabela 2 apresenta as frequências naturais e suas variações para os oito primeiros modos de flexão da viga íntegra (V_0) e da viga (V_1) com dano de 40% na inércia no ponto 0,3L (GDL 7).

Tabela 2– Frequências Naturais vigas V_0 e V_1 .

Modo	Frequências Naturais (Hz)		
	Viga íntegra (V_0)	Viga Danificada (V_1)	Porcentagem da diferença
1º	39,844	39,816	0,07%
2º	109,682	109,615	0,06%
3º	214,594	214,556	0,02%
4º	353,804	353,799	0,00%
5º	526,806	526,691	0,02%
6º	732,952	732,833	0,02%
7º	971,493	971,481	0,00%
8º	1241,588	1241,388	0,02%

Fonte: Autoria Própria.

A tabela 3 apresenta as frequências naturais e suas variações para os oito primeiros modos de flexão da viga íntegra (V_0) e da viga (V_2) com dano de 40% na inércia no meio do vão (GDL 11).

Tabela 3– Frequências Naturais vigas V_0 e V_2 .

Modo	Frequências Naturais (Hz)		
	Viga íntegra (V_0)	Viga Danificada (V_2)	Porcentagem da diferença
1º	39,844	39,806	0,10%
2º	109,682	109,682	0,00%
3º	214,594	214,541	0,02%
4º	353,804	353,802	0,00%
5º	526,806	526,667	0,03%
6º	732,952	732,945	0,00%
7º	971,493	971,125	0,04%
8º	1241,588	1241,568	0,00%

Fonte: Autoria Própria.

A tabela 4 apresenta as frequências naturais e suas variações para os oito primeiros modos de flexão da viga íntegra (V_0) e da viga (V_3) com danos de 40% na inércia nos pontos 0,3L e 0,5L (GDL7 e GDL 11, respectivamente).

Tabela 4– Frequências Naturais vigas V_0 e V_3 .

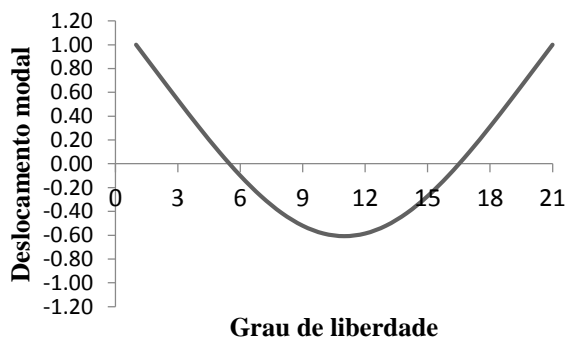
Modo	Frequências Naturais (Hz)		
	Viga íntegra (V_0)	Viga Danificada (V_3)	Porcentagem da diferença
1º	39,844	39,778	0,16%
2º	109,682	109,614	0,06%
3º	214,594	214,502	0,14%
4º	353,804	353,797	0,00%
5º	526,806	526,552	0,05%
6º	732,952	732,827	0,02%
7º	971,493	971,244	0,03%
8º	1241,588	1241,369	0,02%

Fonte: Autoria Própria.

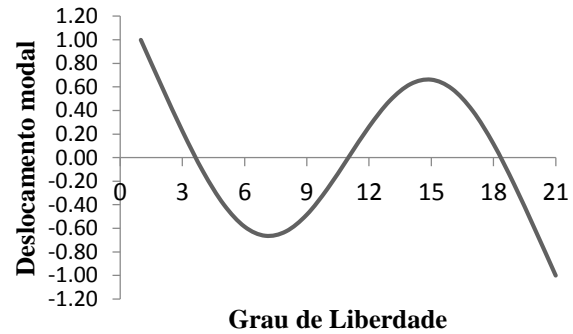
As alterações nas frequências naturais para as vigas analisadas variaram entre 0,00% a 0,16%. Como as porcentagens são muito pequenas não é possível identificar com certeza a existência de um dano apenas pela análise das alterações das frequências naturais.

Os gráficos 1 a 8 apresentam os oito primeiros modos de flexão da viga íntegra.

1º Modo de flexão

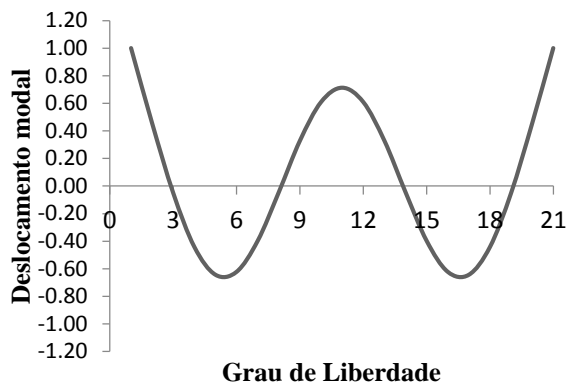
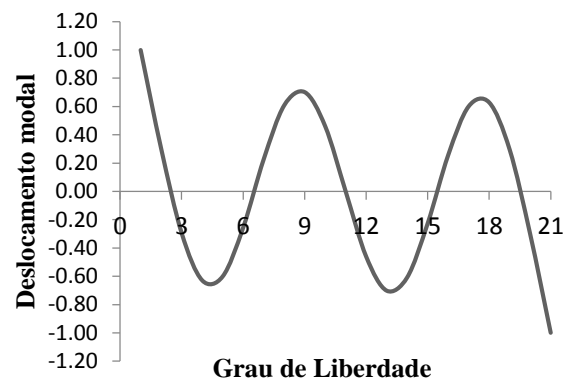


