UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

WENDELL PALKOVITZ DE FELICE CARRIJO

EXTENSÃO PARA O TESTE DE KUMMER E APLICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

WENDELL PALKOVITZ DE FELICE CARRIJO

EXTENSÃO PARA O TESTE DE KUMMER E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Pinguello Andrade

CORNÉLIO PROCÓPIO
2018

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Prof. Thiago Pinguello de Andrade
(Orientador)

Prof. Anderson Paião dos Santos

Prof. Débora Aparecida Francisco Albanez

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador de iniciação científica Prof. Dr. Douglas Azevedo que deu início aos meus estudos e ao orientador deste trabalho Thiago Pinguello Andrade pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória.

A Secretaria do Curso, pela cooperação.

O meu reconhecimento à minha família, pois acredito que sem o apoio deles seria muito difícil vencer esse desafio.

Aos meus amigos Luiz Otávio Fernandes, Paulo Henrique Rodrigues, Alisson Lucas de Souza, Lucas Gabriel Ribeiro de Souza, Bruna Alves da Silva, Lucas Corrêa, Ronaldo Bastista de Lima, Daiane Priscila Bússola, Juliana de Melo, Felipe Aparecido Barros Baldim, Nicolas Gil de Souza Aoki, Ricardo Henrique Bueno da Silva, Ghanter Baião e Silva, Fernando Peres Júnior, Jonas Guimarães Guabiraba de Souza, Ariane Landgraf, Amanda Jenifer Sotana, Eduardo Oliveira Belinelli, Tiago Pagotto, Maicon Roberto de Oliveira Caetano, Yago Luiz Militão, João Vitor Magri da Silva, Guilherme Henrique Attis Campanez, Fábio Henrique de Souza Barbosa, Rubens Durães Nascimento, Marcos Felipe de Oliveira, Lucas Villani, Jhonatas Luthierry Barbosa dos Santos, Leonardo de Borba Pacheco, Gustavo Pereira de Souza, Philipe Borel Loureiro, Danilo Ribeiro de Souza, Samuel Tadeu dos Santos, Alan Nicolas Lins de Albuquerque, Fabrício Alves da Silva Fernandes, Paulo Henrique Celestini, Sérgio Matsue Filho, Caroline Ketilin Adão, Renan Reis de Carvalho Maria, Mariana Vasconcelos Negrini, Brayan Wallace Silva de Medeiros, Flávio Rodrigues de Oliveira Júnior, Marlon Raoni Siqueira Ramos, Raphael Peres Correia dos Santos, Vitória Moraes Zonfrilli, Rômulo Augusto Ferreira de Almeida, Thiago Inacio Caretta, Matheus Augusto Paiva Luz, Matheus Alexandre Mattos, Vinícius de Souza Augustis, Bruno Esteves de Lima, Eduardo Henrique Lourenço Roque, Gustavo Zantut da Silva, Enio Henrique Pires da Silva, Carlos Eduardo Rodrigues, Gabriel Carvalho do Espírito Santo, Bruno Mendes dos Santos, Adolpho Cavalcanti Nascimento, Ayrton Correia Guedes, Gabriel Geraldo Reghin, Giovane Fernando Farias, Alan Brooks, Bárbara De Falchi, Maria Carolina Gomes Pulcinelli e Adimara da Silva dos Reis, que sempre me apoiaram e fizeram parte da minha graduação.

Enfim, a todos os que por algum motivo contribuíram para a realização desta pesquisa.

RESUMO

CARRIJO, Wendell. **Extensão para o Teste de Kummer e Aplicações**. 2018. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

Neste trabalho apresentamos um estudo detalhado sobre o Teste de Kummer, que apresenta condições necessárias e suficientes para a convergência ou divergência de séries numéricas de termos positivos. Apresentamos também uma reinterpretação deste resultado, da qual obtemos algumas aplicações, entre elas um resultado associado ao Teorema de Olivier além de um resultado sobre gaps de potências de primos consecutivos.

Palavras-chave: Séries numéricas. Convergência e Divergência. Teste de Kummer.

ABSTRACT

CARRIJO, Wendell. **Extension for the Kummer Test and applications**. 2018. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018

In this work we present a detailed study of the Kummer Test, which presents necessary and sufficient conditions for the convergence or divergence of numerical series of positive terms. We present also a reinterpretation os this test which provides some applications, such as a theorem related to the Olivier Theorem and a theorem about the gaps between power of consecutive prime number.

Keywords: Numerical series. Convergence and Divergence. Kummer Test.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo de séries infinitas de termos positivos é de suma importância na área da Análise. Ao considerar a soma de infinitos números positivos, parece certo que esta soma irá tender ao infinito, porém, existem casos em que essa soma converge para um determinado valor. Assim, muitos matemáticos dedicaram seus estudos em métodos para descobrir se uma determinada série é convergente ou divergente, isto é, se faz sentido essa soma existir ou não.

Nosso objetivo neste trabalho é propor uma extensão ao Teste de Kummer apresentado em (**??**), demonstrá-lo e investigar algumas aplicações e consequências. O teste de Kummer é conhecido em geral por estender testes clássicos de convergência e divergência de séries de termos positivos, como Raabe, Gauss e Bertrand, em (**??**). Embora provaremos ao final do trabalho que tal extensão é na verdade equivalente ao Teste de Kummer, veremos que esta reinterpretação pode ser utilizada na obtenção de novos resultados. Obteremos por exemplo, um teorema relacionado ao Teorema de Olivier (**??**), o qual apresenta o comportamento assintótico de sequências crescentes e somáveis, bem como um teorema sobre o comportamento da sequência de *gaps* (diferenças) entre potências de primos, isto é, a sequência de elementos da forma $p_{n+1}^x - p_n^x$, em que x é um número positivo real fixado.

No Capítulo 2 deste trabalho apresentaremos os resultados preliminares. Veremos os conceitos básicos de sequências e séries, bem como alguns resultados clássicos. Apresentamos neste capítulo também, o Teorema de Olivier, o Teste de Kummer, suas demonstrações e uma forma generalizada do teste de d'Alembert obtido via Teste de Kummer.

No Capítulo 3, apresentamos a extensão para o Teste de Kummer sendo este o resultado principal. Tal extensão diz que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n a_n$, com $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ sendo sequências de termos positivos, converge se, e somente se, existir em uma sequência $\{q_n\}$ de números reais positivos e um inteiro positivo $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N.$$

Quando escolhemos a sequência $\{c_n\}$ tal que $c_n = C$ para todo n, onde C é uma constante, este resultado se torna exatamente o Teste de Kummer. Por fim, veremos neste capítulo alguns corolários úteis e algumas aplicações envolvendo convergência de Séries.

No Capítulo 4, veremos um teorema associado ao Teorema de Olivier, porém obtido a partir da Extensão do Teste de Kummer. Veremos também um exemplo onde não ocorre a monotonicidade conforme exigida no Teorema de Olivier, porém com a tese de Olivier sendo verdadeira.

No Capítulo 5, estudamos os gaps entre potências de primos consecutivos. Obtemos a partir da Extensão do Teste de Kumer um resultado que trás uma estimativa para tais gaps.

Por fim, no Apêndice, apresentamos a demonstração de que a Extensão para o Teste de Kummer e o Teste de Kummer propriamente dito são equivalentes.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e resultados básicos necessários para alcançar os objetivos deste trabalho. Em particular, introduziremos as noções formais de sequências e séries de números reais e convergência e divergênca de séries de termos positivos com base em (**??**).

Definição 2.1. *Uma sequência é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ associamos os termos da imagem por x_n. Notação: $\{x_n\}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, (x_n)$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

A seguir, apresentaremos alguns exemplos a fim de ilustrar a definição de sequências.

Exemplo 2.1. *Sequência $\{x_n\}$ de termos da forma $x_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sequência é chamada de sequência constante.*

Exemplo 2.2. *Sequência $\{x_n\}$ de termos da forma $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 2.3. *Sequência $\{x_n\}$ de termos da forma $x_n = \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Dentre as propriedades de sequências, a monotonicidade tem um papel importante neste trabalho, cuja definição segue abaixo.

Definição 2.2. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência. Dizemos que:*

(i) $\{x_n\}$ é crescente se

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$$

isto é, se $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;

(ii) $\{x_n\}$ é decrescente se

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots$$

isto é, se $x_n > x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;

(iii) $\{x_n\}$ é não-crescente se $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$.

