UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA

DOUGLAS DE BRITO COSTA

TRANSFORMADA DE FOURIER PARA HIPERCOMPLEXOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

DOUGLAS DE BRITO COSTA

TRANSFORMADA DE FOURIER PARA HIPERCOMPLEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática

Orientador: Profa. Me. Cristiane A. Pendeza Martinez

Co-orientador: Prof. Dr. André L. M. Martinez

CORNÉLIO PROCÓPIO

2017

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

____
Profª. Me. Cristiane Aparecida Pendeza Martinez
(Orientadora)

____
Profª. Me. Renata Mascari

____
Prof. Me. Valter Henrique Biscaro Raposo

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, minha família pelo apoio e, principalmente, pela paciência frente certas escolhas que fiz nestes anos de graduação.

Agradeço minha orientadora Cristiane A. P. Martinez por ter me aceitado (novamente) como orientando e pelas orientações neste percurso; e ao meu co-orientador André L. M. Martinez pelas dicas e sugestões com o Latex para que fosse possível a edição escrita deste trabalho. De modo geral, agradeço a ambos pelas sugestões e pelo tempo disponibilizado para me guiar, corrigir e concluir este trabalho.

Agradeço, também, aos professores, colegas e amigos que tive a oportunidade de encontrar e manter contato na graduação, pela troca de ideias inspiradoras e momentos que possibilitaram meu desenvolvimento pessoal e acadêmico.

”Coloque sua mão sobre um fogão quente por um minuto e parecerá como uma hora. Sente - se com uma moça bonita por uma hora e parecerá como um minuto. Isso é relatividade.” Albert Einstein

RESUMO

COSTA, Douglas B.. TRANSFORMADA DE FOURIER PARA HIPERCOMPLEXOS. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

A Transformada de Fourier possui várias aplicações na resolução de problemas que envolvem Equações Diferenciais e, além de ser objeto de estudo em determinadas áreas do conhecimento, possibilita a generalização para o Conjunto dos números Complexos ($\mathbb{C}$). Deste modo, é interessante estudar possíveis generalizações da transformada para os conjuntos Hipercomplexos. Sendo assim, no presente trabalho vamos nos dedicar ao estudo de uma alternativa da transformada de Fourier para os Hipercomplexos, à partir de trabalhos anteriores [6], objetivando uma generalização da transformada para o conjunto dos octônios, um espaço vetorial 8-dimensional, dotado da adição e multiplicação, porém não comutativo nesta última operação.

Palavras-chave: Transformada de Fourier, Conjuntos Hipercomplexos, Quatérnios, Octônios, Álgebras não comutativas

ABSTRACT

COSTA, Douglas B.. FOURIER TRANSFORM FOR HYPERCOMPLEXES. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2017.

The Fourier Transform has several applications in solving problems that involve Differential Equations and, besides being object of study in certain areas of knowledge, allows a generalization for the Complex Numbers set ($\mathbb{C}$). In this way, it is interesting to study possible generalizations of the transform for the Hypercomplex sets. Therefore, in the present work we will devote ourselves to the study of an alternative of the Fourier transform for the Hypercomplexes, from previous works [6], aiming at a generalization of the transform for the set of octonions, an 8-dimensional vector space, endowed with addition and multiplication, but not commutative in this last operation.

Keywords: Fourier Transform, Hipercomplex sets, Quaternions, Octonions, non-comutative algebras

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da História da Matemática, grandes avanços foram realizados por meio da correlação de tópicos matemáticos até então dissociados. Esta interrelação propicia uma compreensão mais ampla dos objetos matemáticos envolvidos e auxilia na obtenção de novos resultados. A interação entre Geometria e Álgebra, por exemplo, proporcionou o desenvolvimento da Geometria Analítica através dos trabalhos de *René Descartes*(1596-1650), principalmente, que contribuiu para uma melhor descrição das propriedades de entes geométricos por meio das relações algébricas, e na visualização geométrica de entes algébricos. Outro exemplo, historicamente notável desta relação Álgebra-Geometria está na criação do plano Complexo, por Argand e Gauss.

Até o Século XIX, os Números Complexos eram apenas um artifício introduzido para a resolução de equações algébricas, ou seja, carecia de certa interpretação sobre o que era exatamente um número complexo e qual era sua importância. Assim, a representação de tais números como pontos no plano foi fundamental para a difusão de seu uso, não só em matemática como, também, em física e nas engenharias.

O crescente interesse pelos Complexos motivou, em meados do Século XIX, a busca por estruturas algébricas semelhantes e que pudessem servir de modelo para representações no espaço tridimensional. Assim, a construção dos Quatérnios, por volta do ano 1843, foi um resultado de uma empreitada iniciada pelo matemático irlandês *William Rowan Hamilton*(1805-1865).