2º Modo de flexão

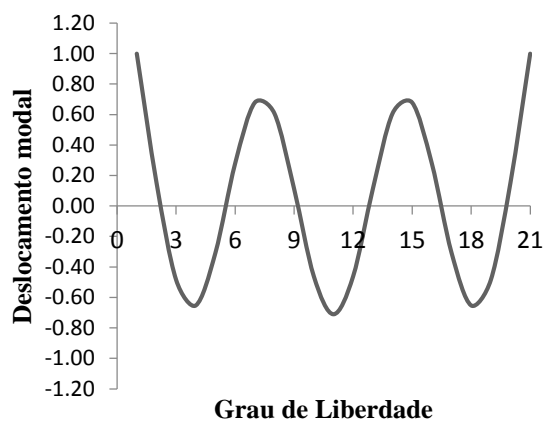
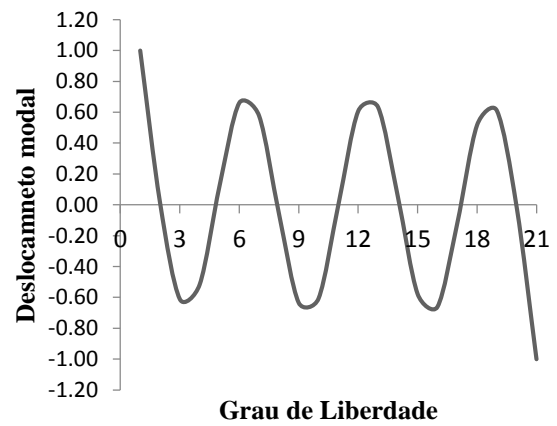


Gráficos 1 e 2 – 1º e 2º modos de flexão da viga íntegra (respectivamente).

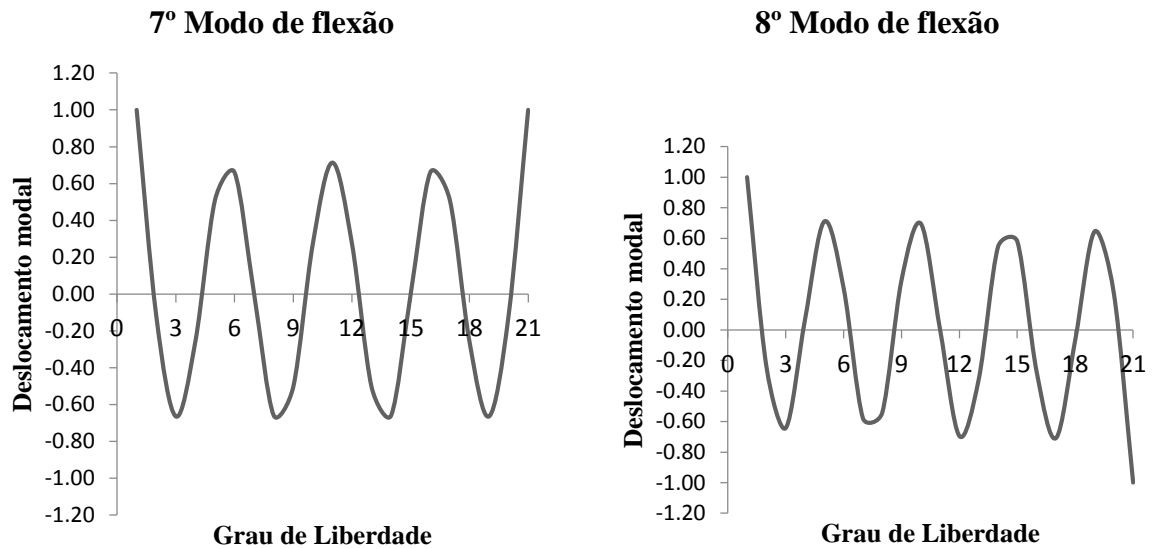
Fonte: Autoria Própria.

3º Modo de flexão**4º Modo de flexão**

Gráficos 3 e 4 – 3º e 4º modos de flexão da viga íntegra (respectivamente).
 Fonte: Autoria Própria.

5º Modo de flexão**6º Modo de flexão**

Gráficos 5 e 6 – 5º e 6º modos de flexão da viga íntegra (respectivamente).
 Fonte: Autoria Própria.



Gráficos 7 e 8 – 7º e 8º modos de flexão da viga íntegra (respectivamente).
Fonte: Autoria Própria.

