UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATÉMATICA

CAMILA DUARTE DE ARAÚJO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2014

CAMILA DUARTE DE ARAÚJO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para aprovação na Disciplina de TCC 2 na Universidade Tecnológica Federal do Paraná Campus de Cornélio Procópio.

Orientadora: Profa. Dra. Elenice Weber Stiegelmeier

CORNÉLIO PROCÓPIO
2014

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento de Matemática
Licenciatura em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS EM CIRCUITOS ELÉTRICOS

por

CAMILA DUARTE DE ARAÚJO

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 24 de novembro de 2014 como requisito parcial para a obtenção do título de graduado em Licenciatura em Matemática. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

____

Elenice Weber Stiegelmeier
Prof.(a) Orientador(a)

____

Vinícius Araújo Peralta
Membro titular

____

Douglas Azevedo Sant'Anna
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

Dedico este trabalho a Deus e a toda minha família por me apoiarem nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Antes de qualquer coisa, vale ressaltar que este pequeno espaço não é suficiente para agradecer a todos que estiveram comigo nesta caminhada da graduação de uma forma específica e detalhada, o que implica que agradecerei de modo geral a todos que me auxiliaram neste período de suma importância.

Agradeço aos meus pais e meus irmãos por me ajudarem sempre e por confiarem em mim, mesmo estando tão longe durante os quatro anos.

Agradeço ao meu namorado Caio de Paula Romancini que me ajudou, me acalmou e que me acompanhou durante toda a fase deste trabalho.

Agradeço a minha Orientadora, Professora Elenice Weber, que confiou em mim, me auxiliou, me orientou e muito me ensinou.

Agradeço também à Professora Joselene Marques e ao Professor Cícero Rafael Cena da Silva por me ajudarem também neste trabalho.

Agradeço a todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática por me ensinarem tanto e por me inspirarem. Aos meus colegas de turma e de graduação por me acompanharem, me ajudarem e me animarem em muitas vezes.

Agradeço a Deus por me iluminar sempre e por me proporcionar o convívio com essas maravilhosas pessoas por esses quatro anos.

RESUMO

ARAÚJO, Camila Duarte. **Equações Diferenciais Aplicadas em Circuitos Elétricos**. 2014. 61 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso Licenciatura em Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

Este trabalho faz uma abordagem do estudo de modelos de equações diferenciais ordinárias relacionados aos circuitos elétricos. Os modelos estudados envolvem equações diferenciais lineares, que descrevem o comportamento da corrente ou tensão em um circuito elétrico de primeira e segunda ordem. O objetivo é apresentar um estudo envolvendo equações diferenciais lineares e suas aplicações no campo de circuitos elétricos com o intuito de contextualizar o conteúdo para alunos de graduação em matemática, engenharias e outras áreas.

Palavras-chave: equações diferenciais, circuitos elétricos, aplicação.

ABSTRACT

Araujo, Camila Duarte. **Differential Equations Applied in Electrical Circuits**. 2014. 61 pages. Completion of course work in Mathematics - Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2014.

This work applies to the study of ordinary differential equations models related to electrical circuits. The models involve linear differential equations that describe the behavior of the current and voltage in first and second order electrical circuits. The goal is to present a study of linear differential equations and their applications in the field of electrical circuits, aiming to contextualize the content for graduate students in mathematics, engineering and other areas.

Keywords: differential equations, electrical circuits, application

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Historicamente, as equações diferenciais surgiram no século XVII durante estudos de Cálculo realizados por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), com o intuito de solucionarem problemas da Engenharia Mecânica. Com o passar dos anos, outros matemáticos se envolveram com o estudo das equações diferenciais e contribuíram com o avanço dos estudos apresentando métodos para encontrar as soluções de uma equação diferencial, como Leonhard Euler (1707-1783).

As equações diferenciais são um suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. O uso de equações diferenciais se faz presente em diversas áreas devido suas aplicações no campo da mecânica, da elétrica, da biologia. Exemplos dessas aplicações são: o cálculo do fluxo de corrente elétrica em um componente, um decaimento radioativo, o crescimento de uma população, disseminação de uma doença, reações químicas, esvaziamento de um tanque, entre outros.

Apesar da grande importância das equações diferenciais em diversas áreas, os livros didáticos de equações diferenciais acabam enfatizando, como forma de aplicação, problemas relacionados à mecânica e ao crescimento populacional, e poucos exemplos são apresentados em relação ao estudo de circuitos elétricos. E quando isso ocorre, apenas são feitas comparações de problemas de circuitos elétricos que envolvem equações diferenciais com os sistemas massa-mola, pois as pulsações e a ressonância aparecem em ambos os tipos de problemas (DIACU, 2004, p. 82).

De modo geral, a maioria dos livros apresenta brevemente a relação entre equações diferenciais e circuitos elétricos, apresentando as relações físicas entre as grandezas e apresentando as equações diferenciais que descrevem o comportamento da corrente ou tensão em um circuito, como Boyce e DiPrima (2013, p.155) e Zill e Cullen (2001, p. 260).

Vale ressaltar que o estudo de circuitos elétricos se torna fundamental no desenvolvimento de projetos voltados à área de engenharia elétrica e, para isso, o uso das equações diferenciais e de estratégias de resolução são ferramentas importantes para o desenvolvimento de pesquisas na área, uma vez que tais modelos são modelados por equações diferenciais para descrever seu comportamento físico. Portanto, o aluno ou pesquisador da área se depara com um novo conjunto de saberes, necessário para solucionar problemas voltados a aplicação da equação diferencial na área da Física.

De acordo Domingos e Bordeira (2001), alunos de graduação em exatas não conseguem compreender a ligação existente entre equações diferenciais e circuitos elétricos e, assim, apresentam dificuldades em disciplinas específicas, por exemplo, resistência dos materiais, mecânica de fluidos, circuitos elétricos entre outros, as quais fazem uso constante de modelos matemáticos que envolvem equações diferenciais, em especial a análise de circuitos elétricos, tornando seu estudo uma ferramenta indispensável para a formação de futuros engenheiros e pesquisadores.

Segundo Oliveira e Igliori (2013, p. 17) os alunos possuem dificuldade de utilizar as técnicas e estratégias, vistas em disciplinas de Matemática, em experiências práticas como as presentes na Física, o que torna evidente a falta de compreensão dos conteúdos abordados em aula. Percebendo a ausência da relação entre esses conteúdos feitos por livros didáticos, alguns estudiosos como Nascimento, Santos e Lucca (2013, p.2) apresentam como proposta o ensino de equações diferenciais e circuitos elétricos de uma forma contextualizada por meio da modelagem matemática.

Com isso, o presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo principal de apresentar um estudo sobre equações diferenciais e suas aplicações no campo de circuitos elétricos com o intuito de inserir os conceitos e conteúdos importantes nesta área para alunos de matemática, engenharias e pesquisadores que busquem maiores informações sobre os conteúdos abordados. E ainda, apresentar uma relação mais clara entre equações diferenciais aplicadas a circuitos elétricos. Com isso, espera-se, com o auxilio do presente material, que o aluno ou pesquisador tenha condições de compreender o conteúdo de equações diferenciais ordinárias de uma forma contextualizada a partir de aplicações na área de circuitos elétricos.

Portanto, este trabalho envolve o estudo de equações diferenciais ordinárias relacionados aos circuitos elétricos, onde as equações diferenciais lineares descrevem o comportamento da corrente ou tensão em um circuito elétrico de primeira ou segunda ordem. Vale ressaltar que para realização deste trabalho foi empregado o uso de dois softwares, sendo eles: o software GeoGebra[1], utilizado para a construção dos gráficos

[1] Mais informações sobre este software podem ser encontradas no seguinte link: http://www.geogebra.org/.

apresentados e o software EveryCircuit[2] , utilizado para apresentar de forma ilustrativa o design dos circuitos elétricos apresentados no Capítulo 5.

O texto está dividido em 6 capítulos. O Capítulo 2, seguinte a esta introdução, apresenta uma revisão de conceitos relevantes da álgebra linear, equações diferenciais e circuitos elétricos. O Capítulo 3 introduz a teoria de equações diferenciais ordinárias, onde é descrito o problema de valor inicial juntamente com teorema de existência e unicidade de soluções e é desenvolvida uma abordagem sobre as equações diferenciais ordinárias lineares. No Capítulo 4 apresenta-se o estudo de circuitos elétricos bem como sua descrição matemática e conceitos. O Capítulo 5 descreve a formulação de modelos matemáticos de equações diferenciais ordinárias aplicadas aos circuitos elétricos e os resultados obtidos. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas do presente trabalho.

[2] Mais informações sobre este software podem ser encontradas no seguinte link: http://everycircuit.com/.

2. CONCEITOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Este capítulo tem como objetivo apresentar, de forma breve, alguns conceitos da álgebra linear que serão importantes para o estudo de equações diferenciais ordinárias. Primeiramente, são descritos conceitos sobre espaços vetoriais, dependência linear e base, seguido de uma introdução a matrizes, conceitos e operações, bem como, o critério de independência linear de funções. Algumas referências sobre os assuntos abordados podem ser encontrados em Boldrini et al (1980), Coelho e Lourenço (2013) e Poole (2004).

2.1. ESPAÇOS VETORIAIS

Seja V um conjunto e a um escalar. Suponha que em V esteja definida uma operação de adição:

$$(u, v) \in V \times V \to u + v \in V, \tag{2.1}$$

e que esteja definida uma operação entre os elementos de a e os elementos de V (chamada multiplicação por um escalar):

$$(a, v) \in a \times V \to av \in V. \tag{2.2}$$

Então, pode-se enunciar a seguinte definição:

Definição 2.1: Seja V um conjunto no qual as operações de adição e multiplicação por escalar estão definidas. Se u e $v \in V$, a soma de u e v é denotada por $u + v$ e se a é um escalar, o múltiplo escalar de v é denotado por av. Se as propriedades abaixo são satisfeitas para todo u, v e $w \in V$ e para os escalares a e $b \in \mathbb{R}$, então V é um espaço vetorial e seus elementos são chamados de vetores.

a) $u + v = v + u, \forall u, v \in V,$
b) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V,$
c) Existe um elemento $0 \in V$, chamado vetor nulo, tal que $u + 0 = u$, $\forall u \in V,$
d) Para cada $u \in V$, existe um elemento $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0,$

e) $a\,(v + w) \ = av + aw$

f) $(a + b)v = av + bv$

g) $a(bv) = (ab)v$

h) $1u = u$

Observe que qualquer conjunto que satisfaça as oito condições especificadas acima será um espaço vetorial.

