

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MIRIAN FERNANDA DOLORES GRANADO MARTINS

**MÉTODOS ITERATIVOS PARA CÁLCULO DE AUTOVALORES E
APLICAÇÕES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

MIRIAN FERNANDA DOLORES GRANADO MARTINS

**MÉTODOS ITERATIVOS PARA CÁLCULO DE AUTOVALORES E
APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Licenciado em Matemática”.

Orientador: Prof. Me. Rafael Prado da Silva

CORNÉLIO PROCÓPIO

2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Rafael Prado da Silva
(Orientador)

Profa. Dra Glauca Maria Bressan

Prof. Me. Valter Henrique Biscaro Raposo

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me sustentou desde o início, pela saúde e pela luz no caminho.

Agradeço aos meus pais Marcelo e Sueli, que me apoiaram durante toda a vida, em especial na graduação, tornando tudo isso possível. Ao meu avô José Granado (*in memoriam*), que me inspirava diariamente em todas as fases da vida. Aos meus irmãos Júnior, Camila e Roberta Dolores que são meus alicerces.

Agradeço ao meu esposo James, que viveu comigo toda essa caminhada e tantas outras, que está comigo nas conquistas, lutas diárias e acreditando em mim!

Sou grata ao meu orientador, Rafael Prado da Silva, pela paciência, dedicação, por todo o ensinamento e por ter sempre me incentivado quando precisava de um empurrão.

A todos os meus amigos, em especial a Débora e Stephany que trago ao longo da vida, e a Glaucia, Jéssica, Giovanna e Tais, que foram presentes nesse percurso e que muitas vezes me auxiliaram muito.

E Por fim, à banca examinadora Professor Valter Henrique Biscaro Raposo, Glaucia Maria Bressan e professora Claudia Brunosi Medeiros, pelas essenciais contribuições que apresentaram para esse trabalho.

"O verdadeiro humilde sempre duvida das próprias virtudes e considera mais seguras as que vê no próximo."(Santa Teresa D'Avila)

RESUMO

MARTINS, Mirian Fernanda Dolores Granado. **Métodos Iterativos para Cálculo de Autovalores e Aplicações**. 2018. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Este trabalho explora métodos numéricos que auxiliam no trabalho de encontrar autovalores de matrizes quadradas: Método das Potências, Algoritmo QR, e Método de Jacobi. Os métodos são discutidos e comparados, de modo que sejam evidenciados suas vantagens, procedimentos e derivações. Aplicações dos métodos em estudo são apresentados em algumas situações. Os resultados são analisados e discutidos para que seja possível discernir qual dos métodos melhor se aplica a cada problema.

Palavras-chave: Autovalores. Métodos Iterativos. Matrizes.

ABSTRACT

MARTINS, Mirian Fernanda Dolores Granado. **Iterative Methods for Calculating Eigenvalues and Applications**. 2018. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

This work explores numerical methods that help in the work of finding eigenvalues of square matrices: Power Method, QR Algorithm, and Jacobi Method. The methods are discussed and compared so that their advantages, procedures and derivations. Applications of the methods under study are presented in some situations. The results are analyzed and discussed so that it is possible to discern which among the methods best applies to each problem.

Keywords: Eigenvalues. Iterative Methods. Matrices.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Circuito Elétrico LRC	19
FIGURA 2 – Problema das Vibrações	50

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Iterações do Método da Potência.	33
TABELA 2 – Iterações do Método da Potência - Mudança de Escala.	36

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	PRELIMINARES	23
2.1	TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES	23
2.2	AUTOVALORES E AUTOVETORES	25
2.3	SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM	26
2.4	SISTEMAS HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES	28
3	MÉTODOS ITERATIVOS PARA O CÁLCULO DE AUTOVALORES	31
3.1	MÉTODO DA POTÊNCIA	31
3.2	MÉTODO DE JACOBI	36
3.2.1	Rotação de Jacobi	37
3.2.2	O Método Clássico de Jacobi	39
3.3	MÉTODO QR	41
4	APLICAÇÕES	45
4.1	CIRCUITO LRC	45
4.2	POTÊNCIA DE MATRIZES	46
4.3	VIBRAÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS	49
5	CONCLUSÃO	55
	REFERÊNCIAS	57

1 INTRODUÇÃO

Com o advento dos computadores, o desenvolvimento da Álgebra Linear Computacional foi significativo, de modo especial, a resolução de problemas envolvendo o cálculo de autovalores também passa a ter um novo tratamento. Métodos matriciais criados por Schur e Jacobi, em meados do século XIX, foram implantados para a solução de problemas de ordem satisfatória, sendo possível “abandonar” a abordagem polinomial e seus obstáculos com efetuação numérica.

Por volta dos anos 50, foi desenvolvido por Lanczos um método para problemas de autovalores simétricos, com o uso de transformações similares, para assim obter uma matriz da qual fosse mais simples encontrar seus autovalores. Arnoldi, em 1951 desenvolveu uma generalização do método, que pôde ser empregado a problemas não simétricos; contudo, como os recursos computacionais na época eram limitados, o método desenvolvido por Arnoldi foi deixado de lado por um tempo, vindo a ser retomado por Winkinson, que publicou uma análise do método fazendo uma associação do mesmo ao subespaço de Krylov. Francis, em 1961, desenvolveu o método QR para calcular autovalores de uma determinada matriz, esse método depende, essencialmente, da fatoração QR da matriz. Podemos citar também, vários trabalhos dedicados ao estudo de métodos iterativos para o cálculo de autovalores, tais como: (JUNIOR, 2016), (RICHARD; BURDEN, 1988), (MESTRE; CIVIL,) entre outros.

Determinar autovalores e autovetores é um problema que surge nas mais diversas áreas, como na mecânica quântica, processamento de imagens, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, estatística, entre outras. No campo das equações diferenciais e em sistemas dinâmicos contínuos, os autovalores de uma matriz fornecem dados cruciais, não só na determinação de soluções, como também na análise qualitativa de soluções do sistema, sendo esta de fundamental importância em projetos de engenharia, e em áreas como a física e química. No âmbito da análise de estruturas, o cálculo de pares próprios normalmente se faz necessário em situações, tais como: análise dinâmica, sendo possível calcular os modos e frequências naturais de vibração da estrutura; análise de instabilidade, possibilitando determinar formas de encurvadura e respectivos factores de carga.

Contando então com as máquinas computacionais, pode-se melhorar os refinamentos das malhas, podendo obter matrizes de rigidez e matrizes de massa com dimensões cada vez maiores. Devido ao aumento de dimensão das matrizes houve a necessidade do surgimento de novos métodos de cálculo de autovalores, levando em consideração que os algoritmos mais utilizados e eficientes para matrizes de dimensões pequenas e médias, não são suficientes para matrizes de dimensões maiores.

Por Exemplo, o circuito elétrico LRC em paralelo, apresentado na Figura 1.

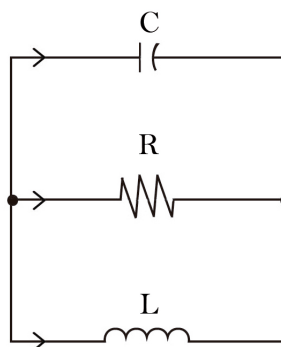


Figura 1 – Circuito Elétrico LRC

Em que R é o resistor, L o indutor e C o capacitor, é modelado pelo sistema de

equações diferenciais (1) e (2)

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC} \quad (2)$$

onde V é a queda de voltagem no capacitor e I a corrente no indutor. A solução desse sistema depende dos autovalores e autovetores da matriz (3)

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad (3)$$

pois, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix} \quad (4)$$

No entanto, determinar autovalores de matrizes, pode não ser tarefa fácil, tornando-se, em alguns casos, um processo complexo e trabalhoso. Como por exemplo, o caso da matriz (5)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0,33 \\ 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{bmatrix} \quad (5)$$

cujo polinômio característico é dado por:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 3 & 0,33 \\ 0,18 & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 - \lambda \end{bmatrix} \quad (6)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-\lambda)(-\lambda)(0,94 - \lambda) + (0,33)(0,18)(0,71) - (3)(0,18)(0,94 - \lambda) \\ \det(A - \lambda I) &= (-0,94\lambda^2) - \lambda^3 + (0,042174) - (0,5076) - (0,54\lambda) \\ \det(A - \lambda I) &= -(\lambda^3) - (0,94\lambda^2) - (0,54\lambda) - (0,465426). \end{aligned} \quad (7)$$

Podemos ver então, que os autovalores dessa matriz não são simples de serem identificados por métodos algébricos, necessitando do auxílio de métodos alternativos. Com base nisso, estudaremos neste trabalho, alguns métodos numéricos com o objetivo de obter aproximações para os autovalores e autovetores de matrizes. Posteriormente, esses métodos serão utilizados na resolução de problemas aplicados, os resultados são analisados e discutidos para que seja possível discernir qual dos métodos melhor se aplica a cada problema.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, iremos apresentar as definições e os resultados referentes à matrizes e autovalores, serão abordados ainda alguns conceitos sobre sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Essas definições e resultados serão essenciais nos decorrer do trabalho, para facilitar a leitura e entendimento dos assuntos abordados. A partir do desenvolvimento deste capítulo, serão apresentados o Método da Potência, e de Jacobi, e o algoritmo QR .