(iv) $\{x_n\}$ é não-decrescente se $x_n \leq x_{n+1}$, para todo $n \geq 1$;

Se $\{x_n\}$ satisfaz alguma das condições acima, então ela é usualmente chamada apenas de sequência monótona. Outra propriedade importante de uma sequência é a limitação. Veremos mais a frente que a monotonicidade e a limitação de uma sequência nos fornece resultados que permitem caracterizar vários aspectos dessa sequência.

Definição 2.3. *Uma sequência $\{x_n\}$ é dita ser:*

(i) limitada superiormente se existir um número real β tal que, para todo número natural n, temos $x_n \leq \beta$;

(ii) limitada inferiormente se existir um número real α tal que, para todo número natural n, temos $x_n \geq \alpha$.

Se $\{x_n\}$ satisfaz (i) e (ii), ela é dita limitada.

Exemplo 2.4. *Sequência $\{x_n\}$ de termos da forma $x_n = \sqrt[n]{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Trata-se de uma sequência de termos positivos limitada inferiormente.*

Exemplo 2.5. *Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a < 1$, seja $x_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

A sequência $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ é crescente, pois $x_{n+1} = x_n + a^{n+1}$. Além disso, ela é limitada pois $0 < x_n < \frac{1}{1-a}$ para todo n. Em particular, tomando $a = \frac{1}{2}$, obtemos

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.6. *Uma sequência importante em Análise é a que tem como n-ésimo termo $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Ela é evidentemente crescente. Além disso, é limitada, pois*

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Posteriormente veremos que sua importância se dá pelo fato de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$.

Exemplo 2.7. *Associada ao exemplo acima temos a sequência cujo n-ésimo termo é $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.*

A fórmula do binômio de Newton nos dá

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2.1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n},$$

ou seja,

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Vemos ainda que cada b_n é uma soma de parcelas positivas. Cada uma dessas parcelas cresce com n. Logo a sequência $\{b_n\}$ é crescente. Observamos ainda, pela última igualdade, que $b_n < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Uma das principais características de uma sequência é a noção de convergência, ou seja, se esta sequência se aproxima ou não de algum valor real quando os valores n são considerados grande. Isso porque as sequências são muito utilizadas na análise para expremir a ideia de aproximação. Vamos formalizar estes conceitos.

Definição 2.4. *Diz-se que o número real a é limite da sequência $\{x_n\}$ de números reais quando para cada número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.*

Formalmente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Dizemos neste caso que a sequência $\{x_n\}$ de números reais converge para a. Também é usual denotar $x_n \to a$.

Definição 2.5. *Uma sequência $\{x_n\}$ diz-se divergente quando para nenhum número real a, é verdade que se tenha $\lim x_n = a$.*

Definição 2.6. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais.*

(i) Diremos que "x_n tende ao infinito", e escrevemos $\lim x_n = +\infty$ quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $x_n > A$. (Ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $x_n \leq$A.)

(ii) Diremos que "x_n tende a menos infinito", e escrevemos $\lim x_n = -\infty$ quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, pudermos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$. (Ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $x_n \geq -A$.)

Segue abaixo alguns exemplos de sequências tendendo ao infinito e a menos infinito:

Exemplo 2.8. *Considere a sequência $\{x_n\}$ cujo os termos são dados por:*

(i) $x_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência é uma sequência limitada inferiormente e tem $\lim x_n = +\infty$.

(ii) $x_n = \ln n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência é uma sequência limitada inferiormente e tem $\lim x_n = +\infty$.

(iii) $x_n = -e^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência é uma sequência limitada superiormente e tem $\lim x_n = -\infty$.

(iv) $x_n = -\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Essa sequência é uma sequência limitada superiormente e tem $\lim x_n = -\infty$.

Teorema 2.1 (Unicidade do limite)**.** *Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado qualquer número real $b \neq a$, mostraremos que não se tem $\lim x_n = b$. Para isso, tomemos $\epsilon = \frac{|b-a|}{2}$. Vemos que $\epsilon > 0$ e notamos ainda que os intervalos $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ e $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ são disjuntos. Assim, se existisse $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (b-\epsilon, b+\epsilon)$ teríamos $\mid a - x \mid < \epsilon$ e $\mid x - b \mid < \epsilon$, donde

$$\mid a - b \mid \leq \mid a - x \mid + \mid x - b \mid < 2\epsilon = \mid a - b \mid,$$

um absurdo. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$$

e, portanto, $x_n \notin (b-\epsilon, b+\epsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo não se tem $\lim x_n = b$ $\square$

Definição 2.7. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $\{x_{n_k}\}$ é uma subsequência de $\{x_n\}$ quando é restrição de $\{x_n\}$ a um subconjunto infinito de índices $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset \mathbb{N}$.*

Teorema 2.2. *Se $\lim x_n = a$, então toda subsequência de $\{x_n\}$ converge para o limite a.*

Demonstração. Seja $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_i}, \ldots\}$ uma subsequência de $\{x_n\}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \mid x_n - a \mid < \epsilon.$$

Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então,

$$n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow \mid x_{n_i} - a \mid < \epsilon.$$

Logo $\lim x_{n_i} = a$. □

Teorema 2.3. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Se $\{x_n\}$ é convergente, então $\{x_n\}$ é limitada.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Então, tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Tome o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Seja c o menor e d o maior elemento de F. Então todos os termos de x_n estão contidos no intervalo $[c, d]$. Logo a sequência é limitada. □

Note que nem toda sequência limitada é convergente, por exemplo $x_n = (-1)^n$ é limitada e não é convergente, porém quando a monotonicidade é adicionada ao contexto, temos o seguinte resultado conhecido como Teorema de Bolzano.

Teorema 2.4. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais. Se $\{x_n\}$ é uma sequência monótona limitada então $\{x_n\}$ é convergente.*

Demonstração. Para fixar as ideias, seja $\{x_n\}$ uma sequência não-decrescente limitada. Tomemos $a = \sup\{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Afirmamos que $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo, existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0}$. Como a sequência é monótona, temos que $n > n_0$ implica que $x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos que realmente $\lim x_n = a$.

□

A seguir, são apresentadas algumas propriedades básicas de limites de sequências. As demonstrações podem ser encontradas em (**??**).

Teorema 2.5. *Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, então*

(i) $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\lim(x_n - y_n) = a - b$;

(ii) $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iii) $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n} \right) = \dfrac{a}{b}$, *somente se* $b \neq 0$.

Foi introduzido acima o conceito de subsequências e algumas propriedades. Estes objetos terão um importante papel para o que pretendemos fazer no futuro.

Teorema 2.6 (Permanência do sinal)**.** *Se* $\lim x_n = a > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > 0.$$

Em outras palavras, se uma sequência tem limite positivo, a partir de uma certa ordem todos os seus termos são positivos.

Demonstração. Seja $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$. Então $(a - \epsilon, a + \epsilon) = (\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \in \left(\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right),$$

ou seja, $x_n > \frac{a}{2} > 0$. Assim,

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > 0.$$

□

Observação 2.1. *Da mesma maneira prova-se que se* $\lim x_n = b < 0$ *então, a partir de uma certa ordem, todos os termos são negativos.*

Corolário 2.1. *Sejam* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$ *sequências convergentes. Se* $x_n \leq y_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $\lim x_n \leq \lim y_n$*.*

Demonstração. Com efeito, se $\lim x_n > \lim y_n$, então teríamos

$$0 < \lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$$

e, daí, teríamos $x_n - y_n > 0$ para todo n suficientemente grande, isto é, $x_n > y_n$. □

Note agora que nos exemplos **??** e **??** as sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, sendo monótonas limitadas, são convergentes. Seja $e = \lim a_n$ mostraremos a seguir que $e = \lim b_n$. O número e, base dos logaritmos naturais, é uma das constantes mais ubíquas na Análise Matemática.

Exemplo 2.9. *Em primeiro lugar, como* $b_n < a_n$ *para todo* n*, obtemos que* $\lim b_n \leq \lim a_n$*. Por outro lado, fixando arbitrariamente* $p \in \mathbb{N}$*, temos, para todo* $n > p$

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ *(e mantendo* p *fixo) na desigualdade acima, o segundo membro tende para o limite de* a_p*. O Corolário* **??** *do Teorema* **??***, nos dá* $\lim b_n \geq a_p$ *para todo* p*. Novamente a mesma proposição nos permite concluir que* $\lim b_n \geq \lim a_p$*. Enfim, obtemos*

$$e = \lim b_n = \lim a_n,$$

ou seja,

$$e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Definição 2.8. *Um número real a chama-se valor de aderência de uma sequência $\{x_n\}$ quando a é limite de alguma subsequência de $\{x_n\}$.*

Definição 2.9. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada, digamos, com $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Temos $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$. Logo, tomando $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$, temos*

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta.$$

Existem, portanto, os limites

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup_n \inf X_n,$$

$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf_n \sup X_n.$$

Escrevemos $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$ e diremos que a é o limite inferior e que b é o limite superior da sequência $\{x_n\}$. Assim,

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

Vamos mostrar um exemplo para ilustrar a definição acima.