Os elementos de um espaço vetorial geral V são chamados de vetores.

2.1.1. Dependência Linear

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n,\ n$ vetores de V. Diz-se que o vetor $v \in V$ é combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$, se existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, tais que:

$$v = a_1 v_1 + \ \dots + a_n v_n. \tag{2.3}$$

Os escalares $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ são os coeficientes da combinação linear.

Considere o espaço vetorial V composto por $v_1, v_2, \dots, v_n$. O conjunto de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ são linearmente dependentes (LD) se existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, nem todos nulos, de modo que vale a igualdade:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0\ (vetor\ nulo). \tag{2.4}$$

Ou ainda, diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente se, e somente se, um destes vetores for uma combinação linear dos demais.

Por outro lado, o conjunto dos vetores $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é linearmente independente se a única forma de $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$ ser igual ao vetor nulo é quando os termos $a_1 = \ a_2 = \cdots = \ a_n = 0$.

O mesmo conceito pode ser estendido para um conjunto de funções. Sejam $f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)$ funções contínuas um intervalo I.

Um conjunto de funções $f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)$ é dito linearmente dependente em um intervalo I se existem constantes $c_1,\ c_2, \dots, c_n$ não todas nulas, para as quais, tem-se:

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0, \qquad x \in I. \tag{2.5}$$

Consequentemente, um conjunto de funções se diz linearmente independente em um intervalo I se todas as constantes apresentadas em (2.5) forem nulas.

O conceito de base de um espaço vetorial, segundo Boldrini et al (1980, p. 116) e Coelho e Lourenço (2013, p. 45) é um dos conceitos mais importantes sobre espaço vetorial.

Definição 2.2: Considere o espaço vetorial V. Tem-se que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores de V é uma base de V se:
(i) $\{v_1, \dots, v_n\}$ for linearmente independente,
(ii) $[v_1, \dots, v_n] = V$.

Na definição 2.2, $[v_1, \dots, v_n]$ representa o espaço vetorial gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n$, isto é, $v_1, \dots, v_n$ geram V. E ainda, a Definição 2.2, diz que, qualquer conjunto de n vetores linearmente independente é chamado de base de um espaço vetorial V e qualquer vetor do espaço pode ser representado como combinação linear dos vetores da base.

2.2. MATRIZES

As habilidades de analisar e resolver equações ficam gradualmente ampliadas quando se sabe realizar operações algébricas sobre matrizes. Tornando-se seu estudo uma ferramenta fundamental para diversas áreas das ciências.

2.2.1. Definição e Tipos de Matrizes

Chama-se matriz uma tabela disposta em linhas e colunas que apresenta dados de algum problema. Isto é, uma matriz $A_{m\times n}$ é uma tabela de m linhas e n colunas de símbolos ou dados sobre um conjunto (ou corpo).

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$, isto é, uma matriz de m linhas e n colunas. Seja a matriz $A_{m\times n}$ composta por elementos da forma a_{ij}, onde $i = 1, 2, \dots, m$ refere-se às linhas da matriz e $j = 1, 2, 3, \dots, n$, refere-se às colunas. Assim, sua representação é da seguinte forma:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Para que duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{p\times q}$ sejam iguais, é necessário que o número de linhas e colunas seja igual, $m = p$ e $n = q$, e também, todos os elementos correspondentes devem ser iguais.

Existem alguns tipos especiais de matrizes que são classificadas de acordo com suas características e recebem nomes especiais. Dentre elas, destacam-se:

i. **Matriz Quadrada:** Matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. A matriz $A_{m\times m}$ pode ser chamada de matriz de ordem m.

ii. **Matriz Nula:** Uma matriz é dita nula quando $a_{ij} = 0$ para todo i e j, ou seja, todos os elementos da matriz são nulos.

iii. **Matriz Coluna:** É uma matriz que possui uma única coluna.

iv. **Matriz Linha:** É uma matriz que possui uma única linha

v. **Matriz Diagonal:** Uma matriz quadrada é dita diagonal quando $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$, ou seja, os elementos que não pertencem a diagonal principal são nulos.

vi. **Matriz Identidade Quadrada:** Um caso especial de matriz diagonal é a matriz identidade, que é uma matriz quadrada diagonal, onde todos os elementos $a_{ij} = 1$ quando $i = j$, ou seja, os elementos da diagonal são iguais a 1 e os demais são nulos.

vii. **Matriz triangular superior:** É a matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ quando $i > j$.

viii. **Matriz triangular inferior:** É a matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ quando $i < j$.

ix. **Matriz simétrica:** É a matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$, ou melhor, a parte superior da matriz é uma 'reflexão' da parte inferior em relação a diagonal.

2.2.2. Operações com Matrizes

Considere as matrizes de mesma ordem $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$, cuja adição é denotada por $A + B$ e a multiplicação por AB.

Adição

Cada elemento da matriz A é somado com o seu correspondente da matriz B e assim terá a matriz soma denotada por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$. Essa operação entre matrizes de mesma ordem é associativa, comutativa e possui a matriz nula como elemento neutro.

Multiplicação por escalar

Considere a matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e o escalar k, que quando multiplicados resultam em uma nova matriz dada por $k \cdot A_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Transposição de matriz

Dada uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ é possível obter a matriz transposta denotada por $A'_{n\times m} = [b_{ji}]_{n\times m}$ onde $b_{ji} = a_{ij}$. Essa nova matriz possui como linhas as colunas da matriz A.

Multiplicação de matrizes

Considere as matrizes $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{p\times q} = [b_{kl}]_{p\times q}$. O produto dessas duas matrizes só é possível quando $n = p$ e o produto é uma matriz de ordem $m \times q$ dada por $AB = [c_{rs}]_{m\times q}$ onde tem-se que:

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{ks} = a_{r1}b_{1s} + \cdots + a_{rn}b_{ns}. \tag{2.7}$$

2.3. DETERMINANTE

Considere uma matriz quadrada de ordem 2 da forma $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Calcula-se o determinante da matriz A da seguinte forma:

$$Det\ A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2.9}$$

Agora, considere uma matriz de ordem 3 da forma $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$. Para calcular seu determinante, utiliza-se o Desenvolvimento de Laplace para determinantes (BOLDRINI ET AL, 1980, p. 71).

A princípio, seleciona-se o termo a_{11}, desconsidera-se sua linha e sua coluna, e multiplica a_{11} pelo valor do determinante que restou:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

Repete-se o procedimento realizado em (2.10), mas desta vez seleciona-se o termo a_{12}:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Ao selecionar o termo a_{13} tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

Assim, o determinante da matriz de ordem 3 é dada pela soma dos resultado apresentados em (2.10), (2.11) e (2.12) e é dado por:

$$Det\ B = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

O mesmo procedimento, apresentado anteriormente, pode ser utilizado para calcular o determinante de uma matriz de ordem m, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ representada por:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

2.4. WRONSKIANO

Existe um teorema que garante uma condição suficiente para que um conjunto de n funções sejam linearmente independentes em um intervalo I. Para isso, considere que todas as funções sejam diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes neste intervalo.

Teorema 2.1 – Critério para Independência Linear de Funções. Considere um conjunto de funções $f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)$ diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes. Se o determinante,

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots f_n \\ f'_1 & f'_2 & \dots f'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

não for nulo em pelo menos um ponto do intervalo I, então, as funções $f_1(x),\ f_2(x), \dots, f_n(x)$ são ditas linearmente independentes no intervalo.

O determinante apresentado no Teorema 2.1 é chamado de Wronskiano das funções e é denotado por $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Demonstração:

Para dar início à demonstração do Teorema 2.1 considere $n = 2$. Suponha que existem duas funções f_1, f_2 definidas no intervalo I, que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$ para um $x_0 \in I$ e que $f_1(x)\ e\ f_2(x)$ são linearmente dependentes nesse intervalo. De acordo com o conceito de dependência linear de funções apresentada na seção anterior tem-se que se $f_1(x)\ e\ f_2(x)$ são linearmente dependentes então, pode-se dizer que existem constantes não nulas $c_1,\ c_2$ de modo que, para todo $x \in I$, ocorre que:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0. \tag{2.15}$$

Derivando a combinação linear (2.15), tem-se:

$$c_1 f_1{}'(x) + c_2 f_2{}'(x) = 0, \qquad x \in I. \tag{2.16}$$

Com as equações (2.15) e (2.16) obtêm-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \\ c_1 f_1{}'(x) + c_2 f_2{}'(x) = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Entretanto, a dependência linear das funções $f_1(x)\ e\ f_2(x)$ implica que o sistema linear (2.17) possui uma solução não trivial para cada x no intervalo. Isso implica que, para todo x pertencente ao intervalo, tem-se:

$$W(f_1(x), f_2(x)) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix} = 0, \qquad x \in I. \tag{2.18}$$

Observe que a equação (2.18) contradiz a suposição inicial de que $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$. Por contradição, pode-se concluir que $f_1(x)\ e\ f_2(x)$ são linearmente independentes.
De modo análogo para o caso geral, supondo que existem $c_1, c_2, \dots, c_n$ constantes reais não todas nulas, sabe-se:

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \qquad x \in I, \tag{2.19}$$

e que $W(f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)) \neq 0$.
Da equação (2.19), derivando $(n-1)$ vezes se obtém:

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \\ c_1 f_1{}'(x) + \cdots + c_n f_n{}'(x) = 0 \\ \dots\ \dots\ \dots \\ c_1 f_1{}^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n f_n{}^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}. \tag{2.20}$$

De (2.20) tem-se:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots f'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0, \quad x \in I. \tag{2.21}$$

De (2.21) tem-se $W(f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)) = 0$, o que é um absurdo pois a hipótese era que $W(f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)) \neq 0$. Por contradição, pode-se concluir que $f_1(x)$, $f_2(x), \dots, f_n(x)$ são linearmente independentes.

3. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo de equações diferenciais pode ser aplicado em problemas físicos, biológicos, populacionais, em problemas relacionados a processos químicos, elétricos, mecânicos, estatísticos, entre outros (CUNHA, 2011, p. 6). Ou seja, as equações diferenciais modelam estes fenômenos, dependendo de cada problema em particular.