No Capítulo 3, serão apresentados os Métodos da Potência com suas definições e teoremas empregados, da mesma forma, trazemos também o Método de Jacobi. Ainda neste capítulo apresentamos o Algoritmo QR , que é o procedimento mais utilizado no cálculo de autovalores. Neste capítulo, vamos estudar variações desses métodos, baseados em técnicas iterativas, os quais podem ser encontrados em (ENDRE; MAYERS, 2003)

No Capítulo 4, apresentaremos algumas situações que envolvem o cálculo de autovalores e autovetores, de modo que possamos utilizar os Métodos Numéricos vistos anteriormente e assim termos condições de analisar o comportamento dos Métodos em cada problema aplicado. As aplicações apresentadas a seguir, são baseadas nas obras de (HOWARD; RORRES, 2001).

Por fim, no Capítulo 5, apresentaremos nossas conclusões, discutindo os resultados obtidos, o comportamento das iterações e a velocidade com que o mesmo nos retorna o valor esperado.

2 PRELIMINARES

Nesta seção, para o estudo dos Métodos Numéricos, serão apresentados alguns conceitos que fundamentam a base teórica para o desenvolvimento dos métodos. Estes conceitos podem ser encontrados em (BOYCE; DIPRIMA, 1985), (POOLE, 2014), (ZILL; CULLEN, 2001), (LINEAR,).

2.1 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Apresentaremos agora alguns tipos especiais de matrizes reais, que se fazem necessários para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 1 *Seja uma matriz A , tal que*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*Dizemos que A é uma **matriz quadrada** quando $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas da matriz.*

Definição 2 *Uma matriz quadrada é dita **diagonal** sempre que $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$, com $i \neq j$, isto é, todos os elementos que não estão na diagonal principal, são nulos.*

Definição 3 *Seja A uma matriz de ordem $m \times n$*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

se trocarmos as linhas pelas colunas, conseguimos a chamada matriz transposta de A , denotada por

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

de ordem $n \times m$. Em particular a matriz transposta de um vetor linha é um vetor coluna. ou seja, a matriz transposta da matriz $B = [a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1m}]$ é dada por

$$B^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Definição 4 *Dizemos que uma matriz quadrada A é Simétrica se $A = A^T$.*

onde,

$$\begin{cases} u_{pp} = u_{qq} = \cos \varphi \\ u_{pq} = -u_{qp} = \sin \varphi \\ u_{ii} = 1, i \neq p, i \neq q \\ u_{ij} = 0, \text{ no resto} \end{cases}$$

é uma matriz de rotação de um ângulo φ no plano dos eixos p e q .

2.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES

Os conceitos básicos de autovalores e autovetores são úteis em todo âmbito matemático, seja ele em matemática pura ou aplicada e estão presentes em diversas situações, com abrangências bastante gerais. Estes conceitos são muito utilizados no estudo das equações diferenciais e em sistemas dinâmicos contínuos, fornecem ainda informações cruciais em projetos de engenharia, sendo facilmente encontrados em outras áreas, como física e química. Serão abordados aqui, os conceitos básicos que os cercam e necessários para o desenvolvimento desse trabalho.

Definição 11 *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo K . Uma função $T : U \rightarrow V$ é denominado uma transformação linear se:*

- (1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos os $u_1, u_2 \in U$
- (2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $\lambda \in K$ e todo $u \in U$

Definição 12 *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se existem $v \in V, v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que $Tv = \lambda v$, então λ é um autovalor de T e v um autovetor de T associado a λ .*

Definição 13 *Dada uma matriz quadrada A , de ordem n , serão denominados como autovalor e autovetor de A , o autovetor e autovalor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação à base canônica, isto é, $[T_A(v)]^t = Av^t$. Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A , e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $Av = \lambda v, v \neq 0$.*

Definição 14 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n , o polinômio $P(x) = \det(A - xI)$ é chamado de polinômio característico de A .*

Definição 15 *Seja V um K espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LI, se a equação*

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$. Caso contrário dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente (LD).

Teorema 1 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e considere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ autovalores de A , dois a dois distintos, ou seja, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Se v_1, v_2, \dots, v_k são autovetores associados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ respectivamente, então o conjunto v_1, v_2, \dots, v_k é linearmente independente.*

Demonstração Suponha que os vetores v_1, v_2, \dots, v_k sejam linearmente dependentes. Como $v_1 \neq 0$, temos que ao menos um dos vetores no conjunto é uma combinação linear dos vetores que o precedem. Seja p o menor índice tal que v_{p+1} é uma combinação linear dos

vetores (linearmente independentes) que o precedem. Então existem escalares, c_1, c_2, \dots, c_p tais que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = v_{p+1} \quad (1)$$

Multiplicando a equação (1) por A e usando o fato de $Av_i = \lambda_i v_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, k$, obtemos:

$$c_1 Av_1 + c_2 Av_2 + \dots + c_p Av_p = Av_{p+1} \quad (2)$$

que é equivalente:

$$c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \dots + c_p \lambda_p v_p = \lambda_{p+1} v_{p+1} \quad (3)$$

Multiplicando a equação (1) por λ_{p+1} e subtraindo o resultado de (3), temos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{p+1})v_2 + \dots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})v_p = 0 \quad (4)$$

Como $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é linearmente independente, os pesos em (4) são todos iguais a zero. Mas nenhum dos fatores $\lambda_i - \lambda_{p+1}$ é igual a zero, por que os autovalores são distintos. Logo, $c_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, p$. Então, (1) diz que $v_{p+1} = 0$, o que é impossível. Assim $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ não pode ser linearmente dependente, e portanto tem de ser linearmente independente.

Teorema 2 Cada raiz real do polinômio característico $P(x) = \det(A - xI)$ é um autovalor de A .

Demonstração: Observe que, como $\det(A - \lambda I) = 0$ o sistema

$$(A - \lambda I)v = 0$$

admite solução não trivial. Seja $v \neq 0$ uma solução. Então, $(A - \lambda I)v = 0$, $Av - \lambda v = 0$, $Av = \lambda v$. Logo v é um autovetor com autovalor associado λ .

2.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

Definição 16 Um sistema de n equações diferenciais lineares de primeira ordem, definido em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x'_1 &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x'_2 &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned}$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são funções reais dependentes da variável $t \in I$.

Se todas as funções $g_1(t), \dots, g_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo I , então o sistema é dito homogêneo, caso contrário, ele é não homogêneo.

Observe que este sistema de equações pode também ser escrito na forma matricial $x' = P(t)x + G(t)$, onde:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \cdots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(t) & p_{n2}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

e

$$G(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)]^T.$$

Teorema 3 Se as funções vetoriais $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções do sistema $x' = P(t)x$, então a combinação linear $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ também é solução quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2 .

Demonstração: Por hipótese, temos que $(x^{(1)})' = P(t)x^{(1)}$ e $(x^{(2)})' = P(t)x^{(2)}$. Assim,

$$\begin{aligned} (c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)})' &= \\ c_1(x^{(1)})' + c_2(x^{(2)})' &= \\ c_1P(t)x^{(1)} + c_2P(t)x^{(2)} &= \\ P(t)[c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}] & \end{aligned}$$

Portanto, $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ é solução do sistema $x' = P(t)x$, o que prova o resultado.

Observação: Note que, aplicando repetidamente esse teorema, chegamos a conclusão de que, se $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ são soluções da equação. Então:

$$x = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) + \cdots + c_kx^{(k)}(t)$$

também é solução, quaisquer que sejam as constantes c_1, c_2, \dots, c_k .

Definição 17 Sejam $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ n soluções do sistema homogêneo $x' = P(t)x$. Considere-mos a matriz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz acima definida, $\det X(t)$, é chamado de **Wronskiano** das n soluções do sistema homogêneo $x' = P(t)x$ e é denotado por $W[x_1, x_2, \dots, x_n] = \det X(t)$.

Definição 18 Qualquer conjunto $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem $x' = P(t)x$, em um intervalo I , é chamado de **Conjunto Fundamental de Soluções** no intervalo I .

Teorema 4 Se $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções da equação $x' = P(t)x$ no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.