Exemplo 2.10. *Considere a sequência $\{x_n\}$ de termos tais que $x_n = \frac{1}{n}$. Note que $\liminf x_n = 0$ e $\limsup x_n = 1$.*

Corolário 2.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada $\{a_n\}$ de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Como a sequência é limitada, existe um número positivo M tal que, para todos os índices n, $-M < a_n < M$. Seja X o conjunto dos números x tais que existe uma infinidade de elementos da sequência à direita de x, isto é, $x < a_n$ para uma infinidade de índices n. É claro que $-M \in X$ e M é uma cota superior de X. Logo X é um conjunto não vazio e limitado superiormente, ou seja, X possui supremo, que designamos por A. Vamos provar que existe uma subsequência convergindo para A. Começamos provando que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem infinitos índices n tais que $A - \varepsilon < a_n$ e somente um número finito satisfazendo $A + \varepsilon < a_n$. De fato, sendo A o supremo de X, existe $x \in X$ à direita de $A - \varepsilon$ e infinitos a_n à direita desse x, portanto a direita de $A - \varepsilon$, ao mesmo tempo, só pode existir um número finito de elementos $a_n > A + \varepsilon$, do contrário, qualquer número entre A e $A + \varepsilon$ estaria em X. Seja $\varepsilon = 1$ e a_{n_1} um elemento da sequência no intervalo $(A - 1, A + 1)$. Em seguida, seja a_{n_2}, com $n_2 > n_1$, um elemento da sequência no intervalo $\left(A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2}\right)$. Em seguida, seja a_{n_3}, com $n_3 > n_2$, um elemento da sequência no intervalo $\left(A - \frac{1}{3}, A + \frac{1}{3}\right)$. Continuando com esse raciocínio, construímos uma subsequência $\{x_j\} = \{a_{n_j}\}$, que converge para A, pois $|x_j - A| < \frac{1}{j}$. O que conclui a demonstração. □

Teorema 2.7 (Teorema do Confronto)**.** *Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1$ implica que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ e $n > n_2$ implica que $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$. Denotando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que $n > n_0$ implica que $a - \varepsilon < x_n < z_n < y_n < a + \varepsilon$, ou seja, $z_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Logo $\lim z_n = a$. □

As caracterizações de Cauchy para sequências desempenham um importante papel no estudo destes objetos. A seguir apresentaremos a definição de sequências bem como alguns resultados básicos relacionados a esta definição.

Definição 2.10. *Dizemos que uma sequência de números reais $\{x_n\}$ é de Cauchy se para cada número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implica que $|x_m - x_n| < \varepsilon$.*

Teorema 2.8. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n_0$ então $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e se $n > n_0$, $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Logo,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que mostra que $\{x_n\}$ é de Cauchy. □

Lema 2.1. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,\ n \geq n_0$ implica que $|x_m - x_n| < 1$. Em particular, se $n \geq n_0$, então $|x_{n_0} - x_n| < 1$, ou seja, $n \geq n_0$ implica que $x_n \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$. Sejam α o menor e β o maior elemento do conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_{0-1}}, x_{n_{0+1}}\}$. Então, $x_n \in [\alpha, \beta]$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\{x_n\}$ é limitada. □

Lema 2.2. *Se uma sequência de Cauchy $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergindo para $a \in \mathbb{R}$, então $\lim x_n = a$.*

Demonstração. Considere x_{n_1} uma subsequência convergindo para a. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,\ n > n_0$ implica que $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe também $n_1 > n_0$ tal que $|x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Portanto,

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

O próximo resultado é uma recíproca para o Teorema **??**, no entanto, é válida somente para sequências de números reais.

Lema 2.3. *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de Cauchy. Pelo Lema 2.1, ela é limitada. Logo, pelo Corolário 2.1, $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente. Segue do Lema 2.2 que $\{x_n\}$ converge. □

No que segue, introduziremos as séries de números reais. Sua definição tem como base a definição de sequência de números reais e, portanto, conforme veremos, propriedades inerentes às séries são obtidas das propriedades de sequências.

Definição 2.11. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. A sequência $\{s_n\}$ definida por*

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j, \ n \geq 1,$$

é chamada de sequência das somas parciais de $\{a_n\}$. O limite $\lim s_n$, normalmente denotado por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é também conhecido como série de termos a_n. Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, o limite $\lim s_n$ existe. Caso contrário, a série é dita ser divergente.

Definição 2.12. *Dizemos que uma soma $\sum_{n=1}^{N} s_n$ é telescópica quando $s_n = a_n - a_{n+1}$. Nesse caso,*

$$\sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N} a_n - a_{n+1} = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_N - a_{N+1}) = a_1 - a_{N+1}.$$

Exemplo 2.11. *Seja $\sum_{n=1}^{N} s_n$, em que a sequência $\{s_n\}$ é de termos da forma $s_n = \frac{1}{n(n+1)}$, então:*

$$\sum_{n=1}^{N} s_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Teorema 2.9. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então $\lim a_n = 0$.*

Demonstração. Seja $s_n = \sum_{i=1}^{n}$. Então existe $\lim s_n = s$. Logo, temos que $\lim s_{n-1} = s$. Com isso, $0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim a_n$.

□

Se acrescentarmos no Teorema **??** a positividade e a monotonicidade como hipótese, obteremos um decaimento mais rápido para a sequência $\{a_n\}$. Resultado este chamado de Teorema de Olivier que será enunciado a seguir.

Teorema 2.10 (Teorema de Olivier)**.** *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ e $\{a_n\}$ é uma sequência decrescente de termos não-negativos, então $\lim na_n = 0$.*

Demonstração. Seja $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Note que para todo n natural

$$s_{2n} - s_n = \sum_{j=n+1}^{2n} a_j.$$

Como $\{a_n\}$ decresce,

$$s_{2n} - s_n = \sum_{j=n+1}^{2n} a_j > a_{2n} \sum_{j=n+1}^{2n} 1 = a_{2n}n.$$

Logo, $2(s_{2n} - s_n) > 2na_{2n}$ para todo $n \geq 1$. Como a série $\sum_n a_n$ converge, segue que $\lim s_n$ existe e coincide, com o limite de $\lim s_{2n}$ uma vez que s_{2n} é subsequência de s_n. Logo segue, do Teorema do Confronto, que $\lim 2na_{2n}$ existe e

$$0 = \lim 2(s_{2n} - s_n) \geq \lim 2na_{2n} \geq 0.$$

Portando provamos que $\lim na_n = 0$ para n par. Dado n natural, temos que $2n < 2n + 1$ e como a sequência $\{a_n\}$ é decrescente, $a_{2n+1} < a_{2n}$. Então,

$$0 \leq (2n + 1)a_{2n+1} \leq (2n + 1)a_{2n} = (2n)a_{2n} + a_{2n},$$

para todo $n \geq 1$. Assim, utilizando novamente o Teorema do Confronto, temos que $\lim(2n + 1)a_{2n+1}$ existe e

$$0 \leq \lim(2n + 1)a_{2n+1} \leq \lim(2n + 1)a_{2n} = \lim(2n)a_{2n} + \lim a_{2n} = 0,$$

ou seja, $\lim na_n = 0$ para n ímpar. Podemos então concluir que $\lim na_n = 0$. Isso conclui a demonstração. □

Teorema 2.11 (Teste da Comparação)**.** *Sejam as séries de termos não negativos* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, então se* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo* $n \geq p$ *(a partir de um certo termo), temos:*

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Demonstração. Tome $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ e $r_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Temos que para $n \geq p$,

$$s_n - s_{p-1} \leq r_n - r_{p-1}, \text{ou seja, } s_n \leq r_n + s_{p-1} - r_{p-1}. \tag{2.1}$$

(i) Como a sequência $\{r_n\}$ converge então ela é limitada. Assim pela desigualdade (**??**) e o fato dos termos das séries serem não negativos garantem que $\{s_n\}$ também é limitada. Como $\{s_n\}$ é monótona, segue do Teorema 2.4 que s_n converge, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Como a sequência $\{s_n\}$ é monótona não decrescente e não tem limite, então $s_n \to \infty$. Logo, de (**??**) temos que $r_n \to \infty$, o que mostra que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

$\square$

Vamos apresentar e demonstrar agora o teorema conhecido como Teste de Kummer, no qual fornece condições necessárias e suficientes para convergência e divergência de séries de termos positivos. Dele temos consequências importantes, por exemplo, os testes de D'Alembert, Raabe, Bertrand e Gauss podem ser obtidos por meio de escolhas específicas de uma determinada sequência $\{q_n\}$ (**????**).