Esta seção apresenta o estudo de equações diferenciais ordinárias e uma condição necessária de existência de soluções para problemas de valor inicial. E, ainda, os principais métodos de resolução de equações diferenciais lineares.

3.1. O QUE É UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

O estudo de problemas que envolvem equações diferenciais surge da tentativa de formular ou descrever certos sistemas físicos em termos matemáticos.

Enquanto as incógnitas das equações algébricas são números, as incógnitas de uma equação diferencial são funções, pois uma equação diferencial associa uma função incógnita e uma ou mais de suas derivadas. (DIACU, p.1, 2004).

Considere uma função $y = f(x)$, $x \in I$, contínua. Sua derivada é uma função dependente de x e é denotada por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{3.1}$$

Para encontrar a derivada de uma função contínua basta aplicar as regras de derivação estudadas no Cálculo Diferencial. No entanto, o foco, neste momento, não é encontrar a derivada de $f(x)$, e sim, a partir de sua derivada, encontrar a função $y = f(x)$ que satisfaça (3.1), ou seja, pretende-se resolver a equação diferencial.

Definição 3.1: Uma equação cujas incógnitas são funções e que contém, pelo menos, uma derivada ou diferencial dessas funções é denominada de equação diferencial.

As equações diferenciais são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Em relação à classificação quanto ao tipo, existem duas classes de equação diferencial, ordinárias e parciais. Essa classificação se dá devido ao tipo de derivadas que a equação apresenta. Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO). Por outro lado, se uma equação envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Uma equação diferencial pode também ser classificada de acordo com a ordem. A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação, ou seja, se a equação apresenta uma derivada ordem n e ela é a maior derivada, então a denomina-se equação diferencial de ordem n.

Outra categoria de classificação é quanto à linearidade da equação diferencial.

Definição 3.2: Uma equação diferencial é chamada linear quando pode ser escrita da forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x), \qquad x \in I,$$

onde $a_i(x)$ e $g(x)$ são contínuas em $I,\ e$ $\frac{d^i y}{dx^i}$ tem potência 1 para todo $i = 0, 1, \ldots, n.$ As funções $a_i(x)\ com\ i = 0, 1, \ldots, n$ são chamados coeficientes da equação.

Observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

(i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

(ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não é linear é chamada de não linear.

3.2. SOLUÇÕES

Quando se depara com modelos de equações diferenciais, tem-se por objetivo resolve-las e encontrar suas soluções.

Definição 3.3: Qualquer função f definida em algum intervalo I que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade é chamada de solução para a equação no intervalo.

Existem casos em que a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo x real. Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula em um intervalo I é em geral chamada de solução trivial.

Um problema envolvendo equações diferenciais pode apresentar, também, soluções explícitas ou implícitas. Se a solução é escrita da forma $y = f(x)$, então a solução é chamada de explícita. Já a relação $G(x, y) = 0$ é dita solução implícita da equação diferencial em um intervalo I caso esta relação defina uma ou mais soluções explicitas. Existem casos em que mais de uma função pode ser solução de uma equação diferencial e, ainda, há casos em que a equação diferencial não possui solução.

As estratégias de resolução de EDOs envolvem o cálculo de integrais indefinidas, com isso, sua solução depende da constante de integração. Desse modo, ao se encontrar a solução para a equação diferencial em questão, encontra-se uma função que gera uma *família de soluções*, devido à infinidade de escolhas possíveis para a constante arbitrária, c. Uma solução contendo uma constante arbitrária c representa um conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluções, chamado de *família de soluções a um parâmetro*.

Ao resolver uma equação diferencial de ordem n $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, obtêm-se uma *família de soluções a n parâmetros* $G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Isso significa que uma solução diferencial tem um número infinito de soluções correspondentes ao número ilimitado de opções dos parâmetros (ZILL, 2012, p. 7).

Considere a equação diferencial de ordem n dada por:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{3.2}$$

A equação diferencial ordinária (3.2) apresenta dois casos de solução, que depende da forma da função $g(x)$, definidos a seguir.

Definição 3.4 – Solução Geral: Considere $\boldsymbol{g(x) = 0}$. Sejam $\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_n}$, $\boldsymbol{n}$ soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear de ordem $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0},$$

em um intervalo *I*. A solução geral para a equação no intervalo é definida por:

$$\boldsymbol{y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n},$$

em que os $\boldsymbol{c_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$ são constantes arbitrárias.

Considerando $g(x) \neq 0$, a equação (3.2) apresenta uma nova solução, chamada de solução particular, $y_p(x)$, que consiste em uma solução que não depende de constantes arbitrárias. Deste modo, a solução geral $y(x)$ da equação (3.2) é dada por:

$$y(x) = y_p(x) + c_1\boldsymbol{y_1} + c_2\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n, \qquad (3.3)$$

onde a solução geral apresentada na Definição 3.4 é chamada de solução complementar, $y_c(x)$, o que implica que a solução geral da equação diferencial (3.2) com $g(x) \neq 0$ é dada por:

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x), \qquad (3.4)$$

Definição 3.5: Sejam $\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_n}$ soluções de (3.2). Se o conjunto de $\boldsymbol{n}$ soluções $\{\boldsymbol{y_1, y_2, \dots, y_n}\}$ for linearmente independente, ou seja, o Wronskiano dessas funções não é nulo, então a combinação linear dessas soluções forma o conjunto fundamental de soluções no intervalo $\boldsymbol{I}$.

Segundo a Definição 3.5, outro conceito importante que envolve equações diferenciais é a formação de um conjunto fundamental de soluções, uma vez que, o Wronskiano dessas funções não é nulo.

3.3. PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Nesta seção será apresentado um problema de valor inicial (PVI) para uma equação diferencial de primeira ordem e, em seguida, será descrito um problema de valor inicial para equações diferenciais de ordem maior.

Um problema de valor inicial consiste em encontrar a solução $y(x)$ de uma equação diferencial que satisfaça condições pré-definidas.

Considere a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3.5}$$

sujeita a condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário.

O problema

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. , \tag{3.6}$$

é chamado de problema de valor inicial (PVI). Em outras palavras, está se procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I, tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado a priori.

Para exemplificar, considere o caso particular a seguir.

Dado o problema de valor inicial:

$$\left| \begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = y \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. . \tag{3.7}$$

Para obter a solução do PVI (3.7) pode ser utilizado o Método das Variáveis Separáveis, descrito em Diacu (2004, p.13), o qual consiste em separar as variáveis e integrar:

$$\int 1\, dx = \int \frac{1}{y} dy. \tag{3.8}$$

De (3.8) tem-se:

$$ln|y| = x + c. \tag{3.9}$$

onde c é a constante resultante da integração. Aplicando a função exponencial, tem-se:

$$e^{ln\, y} = e^{x+c} \tag{3.10}$$

Portanto, pode-se expressar a solução do PVI como:

$$y = ce^{x}, \tag{3.11}$$

uma vez que $e^{c} = c$. Pode-se observar que $y = ce^{x}$ representa uma família de soluções a um parâmetro no intervalo $I = (-\infty, \infty)$, a qual caracteriza a solução geral da equação diferencial.

Encontrada a solução geral da equação diferencial, utiliza-se a condição inicial dada em (3.7), a qual diz que a função aplicada em x_0 deve resultar em y_0. Tomando como solução geral $y = c\, e^{x}$ e aplicando a condição inicial do PVI, tem-se:

$$y_0 = c\, e^{x_0}. \tag{3.12}$$

Com isso, pode-se definir o valor específico do parâmetro $c = y_0\, e^{-x_0}$ e, então, obter a solução particular, y_p, do problema (3.7).

A Figura 1 descreve uma família de soluções para o PVI (3.7). Observe que variando o parâmetro c são obtidas as diversas curvas soluções. Portanto, dependendo da condição inicial dada pode-se definir uma única solução para o PVI no intervalo I.

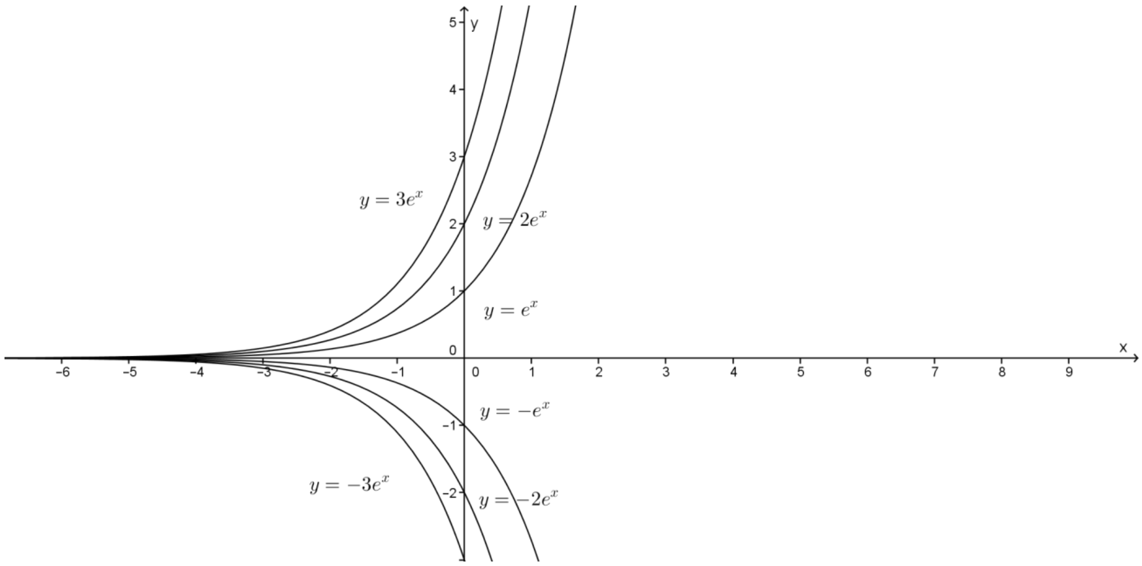

Figura 1: Gráfico de soluções para o PVI (3.7).

Para uma equação diferencial de n-ésima ordem o problema:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}, \tag{3.13}$$

em que $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ são constantes reais é chamado de problemas de valor inicial. Os valores $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são as condições iniciais do problema e busca-se uma solução em algum intervalo I contendo x_0 de forma análoga ao caso anterior.

3.3.1. Teorema de Existência e Unicidade

Ao se considerar um problema de valor inicial, precisa-se investigar se existe uma solução para o problema e, se essa solução existe, se ela é única. Para se verificar essas possibilidades existe o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções. Esse teorema garante a existência e unicidade de uma solução para problemas de valor inicial de primeira ordem.