Buscando multiplicar ternas do tipo $a+bi+cj$, à partir do mesmo raciocínio de multiplicar complexos $(a+bi)$, Hamilton iniciou a estruturação de uma nova álgebra, porém sem sucesso. No entanto, segundo a história, enquanto caminhava com sua esposa sobre a ponte Brougham, teve um *"insight"* de que a multiplicação só seria possível se ignorada a propriedade comutativa. Assim, arranhando com um canivete sobre a ponte, Hamilton exibiu a fórmula fundamental

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Posteriormente, por volta do ano de 1845, o matemático *Arthur Cayley*(1821-1895), trouxe com seus estudos a estruturação de uma nova álgebra sobre um conjunto numérico de base 8-*dimensional*, atualmente conhecido como *Octônios*, que por sua vez, também não goza da propriedade comutativa na operação de multiplicação.

Aproximadamente dois séculos antes ao de Hamilton trazer à luz os quatérnios, em meados do século *XVII*, percebeu-se o desenvolvimento de outra estrutura matemática muito importante com os trabalhos de *Isaac Newton* (1643-1727) e *Gottfried Leibniz* (1646-1716), o Cálculo Diferencial e Integral. Onde, à partir dos estudos relacionados à mecânica de partículas, trouxe problemas que hoje carregam outro conceito matemático importante para a física que são as equações diferenciais.

Buscando modelos que descrevessem fenômenos do mundo físico, os estudiosos do passado se depararam com problemas como, por exemplo, o da condução do calor em uma barra a uma temperatura $u(x,t)$:

$$u_t = K u_{xx}$$

Onde, além de solucionar a Equação Diferencial, a função u consegue satisfazer condições iniciais ou de fronteira.

Nesta época, tem-se como um pioneiro em tais estudos o francês *Jean B. Fourier* (1768-1830), que traz com seu trabalho a introdução do conceito atualmente conhecido por Série de Fourier, exibido em seu tratado *Théorie analytique de la chaleur* de 1822, onde busca determinar funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ utilizando séries, isto é, somas infinitas, partindo do problema da condução do calor.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo o primeiro voltado para a Introdução. No segundo capítulo exibimos os conjuntos hipercomplexos denominados quatérnios e octônios e suas respectivas álgebras não comutativas, a forma vetorial de seus elementos, assim como a forma algébrica e matricial, e as operações definidas de soma e multiplicação, dentre outras propriedades fundamentais.

No terceiro capítulo focaremos na apresentação da chamada *Análise de Fourier*, iniciando pelas definições de alguns tipos de funções necessárias para que seja possível definir a série de Fourier, isto é, a forma de expressar uma função periódica como uma soma infinita de senos e cossenos. Posteriormente, vamos mostrar as ideias e conceitos preliminares que possibilitarão a construção da transformada de Fourier e suas propriedades.

O quarto capítulo está voltado para as representações da série de Fourier para os conjuntos dos números complexos ($\mathbb{C}$), quatérnios ($\mathbb{H}$) e octônios ($\mathbb{O}$), mostrando como se deram tais expansões que, de modo geral, são conseguidas utilizando um mesmo raciocínio.

Por fim, no último capítulo será apresentada a transformada de Fourier Hipercomplexa para os quatérnios, tendo como ponto inicial a série de Fourier para este conjunto.

2 HIPERCOMPLEXOS

Neste capítulo apresentaremos os números quatérnios ($\mathbb{H}$) e octônios ($\mathbb{O}$), baseando em [4] e [3], respectivamente. Tais conjuntos tiveram desenvolvimento à partir do século XIX com os trabalhos de Hamilton, que trouxe ao mundo a estruturação dos quatérnios, e de do matemático Cayley, que sistematizou a álgebra 8-dimensional octoniônica.

Assim sendo, visamos as respectivas álgebras e representações de seus elementos, isto é, as formas vetorial, algébrica e matricial. Além das operações de soma e multiplicação e as propriedades que são definidas para tais conjuntos.

2.1 ÁLGEBRA QUATERNIÔNICA

Os quatérnios possuem importância tanto na matemática quanto na física. Em sua gênese, diferente de como ocorreu com os complexos, tais números foram recebidos pela comunidade científica sob o foco de um possível desenvolvimento da álgebra e, principalmente, aplicação nos estudos dos fenômenos físicos, como aconteceu com a Teoria da Relatividade de Albert Einstein que, de maneira quase natural, possui certa representatividade com os quatérnios.

2.1.1 CONCEITO DE NÚMERO QUATÉRNIO

Definição 1: O conjunto dos números quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, é definido como

$$\mathbb{H} = \{(a,b,c,d); a,b,c,d \in \mathbb{R}\},$$

onde

$$(a,b,c,d) = (a',b',c',d') \leftrightarrow a = a', b = b', c = c', d = d'$$

A operação de adição é definida por

$$(a,b,c,d) + (a',b',c',d') = (a+a', b+b', c+c', d+d')$$

E a de multiplicação por

$$(a,b,c,d).(a',b',c',d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - c'd,$$

$$ac' + a'c + db' - d'b, ad' + da' + bc' - b'c)$$

Assim, $\mathbb{H}$ satisfaz todas as condições de um anel, além das propriedades associativa e distributiva da adição e multiplicação, no entanto, verificando a comutatividade apenas na operação de adição.