Teorema 2.12 (Teste de Kummer)**.** *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

(i) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é convergente se, e somente se, existe uma sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos,* $c > 0$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c, \ \forall n \geq N.$$

(ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é divergente se, e somente se, existem uma sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos e* $N \in \mathbb{N}$ *tais que* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ *diverge e*

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \leq 0, \ \ \forall n \geq N.$$

Demonstração. (i) Inicialmente, suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente, com $a_n > 0$. Construiremos uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos para os quais

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} = 1,$$

para todo $n \geq 1$. Seja $M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e defina

$$q_n = \frac{M - \sum_{i=1}^{n} a_i}{a_n}, \ \ n \geq 1.$$

Para esta sequência $\{q_n\}$, temos que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \ \ = \ \ \left(\frac{M - \sum_{i=1}^{n} a_i}{a_n} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} - \left(\frac{M - \sum_{i=1}^{n+1} a_i}{a_{n+1}} \right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} &= \frac{M - \sum_{i=1}^{n} a_i}{a_{n+1}} + \frac{-M + \sum_{i=1}^{n+1} a_i}{a_{n+1}} \\ &= \frac{-\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n+1} a_i}{a_{n+1}} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\{q_n\}$, N e c são como no enunciado, isto é,

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c, \forall n \geq N,$$

então

$$q_n a_n - a_{n+1} q_{n+1} \geq c\, a_{n+1} > 0, \tag{2.2}$$

pois $a_{n+1} > 0$. Assim, somando $a_{n+1}q_{n+1}$ em (2.2), temos

$$a_n q_n \geq a_{n+1} q_{n+1} + c\, a_{n+1} > a_{n+1} q_{n+1} > 0, \forall n \geq N.$$

Logo, $\{a_n q_n\}$ é monótona decrescente a partir de N e limitada. Portanto existe o limite

$$\lim a_n q_n = L.$$

Vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n - a_{n+1} q_{n+1}$ converge. Sendo esta série do tipo telescópica, vemos que

$$\lim_{R \to \infty} \sum_{i=N}^{R} a_i q_i - a_{i+1} q_{i+1} = \lim_{R \to \infty} (a_N q_N - a_{R+1} q_{R+1}) = a_N q_N - L,$$

para todo $R \in \mathbb{N}$, com $R > N$. Daí, segue de (2.2) e do teste da comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, o que conclui o primeiro caso.

(ii) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n > 0$, seja divergente e defina

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

Como $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$, temos que $q_n > 0$ e

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_n} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{a_{n+1}} = -1 \leq 0, \ \ \forall n \geq 1.$$

Para verificar a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$, vamos mostrar que para qualquer m inteiro positivo existe $m' > m$ tal que $\displaystyle\sum_{i=m}^{m'} \frac{1}{q_i} > \frac{1}{2}$. Em outras palavras, vamos mostrar que a sequência das somas parciais de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ não é uma sequência de Cauchy. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $a_n > 0$ para todo n, dado $m \in \mathbb{N}$ pode-se obter $m' > m$ tal que

$$a_m + \cdots + a_{m'} > a_1 + \cdots + a_{m-1}. \tag{2.3}$$

Por outro lado, utilizando a definição de q_n, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{m'} \frac{1}{q_n} &= \frac{1}{\dfrac{a_1 + \cdots + a_m}{a_m}} + \cdots + \frac{1}{\dfrac{a_1 + \cdots + a_{m'}}{a_{m'}}} \\ &= \frac{a_m}{a_1 + \cdots + a_m} + \cdots + \frac{a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}}. \end{aligned}$$

Note que, sendo $m' > m$, $a_1 + \cdots + a_{m'}$ é o maior dos denominadores, ou seja,

$$\frac{a_m}{a_1 + \cdots + a_m} + \cdots + \frac{a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}} > \frac{a_m + \cdots + a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}}.$$

Então,

$$\sum_{n=m}^{m'} \frac{1}{q_n} > \frac{a_m + \cdots + am'}{a_1 + \cdots + a_{m'}}. \tag{2.4}$$

Finalmente, agrupando (2.3) e (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a_m + \cdots + a_{m'}}{a_1 + \cdots + a_{m'}} &= \frac{1}{\dfrac{a_1 + \cdots + a_{m'}}{a_m + \cdots + a_{m'}}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{a_1 + \cdots + a_{m-1}}{a_m + \cdots + a_{m'}} + \dfrac{a_m + \cdots + a_{m'}}{a_m + \cdots + a_{m'}}} \\ &= \frac{1}{\dfrac{a_1 + \cdots + a_{m-1}}{a_m + \cdots + a_{m'}} + 1} \\ &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ diverge.

Reciprocamente, suponha que $\{q_n\}$ seja uma sequência de termos positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ diverge e

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \leq 0, \quad \forall n \geq N.$$

Esta última desigualdade é equivalente a

$$q_n a_n - q_{n+1} a_{n+1} \leq 0, \quad \forall n \geq N,$$

isto é,

$$q_{n+1} a_{n+1} \geq q_n a_n, \quad \forall n \geq N. \tag{2.5}$$

Como $q_{n+1} > 0$, temos

$$a_{n+1} \geq \frac{a_n q_n}{q_{n+1}}, \quad \forall n \geq N,$$

ou, utilizando a monotonicidade dada em (2.5) para $n \geq N$

$$a_{N+n} \geq \frac{a_{N-1+n} q_{N-1+n}}{q_{N+n}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Desta última inequação obteremos, somando em n, a desigualdade

$$\sum_{k=N+1}^{R} a_k \geq a_N q_N \sum_{k=N+1}^{R} \frac{1}{q_k}, \quad \forall R \geq N+1.$$

Por hipótese $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_k}$ diverge. Deste modo, utilizando o critério da comparação concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, o que conclui o segundo caso.

$\square$

Para ilustrar uma aplicação do Teorema 2.11, vamos mostrar que o teste de D'Alembert (ou teste da razão) (**??**) é uma consequência deste. Relembremos que o enunciado do teste D'Alembert para séries de números positivos é dada por:

Teorema 2.13 (Teste D'Alembert)**.** *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos.*

(i) Se $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$*, a série é divergente;*

(ii) Se $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$*, a série é convergente;*

(iii) Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *não é possível concluir nada a respeito.*

Demonstração. Se $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, deve existir um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$ (pois por definição, $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$ é o ínfimo entre todos os limites de subsequências da sequência $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ e assim, a partir de um certo índice, todos os termos desta sequência serão maiores que o $\liminf$). Segue então que existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1, \ \forall n > N,$$

isto é,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 < 0, \ \forall n > N. \tag{2.6}$$

A desigualdade (2.6) é justamente a desigualdade indicada no Teorema 2.11 (ii), com $q_n = 1$ para todo $n \geq N$, donde concluímos que a série em questão é divergente.
Para demonstrar (ii), partindo da hipótese

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

temos que deve existir $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \ \forall n > N.$$

Ou ainda, deve existir $c > 0$ tal que

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + c, \ \forall n > N,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq c, \ \forall n > N.$$

Segue do Teorema 2.11 (i), com $q_n = 1$ para todo $n \geq 1$, que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Por fim, o caso (iii), temos que se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

ou seja,

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

nada pode ser concluído. De fato, existem séries convergentes e divergentes de termos positivos a_n e b_n, respectivamente, para os quais se tenha

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1.$$

Basta tomar $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, por exemplo. $\square$

3 PRINCIPAIS RESULTADOS

Nesta seção apresentaremos o resultado central deste trabalho, a saber, propomos uma extensão para o Teorema 2.11, isto é, um novo teste a fim de caracterizar convergência e divergência de séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$, com $\{c_n\}$ e $\{a_n\}$ sequências de termos positivos. Neste, é caracterizada a relação entre as sequências $\{c_n\}$ e $\{a_n\}$, por meio de uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos não necessariamente convergente, de modo que a série indicada acima convirja ou divirja.