Demonstração: Para mostrar esse teorema, vamos mostrar que dada qualquer solução ϕ da equação $x' = P(t)x$, $\phi(t) = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \cdots + c_nx^{(n)}$ para valores apropriados de c_1, c_2, \dots, c_n . Seja $t = t_0$ algum ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ e seja $\xi = \phi(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \cdots + c_nx^{(n)}$ que também

satisfaz a condição inicial $x(t_0) = \xi$. Em outras palavras, queremos saber se existem valores c_1, c_2, \dots, c_n para os quais

$$c_1x^{(1)}(t_0) + c_2x^{(2)}(t_0) + \dots + c_nx^{(n)}(t_0) = \xi \quad (5)$$

ou em forma escalar

$$\begin{aligned} c_1x_{11}(t_0) + c_2x_{12}(t_0) + \dots + c_nx_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1x_{n1}(t_0) + c_2x_{n2}(t_0) + \dots + c_nx_{nn}(t_0) &= \xi_n \end{aligned} \quad (6)$$

A condição necessária e suficiente para que o sistema (6) possua única solução c_1, c_2, \dots, c_n , é exatamente que o determinante da matriz dos coeficientes, que é o Wronskiano $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$ no ponto t_0 , seja diferente de zero. A hipótese de que $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ são linearmente independentes em todo intervalo $\alpha < t < \beta$ garante que $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$ não se anula em $t = t_0$ e, portanto, existe uma (única) solução da equação $x' = P(t)x$ da forma $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_nx^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial em (5). Pela existência e unicidade, essa solução é idêntica a $\phi(t)$, logo $\phi(t) = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_nx^{(n)}$, como queríamos provar.

Teorema 5 Sejam $e^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, \dots , $e^{(n)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$; além disso, suponha que $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções do sistema $x' = P(t)x$ satisfazendo as condições iniciais

$$x^{(1)}(t_0) = e^{(1)}, \dots, x^{(n)}(t_0) = e^{(n)}$$

respectivamente, onde t_0 é um ponto qualquer no intervalo $\alpha < t < \beta$. Então $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema.

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, note que a existência e unicidade das soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, são garantidas pelo Teorema 4. Não é difícil ver que o Wronskiano dessas soluções é igual a 1 quando $t = t_0$, portanto $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ é um conjunto fundamental de soluções.

2.4 SISTEMAS HOMOGÊNEOS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Considere um sistema homogêneo $x' = Ax$ (*) onde A é uma matriz de coeficientes constantes reais. É possível fazer uma generalização por meio do conceito de exponencial de matriz, para obtermos uma solução geral para o sistema, como uso de exponencial podemos ainda buscar uma solução para a equação $x' = Ax$. Associando a solução da equação diferencial ordinária como sistema homogêneo almejamos uma solução na forma:

$$x = ve^{At} \quad (7)$$

sendo v um vetor e e^{At} uma matriz a determinar. Generalizando o sistema linear de coeficientes constantes de ordem 2, em dimensão 1.

Vamos supor uma solução tal que

$$x = ve^{\lambda t} \quad (8)$$

com v e λ a determinar. Substituindo (5) na equação (*), obtemos:

$$\lambda ve^{\lambda t} = Ave^{\lambda t}$$

Sabemos que $e^{\lambda t} \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$, então:

$$\lambda v = Av$$

$$\lambda v - Av = 0$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Para que tenhamos solução não nula, devemos ter

$$\det(A - \lambda I)v = 0$$

Dessa forma, para obtermos a solução do sistema de equações diferenciais, basicamente é necessário encontrar os autovalores e autovetores associados da matriz A .

Teorema 6 *Seja A uma matriz quadrada $n \times n$, e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ autovalores (não necessariamente distintos) de A . Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são autovetores linearmente independentes de A associados a cada um desses respectivos autovalores, então*

$$\mathbf{x}_1 = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 = e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{x}_k = e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k,$$

são soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Demonstração Pelo argumento apresentado anteriormente, já sabemos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ são soluções, bastando mostrar que são LI. Para isso, consideremos a equação

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Substituindo as soluções nessa equação, temos

$$c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Essa equação deve ser válida para todo $t \in \mathbb{R}$, então em particular deve ser válida para $t = 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mas, por hipótese, os autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ são LI, logo a única solução possível para essa equação é a solução trivial $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Isso mostra que a única solução para a equação

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

é a solução trivial, logo as soluções $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ também são LI. Isso completa a demonstração do teorema.

Teorema 7 *Se a matriz A é diagonalizável, então a solução geral do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem $x'(t) = Ax$ é*

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

onde v_1, v_2, \dots, v_n são os autovetores linearmente independentes de A associados aos respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ não necessariamente distintos, de A .

Demonstração: Com efeito, pelo Teorema 6, $e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n$ são soluções linearmente independentes do sistema $x'(t) = Ax$. Sendo assim, tais soluções formam um conjunto fundamental de soluções de $x'(t) = Ax$, portanto a solução geral deste sistema é do tipo $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$.

3 MÉTODOS ITERATIVOS PARA O CÁLCULO DE AUTOVALORES

O método direto utilizado para determinar o autovalor de uma matriz, baseia-se em encontrar a solução da equação característica, porém, como no exemplo apresentado pela equação (5) do Capítulo 1, em algumas situações, isso se torna impraticável. O primeiro problema que encontramos nesse método é que, para determinar a equação característica, precisamos inicialmente calcular o determinante de uma matriz. Porém, para matrizes muito grandes, isso se torna um processo muito demorado. Um outro problema que nos deparamos por meio desse método é que só existem fórmulas de determinar a solução de polinômios com grau menores do que 4, visto que a equação característica tem forma polinomial, das quais o autovalor é a raiz desse polinômio. Dessa forma, somos submetidos a encontrar aproximação para os autovalores, o que em grande parte das vezes nos remete a uma aproximação com erro maior que o aceitável. Em vista disso, trilharemos um caminho no sentido de evitar dificuldades com o polinômio característico.

Neste capítulo, vamos estudar variações desses métodos, baseados em técnicas iterativas.

3.1 MÉTODO DA POTÊNCIA

O Método da Potência é aplicado a matrizes $n \times n$, com autovalor dominante λ_1 , isto é, a matriz possui um autovalor, cujo valor absoluto é maior que todos os outros autovalores. Como exemplo, suponhamos uma matriz cujos autovalores sejam, $-7, 5, 3$ e -5 , então o autovalor dominante dessa matriz é -7 , visto que seu valor absoluto é maior que todos os seus autovalores.

O método da potência funciona de maneira iterativa, produzindo uma sequência de escalares que convergem para λ_1 e, conseqüentemente, uma sequência de vetores que converge para o autovetor associado v_1 , denominado como **autovetor dominante**.

A seguir, veremos um teorema que fornece a base para o método da potência. Assumiremos que a matriz A é diagonalizável, para simplificar os cálculos.

Teorema 8 *Seja A uma matriz $n \times n$ diagonalizável com autovalor dominante λ_1 . Então existe um vetor x_0 não nulo tal que a sequência de vetores x_k definida por*

$$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1, x_3 = Ax_2, \dots, x_k = Ax_{k-1}, \dots$$

converge para um autovetor dominante de A .

Demonstração: Considere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de A , organizados para termos

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (1)$$

Sejam

$$v_1, v_2, \dots, v_n \quad (2)$$

os autovetores associados, linearmente independentes, podemos escrever qualquer vetor x_0 como uma combinação linear desses autovetores, ou seja,

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \quad (3)$$

Sendo assim, $x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1 = A(Ax_0) = A^2x_0, x_3 = Ax_2 = A(A^2x_0) = A^3x_0$, generalizando, queremos definir

$$x_k \approx A^k x_0 \text{ para } k \geq 1 \quad (4)$$

Temos ainda que,

$$A^k x_0 = c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n =$$

$$\lambda_1^k \left(c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right) \quad (5)$$

utilizando o fato de $\lambda_1 \neq 0$. Como λ_1 é o autovalor dominante implica que os termos $\lambda_2/\lambda_1, \lambda_3/\lambda_1, \dots, \lambda_n/\lambda_1$, são menores que 1 em valor absoluto, logo

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k, \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k, \dots, \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \quad (6)$$

tendem a zero a medida que k cresce.

Dessa forma, segue:

$$x_k \approx A^k x_0 \approx \lambda_1^k c_1 v_1, \quad (7)$$

para k suficientemente grande.

Como $\lambda_1 \neq 0$ e $v_1 \neq 0$, x_k se aproxima de um múltiplo *não nulo* de v_1 , isto é, se aproxima do autovetor associado a λ_1 , se $c_1 \neq 0$.

Exemplo 1. Encontre uma aproximação para o autovetor dominante de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando o teorema 8.