Os gráficos 9 à 16 a seguir apresentam os modos de flexão das vigas V_0 , V_1 , V_2 e V_3 sobrepostos. Pode-se perceber que a diferença entre os deslocamentos modais é imperceptível à olho nu. Sendo assim não foi possível identificar e localizar os danos no elemento estrutural somente pela análise dos deslocamentos modais.

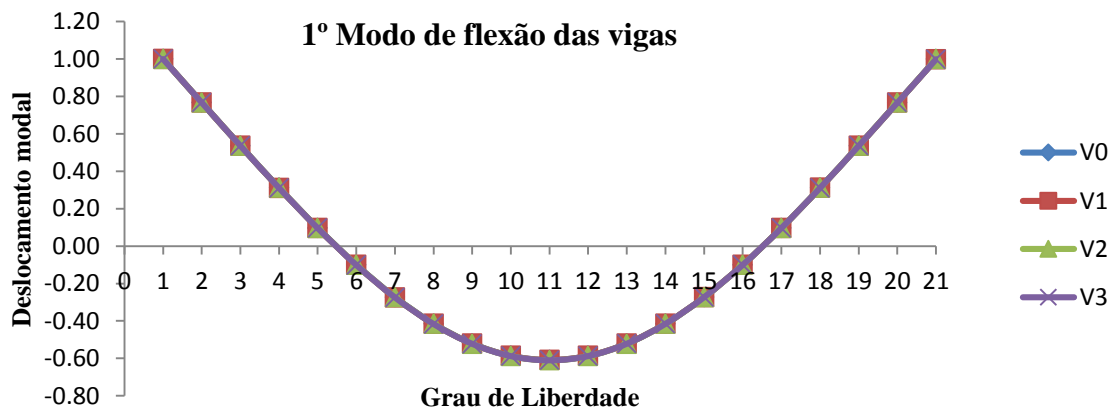


Gráfico 9 – 1º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

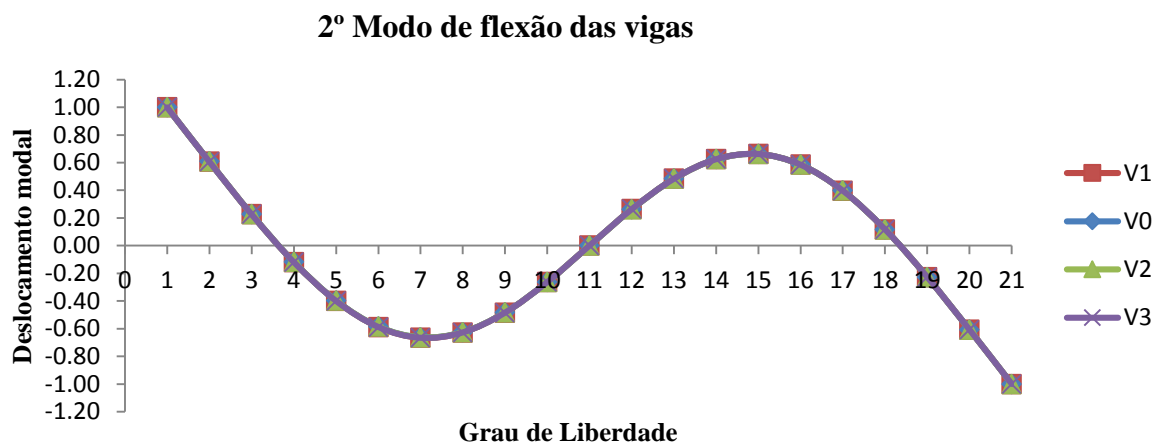