Teorema 3.1 (Extensão do Teste de Kummer)**.** *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *com* $\{a_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *sequências de termos positivos. A série* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *converge se, e somente se, existirem uma sequência* $\{q_n\}$ *de números reais positivos e um inteiro positivo* $N \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ \ \forall n \geq N.$$

Demonstração. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ seja convergente (com $a_n > 0$ e $c_n > 0$). Iremos construir uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos para os quais

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} = c_{n+1},$$

para todo $n \geq 1$. Seja $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ e defina

$$q_n = \frac{S - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i}{a_n}, \ \ n \geq 1. \tag{3.1}$$

Segue que $q_n > 0$ para todo $n \geq 1$, e ainda

$$\begin{aligned} q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} &= \left(\frac{S - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i}{a_n} \right) \frac{a_n}{a_{n+1}} - \left(\frac{S - \sum_{i=1}^{n+1} c_i a_i}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{S - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i}{a_{n+1}} + \frac{-S + \sum_{i=1}^{n+1} c_i a_i}{a_{n+1}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} &= \frac{-\sum_{i=1}^{n} c_i a_i + \sum_{i=1}^{n+1} c_i a_i}{a_{n+1}} \\ &= \frac{c_{n+1} a_{n+1}}{a_{n+1}} \\ &= c_{n+1}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\{q_n\}$ e N são como no enunciado, isto é,

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N.$$

Queremos demonstrar que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ converge. De fato,

$$q_n a_n - q_{n+1} a_{n+1} \geq c_{n+1} a_{n+1}, \ \forall n \geq N, \tag{3.2}$$

pois $a_n > 0$. Somando $q_{n+1} a_{n+1}$,

$$q_n a_n \geq c_{n+1} a_{n+1} + q_{n+1} a_{n+1}, \ \forall n \geq N.$$

Como $c_{n+1} a_{n+1} > 0$,

$$q_n a_n \geq c_{n+1} a_{n+1} + q_{n+1} a_{n+1} > q_{n+1} a_{n+1} > 0, \ \forall n \geq N.$$

Logo, $\{q_n a_n\}$ é monótona decrescente para $n \geq N$ e limitada. Portanto deve existir o limite

$$\lim q_n a_n = L.$$

Vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n - q_{n+1} a_{n+1}$ converge. Como a essa série é do tipo telescópica, temos que, para todo $R \in \mathbb{N}$, com $R > N$,

$$\lim_{R \to \infty} \sum_{i=N}^{R} q_i a_i - q_{i+1} a_{i+1} = \lim_{R \to \infty} q_N a_N - q_{R+1} a_{R+1} = q_N a_N - L.$$

Segue de (3.2) e do teste da comparação, que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ é convergente, o que completa a demonstração. $\square$

Observação 3.1. *(1) Note que toda sequência de termos positivos pode ser escrita na forma $c_n a_n$. A habilidade em obter esta representação é o que pode fazer este teorema uma possível ferramenta prática para aplicações;*

(2) Assim como o Teste de Kummer, o teorema que propomos é em geral uma ferramenta com uma vertente mais teórica do que prática, uma vez que utilizá-la como teste para análise de

convergência e divergência de séries pode demandar muito trabalho.

Note que se considerarmos a contrapositiva do Teorema **??** obtemos um resultado que relaciona a divergência de séries de termos positivos. Segue abaixo:

Corolário 3.1 (Contrapositiva da Extensão do Teste de Kummer)**.** *Considere a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *com* $\{a_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *sequências de termos positivos. A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *diverge se, e somente se, para toda sequência* $\{q_n\}$ *de números reais positivos e para todo inteiro positivo* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $n \geq N$*, tal que*

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} < c_{n+1}.$$

Vamos mostrar agora uma consequência direta do Teorema **??**, ou seja, um novo teste de convergência para uma determinada sequência $\{q_n\}$. Segue abaixo o resultado:

Corolário 3.2. *Considere a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *com* $\{a_n\}$ *e* $\{c_n\}$ *sequências de termos positivos. Se existir um inteiro positivo* N *de modo que*

$$a_n - a_{n+2} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N,$$

então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ *converge.*

Demonstração. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$. Por hipótese temos que existem $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de termos positivos e $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$a_n - a_{n+2} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N,$$

ou equivalentemente

$$a_{n+1} \frac{a_n}{a_{n+1}} - a_{n+2} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N.$$

Logo, considerando a sequência $\{q_n\}$ de termos da forma $q_n = a_{n+1}$, podemos reescrever a desigualdade acima como

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, temos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ converge. □

Mostraremos agora algumas aplicações dos resultados vistos acima, de modo a ilustrar sua funcionalidade.

Exemplo 3.1. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ *é convergente.*

Considerando $f(x) = \frac{1}{x} - \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \geq 1$, temos que f é uma função decrescente, pois, $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cos(\frac{1}{x}) \leq 0$, pois $\cos(\frac{1}{x}) \leq 1$ e $x > 0$ suficientemente grande. No entanto aplicar o teste da integral abordado em (**??**), nos levaria a uma integral do tipo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} - \text{sen}x\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

o qual tem uma primitiva que não pode ser representada por termos de funções elementares $(\text{sen}x, \cos, e^x, \log, ...)$. Mostraremos que uma aplicação do Teorema 3.1 pode ser útil para tal situação. Considere a representação

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - n\text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Para verificar a convergêncida de tal série, tome $a_n = \frac{1}{n}$, $c_n = 1 - n\text{sen}\frac{1}{n}$ e $q_n = 1$ para todo $n \geq N$. De acordo com o Teorema 3.1, precisamos mostrar que, para algum $N \in \mathbb{N}$,

$$q_n\frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ \ \forall n \geq N,$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \geq 1 - (n+1)\text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right), \ \ \forall n \geq N.$$

Em outras palavras, devemos mostrar que

$$\frac{1}{n} \geq 1 - (n+1)\text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right), \ \ \forall n \geq N.$$

Multiplicando esta desigualdade por n em ambos os lados, vemos que ela é equivalente à

$$1 \ \ \geq \ \ n - n(n+1)\text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right), \ \ \forall n \geq N. \tag{3.3}$$

Agora, basta notar que o lado direito de (4.1) se aproxima de zero. De fato, sabe-se que sen$x \geq x - \frac{x^3}{3!}$, para todo $x \geq 0$ suficientemente pequeno (consequência da expansão de Taylor vista em (**??**), para sen$x$. Assim,

$$\begin{aligned} n - n(n+1)\text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right) &\leq n - n(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{3!(n+1)^3}\right) \\ &= n - n + \frac{n}{6(n+1)^2} \\ &= \frac{n}{6(n+1)^2}, \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande. Logo,

$$\lim\left[n - n(n+1)\text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] \leq \lim\frac{n}{6(n+1)^2} = 0,$$

ou seja,

$$\lim n - n(n+1)\text{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

e (4.1) é verdadeira. Portanto, pelo Teorema 3.1, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \text{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge.

Exemplo 3.2. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^n}$ *é convergente.*

De fato, para verificar que esta série é convergente utilizaremos o Corolário 3.2, com $a_n = \frac{1}{n}$ e $c_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n^{n-1}}$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$. De fato,

$$a_n - a_{n+2} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \geq \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)^{n+1-1}}, \ \forall n \geq N. \tag{3.4}$$

Simplificando, temos que (4.2) é equivalente a

$$\frac{n+2-n}{n(n+2)} \geq \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)^n}, \ \forall n \geq N,$$

ou após multiplicar por $n(n+2)$, à

$$2 \geq n(n+2)\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)^n}, \ \forall n \geq N.$$

Note que para $n > 2$ o grau do polinomio $(n+1)^n$ será maior que o grau do polinômio $n(n+2)$, desta forma $\lim \frac{n(n+2)}{(n+1)^n} = 0$. Além disso $\lim \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, ver (**??**). Logo

$$2 \geq \lim n(n+2)\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)^n} = 0,$$

ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$2 \geq n(n+2)\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)^n}, \ \forall n \geq N.$$

Portanto, pelo Corolário 3.2 a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{n^n}$ converge.

Exemplo 3.3. *Convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n}$.