Solução: Tomaremos como vetor inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 34 \\ 58 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = Ax_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 66 \\ 34 \\ 58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 358 \\ 192 \\ 308 \end{bmatrix}$$

$$x_5 = Ax_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 358 \\ 192 \\ 308 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1958 \\ 1050 \\ 1858 \end{bmatrix}$$

$$x_6 = Ax_5 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1958 \\ 1050 \\ 1858 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10882 \\ 5916 \\ 10682 \end{bmatrix}$$

$$x_7 = Ax_6 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10882 \\ 5916 \\ 10682 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61076 \\ 33396 \\ 60676 \end{bmatrix}$$

$$x_8 = Ax_7 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61076 \\ 33396 \\ 60676 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 344092 \\ 188544 \\ 343292 \end{bmatrix}$$

$$x_9 = Ax_8 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 344092 \\ 188544 \\ 343292 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1941200 \\ 1064472 \\ 1939600 \end{bmatrix}$$

$$x_{10} = Ax_9 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1941200 \\ 1064472 \\ 1939600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10956616 \\ 6009744 \\ 10953416 \end{bmatrix}$$

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 66 \\ 34 \\ 58 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 358 \\ 192 \\ 308 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1958 \\ 1050 \\ 1858 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10882 \\ 5916 \\ 10682 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 61076 \\ 33396 \\ 60676 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 344092 \\ 188544 \\ 343292 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1941200 \\ 1064472 \\ 1939600 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10956616 \\ 6009744 \\ 10953416 \end{bmatrix}$
r_k	—	3,00	2,16	1,94	1,86	1,86	1,84	1,83	1,82	1,82	1,823
l_k	—	3,00	4,33	5,08	5,42	5,47	5,55	5,61	5,63	5,64	5,64

Tabela 1 – Iterações do Método da Potência.

Visto que x_k são as matrizes obtidas pelas iterações, r_k é a razão entre a segunda e a primeira componente de x_k , da qual, por meio dela, podemos encontrar o autovetor dominante que procuramos e l_k é a razão entre a primeira componente de x_{k+1} e a de x_k irá se aproximar de λ_1 à medida que k aumentar, sendo λ_1 o autovalor associado ao autovetor dominante.

Verificamos que o autovetor dominante observando a razão r_k entre a primeira e a segunda componente do vetor x_k , constatando assim que esse valor se aproxima de 1,82, à medida que k aumenta, l_k está se aproximando de 5,64 como pode ser visto na Tabela 1.

As componentes de x_k obtidas na iteração, se tornam rapidamente números muito grandes, o que pode gerar erros de arredondamento consideráveis no final do processo. Um artifício para fugir desse problema é, a cada passo da iteração, multiplicar o vetor obtido, por algum escalar que reduza a magnitude de suas componentes, visto que múltiplos escalares dos x_k ainda assim irão convergir para o autovetor dominante, faz com que isso seja possível.

Isso pode ser feito de diversas formas. Um dos meios é dividir cada um dos x_k pela componente de maior valor absoluto, para que a maior componente seja igual a 1. Esse método é chamado de **mudança de escala**. Então, como m_k caracteriza a componente de x_k de maior valor absoluto, trocamos x_k por $y_k = (1/m_k)x_k$.

Quanto à mudança de escala para x_0 , não há nada que possamos fazer, pois já temos a entrada de maior valor absoluto igual a 1.

Calculando y_1 :

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de escala, notemos que a maior entrada de valor absoluto é 3, então:

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,3333 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = Ay_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3333 \\ 0,3333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,3333 \\ 1,9999 \\ 2,9999 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, tomando a entrada com maior valor absoluto igual a 4,3333, faremos essa mudança de escala em todas as iterações a seguir, temos:

$$y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4615 \\ 0,6922 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = Ay_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4615 \\ 0,6922 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,0767 \\ 2,6152 \\ 4,4611 \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de escala, segue:

$$y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5151 \\ 0,8787 \end{bmatrix}$$

$$y_4 = Ay_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4615 \\ 0,6922 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,424 \\ 2,9089 \\ 5,1814 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$y_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5363 \\ 0,9553 \end{bmatrix}$$

$$y_5 = Ay_4 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5363 \\ 0,9553 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,5642 \\ 3,0279 \\ 5,4748 \end{bmatrix}$$

$$y_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5442 \\ 0,9839 \end{bmatrix}$$

$$y_6 = Ay_5 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5442 \\ 0,9839 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6165 \\ 3,0723 \\ 5,5843 \end{bmatrix}$$

assim, temos que

$$y_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5470 \\ 0,9943 \end{bmatrix}$$

$$y_7 = Ay_6 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5470 \\ 0,9943 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6353 \\ 3,0883 \\ 5,6239 \end{bmatrix}$$

$$y_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5480 \\ 0,9980 \end{bmatrix}$$

$$y_8 = Ay_7 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5480 \\ 0,9980 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,642 \\ 3,094 \\ 5,638 \end{bmatrix}$$

$$y_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5484 \\ 0,9999 \end{bmatrix}$$

$$y_9 = Ay_8 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5484 \\ 0,9999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6451 \\ 3,0967 \\ 5,6449 \end{bmatrix}$$

$$y_9 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5486 \\ 0,9999 \end{bmatrix}$$

$$y_{10} = Ay_9 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5486 \\ 0,9999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,6457 \\ 3,0971 \\ 5,6455 \end{bmatrix}$$

Assim, temos, por mudança de escala, que:

$$y_{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5485 \\ 0,9999 \end{bmatrix}$$

Com as iterações realizadas, obtemos os valores da Tabela 2.

Tendo encontrado o autovetor dominante, podemos assim encontrar o autovalor corres-

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4,3333 \\ 1,9999 \\ 2,9999 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,0767 \\ 2,6152 \\ 4,4611 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,424 \\ 2,9089 \\ 5,1814 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,5642 \\ 3,0279 \\ 5,4748 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6165 \\ 3,0723 \\ 5,5843 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6353 \\ 3,0883 \\ 5,6239 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,642 \\ 3,094 \\ 5,638 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6451 \\ 3,0967 \\ 5,6449 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5,6457 \\ 3,0971 \\ 5,6455 \end{bmatrix}$
m_k	—	3	2,1667	1,9795	1,8646	1,8376	1,8281	1,8247	1,8235	1,8223	1,8229

Tabela 2 – Iterações do Método da Potência - Mudança de Escala.

pondente, uma vez que tomamos x_k aproximadamente um autovetor dominante de A associado ao autovalor dominante λ_1 , então

$$x_{k+1} = Ax_k = \lambda_1 x_k \quad (8)$$

Logo, podemos concluir, pela análise da Tabela 2, que o autovalor é $\lambda_1 \approx 5,6457$. Como havíamos constatado previamente, pela mudança de escala, podemos obter o mesmo resultado com maior facilidade.

3.2 MÉTODO DE JACOBI

O Método de Jacobi é um dos mais antigos para o cálculo de autovalores de uma matriz, o qual usa uma sucessão de transformações ortogonais para produzir uma sequência de matrizes que se aproxima de uma matriz diagonal no limite. Este método é utilizado para encontrar autovalores e autovetores de tais matrizes, por meio de transformações similares:

$$A_{k+1} = J_k^{-1} A_k J_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

em que $A_1 = A$ e J_k é uma matriz de rotação. Podendo ser escrita ainda como:

$$A_{k+1} = J_k^T A_k J_k \quad (10)$$

Lema 3.2.1 *Seja A uma matriz de ordem n , autovalores λ_i e autovetores v_i supostamente linearmente independentes, e seja*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

Então $D = V^{-1}AV$ se, e somente se a i -ésima coluna de V é v_i .

Demonstração: Se a i -ésima coluna de V é denotada por v_i então a i -ésima coluna de AV e VD são, Av_i e $\lambda_i v_i$, respectivamente. Então os vetores v_i são os autovetores de A se,

e somente se, $AV = VD$. Podendo ser reorganizada como: $D = V^{-1}AV$ desde que V seja não-singular, o que acontece, pois as colunas de V são linearmente independentes.

As matrizes A_1, A_2, \dots irão convergir para uma matriz diagonal em um número infinito de passos. Desse modo, os autovalores e autovetores são determinados graças ao Lema 3.2.1, que pode ser empregados em matrizes simétricas e não simétricas.

Logo, depois de m passos do método de Jacobi, temos:

$$A_{m+1} = J_m^T \cdots J_2^T J_1^T A_1 J_1 J_2 \cdots J_m \quad (12)$$

Assim, se $A_{m+1} \simeq D$, os elementos diagonais de A_{m+1} são aproximações para os autovalores de A e as colunas de $V = J_1 J_2 \cdots J_m$ são aproximações para os autovetores.

Serão necessários alguns conceitos indispensáveis antes de descrever o Método de Jacobi, para matrizes simétricas, dos quais analisaremos a seguir.

3.2.1 Rotação de Jacobi

Considere uma matriz simétrica A . Cada rotação (p, q) de Jacobi é a operação $J^T A J$, sendo J dada pela Definição 10. Assim, para realizar uma rotação de Jacobi, é necessário uma transformação de semelhança na matriz A .

Faremos um exemplo para facilitar a compreensão, considerando inicialmente uma rotação $(2,4)$ de Jacobi, em uma matriz A de ordem 4. Do produto $J^T A$, segue:

$$\begin{aligned} J^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}c - a_{41}s & a_{22}c - a_{42}s & a_{23}c - a_{43}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21}s + a_{41}c & a_{22}s + a_{42}c & a_{23}s + a_{43}c & a_{24}s + a_{44}c \end{bmatrix} = A' = (a'_{ij}) \end{aligned}$$

com $\cos \varphi = c$ e $\sin \varphi = s$.