Teorema 3.1 – Existência e Unicidade de Soluções: Considere uma região retangular R onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \in [a, b]\; e\; y \in [c, d]\}$, e o ponto (x_0, y_0) pertence à essa região R. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas nessa região, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida nesse intervalo que satisfaz o problema de valor inicial (3.6).

O resultado anterior é um dos mais populares teoremas para a existência e unicidade de soluções, uma vez que as condições de continuidade são fáceis de serem verificadas. No entanto, não é possível determinar um intervalo específico I no qual uma solução esta definida sem realmente resolver a equação diferencial. Uma discussão mais completa da demonstração do teorema fundamental de existência e unicidade pode ser encontrada em Brauer e Nohel (1989) e Doering e Lopes (2014).

3.4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Os problemas apresentados neste trabalho, envolvendo circuitos elétricos, são modelados a partir de equações diferenciais lineares, Portanto, nessa seção serão examinadas soluções para equações diferenciais de primeira e segunda ordem lineares.

3.4.1. Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem

Considere equações diferenciais de primeira ordem do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3.14}$$

onde f é uma função contínua de duas variáveis. A solução da equação diferencial (3.14) é dada por qualquer função diferenciável $y = \varphi(x)$ que satisfaça essa equação para todo x em algum intervalo.

Se a função $f(x, y)$ em (3.14) depender linearmente da variável dependente y, então, (3.14) é chamada equação linear de primeira ordem.

Definição 3.6: Uma equação diferencial de primeira ordem da forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{3.15}$$

onde $a_1(x) \neq 0\ \forall x \in I$ e $a_1(x),\ a_0(x)y, g(x)$ são funções contínuas, é dita uma equação linear na variável dependente y.

Em geral, pode-se escrever a equação (3.15) da forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x). \tag{3.16}$$

onde $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$, com $a_1(x) \neq 0\ \forall x \in I$, são funções dadas da variável independente x.

Para encontrar uma solução para (3.16) a estratégia adotada consiste em multiplicar a equação diferencial (3.16) por uma função $\mu(x)$ escolhida de modo que a equação resultante seja integrável. A função $\mu(x)$ é chamada de fator integrante. Desse modo, ao se multiplicar a equação (3.16) por $\mu(x)$, tem-se:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x), \qquad x \in I. \tag{3.17}$$

Observe que o membro esquerdo da equação (3.17), de fato, é a derivada de um produto de duas funções. Considere a derivada do produto das funções $\mu(x)$ e y denotada por $\frac{d[\mu(x)\cdot y]}{dx}$, da regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{d[\mu(x)\cdot y]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}, \qquad x \in I. \tag{3.18}$$

Igualando a parte esquerda de (3.17) com a parte direita de (3.18) tem-se:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}. \tag{3.19}$$

Subtraindo o termo $\mu(x)\frac{dy}{dx}$ da equação (3.19), observa-se que vale a igualdade:

$$\mu(x)p(x)y = \frac{d\mu(x)}{dx}y, \tag{3.20}$$

e ainda, dividindo (3.20) por y, com $y \neq 0$, tem-se:

$$\mu(x)p(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}. \tag{3.21}$$

Como o objetivo é determinar o fator integrante $\mu(x)$, então:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} \cdot \frac{1}{\mu(x)} = p(x), \qquad \mu(x) \neq 0. \tag{3.22}$$

Nota-se que o lado esquerdo da equação (3.22) pode ser escrito como a derivada de $ln(\mu(x))$ e assim, a partir de (3.22), tem-se:

$$\frac{d[ln(\mu(x))]}{dx} = p(x) \tag{3.23}$$

Integrando em relação à x, ambos os lados da equação (3.23):

$$ln(\mu(x)) = \int p(x)dx. \tag{3.24}$$

Por fim, utilizando as propriedades de logaritmo e exponencial, se obtém o fator de integração $\mu(x)$:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}, \tag{3.25}$$

com $\mu(x) \neq 0$ para todo x em um intervalo I e contínua.

Para se determinar a solução geral da equação diferencial (3.16), deve-se substituir o fator integrante $\mu(x)$ definido em (3.25) em (3.17) e resolvendo, obtém-se a solução:

$$y = \frac{\int \mu(x) q(x)\, dx}{\mu(x)}. \tag{3.26}$$

3.4.2. Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem

Considere a equação linear de segunda ordem representada por:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x), \tag{3.27}$$

onde $P(x), Q(x), R(x)$ e $G(x)$ são funções contínuas.

Entretanto, na maioria das vezes é mais frequente que o coeficiente da derivada de maior ordem seja 1, para facilitar o cálculo da solução. Para isso, divide-se (3.27) por $P(x) \neq 0$. Assim, atribuindo $p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}\ e\ g(x) = \frac{G(x)}{P(x)}$, obtém-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x), \tag{3.28}$$

com $p(x), q(x)\ e\ g(x)$ funções contínuas em I.

Se $g(x) = 0$ então (3.28) é dita homogênea. Caso contrário, (3.28) é dita não homogênea.

O teorema a seguir apresenta condições de que a soma ou a superposição de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

Teorema 3.2 – Princípio da superposição: Sejam $y_1, y_2, \dots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de n-ésima ordem homogênea $a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$ em um intervalo I. Então, a combinação linear $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$ em que os termos $c_i, i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Detalhes do Teorema 3.2 são obtidos em Boyce a DiPrima (2013).

3.4.2.1. Equações Lineares Homogêneas

Considere uma equação diferencial de segunda ordem homogênea representada por:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0, \tag{3.29}$$

com a, b, c constantes e $a \neq 0$

Denotando $\frac{d^2y}{dx^2}=y''$, $\frac{dy}{dx}=y'$, a equação (3.29) pode ser reescrita como:

$$ay''+by'+cy=0. \tag{3.30}$$

Suponha que $y=e^{rx}$, com $r \in R$, é uma solução de (3.30) e calculando suas derivadas, $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$. Substituindo a função e suas derivadas em (3.30), obtêm-se:

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0, \tag{3.31}$$

ou ainda,

$$e^{rx}(ar^2+br+c)=0. \tag{3.32}$$

Como $e^{rx} \neq 0$, então, para que a equação seja identicamente nula é necessário e suficiente que:

$$ar^2+br+c=0. \tag{3.33}$$

A equação (3.33) é chamada de equação característica. Deste modo, as raízes da equação característica correspondem ao conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea. Porém, neste caso, existem três possíveis casos de solução da equação característica: raízes reais e iguais, raízes reais e distintas e raízes complexas conjugadas. Isso implica que existem três casos de soluções para a equação (3.29).

1º Caso – Raízes Reais Distintas

Considere que a equação característica (3.33) possua duas raízes reais distintas, sendo elas denominadas $r_1 \, e \, r_2$. Considere $y = e^{rx}$ uma solução da equação (3.29). Deste modo, têm-se duas soluções para (3.29), dadas por:

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.34}$$

e

$$y_2 = e^{r_2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.35}$$

Observe que as funções y_1 e y_2 são linearmente independentes, pois o wronskiano $w[y_1, y_2] \neq 0$ para todo x real. Desse modo, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, o que implica que para este caso, a solução geral da equação (3.29) é dada por:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.36}$$

2º Caso – Raízes Reais Iguais

Considere que a equação característica (3.33) possua duas raízes reais iguais, ou seja, $r_1 = r_2$. Isso implica que existe uma primeira solução dada por $y_1 = e^{r_1 x}$ e uma segunda solução pode ser construída a partir da solução conhecida (detalhes sobre a construção de uma segunda solução são apresentados no Apêndice A). Assim, uma segunda solução é dada por:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.37}$$

Substituindo os valores de y_1 e de $p(x) = \frac{b}{a}$ na equação (3.37), obtém-se:

$$y_2 = e^{r_1 x} \int \frac{e^{-\int b/_a dx}}{(e^{r_1 x})^2} dx. \tag{3.38}$$

Calculando a integral $-\int b/_a \, dx$, tem-se:

$$y_2 = e^{r_1 x} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{2r_1 x}} dx. \tag{3.39}$$

Do estudo de equações de segundo grau, sabe-se que, $r_1 = r_2$ somente quando $\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ em $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, o que implica que $r_1 = -\frac{b}{2a}$ e consequentemente $2r_1 = -\frac{b}{a}$. Com isso, a equação (3.39) pode ser reescrita da seguinte como:

$$y_2 = e^{r_1 x} \int \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}} dx = e^{r_1 x} \int 1 dx = x e^{r_1 x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.40}$$

Observe que uma segunda solução para o problema acima pode ser escrita como $y_2 = x e^{r_1 x}$. Como as duas soluções são linearmente independentes, logo, formam um conjunto fundamental de soluções e, então, a solução geral da equação (3.29) por este caso é dada por:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.41}$$

3º Caso – Raízes Complexas Conjugadas

Neste caso, considere que as duas raízes da equação característica (3.33) são raízes complexas, então, tomando-se $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $i^2 = -1$. Formalmente, pode-se observar que o 1º caso e o 3º são semelhantes, logo, a solução geral é dada nesse caso é dada por:

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{3.42}$$

Porém, expandindo os termos da equação (3.42), obtém-se:

$$y = c_1 \cdot e^{\alpha} \cdot e^{i\beta x} + c_2 \cdot e^{\alpha} \cdot e^{-i\beta x}. \tag{3.43}$$

Normalmente se estuda equações diferenciais com o uso de funções reais e não com exponenciais complexas. Deste modo, faz-se uso da Fórmula de Euler, onde para um número real θ tem-se a seguinte relação:

$$e^{i\theta} = cos\,\theta + i\,sen\,\theta. \quad (3.44)$$

Aplicando a fórmula de Euler (3.44) nos termos $e^{i\beta x}$ e $e^{-i\beta x}$ obtêm-se as seguintes relações:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\,sen\,\beta x \quad (3.45)$$

e

$$e^{-i\beta x} = cos\,\beta x - i\,sen\,\beta x. \quad (3.46)$$

Pela propriedade das trigonométricas par e impar, tem-se que $cos\,(-\beta x) = cos\,\beta x$ e $sen\,(-\beta x) = -sen\,(\beta x)$. Então,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = cos\,\beta x + i\,sen\,\beta x + cos\,\beta x - i\,sen\,\beta x = 2cos\,\beta x \quad (3.47)$$

e

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = cos\,\beta x + i\,sen\,\beta x - cos\,\beta x + i\,sen\,\beta x = 2i\,sen\,\beta x. \quad (3.48)$$