Gráfico 10 – 2º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

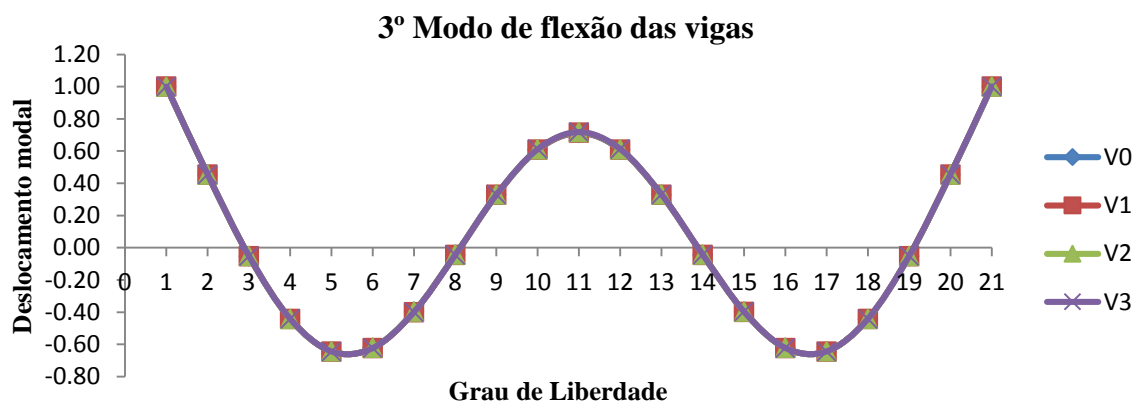


Gráfico 11 – 3º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

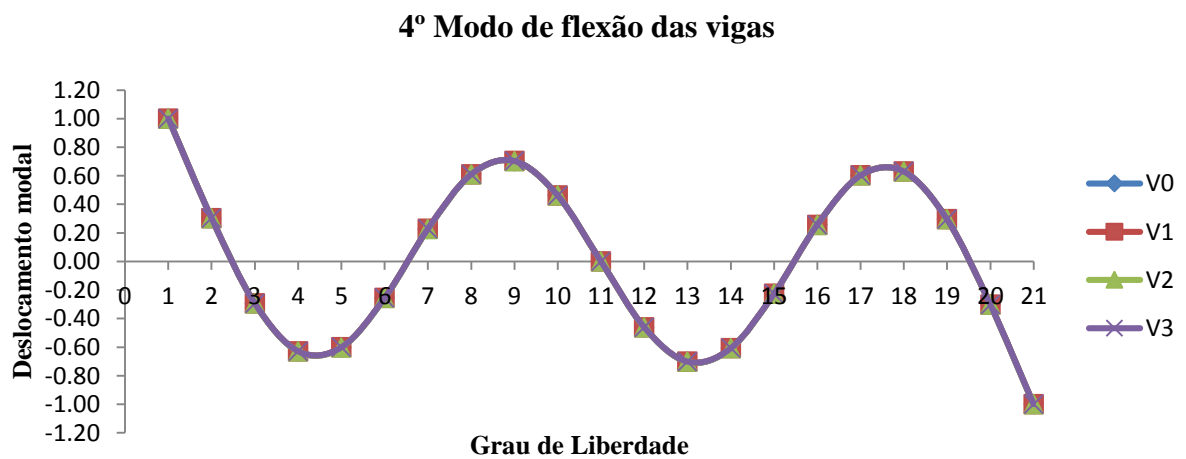


Gráfico 12 – 4º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

5º Modo de flexão das vigas

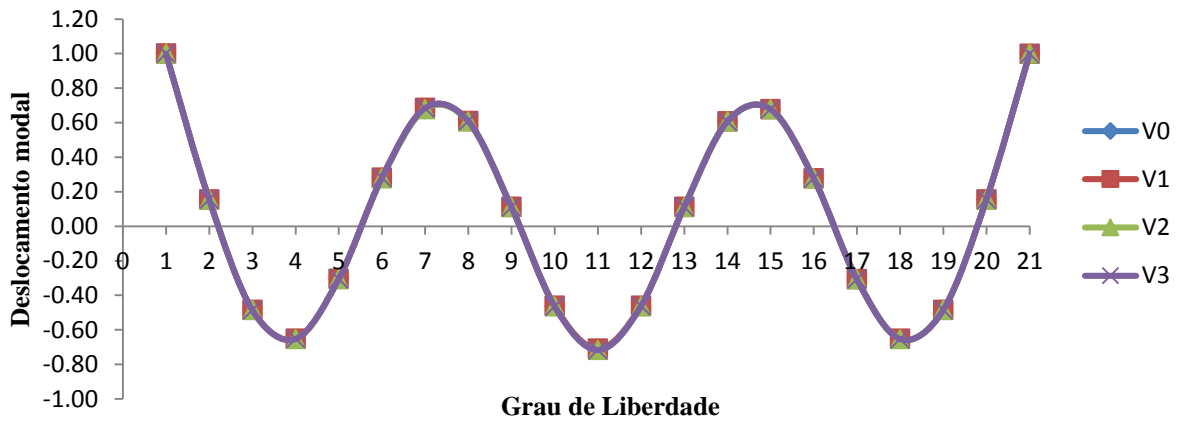


Gráfico 13 – 5º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

6º Modo de flexão das vigas

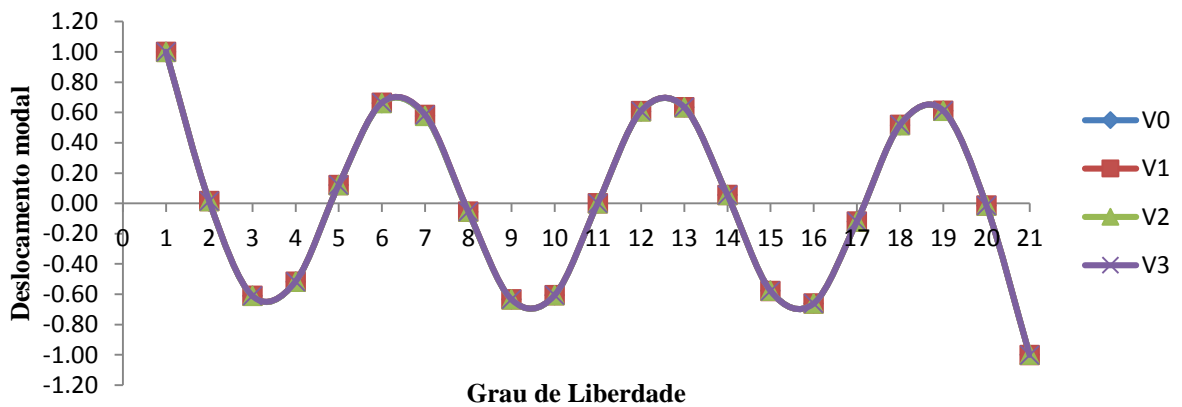