Agora fazendo o produto, $A'J$, temos:

$$\begin{aligned} A'J &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12}c - a'_{14}s & a'_{13} & a'_{12}s + a'_{14}c \\ a'_{21} & a'_{22}c - a'_{24}s & a'_{23} & a'_{22}s + a'_{24}c \\ a'_{31} & a'_{32}c - a'_{34}s & a'_{33} & a'_{32}s + a'_{34}c \\ a'_{41} & a'_{42}c - a'_{44}s & a'_{43} & a'_{42}s + a'_{44}c \end{bmatrix} = A'' = (a''_{ij}). \end{aligned}$$

Desse modo, em geral, o produto $J^T A$ para uma matriz de ordem n , resulta uma matriz A' , cujo:

$$\begin{cases} a'_{pj} = a_{pj} \cos \varphi - a_{qj} \sin \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a'_{qj} = a_{pj} \sin \varphi + a_{qj} \cos \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a'_{ij} = a_{ij}, & i \neq p, q, \quad 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (13)$$

e o produto $A'J$ fornece uma matriz A' , em que:

$$\begin{cases} a''_{ip} = a_{pj} \cos \varphi - a'_{iq} \sin \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a''_{iq} = a'_{ip} \sin \varphi + a'_{iq} \cos \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a''_{ij} = a'_{ij}, & j \neq p, q, \quad 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (14)$$

Assim, a matriz A'' tem esta forma:

$$A'' = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & p \\ & \vdots & \ddots & \cdots & & \\ \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & q \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & p & & q & & \end{bmatrix}$$

ou seja, somente os elementos das linhas e colunas p e q sofrerão alterações, visto que os elementos a_{pp} , a_{pq} , a_{qp} e a_{qq} , serão transformados duas vezes. Assim sendo, a matriz A'' continua simétrica.

Assim, veremos então as fórmulas determinantes da passagem de $A \rightarrow A''$, a qual chamamos de Rotação de Jacobi, de um ângulo φ para os elementos da interseção. Tendo em vista que a matriz A' é simétrica, segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{1)} \quad a''_{pp} &= a'_{pp} \cos \varphi - a'_{pq} \sin \varphi \\ &= (a_{pp} \cos \varphi - a_{qp} \sin \varphi) \cos \varphi - (a_{pq} \cos \varphi - a_{qq} \sin \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Então,

$$a''_{pp} = a_{pp} \cos^2 \varphi - 2a_{pq} \sin \varphi \cos \varphi + a_{qq} \sin^2 \varphi \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2)} \quad a''_{qq} &= a'_{qp} \sin \varphi + a'_{qq} \cos \varphi \\ &= (a_{pp} \sin \varphi - a_{qp} \cos \varphi) \sin \varphi + (a_{pq} \sin \varphi - a_{qq} \cos \varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a''_{qq} = a_{pp} \sin^2 \varphi - 2a_{pq} \sin \varphi \cos \varphi + a_{qq} \cos^2 \varphi \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3)} \quad a''_{pq} &= a'_{pp} \sin \varphi + a'_{pq} \cos \varphi \\ &= (a_{pp} \cos \varphi - a_{qp} \sin \varphi) \sin \varphi + (a_{pq} \cos \varphi - a_{qq} \sin \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$a''_{pq} = a''_{qp} = (a_{pp} - a_{qq}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{pq} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (17)$$

Logo, podemos constatar que para uma rotação (p, q) de Jacobi, empregamos as fórmulas (5), (6), (7) e (4) com $j \neq p$ e com $i \neq p, q$.

3.2.2 O Método Clássico de Jacobi

O Método de Jacobi é usado para calcular autovalores e autovetores de matrizes simétricas, onde, dada a matriz A simétrica, faremos uma sequência de rotações:

$$A_1 = A; A_2 = J_1^T A_1 J_1 \rightarrow A_3 = J_2^T A_2 J_2 \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow A_{k+1} = J_k^T A_k J_k \simeq D$$

com $J_i, i = 1, 2, \dots, k$ são matrizes de rotação e D é uma matriz diagonal. O recurso para construção da matriz A_2 , consiste em tomarmos entre os elementos de A que não pertencem à diagonal, com o que possui maior valor absoluto, ou seja:

$$a_{pq} = \max_{i \neq j} (a_{ij}),$$

É preciso, então, realizar uma rotação com o intuito de zerar o elemento a_{pq} . Em seguida, repetimos o processo na matriz obtida quantas vezes forem necessárias, de modo que consigamos reduzir a matriz A à uma matriz D diagonal, dos quais os elementos são autovalores de A .

Primeiramente, no passo inicial, iremos zerar o elemento a_{pq} . Assumimos $a_{pq} \neq 0$, e assim nossa finalidade é conseguir $a''_{pq} = 0$. A equação (7) traz a expressão para a_{pq} e impondo que o mesmo seja imediatamente nulo, temos:

$$(a_{pp} - a_{qq}) \underbrace{\cos \varphi \sen \varphi}_{\frac{1}{2} \sen 2\varphi} + a_{pq} \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sen^2 \varphi)}_{\cos 2\varphi} = 0.$$

Desse modo,

$$a_{pp} - a_{qq} = -\frac{a_{pq} \cos 2\varphi}{\frac{1}{2} \sen 2\varphi} = -2a_{pq} \cot 2\varphi$$

$$\Rightarrow \cot 2\varphi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \phi$$

Assim,

$$\cot 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{2 \tan^2 \varphi}$$

Tomando $t = \tan \varphi$, segue:

$$\phi = \frac{1 - t^2}{2t} \Rightarrow 1 - t^2 = 2t\phi$$

Logo,

$$t^2 + 2t\phi - 1 = 0 \Rightarrow \frac{-2\phi \pm \sqrt{4\phi^2 + 4}}{2}.$$

$$t = -\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}$$

$$t = \frac{1}{\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}}$$

Pelo método de Jacobi, ao mesmo tempo que calculamos os autovalores de uma matriz A , conseguimos obter seus autovetores.

Esse método apresenta diversos benefícios, como exemplo, é moderadamente simples de programar, permitindo uma precisão muito elevada e ainda conforme apresentado e sua taxa de convergência é quadrática. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1. Utilizando o método de Jacobi, vamos determinar os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Solução: Inicialmente iremos zerar as entradas $a_{23} = a_{32} = 3$, visto que este é o maior elemento em módulo fora da diagonal principal de $A_1 = A$, assim

$$\phi = \frac{a_{33} - a_{22}}{2a_{23}} = \frac{6 - 5}{2(3)} = \frac{1}{6} = 0,1667$$

tendo encontrado o valor de ϕ , podemos calcular

$$t = \tan(\varphi) = \frac{1}{\phi + \sqrt{(\phi)^2 + 1}} = \frac{1}{0,1667 + \sqrt{1,0277}} = 0,8471$$

logo, obtemos:

$$c = \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,7176}} = 0,7630$$

$$s = \sin(\varphi) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{0,8471}{\sqrt{1,7176}} = 0,6463$$

obtendo assim

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7630 & 0,6464 \\ 0 & -0,6464 & 0,7630 \end{bmatrix}$$

logo:

$$A_2 = U_1^T A_1 U_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0,763 & 0,646 \\ 0,763 & 2,459 & 0 \\ 0,646 & 0 & 8,541 \end{bmatrix}$$

Note que as entradas a_{23} e a_{32} foram zeradas. Prosseguimos então, com as iterações, considerando agora as entradas $a_{12} = a_{21} = 0,763$, na matriz A_2 . Primeiramente encontramos o valor de ϕ como mostra o método, obtendo:

$$\phi = \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}} = \frac{(2,459) - (3)}{2(0,763)} = \frac{-0,541}{1,526} = -0,3545$$

Assim, segue $t = \tan(\varphi) = 1,4156$, $\cos(\varphi) = 0,577$ e ainda $\sin(\varphi) = 0,8168$.

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0,577 & -0,8168 & 0 \\ 0,8168 & 0,577 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{bmatrix} 1,92 & 0 & 0,373 \\ 0 & 3,54 & 0,528 \\ 0,373 & 0,528 & 8,541 \end{bmatrix}$$

De forma análoga aos cálculos anteriores, tomando novamente o maior elemento em módulo, fora da diagonal, podemos notar que são as entradas $a_{32} = a_{23} = 0,5281$. Temos então, $\phi = 4,7358$, $t = 0,1044$, $\cos(\varphi) = 0,9950$ e $\sin(\varphi) = 0,1039$.

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9950 & 0,1039 \\ 0 & -0,1039 & 0,9950 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = U_3^T A_3 U_3 = \begin{bmatrix} 1,92 & -0,039 & 0,371 \\ -0,039 & 3,487 & 0 \\ 0,371 & 0 & 8,603 \end{bmatrix}$$

O maior elemento em módulo, fora da diagonal principal de A_4 , é $a_{13} = a_{31} = 0,371$. Assim, $\phi = 9,006$, $t = 0,0553$, $\cos(\varphi) = 0,998$ e $\sin(\varphi) = -0,0552$.