Ao escolher constantes específicas para (3.42), é possível obter duas soluções distintas. Considere $c_1 = c_2 = 1$ em (3.42), então:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (3.49)$$

Ao colocar o fator comum em evidência em (3.49), obtém-se:

$$y_1 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}\right) = 2e^{\alpha x}cos\,\beta x. \quad (3.50)$$

Por outro lado, atribuindo outros valores para as constantes de (3.42) obtém-se uma segunda solução. Considere agora $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$, então:

$$y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (3.51)$$

E ainda, (3.51) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$y_2 = e^{\alpha x}\left(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}\right) = 2ie^{\alpha x}sen\,\beta x. \quad (3.52)$$

Observe que $e^{\alpha x} cos\, \beta x$ e $e^{\alpha x} sen\, \beta x$ são soluções para a equação (3.29) e que são linearmente independentes, com isso, essas funções formam um conjunto fundamental de soluções. Deste modo, a solução geral para a equação (3.29) no caso de raízes complexas é dada por:

$$y = c_1 e^{\alpha x} cos\, \beta x + c_2 e^{\alpha x} sen\, \beta x, \tag{3.53}$$

ou ainda,

$$y = e^{\alpha x}(c_1 cos\, \beta x + c_2 sen\, \beta x). \tag{3.54}$$

3.4.2.2. Equações Lineares Não Homogêneas

Até o momento foram apresentadas as soluções para equações de segunda ordem homogêneas.

Considere a seguinte equação diferencial de segunda ordem não homogênea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x), \tag{3.55}$$

com $G(x) \neq 0$.

Para encontrar a solução de uma equação não homogênea utiliza-se o método dos coeficientes indeterminados. O método só é possível para alguns casos restritos de $G(x)$, por exemplo, se $G(x)$ é formada por alguma das seguintes relações, uma constante k, uma função polinomial, função exponencial, função seno e cosseno, ou somas e produtos dessas funções.

Para desenvolver o método é preciso encontrar uma função complementar y_c e também uma equação particular y_p.

Definição 3.7 - Solução Geral de Equações Não Homogêneas: Considere y_p uma solução particular dada para a equação diferencial de segunda ordem não homogênea em um intervalo I e seja $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ a solução geral da equação homogênea associada, chamada de solução complementar da equação não homogênea no mesmo intervalo. Assim, a solução geral da equação não homogênea é definida por $y = y_c(x) + y_p(x)$.

De acordo com a Definição 3.7, para encontrar a solução geral de uma equação não homogênea é preciso encontrar a solução complementar, y_c a partir da equação homogênea associada, com $G(x) = 0$ e, em seguida, deve-se determinar a solução particular, y_p. O método dos coeficientes indeterminados se baseia na escolha de uma função y_p que tenha a mesma forma de $G(x)$. Então, supondo que y_p é solução, calcule suas derivadas e substitua em (3.55), encontrando os coeficientes desta função. Assim, a solução geral é descrita por:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x). \tag{3.56}$$

Para exemplificar o método, na Tabela 2 são descritos alguns exemplos de possíveis funções particulares baseado na forma de $G(x)$.

Tabela 1: Tentativas de Soluções Particulares.

$\boldsymbol{G(x)}$	$\boldsymbol{y_p}$
1 (qualquer constante)	A
$8x-5$	$Ax+B$
x^2+7	Ax^2+Bx+C
$3x^3-5x+8$	Ax^3+Bx^2+Cx+D
$sen(8x)$	$A\,cos(8x)+B\,sen(8x)$
$cos(3x)$	$A\,cos(3x)+B\,sen(3x)$
e^{3x}	Ae^{3x}
$(5x-4)e^{3x}$	$(Ax+B)e^{3x}$
x^2e^{3x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$
$e^{3x}\,sen(8x)$	$Ae^{3x}\,cos(8x)+Be^{3x}\,sen(8x)$
$3x^2sen(8x)$	$(Ax^2+Bx+C)\,cos(8x)+\ (Dx^2+Ex+F)sen(8x)$
$xe^{3x}cos(3x)$	$(Ax+B)e^{3x}\,cos(3x)+(Cx+D)e^{3x}\,sen(3x)$

Fonte: Autor.

A combinação linear $ay_p''+by_p'+cy_p$ deve ser igual a $G(x)$, então, é razoável supor que y_p tem a mesma forma de $G(x)$. Exemplos deste método podem ser encontrados em Zill e Cullen (2001, p. 188).

4. CIRCUITOS ELÉTRICOS

Este capítulo é destinado aos conceitos básicos necessários sobre a teoria de circuitos elétricos para entendimento das aplicações realizadas no próximo capítulo. Será apresentada brevemente a definição dos circuitos, as leis necessárias para a análise de circuitos elétricos e a expressão matemática que descreve o comportamento de um circuito elétrico.

4.1. CONCEITOS BÁSICOS

Um circuito elétrico é descrito como um caminho fechado no qual os elementos elétricos do circuito estão ligados por um meio condutor. Uma corrente elétrica passa por esses componentes causando a diferença de potencial em cada componente. (IRWIN; NELMS, 2013, p.2-3).

A corrente elétrica é definida como o fluxo de partículas com carga elétrica que se deslocam de um polo de um componente á outro.

A diferença de potencial (DDP), também conhecida como tensão elétrica, é a diferença de potencial elétrico entre dois pontos de um circuito. Sua unidade de medida é o Volt[3] e pode representar tanto uma fonte de energia quanto a energia "perdida" ou armazenada (queda de tensão).

Os elementos que compõem o circuito determinam sua classificação. Neste trabalho se utilizará apenas circuitos do tipo RL, RC e RLC. Os circuitos RL são compostos por resistores e indutores enquanto os circuitos RC são compostos por resistores e capacitores e os circuitos RLC são compostos pelos três dispositivos. Deste modo, os componentes elétricos que serão utilizados são:

Resistor: Esse dispositivo elétrico pode ser usado com duas finalidades, a de transformar energia elétrica em energia térmica por meio do efeito joule e a de limitar a corrente elétrica em um circuito, oferecendo uma oposição à passagem de corrente

[3] Homenagem ao Físico italiano Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (1745-1827), que inventou a pilha elétrica.

elétrica através de seu material. A essa oposição dá-se o nome de resistência elétrica ou impedância e possui como unidade o Ohm[4].

Capacitor: É um componente que armazena a carga elétrica, podendo assim, assumir o papel de fonte do circuito, descarregando toda a carga acumulada nos demais componentes do circuito.

Indutor: Um indutor é um dispositivo elétrico que armazena energia elétrica. Quando a corrente elétrica passa por cada espira, o indutor armazena a energia produzindo um campo magnético. É como um filtro para o circuito.

Os circuitos são classificados também de acordo com a disposição dos componentes, ou seja, do modo em que o circuito elétrico é montado. A ligação entre elementos do circuito pode ser realizada em dois arranjos, sendo eles em série ou paralelo.

Na Figura 2 tem-se a representação de um circuito em série composto por um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C), enquanto na Figura 3 a representa de um circuito em paralelo composto pelos mesmos dispositivos.

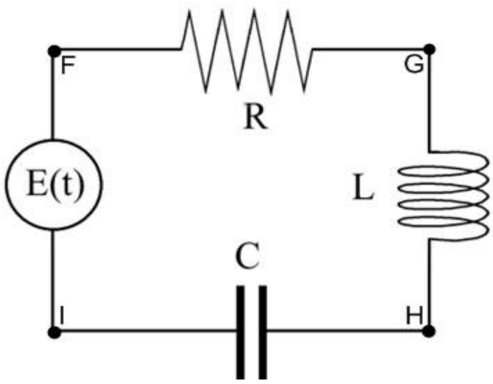

Figura 2: Circuito RLC em Série.
Fonte: Autor.

[4] Essa unidade de medida recebe este nome em homenagem ao Físico e Matemático Georg Simon Ohm (1789 - 1854) que desenvolveu a primeira teoria matemática da condução eléctrica nos circuitos por volta de 1826.

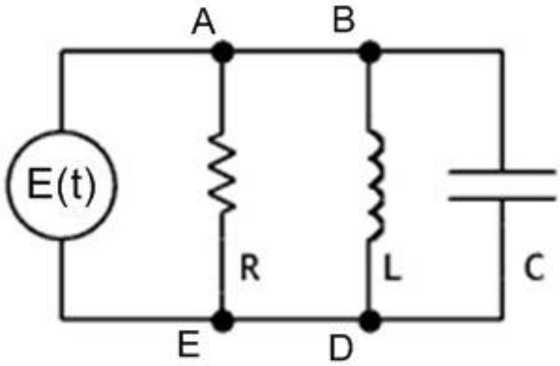

Figura 3: Circuito RLC em paralelo.
Fonte: Autor.

O circuito em série é composto de apenas uma malha, enquanto o circuito paralelo possui mais de uma malha. Na Figura 3 pode-se notar que o circuito é composto por três malhas, sendo elas M_1, M_2 e M_3 que são representadas na Figura 4. Os pontos A, B, D, E, F, G, H e I das Figuras 2 e 3 são os nós dos circuitos que unem um ou mais componentes pelos seus polos.

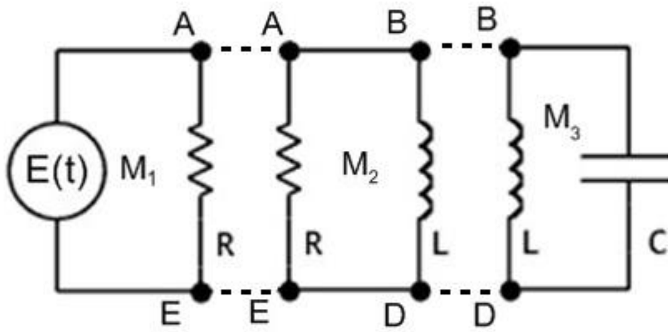

Figura 4: Malhas do Circuito em Paralelo.
Fonte: Autor.

O circuito em série apresenta três características importantes:

1. Fornece apenas um caminho para a circulação da corrente elétrica.
2. A intensidade da corrente é a mesma ao longo de todo o circuito em série.
3. O funcionamento de qualquer um dos dispositivos depende do funcionamento dos dispositivos restantes.