Para verificar que esta série é convergente, utilizaremos o Corolário 3.2 com

$a_n = \dfrac{1}{n}$ e $c_n = n\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n}$, escrevendo a série a ser verificada como, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} n \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$. De fato,

$$a_n - a_{n+2} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N \tag{3.5}$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \geq (n+1)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}, \ n \geq N, \tag{3.6}$$

isto é,

$$\frac{n+2-n}{n(n+2)} \geq (n+1)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}, \ n \geq N,$$

e após multiplicar por $n(n+2)$ em ambos os lados, temos

$$2 \geq n(n+2)(n+1)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}, \ n \geq N. \tag{3.7}$$

Por outro lado, note que $\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ e pela Regra de L' Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim \frac{n(n+2)(n+1)}{2^{n+1}} &= \lim \frac{n^3+3n^2+2n}{2^{n+1}} \\
&= \lim \frac{3n^2+6n+2}{2^{n+1}\log 2} \\
&= \lim \frac{6n+6}{2^{n+1}\log 2 \log 2} \\
&= \lim \frac{6n}{2^{n+1}\log 2 \log 2 \log 2} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos que $\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ e $\lim \frac{n(n+2)(n+1)}{2^{n+1}} = 0$. Desta maneira de (4.4) temos

$$2 \geq \lim \left(n(n+2)(n+1)\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{2^{n+1}} \right) = 0,$$

ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que (4.4) vale para todo $n \geq N$. Portanto, pelo Corolário 3.2 a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2^n}$ converge.

Podemos notar nestas aplicações que o Teorema 3.1 nem sempre é um procedimento prático, uma vez que pode ser trabalhoso encontrar uma sequência $\{q_n\}$ que satisfaz a inequação **??**, mas em alguns casos pode ser útil para estudar séries.

Vamos agora mostar uma aplicação do Teorema 3.1 para uma sequência $\{q_n\}$ específica, a fim de obter um teste de convergência.

Exemplo 3.4. *Convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k}\frac{b_n}{\sqrt{k}}$ *com* $k \in \mathbb{R}$ *e* $k > 0$.

Pelo Teorema 3.1 caso exista uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos e um inteiro positivo N tais que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ \forall n \geq N, \tag{3.8}$$

então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Observe que se escolhermos $\{q_n\}$ tal que $q_n = \frac{\sqrt{k}}{n}$ e considerar $a_n = \sqrt{k}$ e $c_n = \frac{b_n}{\sqrt{k}}$, então a desigualdade (**??**) se torna

$$\frac{\sqrt{k}}{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}} - \frac{\sqrt{k}}{n+1} \geq \frac{b_{n+1}}{\sqrt{k}}.$$

Fazendo algumas simplificações, vemos que

$$\frac{\sqrt{k}n + \sqrt{k} - \sqrt{k}n}{n(n+1)} \geq \frac{b_{n+1}}{\sqrt{k}}.$$

Multiplicando $n(n+1)\sqrt{k}$ em ambos os lados chegamos em

$$k \geq n(n+1)b_{n+1}.$$

Portanto, se $\{b_n\}$ for tal que

$$k \geq n(n+1)b_{n+1}, \ \forall n \geq N, \tag{3.9}$$

a escolha da sequência q_n acima satisfaz (**??**), onde concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Note que (**??**) pode ser visto como

$$\frac{k}{n^2+n} \geq b_{n+1}, \ n \geq N,$$

e, como $b_{n+1} > 0$, temos

$$d_n = \frac{k}{n^2} \geq \frac{k}{n^2+n} \geq b_{n+1} > 0, \ n \geq N.$$

Note que $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ é uma série Hiper-Harmônica ou p-Série convergente, série conhecida abordada em (**??**).

Portanto, pelo Teste da Comparação $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ será convergente.

4 UMA NOVA ABORDAGEM DO TEOREMA DE OLIVIER

Vamos mostrar a seguir uma abordagem do Teorema de Olivier (**??**) utilizando a reinterpretação que demos ao Teste de Kummer conforme Teorema 3.1. Vamos mostrar que é possível obter o comportamento assintótico da sequência $\{a_n\}$, assim como é obtido no Teorema de Olivier. Além disso, veremos que sob certas condições impostas à sequência $\{q_n\}$ obtida no Teorema 3.1, a hipótese da monotonicidade pode ser retirada.

Teorema 4.1. *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *com* $\{b_n\}$ *sequência de termos positivos. A série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge se, e somente se, existem uma sequência* $\{q_n\}$ *de termos positivos e um inteiro positivo* $N \in \mathbb{N}$ *tais que*

$$q_n \frac{n+1}{n} - q_{n+1} \geq (n+1)b_{n+1}, \quad \forall n > N.$$

Além disso, se a sequência auxiliar $\{q_n\}$ *é tal que*

$$\lim \left(q_n - q_{n+1} + \frac{q_n}{n} \right) = 0,$$

então $\lim nb_n = 0.$

Demonstração. Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de termos positivos, podemos reescrevê-la na forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} nb_n$. Denotando $a_n = \frac{1}{n}$ e $c_n = nb_n$, temos do Teorema 3.1 que a série $\sum b_n$ converge se, e somente se, existe uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos tal que

$$q_n \frac{n+1}{n} - q_{n+1} \geq (n+1)b_{n+1}, \tag{4.1}$$

para todo n suficientemente grande. Agora, note que se a sequência auxiliar $\{q_n\}$ é tal que

$$\lim \left(q_n \frac{n+1}{n} - q_{n+1} \right) = \lim \left(q_n - q_{n+1} + \frac{q_n}{n} \right) = 0,$$

então da desigualdade (4.5) e do Teorema do Sanduíche, concluímos que $\lim nb_n = 0$. Em particular, se a sequência $\{q_n\}$ for convergente, o limite acima é satisfeito.

□

Vamos exibir agora um exemplo no qual não temos a monotonicidade, ou seja, não podemos aplicar o Teorema de Olivier, porém pelo Teorema 4.1 conseguimos justificar que $\lim nb_n = 0$.

Exemplo 4.1. *A série dada por* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2(\text{sen} n + \frac{3}{2})}$ *é convergente, sua sequência dos termos* $\{a_n\}$ *não é monótona e* $\lim na_n = 0.$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{2(n+1)(\text{sen}(n+1)+\frac{3}{2})}. \tag{4.2}$$

De fato, note que $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ e $2(\text{sen}(n+1)+\frac{3}{2})$ pertence ao intervalo $(1,5)$ ou seja,

$$1 \geq \frac{1}{2(\text{sen}(n+1)+\frac{3}{2})}.$$

Multiplicando estas duas desigualdade obtemos (6.1). Somando e subtraindo 1 no lado esquerdo e multiplicando e dividindo por $(n+1)$ do lado direito da inequação (6.1) temos

$$1+\frac{1}{n}-1 \geq \frac{(n+1)}{(n+1)}\frac{1}{2(n+1)(\text{sen}(n+1)+\frac{3}{2})},$$

ou seja,

$$\frac{n+1}{n}-1 \geq (n+1)\frac{1}{2(n+1)^2(\text{sen}(n+1)+\frac{3}{2})}.$$

Agora observe que se definirmos $\{q_n\}$ e $\{a_n\}$ pondo $q_n = 1$ e $a_n = \frac{1}{2n^2(\text{sen}(n)+\frac{3}{2})}$ e substituirmos estes dois valores na última desigualdade, obtemos

$$q_n\frac{n+1}{n}-q_{n+1} \geq (n+1)\frac{1}{2(n+1)^2(\text{sen}(n+1)+\frac{3}{2})}.$$