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0,998 & 0 & 0,0552 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,0552 & 0 & 0,998 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = U_4^T A_4 U_4 = \begin{bmatrix} 1,898 & -0,039 & 0 \\ -0,039 & 3,487 & -0,002 \\ 0 & -0,002 & 8,615 \end{bmatrix}$$

Observando os elementos não diagonais da sequência, notamos que A_k se aproxima de 0 conforme k aumenta, e os elementos da diagonal da sequência A_k convergem para os autovalores de A , sendo eles: $\lambda_1 = 1,898$, $\lambda_2 = 3,487$ e $\lambda_3 = 8,615$. Valores esses que podem ser aproximados de maneira mais precisa se continuarmos as iterações.

É fácil notar que esse método converge e as variantes do Método de Jacobi convergem muito rapidamente. Esse método normalmente alcança a convergência em um número aceitável de iterações e é um método satisfatório para pequenas ou médias matrizes. Contudo, os problemas aparecem particularmente na área de solução de equações diferenciais parciais, e entre outros, que dão origem a grandes matrizes com a maioria dos elementos sendo zero. Porém, considerando que em muitas situações práticas não é necessário calcular todos os autovalores, é mais comum exigir os maiores ou os menores autovalores, com seus autovetores correspondentes.

3.3 MÉTODO QR

O Método QR é um procedimento de redução de matriz, do qual, pode-se determinar simultaneamente todos os autovalores de uma matriz simétrica tridiagonal sem determinar o polinômio característico .

Tomaremos matrizes na forma simétrica tridiagonal, da qual denotaremos da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Se $b_2 = 0$ ou $b_n = 0$, a matriz 1×1 gera de imediato um autovalor a_1 ou a_n , utilizamos essa

observação no desenvolvimento do Método QR, diminuindo de forma sucessiva as entradas abaixo da diagonal principal até $b_2 \approx 0$ ou $b_n \approx 0$. Quando $b_j = 0$ para algum j , onde $2 < j < n$ o problema pode ser reduzido, se ao invés de A considerarmos as matrizes menores:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_3 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{j-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{j-1} & a_{j-1} \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} a_j & b_{j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{j+1} & a_{j+1} & b_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{j+2} & a_{j+2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Para o caso de nenhum dos b_j ser igual a zero, sucede o Método QR formando uma sequência de matrizes, $A = A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$, tal que:

$A^{(1)} = A$ será fatorado como o produto $A^{(1)} = Q^{(1)}R^{(1)}$, onde $Q^{(1)}$ é ortogonal e $R^{(1)}$ é triangular superior.

$A^{(2)}$ é definido como $A^{(2)} = R^{(1)}Q^{(1)}$.

De modo geral, $A^{(i)}$ é fatorado como o produto $A^{(i)} = Q^{(i)}R^{(i)}$ com $Q^{(i)}$ uma matriz ortogonal e $R^{(i)}$ uma matriz triangular superior. Assim, $A^{(i+1)}$ é definida pelo produto de $R^{(i)}$ e $Q^{(i)}$ no sentido inverso $A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)}$. Desde que $Q^{(i)}$ seja ortogonal e $R^{(i)} = Q^{(i)T}A^{(i)}$ e

$$A^{(i+1)} = R^{(i)}Q^{(i)} = (Q^{(i)T}A^{(i)})Q^{(i)} = Q^{(i)T}A^{(i)}Q^{(i)}$$

O que nos assegura que $A^{(i+1)}$ é simétrica e possui os mesmos autovalores que $A^{(i)}$. Pelo modo em que foi definido $Q^{(i)}$ e $R^{(i)}$, podemos garantir também que $A^{(i+1)}$ é tridiagonal. Por indução, temos que $A^{(i+1)}$ possui os mesmos autovalores da matriz original A . O exemplo a seguir ilustra a aplicação do método QR.

Exemplo 1. Determine os autovalores da matriz A pelo Método QR, com $\epsilon < 10^{-2}$, ou seja, que as entradas fora da diagonal principal seja menor que 10^{-2} .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: Queremos reduzir a matriz A a uma matriz triangular superior, desse modo, precisamos zerar os elementos a_{21} , a_{31} e a_{32} , visto que a nossa matriz já possui duas dessas entradas nulas, devemos zerar apenas $a_{31} = 1$. Assim $U_1 = I$ e para obtermos U_2 , fazemos:

$$\text{sen}(\varphi) = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4472$$

$$\text{cos}(\varphi) = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,8944$$

obtemos então, U_2 :

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0,8944 & 0 & 0,4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,4472 & 0 & 0,8944 \end{bmatrix}$$

Daí, segue:

$$U_2U_1A = U_2IA = U_2A = \begin{bmatrix} 2,2360 & 0 & 1,3416 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4472 \end{bmatrix} = R_1$$

Se $a_{32} = 0$, então $U_3 = I$. Assim $U_3 U_2 U_1 = U_2$ e $U_2^{-1} = U_2^t$. Portanto:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,8944 & 0 & -0,4472 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,4472 & 0 & 0,8944 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,2360 & 0 & 1,3416 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4472 \end{bmatrix} = Q_1 R_1.$$

Agora:

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} 2,5998 & 0 & 0,2000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,2000 & 0 & 0,4000 \end{bmatrix}$$

Aplicando novamente o processo, temos que $U_1 = U_3 = I$. Devemos então, determinar U_2 . Assim:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\varphi) &= \frac{0,2000}{\sqrt{(2,5998)^2 + (0,2000)^2}} = 0,0767 \\ \operatorname{cos}(\varphi) &= \frac{2,5998}{\sqrt{(2,5998)^2 + (0,2000)^2}} = 0,9971 \end{aligned}$$

Portanto

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0,9971 & 0 & 0,0767 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,0767 & 0 & 0,9971 \end{bmatrix}$$

assim, temos:

$$U_2 A_2 = \begin{bmatrix} 2,6076 & 0 & 0,2301 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3935 \end{bmatrix} = R_2$$

Logo, segue:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,9971 & 0 & -0,0767 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,0767 & 0 & 0,9971 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,6076 & 0 & 0,2301 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3835 \end{bmatrix} = Q_2 R_2.$$

Por fim,

$$A_3 = R_2 Q_2 = \begin{bmatrix} 2,6177 & 0 & 0,0294 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,0094 & 0 & 0,3824 \end{bmatrix}.$$

Visto que o maior elemento, em valor absoluto fora da diagonal principal é menor que 10^{-2} , temos que os valores próximos dos autovalores de A são: 2,6177, 1 e 0,3824. Observe que os autovalores de A são: 2,618034, 1 e 0,381966.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentamos algumas situações que envolvem o cálculo de autovalores e autovetores, de modo que possamos utilizar os Métodos Numéricos vistos anteriormente e assim termos condições de analisar o comportamento dos Métodos em cada problema aplicado.

4.1 CIRCUITO LRC

Considere o circuito elétrico LRC em paralelo, semelhante ao apresentado na introdução. Suponha que R seja igual a 5 ohms, C seja igual a 0,1 farad e L seja 0,4 henry, vamos determinar o autovalor da matriz que compõe o sistema de equações diferenciais para a solução do mesmo.

Assim, temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

com os valores de LRC, segue:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0,4} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5(0,1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2,5 \\ -0,2 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando o Método da Potência, tomando $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, então:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2,5 \\ -0,2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -2,2 \end{bmatrix}.$$

Com a mudança de escala, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,88 \end{bmatrix}$ assim,

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2,5 \\ -0,2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,2 \\ 1,56 \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de escala, segue: $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,70 \end{bmatrix}$ e do mesmo modo, obtemos

$$x_3 = Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2,5 \\ -0,2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,775 \\ 1,22 \end{bmatrix}$$

da mudança de escala, segue:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,68 \end{bmatrix} \text{ então}$$

$$x_4 = Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2,5 \\ -0,2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,7 \\ 1,16 \end{bmatrix}$$

Logo, podemos afirmar que o autovalor dominante da matriz A é $\lambda_1 \approx -1,7$, visto que, se continuarmos as iterações, continuará a convergir para este resultado.

Sabemos que a solução para o problema é da forma $y = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$, onde λ_1

é o autovalor dominante da matriz A . Como $\lambda_1 \approx 2,225 > 0$, podemos concluir que a solução deste sistema é assintoticamente estável.

4.2 POTÊNCIA DE MATRIZES

Dada uma matriz quadrada A , calcular uma potência do tipo A^k pode ser um processo trabalhoso, principalmente quando se trata de uma matriz de ordem relativamente grande. No entanto, se A é uma matriz diagonalizável, sabemos que existe uma matriz diagonal D e uma matriz invertível P , tal que $A = PDP^{-1}$. Com isso, note que:

$$A^2 = (PDP^{-1})^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} \quad (1)$$

$$A^3 = A^2A = (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1} \quad (2)$$

ou seja, de forma geral, dado $k \in \mathbb{N}$, temos $A^k = PD^kP^{-1}$.