Gráfico 14 – 6º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

7º Modo de flexão das vigas

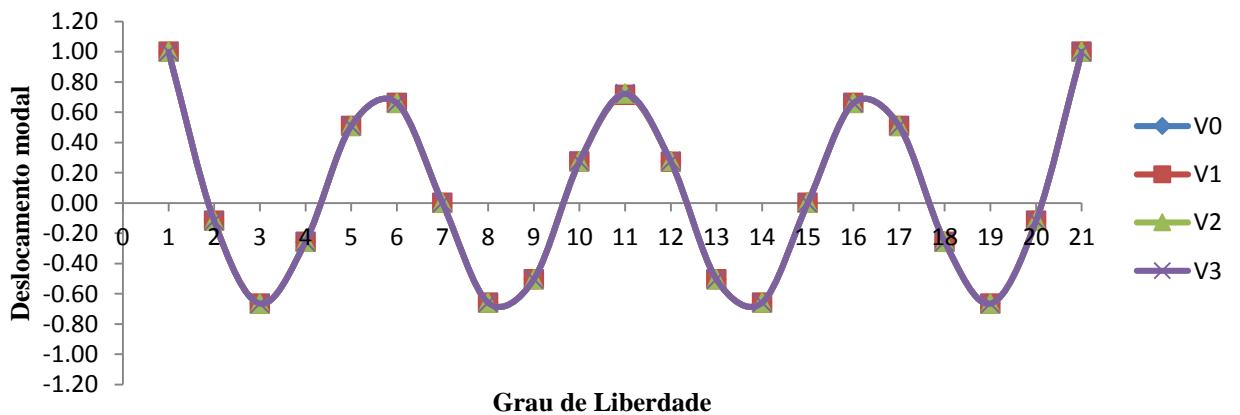


Gráfico 15 – 7º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

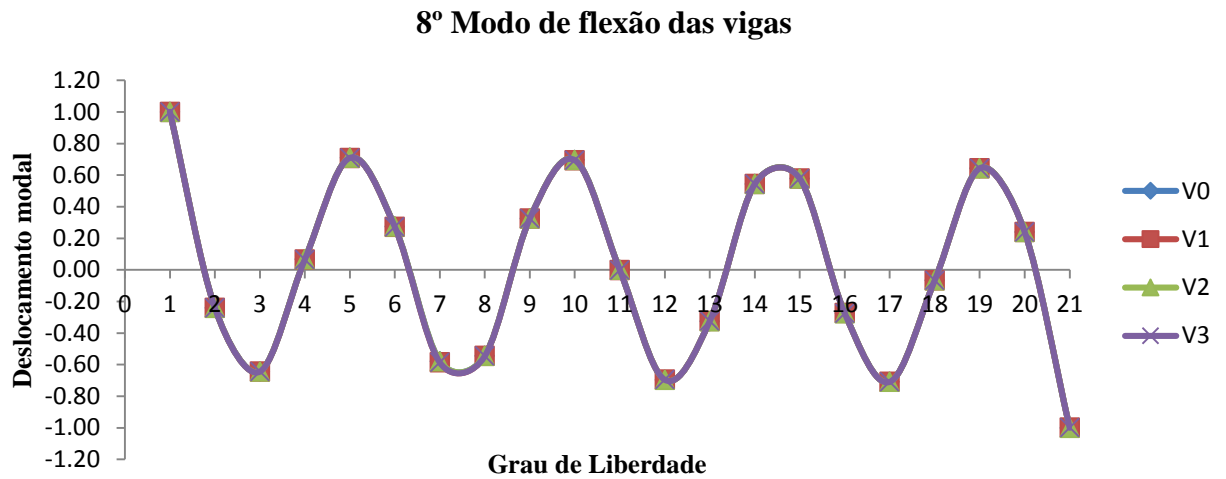


Gráfico 16 – 8º Modo de flexão das vigas.
Fonte: Autoria Própria.

6.2 DIFERENÇAS NAS CURVATURAS MODAIS

A figura 13 apresenta as diferenças absolutas nas curvaturas modais dos oito primeiros modos de flexão entre as vigas V_0 e V_1 .