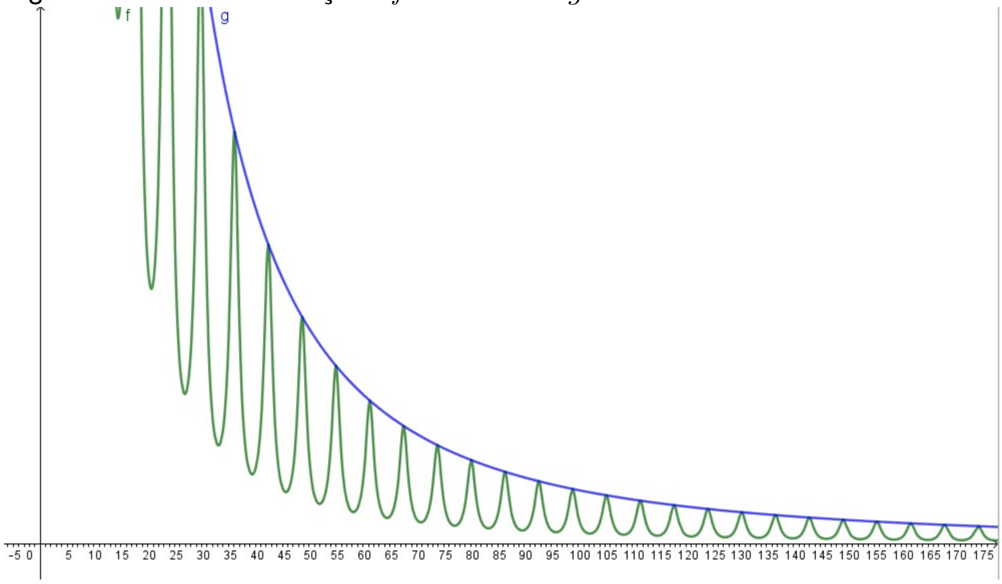
Portanto aplicando o Teorema 4.1 concluímos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2(\text{sen}n+\frac{3}{2})}$ converge. Além disso, como $q_n = 1$, temos que

$$\lim\left(q_n - q_{n+1} + \frac{q_n}{n}\right) = \lim\left(1-1+\frac{1}{n}\right) = 0,$$

isto é, podemos aplicar a segunda parte do Teorema 4.1 e concluir que $\lim n\frac{1}{2n^2(\text{sen}(n)+\frac{3}{2})} = \lim na_n = 0$.

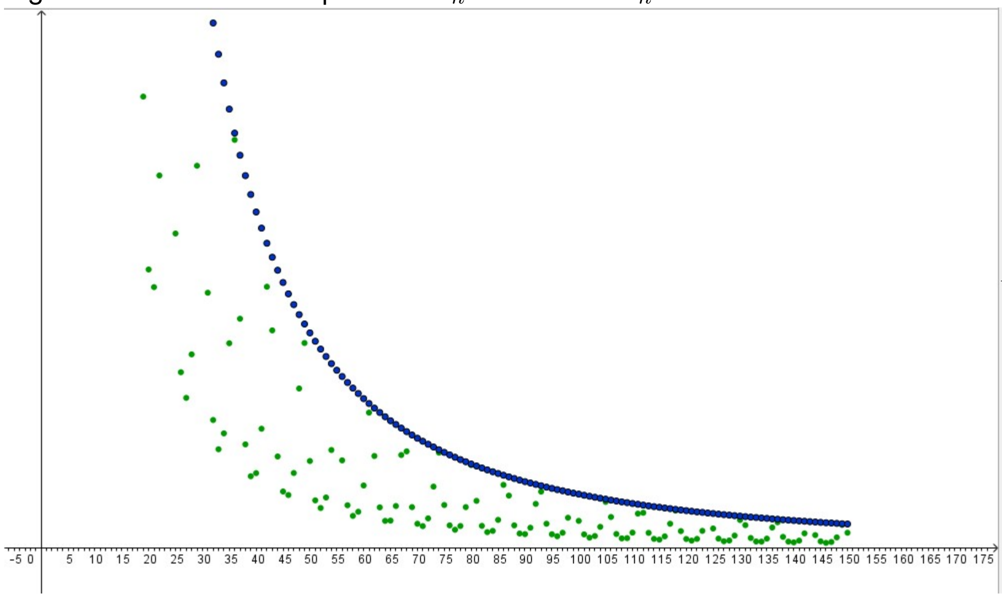
Observe que na verdade, é trivial verificar que a série converge e que $\lim na_n = 0$ neste exemplo. Contudo, nosso objetivo é ilustrar que de fato existem casos onde o Teorema de Olivier não pode ser aplicado e o Teorema 4.1 sim. De fato, a não monotonicidade da sequência $\{a_n\}$ fica ilustrada nos gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{2x^2(\text{sen}(x)+\frac{3}{2})}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$ e das sequências $a_n = \frac{1}{2n^2(\text{sen}(n)+\frac{3}{2})}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Figura 1: Gráfico das funções f em verde e g em azul.



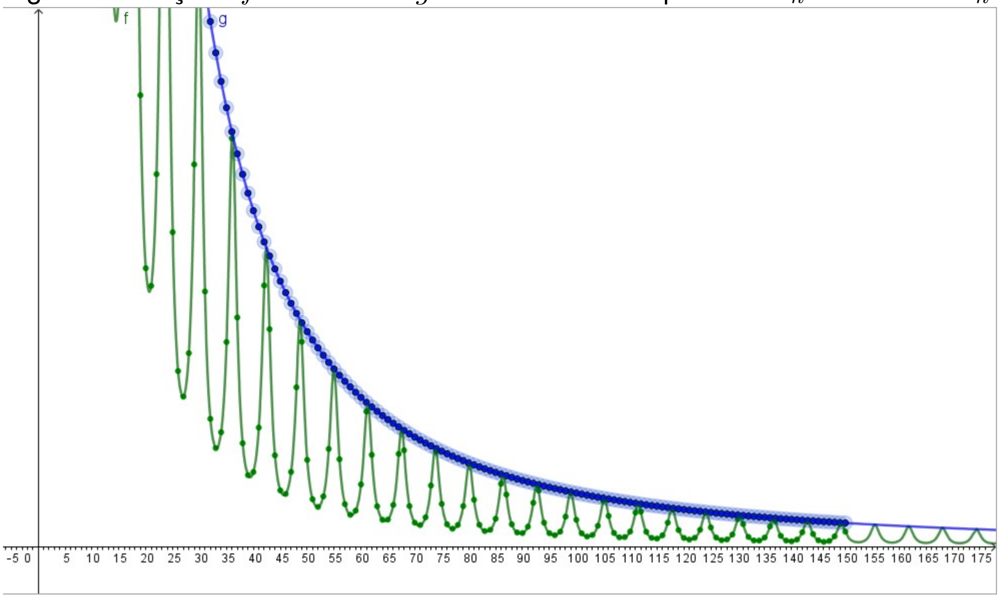
Fonte: Autoria própria

Figura 2: Gráfico das sequências a_n em verde e b_n em azul.



Fonte: Autoria própria

Figura 3: Funções f em verde e g em azul e das sequências a_n em verde e b_n em azul.



Fonte: Autoria própria

5 GAPS ENTRE POTÊNCIAS DE PRIMOS CONSECUTIVOS

O comportamento dos números primos é uma das questões mais interessantes da matemática e muitos grandes matemáticos têm trabalhado sobre esse assunto, por exemplo, D. A. Goldston, J. Pintz, C. Y. Yildirim, J. Maynard, D. H. J. Polymath e Y. Zhang. Um dos tópicos amplamente estudados é a diferença entre números primos consecutivos, os gaps de primos, ou seja, o comportamento da sequência $\{g_n\}$, onde $g_n = p_{n+1} - p_n$. Aqui, p_n denota o n-ésimo número primo. Este problema é um dos mais importantes que ainda não foi resolvido na teoria dos números. No próximo teorema apresentaremos um novo resultado que visa contribuir para os estudos de primos consecutivos. Mais especificamente, combinaremos o Corolário 3.1 e a divergência bem conhecida como série da inversa dos números primos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ (**??**) e obteremos uma estimativa para potências de dois primos consecutivos.

Teorema 5.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Para qualquer sequência de termos positivos $\{q_n\}$, a desigualdade*

$$q_n p_{n+1}^x - q_{n+1} p_n^x < \frac{p_n^x}{p_{n+1}^{1-x}}$$

é válida para infinitos valores de n.

Demonstração. Note que a série dos recíprocos dos primos pode ser reescrita na forma

$$\sum \frac{1}{p_n} = \sum \frac{1}{p_n^x} p_n^{x-1}.$$

Denotando $a_n = \frac{1}{p_n^x}$ e $c_n = p_n^{x-1}$, podemos aplicar o Corolário 3.1 e obter que, para toda sequência $\{q_n\}$ de termos positivos e $N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ tais que

$$q_n \frac{\frac{1}{p_n^x}}{\frac{1}{p_{n+1}^x}} - q_{n+1} < p_{n+1}^{x-1}.$$

Multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por $p_n^x > 0$, temos que

$$q_n p_{n+1}^x - q_{n+1} p_n^x < \frac{p_n^x p_{n+1}^x}{p_{n+1}}$$

para infinitos valores de n, o que conclui a demonstração. □

Por meio do Teorema 5.1 conseguimos algumas consequências importantes no estudo de primos consecutivos, como por exemplo um resultado novo sobre gaps de potências de primos, ou seja, vamos apresentar informações sobre a sequência $\{p_{n+1}^x - p_n^x\}$.