Como

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

é fácil notar que:

$$D^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix}$$

Pode-se perceber então, que se A é diagonalizável, calcular potências de A reduz-se basicamente a calcular potências de uma matriz diagonal D , o que exige um esforço muito menor.

Como exemplo, considere a matriz A , tal que,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

por meio do Método de Jacobi vamos determinar os autovalores da matriz.

Primeiramente, vamos zerar as entradas $a_{23} = a_{32} = 4$, considerando que este é o maior elemento em módulo fora da diagonal principal de $A_1 = A$, assim:

$$\phi = \frac{a_{33} - a_{22}}{2a_{23}} = \frac{5 - 3}{2(4)} = \frac{2}{8} = 0,25$$

Assim, podemos calcular:

$$t = \tan(\varphi) = \frac{1}{\phi + \sqrt{(\phi)^2 + 1}} = \frac{1}{0,25 + \sqrt{1,0625}} = 0,7806$$

logo, obtemos:

$$c = \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1,6093}} = 0,7883$$

$$s = \sin(\varphi) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{0,7806}{\sqrt{1,6093}} = 0,6154$$

então, a matriz U_1 , é:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7806 & 0,6154 \\ 0 & -0,6154 & 0,7806 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$A_2 = U_1^T A_1 U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1,5766 & 1,2308 \\ 1,5766 & -0,12312 & 0 \\ 1,2308 & 0 & 8,12419 \end{bmatrix}$$

Tendo zerado as entradas desejadas, prosseguimos com as iterações, com objetivo de zerar agora os elementos $a_{21} = a_{12} = 1,5766$, repetiremos o processo determinando os valores de ϕ , tangente, cosseno e seno.

$$\phi = -0,3561$$

Assim, podemos calcular:

$$t = \tan(\varphi) = 1,4174$$

logo, obtemos:

$$c = \cos(\varphi) = 0,5765$$

$$s = \sin(\varphi) = 0,8171$$

Assim,

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0,5765 & 0,8171 & 0 \\ -0,8171 & 0,5765 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desse modo,

$$A_3 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{bmatrix} -1,23519 & 0 & 0,7096 \\ 0 & 2,1120 & 1,0057 \\ 0,7096 & 1,0057 & 8,12419 \end{bmatrix}$$

Podemos ver novamente que a entrada com maior valor absoluto fora da diagonal principal é $a_{32} = a_{23} = 1,0057$, assim, damos continuidade as iterações.

$$\phi = 2,9890$$

então:

$$t = \tan(\varphi) = 0,163$$

logo, obtemos:

$$c = \cos(\varphi) = 0,9870$$

$$s = \sin(\varphi) = 0,1609$$

Assim,

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9870 & 0,1609 \\ 0 & -0,1609 & 0,9870 \end{bmatrix}$$

desse modo,

$$A_4 = U_3^T A_3 U_3 = \begin{bmatrix} -1,2352 & -0,1142 & 0,7004 \\ -0,1142 & 1,9484 & 0 \\ 0,7004 & 0 & 8,284 \end{bmatrix}$$

as entradas com maior valor absoluto agora, são $a_{31} = a_{13} = 0,7004$, e assim, seguimos com a iteração, para aproximarmos o autovalor.

$$\phi = 6,7987$$

então:

$$t = \tan(\varphi) = 0,0732$$

logo, obtemos:

$$c = \cos(\varphi) = 0,9990$$

$$s = \sin(\varphi) = 0,0732$$

Assim,

$$U_4 = \begin{bmatrix} 0,9990 & 0 & 0,07312 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,07312 & 0 & 0,9990 \end{bmatrix}$$

desse modo,

$$A_5 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{bmatrix} -1,2907 & -0,1140 & 0 \\ -0,1140 & 1,9483 & -0,0084 \\ 0 & -0,0084 & 8,3676 \end{bmatrix}$$

Se observamos os valores fora da diagonal principal, poderemos constatar que os valores se aproximam de 0 a cada iteração, e os elementos da diagonal de A , convergem para seus autovalores, sendo eles $\lambda_1 = -1,2907$, $\lambda_2 = 1,9483$ e $\lambda_3 = 8,3676$, esses valores podem ser melhores aproximados se continuarmos as iterações.

Desta forma, temos que a potência da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

são da forma,

$$A^k = P \begin{bmatrix} -1,2907^k & 0 & 0 \\ 0 & 1,9483^k & 0 \\ 0 & 0 & 8,3676^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

onde P é a matriz em que cada coluna é um autovetor relacionado aos autovalores $\lambda_1 = -1,2907$, $\lambda_2 = 1,9483$ e $\lambda_3 = 8,3676$, respectivamente.

4.3 VIBRAÇÕES DE SISTEMAS DINÂMICOS

O estudo das vibrações de sistemas dinâmicos e de estruturas requer a solução de problemas de autovalores e autovetores. Considere, o problema de se determinar as vibrações de pequenas partículas presas por um fio uniforme, sem peso, ao qual é aplicada uma força \vec{F} nas extremidades como podemos ver na figura abaixo, no qual desconsidera-se a ação da gravidade. As partículas encontram-se a distâncias iguais entre si e as vibrações das mesmas são consideradas pequenas e perpendiculares à posição de descanso do fio.

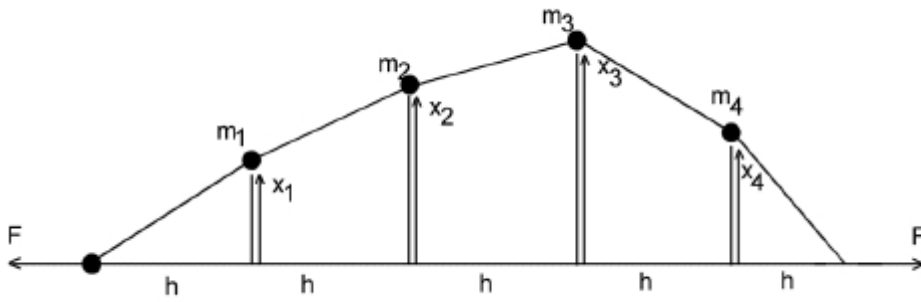


Figura 2 – Problema das Vibrações

diferenciais para as forças atuantes em cada partícula, são:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -F \frac{x_1}{h} + F \frac{x_2 - x_1}{h}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -F \frac{x_2 - x_1}{h} + F \frac{x_3 - x_2}{h}$$

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -F \frac{x_3 - x_2}{h} - F \frac{x_3 - x_4}{h}$$

$$m_4 \frac{d^2 x_4}{dt^2} = +F \frac{x_3 - x_4}{h} - F \frac{x_4}{h}$$

Fixando a notação

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$$

$$d_i = \frac{m_i h}{F}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

podemos escrever o sistema de equações diferenciais acima na forma matricial

$$D \frac{d^2 x}{dt^2} = T x \quad (3)$$

com D , tal que:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

e T a matriz tridiagonal

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Quando as partículas vibram em fase ou em direções opostas, em modo normal, assim a condição

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x, \quad w \in \mathbb{R} \quad (4)$$

é satisfeita. Ao substituir (3) e (4), obtemos o problema de autovalor.

$$Dw_i^2x_i = -Tx_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

para as frequências de vibrações w_1, w_2, w_3 e w_4 e os modos normais correspondentes, os autovetores x_1, x_2, x_3 e x_4 .

Isolando x no lado direito da equação (5), teríamos o problema generalizado do autovalor, da qual a forma geral é dada por:

$$(A - \lambda B)x = 0$$

em que A e B são matrizes de ordem n . Contudo, se introduzirmos o vetor

$$y = D^{-\frac{1}{2}}x$$

Visto que os elementos da diagonal D são positivos, logo, (5) pode ser reescrito como:

$$D^{-\frac{1}{2}}TD^{-\frac{1}{2}}y_i = -w_i^2y_i$$

Temos que w_i são frequências de vibrações e podem ser obtidas calculando os autovalores da matriz $D^{-\frac{1}{2}}TD^{-\frac{1}{2}}$.