Enquanto o circuito em série pode ser modelado por uma equação diferencial ordinária, o circuito paralelo é modelado por um sistema de equações lineares. Vale ressaltar que este trabalho envolverá apenas problemas de circuitos elétricos em série.

Na Tabela 3 são apresentadas os elemento que podem constituir um circuito elétrico, e também sua unidade de medida correspondente no Sistema Internacional de

Unidades (SI) e os respectivos símbolos que as representam (THOMAS, ROSA, TOUSSAINT, 2011, p. 22).

Tabela 2: Grandezas, unidades de medida e símbolos dos componentes elétricos.

Grandeza	Unidade de Medida	Símbolo
Corrente Elétrica	Àmpere (A)	I
Potencial Elétrico (Tensão – DDP)	Volt (V)	V
Resistência Elétrica	Ohm (Ω)	R
Capacitância Elétrica	Farad (F)	C
Indutância Elétrica	Henry (H)	L
Carga Elétrica	Coulomb (C)	Q

Fonte: Autor.

4.2. LEI DE OHM E LEIS DE KIRCHHOFF

Existem algumas leis da Física que são fundamentais para a análise de circuitos elétricos. Dentre elas destaca-se a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff, as quais serão enunciadas a seguir, segundo Irwin, Nelms (2013, p. 23-9).

Lei de Ohm: A lei de Ohm afirma que para uma determinada classe de materiais condutores, mantidos a mesma temperatura, tem-se que a razão entre a tensão (V) e a corrente elétrica (I), em dois pontos distintos do condutor, será dada por uma constante definida como resistência elétrica (R).

$$R = \frac{V}{I} \tag{4.1}$$

1ª Lei de Kirchhoff: Essa lei é conhecida também como a lei das correntes ou lei dos nós e afirma que em um nó (ponto de junção ou encontro entre diferentes caminhos possíveis para a corrente elétrica em um circuito), a soma das correntes elétricas que entram é igual à soma das correntes que saem, ou seja, um nó não acumula carga.

Isto é devido ao Princípio da Conservação da Carga Elétrica, o qual estabelece que num ponto qualquer a quantidade de carga elétrica que chega deve ser exatamente igual à quantidade que sai.

2ª Lei de Kirchhoff: Esta lei é conhecida como a lei das tensões ou lei das malhas e afirma que a soma algébrica da D.D.P (Diferença de Potencial Elétrico) em um percurso fechado é nula.

4.3. CIRCUITOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

Um circuito elétrico é dito de primeira ordem quando existe um único componente (indutor ou capacitor) que armazena energia elétrica, assim, o circuito é modelado por uma equação diferencial de primeira ordem. Já os circuitos onde dois componentes (indutor e o capacitor) armazenam a energia elétrica, são representados por equações diferenciais de segunda ordem. Devido a isso recebem o nome de circuito de primeira ordem e circuito de segunda ordem.

Os circuitos elétricos do tipo RLC, que são compostos por resistores, indutores e capacitores, são modelados por uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, caracterizando a relação entre equações diferenciais e circuitos elétricos.

A corrente elétrica é dada por uma função que depende do tempo (t), enquanto a resistência (R), a indutância (L) e a capacitância (C) são normalmente constantes conhecidas.

Para trabalhar com circuitos elétricos simples, como mostra a Figura 2, apresentada anteriormente, é preciso ter conhecimento da Lei de Ohm e das Leis de Kirchhoff.

De acordo com a segunda lei de Kirchhoff, a tensão que entra no circuito é a soma da queda de tensão em cada componente, que varia de componente para componente de acordo com as leis elementares da Física, descritas na tabela abaixo (NILSSON, RIEDEL, 1999).

Tabela 3: Queda de tensão em cada componente.

Componente	Queda de Tensão
Resistor	IR
Indutor	LI'
Capacitor	$\frac{Q}{C}$

Fonte: Autor.

Tem-se, também, que Q é a carga total no capacitor no instante t e a corrente $I(t)$ é a taxa de variação da carga em relação ao tempo, ou seja, considere uma carga Q que depende do tempo t e uma corrente I que também depende do tempo, então, tem-se:

$$I = Q'(t). \tag{4.2}$$

Considerando que a tensão que é distribuída ao circuito é dada pela fonte representada por $E(t)$ e é uma função em relação ao tempo que normalmente é dada. De acordo com a 2ª Lei de Kirchhoff, a soma das quedas de tensão nos componentes é igual a tensão que entra no circuito. Utilizando os dados apresentados na Tabela 4 e a 2ª Lei de Kirchhoff, tem-se:

$$LI' + RI + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{4.3}$$

A partir de (4.2) e (4.3), obtem-se:

$$LQ'' + RQ' + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{4.4}$$

A equação (4.4) é uma equação diferencial para a carga, com condições iniciais dadas por $Q(t_0) = Q_0$ e $Q'(t_0) = I(t_0)$. Ao derivar a equação (4.4) em relação à t, obtem-se:

$$LQ''' + RQ'' + \frac{Q'}{C} = E'(t). \tag{4.5}$$

Utilizando novamente as relações entre corrente (I) e carga (Q) na equação (4.5), obtém-se a equação para a corrente dada por:

$$LI'' + RI' + \frac{I}{C} = E'(t). \tag{4.6}$$

Deste modo, a equação (4.4) é a equação diferencial de segunda ordem para encontrar a carga, enquanto a equação (4.6) é a equação diferencial para encontrar a corrente.

Sendo assim, pode-se observar que os problemas de circuitos elétricos são, de fato, descritos por equações diferenciais lineares. No caso dos problemas descritos pelas equações (4.4) e (4.6) é possível obter três tipos de soluções com base na equação característica, como foi apresentado na Seção 3.4.2, as quais podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas.

Nesses estudos de eletricidade, as raízes da equação característica apresentam um papel fundamental na descrição do circuito elétrico. De modo, quando as raízes da equação característica são reais e distintas o circuito é considerado como *superamortecido*, se as raízes são reais e iguais, o circuito é considerado *criticamente amortecido* e, por fim, se as raízes são complexas, então, diz-se que o circuito é *subamortecido*. Maiores detalhes sobre circuitos amortecidos podem ser encontradas em (IRWIN; NELMS, 2013, p. 245-85).

5. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS EM PROBLEMAS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de aplicação de equações diferenciais lineares relacionados ao estudo de circuitos elétricos. E ainda, será apresentada a resolução analítica dos problemas com base nos conteúdos e definições apresentados anteriormente.

PROBLEMA 1

Considere o circuito RLC apresentado abaixo (Figura 5). Com base nos dados determine a expressão que representa a tensão no capacitor em função do tempo para um tempo $t > 0$. Note que $I_L(0) = 4$ A (àmpers) e que $V_c(0) = -4V$ (volts).

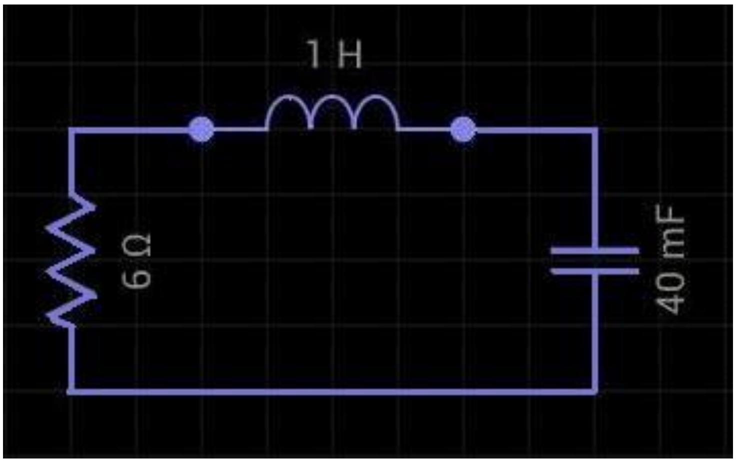

Figura 5: Circuito RLC do Problema 1.
Fonte: Autor.

Observa-se que o circuito não possui fonte de tensão, o que implica que a função $E(t) = 0$. Utilizando as informações dadas e a equação (4.6) da seção anterior, tem-se:

$$I'' + 6I' + \frac{I}{0{,}04} = 0. \tag{5.1}$$

e, então, é possível reescrever a equação (5.1) da seguinte forma:

$$I'' + 6I' + 25I = 0. \tag{5.2}$$

Note que a equação (5.2) é uma equação linear homogênea de segunda ordem. Com isso, define-se a equação característica:

$$r^2 + 6r + 25 = 0. \tag{5.3}$$

Cujas raízes são:

$$r_1 = -3 + 4i \text{ e } r_2 = -3 - 4i. \tag{5.4}$$

Com isso, a solução geral da equação (5.1) é dada por:

$$I(t) = e^{-3t}(c_1\, cos(4t) + c_2\, sen(4t)), \qquad t \in [0, +\infty[\tag{5.5}$$

De acordo com a condição inicial do PVI, o tempo $t = 0$ e a corrente no indutor é igual a $4\ A$. Em um circuito em série, a corrente deve ser a mesma em todos os componentes, logo, isso implica que:

$$I(0) = e^0(c_1\, cos(0) + c_2\, sen(0)) = 4. \tag{5.6}$$

Resolvendo (5.6) obtêm-se:

$$c_1 = 4. \tag{5.7}$$

Para se encontrar o valor de c_2 é necessário realizar uma análise no circuito. Utilizando a 2ª Lei de Kirchhoff, tem-se que a soma das tensões nos componentes é igual à tensão que entra no circuito. Assim,

$$V_R + V_L + V_C = E(t). \tag{5.8}$$

Considerando os dados da Tabela 4, a equação (5.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$R\,I(t) + L\,I'(t) + V_C(t) = 0. \tag{5.9}$$

Como o tempo é nulo, $t = 0$, então:

$$R\,I(0) + L\,I'(0) + V_C(0) = 0. \tag{5.10}$$

Substituindo as informações dadas pelo problema em (5.10), inclusive as condições iniciais $I_L(0) = 4$ e $V_c(0) = -4$, tem-se:

$$6 \cdot 4 + I'(0) - 4 = 0. \tag{5.11}$$

Efetuando as operações, obtêm-se:

$$I'(0) = -20. \tag{5.12}$$

Derivando (5.5) em relação a t, tem-se:

$$I'(t) = (-4c_1e^{-3t} - 3c_2e^{-3t})\,sen(4t) + (-3c_1e^{-3t} + 4c_2e^{-3t})\,cos(4t). \tag{5.13}$$