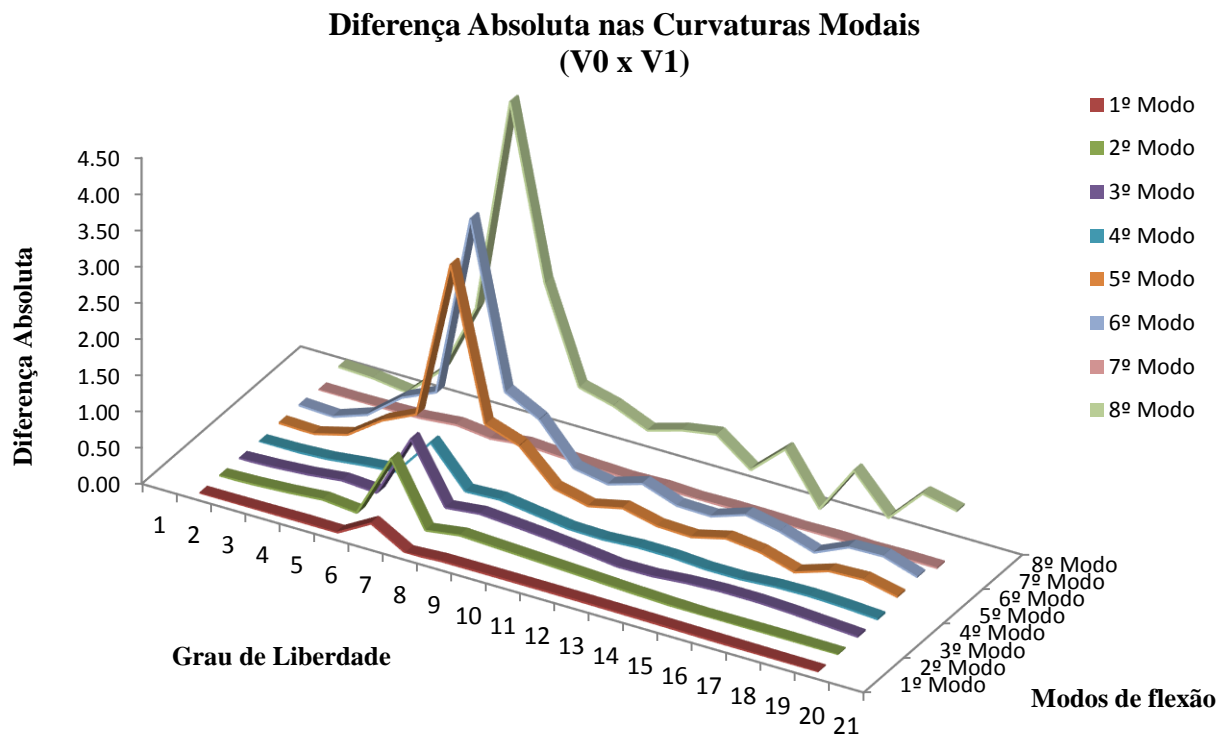


Figura 13 – Diferença Absoluta nas Curvaturas Modais entre as vigas V_0 e V_1 .
Fonte: Autoria Própria.

Os resultados apresentados na figura 13 apontam que o dano está localizado no Grau de Liberdade “7”, sendo que sete dos oito modos de flexão contribuíram para a identificação e localização do mesmo. É possível observar também que o 7º modo não apresentou nenhuma variação entre as curvaturas modais, pelo fato do mesmo ter um ponto nodal onde o dano está localizado.

A figura 14 apresenta as diferenças absolutas nas curvaturas modais dos oito primeiros modos de flexão entre as vigas V_0 e V_2 .