Como exemplo vamos considerar a matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos $D = D^{\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}$, fazendo $D^{-\frac{1}{2}}TD^{-\frac{1}{2}}$, segue que

$$D^{-\frac{1}{2}}TD^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Assim, basta determinarmos os autovalores da própria T . Faremos isso com auxílio do Método QR. Inicialmente vamos zerar a_{21} , então, teremos:

$$s = \frac{a_{21}}{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{21})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4472$$

$$c = \frac{a_{11}}{\sqrt{(a_{11})^2 + (a_{21})^2}} = \frac{-2}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -0,8944$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0,8944 & 0,4472 & 0 & 0 \\ -0,4472 & -0,8944 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que:

$$U_1 A_1 = \begin{bmatrix} 2,236 & -1,7888 & 0,4472 & 0 \\ 0 & 1,3416 & -0,8944 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Para determinarmos U_2 que irá zerar a entrada a_{32} precisamos novamente determinar os valores para seno e cosseno, logo:

$$s = 0,5976 \text{ e } c = 0,8018$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8018 & 0,5976 & 0 \\ 0 & -0,5976 & 0,8018 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2(U_1 A_1) = \begin{bmatrix} 2,236 & -1,7888 & 0,4472 & 0 \\ 0 & 1,6733 & -1,91233 & 0,5976 \\ 0 & 0 & -1,06911 & 0,8018 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora vamos zerar a entrada a_{43} , assim:

$$s = 0,6831 \text{ e } c = -0,7303$$

$$U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,7303 & 0,6831 \\ 0 & 0 & -0,6831 & -0,7303 \end{bmatrix}$$

$$U_3(U_2 U_1 A_1) = \begin{bmatrix} 2,236 & -1,7888 & 0,4472 & 0 \\ 0 & 1,6733 & -1,91233 & 0,5976 \\ 0 & 0 & 1,46387 & -1,95176 \\ 0 & 0 & 0 & 0,91289 \end{bmatrix} = R_1$$

Agora, vamos determinar $Q_1 = U_1^T U_2^T U_3^T$.

$$U_1^T U_2^T U_3^T = Q_1 = \begin{bmatrix} -0,8944 & -0,35856 & -0,19517 & -0,18256 \\ 0,4472 & -0,71713 & -0,39034 & -0,36511 \\ 0 & 0,5976 & -0,5855 & -0,54771 \\ 0 & 0 & 0,6831 & -0,7303 \end{bmatrix}$$

logo,

$$A_2 = R_1 Q_1 = \begin{bmatrix} -2,79983 & 0,74831 & 0 & 0 \\ 0,74831 & -2,34277 & 0,8748 & 0 \\ 0 & 0,8748 & -2,19042 & -0,62359 \\ 0 & 0 & 0,6236 & -0,66668 \end{bmatrix}$$

Desejamos zerar as mesmas entradas, para isso deve ser repetido todo o processo, determinando U_1 , U_2 e U_3 , para encontrarmos as matrizes Q_2 e R_2 , dessa forma, temos:

$$U_3(U_2 U_1 A_2) = \begin{bmatrix} 2,8981 & -1,3278 & 0,2258 & 0 \\ 0 & 2,24738 & -1,6310 & 0,24274 \\ 0 & 0 & 1,8001 & -0,76979 \\ 0 & 0 & 0 & -0,42641 \end{bmatrix} = R_2$$

$$U_1^T U_2^T U_3^T = Q_2 = \begin{bmatrix} -0,96609 & -0,23784 & -0,09428 & 0,03482 \\ 0,2582 & -0,8898 & -0,35277 & 0,13028 \\ 0 & 0,38926 & -0,86409 & 0,3191 \\ 0 & 0 & 0,34642 & 0,93808 \end{bmatrix}$$

assim, temos:

$$A_3 = R_2 Q_2 = \begin{bmatrix} -3,14268 & 0,58016 & 0 & 0 \\ 0,58027 & -2,63461 & 0,70064 & 0 \\ 0 & 0,70071 & -1,82212 & -0,14771 \\ 0 & 0 & -0,14772 & -0,40001 \end{bmatrix}$$

Repetindo mais uma vez o processo, para que o nosso nível de aproximação seja o mais preciso possível. Segue:

$$U_3(U_2 U_1 A_2) = \begin{bmatrix} 3,1958 & -1,04889 & 0,12722 & 0 \\ 0 & 2,58236 & -1,15757 & -0,04008 \\ 0 & 0 & 1,57375 & 0,17909 \\ 0 & 0 & 0 & -0,3849 \end{bmatrix} = R_3$$

$$U_1^T U_2^T U_3^T = Q_3 = \begin{bmatrix} -0,9833 & -0,1747 & -0,04905 & -0,0046 \\ 0,18157 & -0,9465 & -0,2656 & -0,0205 \\ 0 & 0,27134 & -0,95823 & -0,09034 \\ 0 & 0 & -0,09386 & 0,99558 \end{bmatrix}$$

Assim, temos que:

$$A_4 = R_3 Q_3 = \begin{bmatrix} -3,3328 & 0,46899 & 0 & 0 \\ 0,4688 & -2,7583 & 0,42711 & 0 \\ 0 & 0,42702 & -1,52482 & 0,03613 \\ 0 & 0 & 0,03613 & -0,3832 \end{bmatrix}$$

Já podemos notar que as entradas abaixo da diagonal principal, a cada iteração, se aproxima mais de zero, dessa forma, estamos nos aproximando dos autovalores da matriz A ,

que são os elementos da diagonal principal. Fazendo mais uma iteração, segue:

$$U_3(U_2U_1A_2) = \begin{bmatrix} 3,3657 & -0,8486 & 0,0595 & 0 \\ 0 & 2,70005 & 0,65878 & -0,00571 \\ 0 & 0 & 1,43919 & -0,04528 \\ 0 & 0 & 0 & -0,38218 \end{bmatrix} = R_4$$

$$U_1^T U_2^T U_3^T = Q_4 = \begin{bmatrix} -0,99025 & -0,13756 & -0,02203 & 0,00055 \\ 0,13931 & -0,97779 & -0,15656 & 0,0039 \\ 0 & 0,15815 & -0,9871 & 0,02479 \\ 0 & 0 & 0,0251 & 0,99968 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos:

$$A_5 = R_4 Q_4 = \begin{bmatrix} -3,45111 & 0,37626 & 0 & 0 \\ 0,37614 & -2,74427 & 0,22771 & 0 \\ 0 & 0,22761 & -1,42176 & -0,00959 \\ 0 & 0 & -0,00959 & -0,38206 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos notar que os autovalores de A , convergem para $\lambda_1 = -3,4511$, $\lambda_2 = -2,7442$, $\lambda_3 = -1,4218$ e $\lambda_4 = -0,3821$, que podem ser utilizados para determinar as frequências de vibrações w_1 , w_2 , w_3 e w_4 respectivamente.

5 CONCLUSÃO

Esse trabalho apresenta um estudo sobre Métodos Iterativos para Cálculo de Autovalores e Autovetores. É importante ressaltar que os conceitos básicos apresentados nas preliminares do trabalho são de fundamental importância para utilização e compreensão dos métodos.

No decorrer da pesquisa, uma das dificuldades encontradas foi o número escasso de bibliografias acerca deste tema, visto que grande parte das referências encontradas não possuem conteúdos disponíveis em língua portuguesa, dessa forma, acrescido à tais referências, estão alguns artigos científicos .

Em relação aos Métodos Iterativos estudados, fica evidente que cada método em particular possui sua utilidade, dependendo assim do problema em questão, para determinação de qual método será utilizado.

Como vimos, o Método da Potência foi empregado para determinar o autovalor dominante, que era o necessário para tirarmos conclusões a cerca da instabilidade do sistema. O Método de Jacobi, determina simultaneamente todos os autovalores da matriz, e assim, pode ser aplicado para determinar a matriz diagonal e assim conseguir calcular uma potência do tipo A^k . Por fim, o Método QR se torna muito eficaz na determinação de todos os autovalores de matrizes tridiagonais, no exemplo visto, pudemos estimar os autovalores da matriz que por sua vez, podem ser utilizados para determinar as frequências de vibrações do problema em questão.

Entretanto é importante ressaltar que realizar as operações exigidas por cada método manualmente, se torna inviável para matrizes de ordem muito grande, sendo necessário o recurso computacional, pois além de garantirmos maior precisão nos cálculos desejados, a eficácia do método fica ainda mais notória, visto que manualmente cada iteração é dada por um processo longo e trabalhoso.

REFERÊNCIAS

- BEZERRA, Licio Hernanes. Cálculo de autovalores via métodos tipo newton. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 5, n. 1, p. 37–47, 2004. Nenhuma citação no texto.
- BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985. Citado na página 23.
- ENDRE, Süli; MAYERS, David. An introduction to numerical analysis. **Cambridge, UK**, 2003. Citado na página 21.
- HOWARD, Anton; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. **Tradução Claus Ivo Doering**, v. 8, 2001. Citado na página 21.
- JUNIOR, Alterno Jerônimo. Implementação de métodos iterativos e computacionais para resolução de sistemas de equações lineares: um estudo aplicado. 2016. Citado na página 19.
- LINEAR, Álgebra. **suas Aplicações–David C**. [S.l.]: Lay. Citado na página 23.
- MESTRE, GRAU DE; CIVIL, EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA. Desenvolvimento de um algoritmo baseado no método de arnoldi para solução de problemas de autovalor generalizado. Citado na página 19.
- POOLE, David. Álgebra linear, 1ª edição. **Cengage Learning, São Paulo**, 2014. Citado na página 23.
- RICHARD, L; BURDEN, J. **Douglas faires, numerical analysis**. [S.l.]: PWS Publishing Co., Boston, MA, 1988. Citado na página 19.
- ZILL, DG; CULLEN, MR. Equações diferenciais. v. 1 e v. 2. **São Paulo: Makron**, 2001. Citado na página 23.