Considerando $t = 0$ na equação (5.13), obtêm-se:

$$I'(0) = -3c_1 + 4c_2. \tag{5.14}$$

Igualando a equação (5.14) com a equação (5.12) e substituindo o valor de c_1, obtém-se:

$$c_2 = -2. \tag{5.15}$$

Substituindo os valores de c_1 e c_2 em (5.5), obtêm-se:

$$I(t) = e^{-3t}(4\,cos(4t) - 2\,sen(4t)). \tag{5.16}$$

Para encontrar a tensão sobre o capacitor, utiliza-se a Lei de Kirchhoff das Tensões, como apresentada na seção anterior, na equação (4.3):

$$LI' + RI + V_C = 0. \tag{5.17}$$

ou ainda,

$$V_C = -LI' - RI. \tag{5.18}$$

Substituindo os valores de c_1 e c_2 na equação (5.13), obtém-se:

$$I'(t) = -10e^{-3t}\, sen(4t) - 20e^{-3t}\, cos(4t). \tag{5.19}$$

Assim, substituindo (5.16) e (5.19) em (5.18), tem-se:

$$V_C = 10e^{-3t} sen(4t) + 20e^{-3t}\, cos(4t) - 6e^{-3t}(4\, cos(4t) - 2\, sen(4t)). \tag{5.20}$$

Reescrevendo a equação (5.20), tem-se:

$$V_C = 22e^{-3t} sen(4t) - 4e^{-3t}\, cos(4t), \qquad t \geq 0. \tag{5.21}$$

Assim, a função apresentada em (5.21) descreve o comportamento da tensão sobre o capacitor em relação ao tempo t.

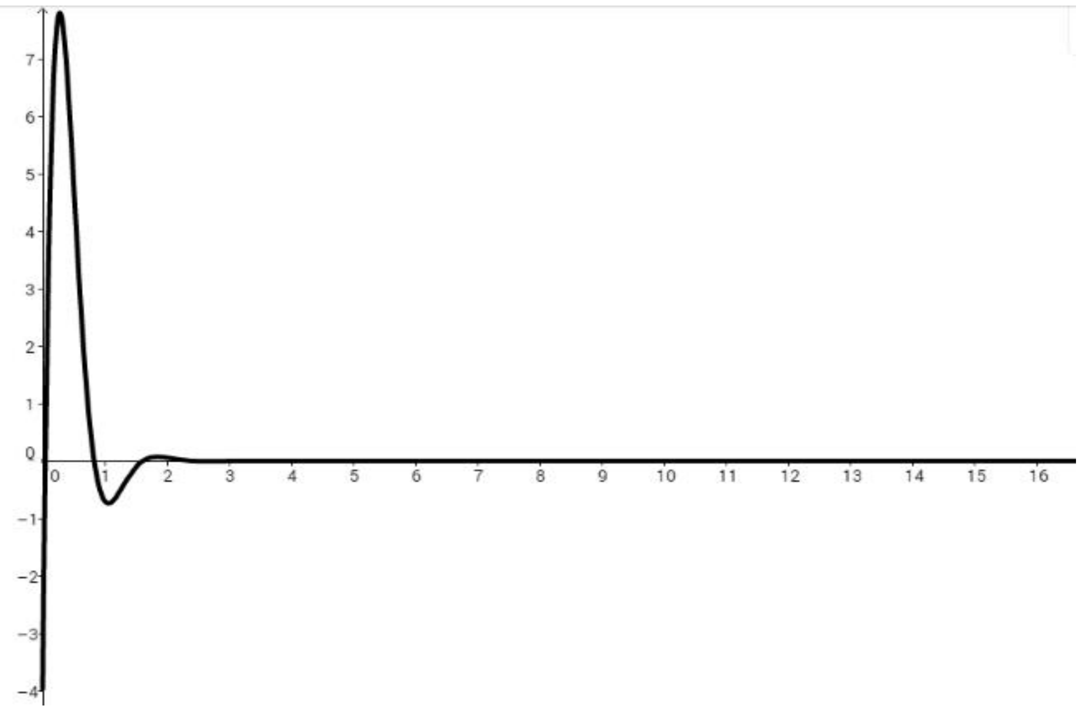

Figura 6: Gráfico da Função $V_C(t)$ representada em (5.21).
Fonte: Autor.

PROBLEMA 2

Determine a função $I(t)$ do circuito RC (Figura 7) em série, onde $R = 8\Omega$, $V = 24V$ e $C = 2F$. Considere que a carga no tempo $t = 0$ é dada por $Q_0 = 0$.

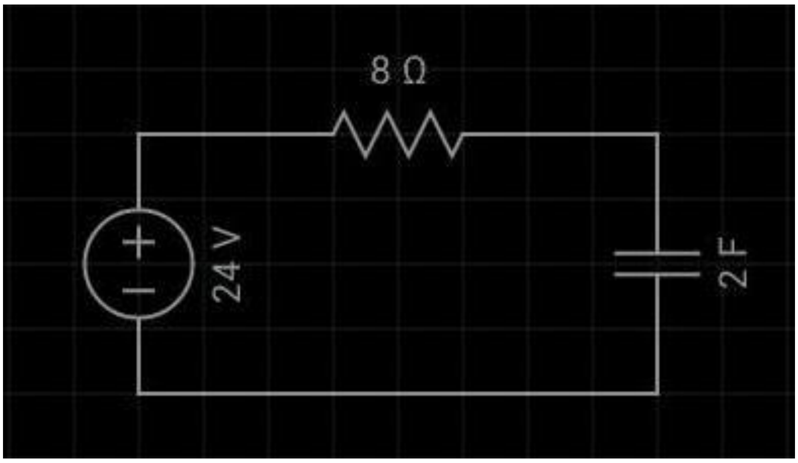

Figura 7: Circuito RC do Problema 2.
Fonte: Autor.

Inicialmente, vale ressaltar que a corrente é a taxa de variação da carga em relação ao tempo, como foi apresentado na seção anterior, ou seja:

$$I(t) = Q'(t). \tag{5.22}$$

Pela 2ª Lei de Kirchhoff, a tensão da fonte é soma das tensões sobre os componentes, o que implica que:

$$V = V_R + V_C. \tag{5.23}$$

Substituindo as relações apresentadas na Tabela 4 da seção anterior na equação (5.23), obtêm-se a seguinte igualdade:

$$24 = IR + \frac{Q}{C}. \tag{5.24}$$

Com a relação apresentada em (5.23) e com os valores dados no problema, tem-se:

$$24 = 8Q' + \frac{Q}{2}. \tag{5.25}$$

A equação (5.25) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Q' + \frac{Q}{16} = 3. \tag{5.26}$$

Pode-se observar que a equação (5.26) é uma equação diferencial linear de primeira ordem e para encontrar a solução desta, utiliza-se o fator integrante, dado por:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{16} t}, \tag{5.27}$$

ou ainda,

$$\mu(t) = e^{\frac{t}{16}}, \qquad t \geq 0. \tag{5.28}$$

Como foi apresentado na seção 3.4.1, multiplica-se o fator integrante (5.28) pela equação (5.26), obtêm-se:

$$e^{\frac{t}{16}}\, Q' + e^{\frac{t}{16}}\, \frac{Q}{16} = 3e^{\frac{t}{16}}. \tag{5.29}$$

A equação (5.29) ainda pode ser reescrita como:

$$[e^{\frac{t}{16}}\, Q]' = 3e^{\frac{t}{16}}. \tag{5.30}$$

Integrando a equação (5.30) em relação à x, tem-se:

$$e^{\frac{t}{16}}\, Q = \int 3e^{\frac{t}{16}}\, dt. \tag{5.31}$$

Resolvendo a equação (5.31):

$$Q = \frac{48e^{\frac{t}{16}} + c}{e^{\frac{t}{16}}}, \qquad t \geq 0. \tag{5.32}$$

Deste modo,

$$Q = 48 + ce^{-\frac{t}{16}}, \qquad t \geq 0. \tag{5.33}$$

Considerando $t = 0$ e utilizando a condição inicial, reescreve-se (5.33), obtendo $c = -48$. Substituindo este resultado em (5.33), obtém-se:

$$Q(t) = 48 - 48e^{-\frac{t}{16}}. \tag{5.34}$$

Basta derivar (5.34) para encontrar a função que descreve o comportamento da corrente em relação ao tempo, dada por:

$$I(t) = 3e^{-\frac{t}{16}}, \qquad t \geq 0. \tag{5.35}$$

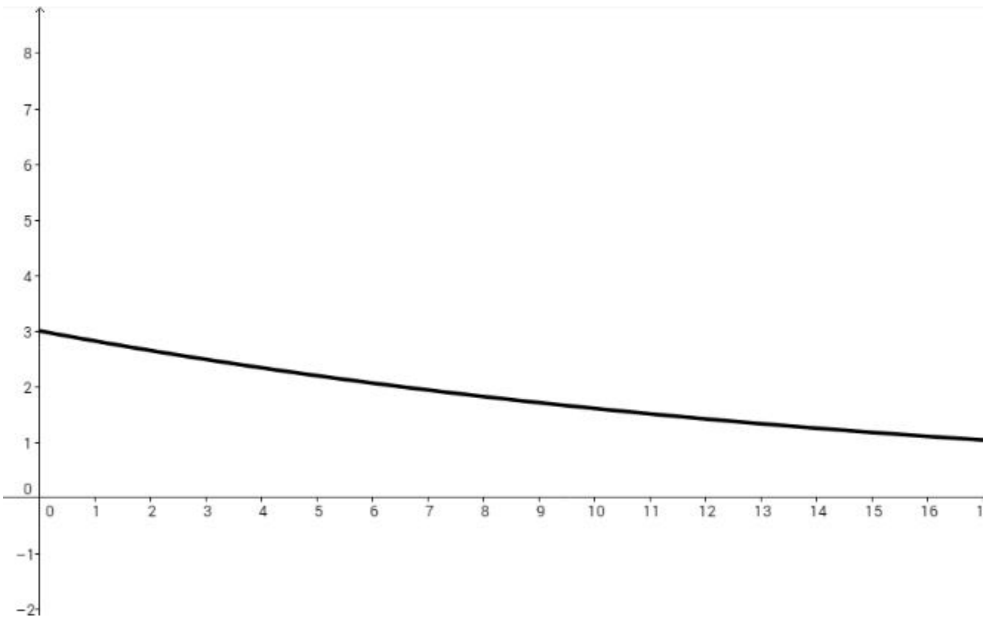

Figura 8: Gráfico da função $I(t)$ representada em (5.35).
Fonte: Autor.