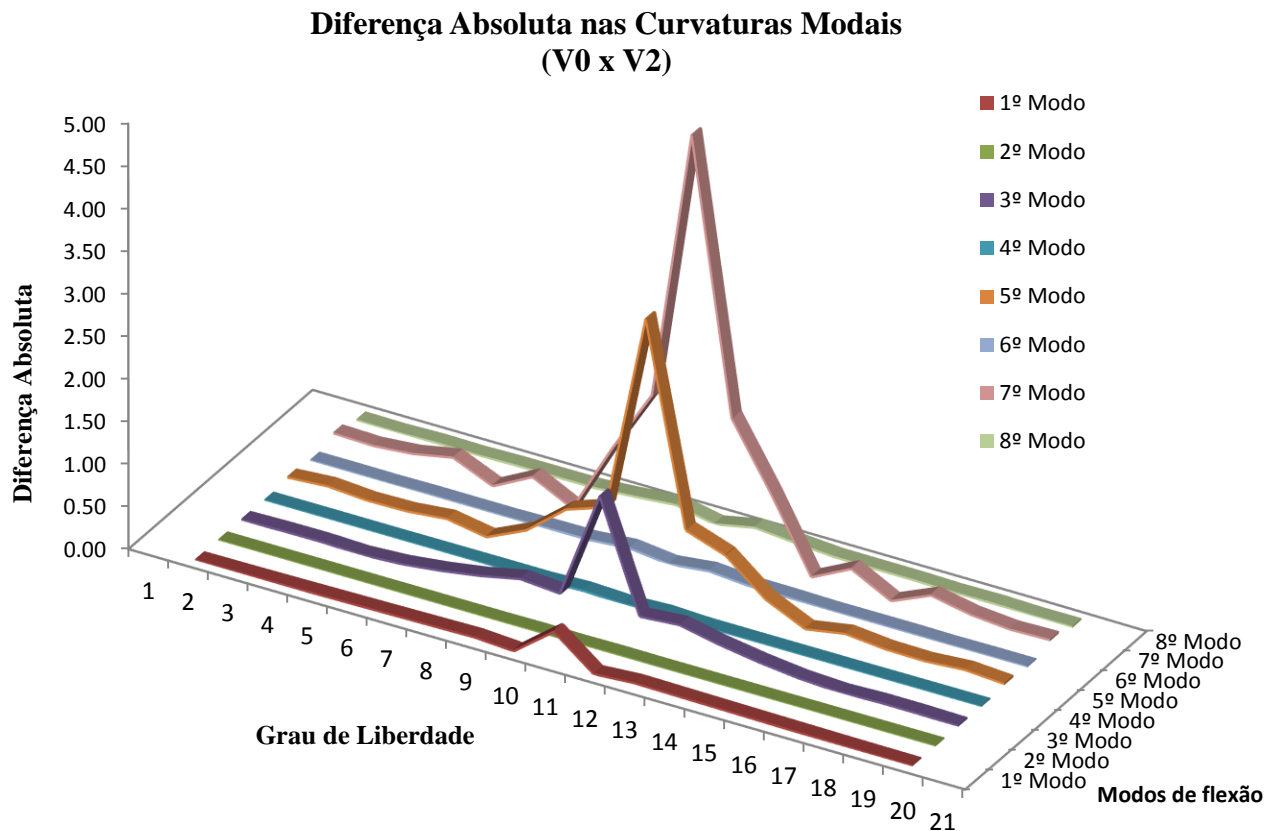
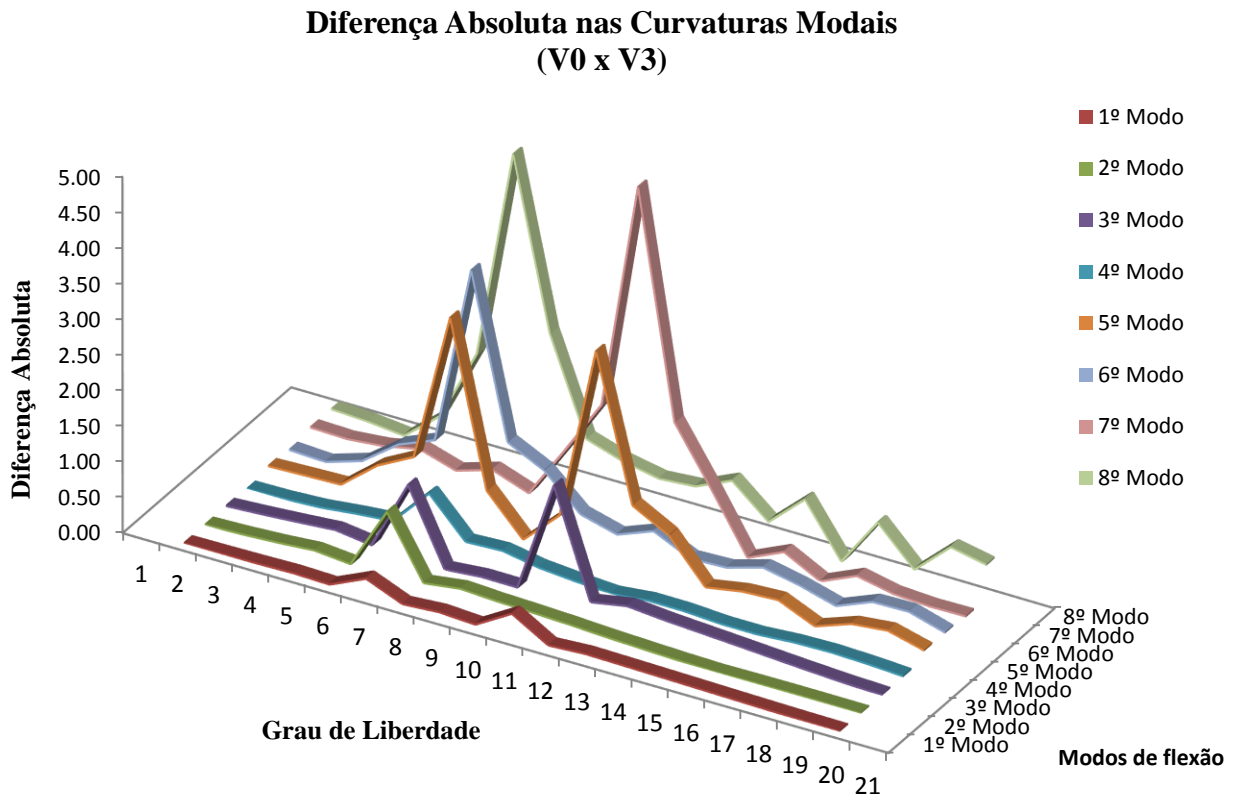


Figura 14– Diferença Absoluta nas Curvaturas Modais entre as vigas V_0 e V_2 .
Fonte: Autoria Própria.