Corolário 5.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Para qualquer sequência de termos positivos $\{q_n\}$, existem infinitos valores de n tais que*

$$p_{n+1}^x - p_n^x < p_n^x \left(\frac{p_{n+1}^{x-1} - q_n + q_{n+1}}{q_n} \right).$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 5.1, para qualquer sequência de termos positivos q_n temos que, para infinitos valores de n vale

$$q_n p_{n+1}^x - q_{n+1} p_n^x < \frac{p_n^x}{p_{n+1}^{1-x}}.$$

Somando em ambos os lados $(-q_n p_n^x + q_{n+1} p_n^x)$, temos

$$q_n p_{n+1}^x + (-q_n p_n^x + q_{n+1} p_n^x) - q_{n+1} p_n^x < \frac{p_n^x p_{n+1}^x}{p_{n+1}} + (-q_n p_n^x + q_{n+1} p_n^x).$$

Como $q_{n+1} p_n^x - q_{n+1} p_n^x = 0$, obtemos

$$q_n p_{n+1}^x - q_n p_n^x < \frac{p_n^x p_{n+1}^x}{p_{n+1}} - q_n p_n^x + q_{n+1} p_n^x.$$

Evidenciando q_n no lado esquerdo e p_n^x no lado direito, vemos que

$$q_n (p_{n+1}^x - p_n^x) < p_n^x (p_{n+1}^{x-1} - q_n + q_{n+1}).$$

Finalmente, dividindo ambos os lados por q_n, encontramos

$$p_{n+1}^x - p_n^x < p_n^x \left(\frac{p_{n+1}^{x-1} - q_n + q_{n+1}}{q_n} \right),$$

o que conclui a demonstração. □

O próximo resultado é uma consequência imediata do Corolário 5.1, o qual apresenta um resultado sobre gaps de primos consecutivos.

Corolário 5.2. *Para qualquer sequência de termos positivos $\{q_n\}$, existem infinitos valores de n tais que*

$$p_{n+1} - p_n < p_n \left(\frac{1 - q_n + q_{n+1}}{q_n} \right).$$

Demonstração. De fato, basta tomar $x = 1$ no Corolário 5.1. □

6 CONCLUSÃO

Os estudos e investigações foram direcionados a conhecer o Teste de Kummer e apresentar uma nova interpretação desse resultado, a extensão para o teste de Kummer, o qual pode ser utilizado para provar a convergência e divergência de séries por meio da relação de duas sequências de termos positivos. Além disso, obtemos diversas consequências importantes para a Matemática, como o teorema que trata da convergência de $\{na_n\}$ quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sem exigir a monotonicidade de $\{a_n\}$ como no Teorema de Olivier e o teorema sobre gaps de potências de primos consecutivos, que afirma existir infinitos índices n tais que o gap $p_{n+1}^x - p_n^x$ é limitado superiormente por $p_n \left(\frac{1 - q_n + q_{n+1}}{q_n} \right)$, qualquer que seja a sequência de termos positivos $\{q_n\}$.

A EQUIVALÊNCIA DO TEOREMA DE KUMMER

Neste capítulo provaremos que a Extensão do Teste de Kummer que apresentamos (Teorema 3.1) é equivalente ao Teste de Kummer (Teorema 2.12).

Primeiro, vamos demonstrar o Teorema 3.1 assumindo que o Teorema 2.12 seja válido.

Teorema 3.1 (Extensão do Teste de Kummer). Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ com $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de termos positivos. A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ converge se, e somente se, existem uma sequência $\{q_n\}$ de números reais positivos e um inteiro positivo $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \ n \geq N.$$

Demonstração. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ com $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de termos positivos.

Supondo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ seja convergente, aplicando o Teorema 2.12, temos que existem $\{g_n\}$ sequência de termos positivos, $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$g_n \frac{a_n c_n}{a_{n+1} c_{n+1}} - g_{n+1} \geq C, \quad n \geq N.$$

Assim, multiplicando esta desigualdade por $\frac{c_{n+1}}{C}$, temos

$$g_n \frac{c_{n+1}}{C} \frac{a_n c_n}{a_{n+1} c_{n+1}} - g_{n+1} \frac{c_{n+1}}{C} \geq \frac{c_{n+1}}{C} C, \quad n \geq N.$$

Simplificando os termos semelhantes, obtemos

$$\frac{g_n c_n}{C} \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{g_{n+1} c_{n+1}}{C} \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Denotando $q_n = \frac{g_n c_n}{C}$, encontramos uma sequência $\{q_n\}$ tal que $q_n > 0$ e

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Reciprocamente, suponha que exitam $q_n > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Multiplicando esta desigualdade por $\frac{C}{c_{n+1}}$, onde $C > 0$ é uma constante arbitrária, temos

$$q_n \frac{C}{c_{n+1}} \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \frac{C}{c_{n+1}} \geq \frac{C}{c_{n+1}} c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Logo, multiplicando o primeiro termo por $\frac{c_n}{c_n}$ e reorganizando os termos na desigualdade, encontramos

$$\frac{q_n C}{c_n}\frac{a_n c_n}{a_{n+1}c_{n+1}} - \frac{q_{n+1}C}{c_{n+1}} \geq C, \quad n \geq N.$$

Denotando, $g_n = \frac{q_n C}{c_n}$, vemos que

$$g_n \frac{a_n c_n}{a_{n+1}c_{n+1}} - g_n \geq C, \quad n \geq N.$$

Portanto, pelo Teorema 2.12, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ converge. □

Agora, assumindo que o Teorema 3.1 seja válido, vamos demonstrar a convergência do Teorema 2.12.

Teorema 2.12 (Teste de Kummer). Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, existem uma sequência $\{q_n\}$ de termos positivos, $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$q_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - q_{n+1} \geq c, \; n \geq N.$$

Demonstração. Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ com $\{a_n\}$ sequência de termos positivos.

Suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente. Note que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode ser reescrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n,$$

onde $b_n = \frac{a_n}{c_n}$ com $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sequências de termos positivos. Aplicando o Teorema 3.1, temos que existem $\{q_n\}$ de termos positivos e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$q_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Como $b_n = \frac{a_n}{c_n}$, então

$$q_n \frac{\frac{a_n}{c_n}}{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}} - q_{n+1} \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Assim, reorganizando os termos e multiplicando esta desigualdade por $\frac{C}{c_{n+1}}$, onde $C > 0$ é uma constante arbitrária, temos

$$q_n \frac{C}{c_{n+1}} \frac{a_n c_{n+1}}{c_n a_{n+1}} - q_{n+1}\frac{C}{c_{n+1}} \geq \frac{C}{c_{n+1}} c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Simplificando os termos semelhantes, encontramos

$$\frac{q_n C}{c_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{q_{n+1}C}{c_{n+1}} \geq C, \quad n \geq N.$$

Denotando $g_n = \frac{q_n C}{c_n}$, concluímos que existem $g_n > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$g_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - g_{n+1} \geq C, \quad n \geq N.$$

Reciprocamente, suponha que existam $g_n > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que

$$g_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - g_{n+1} \geq C, \quad n \geq N.$$

Multiplicando esta desigualdade por $\frac{c_{n+1}}{C}$, temos

$$g_n \frac{c_{n+1}}{C} \frac{a_n}{a_{n+1}} - g_{n+1} \frac{c_{n+1}}{C} \geq \frac{c_{n+1}}{C} C, \quad n \geq N.$$

Logo, multiplicando o primeiro termo por $\frac{c_n}{c_n}$ e reorganizando a desigualdade, obtemos

$$\frac{g_n c_n}{C} \frac{a_n c_{n+1}}{c_n a_{n+1}} - \frac{g_{n+1} c_{n+1}}{C} \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Denotando $q_n = \frac{g_n c_n}{C}$ e observando que $\frac{a_n c_{n+1}}{c_n a_{n+1}} = \frac{\frac{a_n}{c_n}}{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}}$, temos que

$$q_n \frac{\frac{a_n}{c_n}}{\frac{a_{n+1}}{c_{n+1}}} - q_n \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Por fim, considerando $b_n = \frac{a_n}{c_n}$ concluímos que

$$q_n \frac{b_n}{b_{n+1}} - q_n \geq c_{n+1}, \quad n \geq N.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n$ converge. Isso mostra que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. $\square$