PROBLEMA 3

Seja um circuito RL (Figura 9) em série com uma fonte contínua de $20V$ cuja resistência é de 100Ω e a indutância $2H$. Supondo que a corrente inicial é zero, determine $I(t)$ deste circuito.

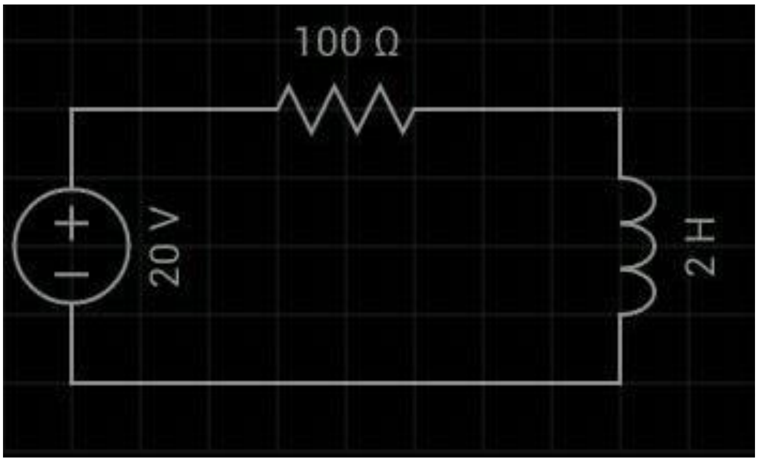

Figura 9: Circuito RL.
Fonte: Autor.

Pela 2ª Lei de Kirchhoff, pode-se afirmar que a igualdade a seguir é valida:

$$E(t) = V_R + V_L. \tag{5.36}$$

Utilizando as relações apresentadas na Tabela 4, a equação (5.36) pode ser reescrita:

$$LI' + RI = E(t), \tag{5.37}$$

ou ainda,

$$I' + \frac{R}{L}I = \frac{E(t)}{L}. \tag{5.38}$$

Substituindo os valores na equação (5.38), obtém-se:

$$I' + 50I = 10. \tag{5.39}$$

A equação (5.39) é dada por uma equação diferencial linear de primeira ordem. Para encontrar a solução desse tipo de equação faz-se uso do fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int 50dt} = e^{50t}, \qquad t \geq 0. \tag{5.40}$$

Calculado o fator integrante, pode-se afirmar que a função da corrente é calculada da seguinte forma:

$$I(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int 10\mu(t)\, dt + c\right], \tag{5.41}$$

ou ainda,

$$I(t) = e^{-50t}\left[\int 10e^{50t}dt + c\right], \qquad t \geq 0. \tag{5.42}$$

A equação (5.42) pode ser reescrita como:

$$I(t) = e^{-50t}\left[\frac{1}{5}e^{50t} + c\right], \qquad t \geq 0. \tag{5.43}$$

ou ainda,

$$I(t) = \frac{1}{5} + ce^{-50t}, \qquad t \geq 0. \tag{5.44}$$

Para encontrar o valor da constante c, utiliza-se a condição inicial apresentada no problema, que diz que em $t = 0$, a corrente é nula. Assim, substituindo $t = 0$ em (5.44) obtém-se $c = -\frac{1}{5}$.

Deste modo, substitui-se o valor de c em (5.44), a função que modela o comportamento da corrente no circuito em função do tempo é dada por:

$$I(t) = \frac{1}{5}[1 - e^{-50t}], \qquad t \geq 0. \tag{5.45}$$

Os problemas abordados foram retirados da obra de Irwin e Nelms (2013), como exemplo da modelagem de circuitos elétricos utilizando equações diferenciais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou um breve estudo envolvendo equações diferenciais lineares e suas aplicações no campo de circuitos elétricos, a partir do estudo de equações diferenciais lineares. Foram apresentadas definições e os métodos de resolução para as equações diferenciais lineares, e em seguida, faz-se a aplicação destes conceitos em problemas de circuitos elétricos que são modelados por equações diferenciais lineares.

Portanto, os modelos de equações diferenciais lineares estão fortemente presentes no estudo de circuitos elétricos. Com isso, é fundamental o entendimentos de algumas estratégias de resolução de equações diferenciais com o objetivo de se resolver os mais diferentes problemas presentes na área de circuitos elétricos.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; FIGUEIREDO, V.L.; WETZLER, H.G. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 372 p.

BOYCE, W.E; DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2013.

BRAUER, F.; NOHEL, J. **The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equation.** New York: Dover, 1989.

COELHO, F.U.; LOURENÇO, M.L. **Um curso de álgebra linear**. 2. ed. São Paulo (SP): EDUSP, 2013. 261 p.

CUNHA, E. **Investigação de Aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias.** Aracaju - 2011.

DIACU, F. **Introdução a equações diferenciais: teoria e aplicações**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2004. 262 p. ISBN 8521614039.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. **Equações Diferenciais Ordinárias.** 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

DOMINGOS, J.R.V.; BORDEIRA, J.A.S. **Novas Abordagens para o Ensino de Equações Diferenciais em Cursos Básicos de Engenharia.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX, 2001. PUCRS, Porto Alegre. Disponível em: <http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2001/trabalhos/NTM139.pdf>. Acesso em: 01/10/2014.

IRWIN, J.D; NELMS, R.M. **Análise Básica de Circuitos para Engenharia.** Rio de Janeiro: LTC, 2013.

NASCIMENTO, E.D. do; SANTOS, A.V. dos; LUCCA, A.T. **Modelo Interdisciplinar de Ensino de Equações Diferenciais e Circuitos Elétricos.** In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XLI, 2013. Gramado - RS. Disponível em: <http://www.fadep.br/engenharia-eletrica/congresso/pdf/116560_1.pdf>. Acesso em: 30/10/2014.

NILSSON, J.W.; RIEDEL, S.A. **Circuitos Elétricos**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1999. 656 p. ISBN 8521611471

OLIVEIRA, E.A.; IGLIORI, S.B.C. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais: Um Levantamento Preliminar Da Produção Científica. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. Vol. 4 – n. 2 – 2013.

POOLE, D. **Álgebra linear**. São Paulo, SP: Thomson Learning: Cengage Learning, 2004. xxvi, 690 p. ISBN 85-221-0359-3.

THOMAS, R.E.; ROSA, A.J.; TOUSSAINT, G.J. **Análise e projeto de circuitos elétricos lineares**. 6 ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. 816 p. ISBN 9788577808786.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 2 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

ZILL, D.G; CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais**. Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

APÊNDICE A – Construção de Uma Segunda Solução

No estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem é possível construir uma segunda solução partindo de uma solução já conhecida.

Considere que $y_1(x) \neq 0, \forall x \in I$ é uma solução em I conhecida para a seguinte equação:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Suponha $y = u(x)y_1(x)$ é uma solução da equação (1). Calculando suas derivadas de primeira e segunda ordem, tem-se:

$$y' = u'(x)y_1(x) + u(x){y_1}'(x) \tag{2}$$

e

$$y'' = u''(x)y_1(x) + 2u'(x){y_1}'(x) + u(x){y_1}''(x). \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtêm:

$$\begin{gathered} u(x)[{y_1}''(x) + p(x){y_1}'(x) + q(x)y_1(x)] + u''(x)y_1(x) + \\ [2{y_1}'(x) + p(x)y_1(x)]u'(x) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Observe que o primeiro termo da equação (4) é nulo, o que implica em:

$$u''(x)y_1(x) + [2{y_1}'(x) + p(x)y_1(x)]u'(x) = 0. \tag{5}$$

A equação (5) pode ser reescrita se considerar uma mudança de variável do tipo $w(x)$ tal que $w(x) = u'(x),\ x \in I$. Assim, tem-se:

$$w'(x)y_1(x) + [2{y_1}'(x) + p(x)y_1(x)]w(x) = 0. \tag{6}$$

Assim, para se construir uma segunda solução de (1) é preciso encontrar a função $u(x)$.

A partir da equação (6), a qual é classificada como uma equação diferencial linear separável, pode-se obter a solução de (1) em relação à $w(x)$ e fazendo a mudança de variável se obtém a solução desejada. Aplicando a técnica de variáveis separáveis em (6), ela pode ser reescrita como:

$$\frac{dw}{w(x)} + 2\frac{{y_1}'(x)}{y_1} + p(x)dx = 0 \tag{7}$$

ou ainda,

$$\frac{dw}{w(x)} + 2\frac{{y_1}'(x)}{y_1} = -p(x)dx. \tag{8}$$

Integrando (8) em relação à x:

$$ln|w(x)| + 2|y_1(x)| = -\int p(x)dx + c. \tag{9}$$

Pelas propriedades de logaritmo, tem-se:

$$ln\left|w(x)y_1^2(x)\right| = -\int p(x)dx + c. \tag{10}$$

Aplicando a exponencial em (10) obtém-se:

$$w(x)y_1^2(x) = e^{-\int p(x)dx+c}. \tag{11}$$

Sabe-se que $e^{-\int p(x)dx+c} = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^c$, onde $e^c = c_1$. Com isso, (11), passa a ser:

$$w(x)y_1^2(x) = c_1e^{-\int p(x)dx}. \tag{12}$$

Como $y_1 \neq 0, \forall\, x \in I$, ao dividir (12) pelo termo $y_1^2(x)$, tem-se:

$$w(x) = \frac{c_1e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}, \qquad x \in I. \tag{13}$$

Como $w(x) = u'(x)$, então, ao integrar (13) obtém-se:

$$u(x) = c_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + c_2 , \qquad x \in I. \tag{14}$$

Inicialmente foi determinado que a solução da equação (1) era dada por $y = u(x)\ y_1(x)$, ou seja:

$$y = c_1 y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + c_2 y_1(x), \tag{15}$$

onde c_1 e $c_2$são constantes quaisquer.

Tomando, particularmente, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, se obtêm uma segunda solução, dada por:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx, \qquad x \in I. \tag{16}$$

Observe que a segunda solução y_2 depende de y_1 e $\{y_1, y_2\}$ é um conjunto fundamental em I para a equação diferencial, pois $W[y_1, y_2] \neq 0, \forall\ x \in I$.