Os dados apresentados na figura 14 mostram que há um dano localizado no Grau de Liberdade “11”, sendo que dos oito modos apenas quatro apresentam variações elevadas nesse ponto. As diferenças nos modos de números pares (2º, 4º, 6º e 8º) não apresentaram variações devido ao fato do dano estar localizado no centro do vão, onde esses pontos são pontos nodais desses dos modos pares.

A figura 15 apresenta as diferenças absolutas nas curvaturas modais dos oito primeiros modos de flexão entre as vigas V_0 e V_3 .



**Figura 15– Diferença Absoluta nas Curvaturas Modais entre as vigas V_0 e V_3 .
Fonte: Autoria Própria.**

Analisando os resultados apresentados na figura 15, verificam-se picos nos Graus de Liberdade “7” e “11”, identificando e localizando os danos modelados. Sendo que para sete dos oito modos identificaram o dano no GDL “7” e para o dano no GDL “11” quatro dos modos apontam variações elevadas.

No modos mais elevados observou-se variações em posições onde não há defeitos. Porém, a magnitude destes, quando comparados com os que localizaram os danos, é muito pequena, podendo ser desprezada.

Observando os trabalhos semelhantes citados no referencial teórico e a análise dos resultados, observou-se que o método é eficiente para a identificação de defeitos nas estruturas.

7 CONCLUSÕES

As variações nas frequências naturais analisadas para cada caso, não se mostraram eficiente para a identificação dos danos. Assim como as modificações nos modos de vibração também não tiveram diferenças significativas.

De forma geral, analisando os gráficos das diferenças absolutas das curvaturas entre as vigas, pode-se observar que os maiores valores das diferenças encontraram-se nos pontos previstos dos danos, resultando em bons resultados para a identificação do defeito.

Os resultados apontaram para a necessidade de se fazer a análise em pelo menos três modos de flexão a fim de localizar danos na região do meio do vão já que o segundo modo apresenta um ponto nodal nesse local. Dessa forma, no caso de haver um dano no meio do vão, haverá na região danificada, dois picos de considerável amplitude indicando a posição do dano no gráfico das diferenças das curvaturas modais. Dessa forma este trabalho contribuiu com a aplicação do método em análise experimental indicando o número mínimo de modos a serem determinados para a localização do dano.

Logo, concluiu-se que o método das alterações nas curvaturas modais possui precisão para identificar e localizar mais do que um dano com diferentes posições ao longo de uma viga.

REFERÊNCIAS

BONETTI, Ludmila de Souza. **Deteção de danos em vigas empregando o método das diferenças nas curvaturas modais**. 2014. 72f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento Acadêmico de Construção Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014.

BRASILIANO, Andrea; DOZ Graciela N.; BRITO José Luís V. Avaliação de dano em estruturas por intermédio das características dinâmicas. **Mecânica Computacional**. v. XXI. p. 1893-1911, 2002.

CARREIRA, Marcelo R. **Avaliação da rigidez à flexão de toras de madeira por meio de vibração transversal**. 2012. 411 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, 2012.

CINDRA, José L. Um esboço da história do conceito de trabalho virtual e suas aplicações. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v.30, n. 3, 3601, 2008.

CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of Structures**. 3 ed. Computers & Structures, 2003.

CUNHA, Alvaro; CAETANO, Elsa. Experimental Modal Analysis of Civil Engineering Structures. **Journal of Sound and Vibration**, 2006.

DAWARI, Vaishali; VESMAWALA, Gauran G. Structural Damage Identification Using Modal Curvature Differences. **Journal of Mechanical and Civil Engineering**. p. 33-38, 2013.

FAYYADH, M. M.; RAZAK, H. A. Detection of damage location using mode shape deviation: Numerical study. **International Journal of the Physical Sciences**, v. 6 (24), p.5688-5698, 2011.

GADEÁ, Anderson S. M. **Identificação de danos estruturais a partir das funções de resposta em frequência (FRF)**. 2002. 91f. Tese (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.

GUERREIRO, Mauro A.J. **Identificação de Dano Estrutural com Base em Análise Modal**. 2014. 140 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Nova de Lisboa, 2014.

HE, Jimin; FU, Zhi-Fang. **Modal Analysis**. 7. ed. Oxford, MA: Butterworth-Heinemann, 2001.

HIBBELER R. C. **Resistencia dos materiais**. 1. ed. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2010.

NASCIMENTO, Carlos A. M. **Modelagem numérica de vibrações em cabos de transmissão de energia elétrica**. 2011. 71 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, 2011.

OWOLABI, G. M.; SWAMIDAS, A.S.J.; SESHADRI R. Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 265, p. 1 -22, 2003.

PANDEY, A. K.; BISWAS, M.; SAMMAN, M. M. Damage detection from changes in curvature mode shapes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 145, n. 2, p. 321-332, 1991.

RAO, Singiresu S. **Mechanical vibrations**. 5. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2011.

SILVA, Samuel da. **Vibrações Mecânicas**. Foz do Iguaçu: UNIOESTE, 2009. 13 p.

SORIANO H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier , 2014.