O quaterniônico $(0,0,0,0)$ é o elemento neutro da adição e $(1,0,0,0)$ elemento neutro da multiplicação, além de admitir inverso aditivo e multiplicativo para cada elemento não nulo de $\mathbb{H}$.

Representado por $(\mathbb{H},+,.)$, o anel quaterniônico é um exemplo de anel com divisão ou corpo não comutativo.

As bases são definidas como:

$$(1,0,0,0) \leftrightarrow 1;$$

$$(0,1,0,0) \leftrightarrow i;$$

$$(0,0,1,0) \leftrightarrow j;$$

$$(0,0,0,1) \leftrightarrow k.$$

E tomando um quatérnio $q = (a,b,c,d)$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, segue a seguinte representação

$$q = (a,0,0,0)(1,0,0,0) + (b,0,0,0)(0,1,0,0) +$$

$$+(c,0,0,0)(0,0,1,0) + (d,0,0,0)(0,0,0,1) =$$

$$= a + bi + cj + dk$$

De modo que seguem as seguintes definições fundamentais:

(i) A parte real de q é dada por $Re(q) = a$;

(ii) A parte vetorial de q é $Ve(q) = bi + cj + dk$;

(iii) Se $Re(q) = 0$, então q é um quatérnio puro;

(iv) O conjugado de q é dado por:

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk.$$

(v) A norma de q é dada por

$$|q| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

E a propriedade:

(i) Quatérnio unitário:

$$|q| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = 1.$$

Multiplicando as unidades quaterniônicas i, j, k, obtemos

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, ji = -k,$$

$$ki = j, ik = -j,$$

$$jk = i, kj = -i.$$

Tomando, agora, dois quatérnios $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ e $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$, define-se, também, as seguintes operações algébricas:

Adição:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

Multiplicação:

$$q_1.q_2 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - c_2d_1)i +$$

$$+(a_1c_2 + a_2c_1 + d_1b_2 - d_2b_1)j + (ad_2 + d_1a_2 + b_1c_2 - b_2c_1)k$$

Divisão:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{q_1}{q_2}.\frac{\overline{q_2}}{\overline{q_2}} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2}\right) + \left(\frac{-a_1b_2 + b_1a_2 - c_1d_2 + c_2d_1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2}\right)i$$

$$+\left(\frac{-a_1c_2 + a_2c_1 - d_1b_2 + d_2b_1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2}\right)j + \left(\frac{-a_1d_2 + d_1a_2 - b_1c_2 + b_2c_1}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2}\right)k$$

2.1.2 QUATÉRNIOS E MATRIZES

Considerando a base dos Quatérnios é possível definir a representação matricial de cada um de seus elementos, isto é:

$$1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},i=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix},j=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix},k=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Deste modo, seja $q=a+bi+cj+dk$ um quatérnio, temos como representação matricial a seguinte matriz $4x4$

$$q=a\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b&0&0\\-b&0&0&0\\0&0&0&-b\\0&0&b&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&c&0\\0&0&0&c\\-c&0&0&0\\0&-c&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&d\\0&0&-d&0\\0&d&0&0\\-d&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Logo

$$q = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

Além disso, é possível a representação, utilizando matrizes, de cada uma das seguintes relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i, ijk = -1.$$

De fato, verificaremos primeiro a relação de cada um dos elementos da base:

$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$j^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

$$k^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

Assim, é possível verificar que à partir de cada elemento da base obtemos as seguintes matrizes:

$$ij = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -ji = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = k,$$

$$ki = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -ik = - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = j,$$

$$jk = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -kj = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = i,$$

E por fim,

$$ijk = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

2.2 ÁLGEBRA OCTONIÔNICA

Nesta seção vamos apresentar o conjunto dos números octônios, que compõem uma extensão dos Quatérnios $(\mathbb{H})$, formando uma álgebra normada 8-*dimensional* sobre o corpo dos Reais $(\mathbb{R})$.

Também chamada de álgebra de Cayley, os octônios, denotado por $(\mathbb{O})$ possibilitam uma álgebra de divisão de dimensão 8, que teve seu desenvolvimento inicial em meados do século XIX pelo matemático britânico *Arthur Cayley* (1821-1895).

2.2.1 CONCEITO DE NÚMERO OCTÔNIO

Definição: O conjunto dos octônios é definido por

$$\mathbb{O} = \{(a,b,c,d,e,f,g,h); a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}\}$$

Onde

$$(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1,g_1,h_1) = (a_2,b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,g_2,h_2) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2, e_1 = e_2, f_1 = f_2, g_1 = g_2, h_1 = h_2$$

Assim, de modo similar aos quatérnios a operação de adição é definida por

$$(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1,g_1,h_1) + (a_2,b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,g_2,h_2) =$$

$$= (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2, e_1+e_2, f_1+f_2, g_1+g_2, h_1+h_2)$$

E a operação de multiplicação por

$$(a_1,b_1,c_1,d_1,e_1,f_1,g_1,h_1).(a_2,b_2,c_2,d_2,e_2,f_2,g_2,h_2) =$$

$$= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 - e_1e_2 - f_1f_2 - g_1g_2 - h_1h_2,$$

$$a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 - e_1f_2 + f_1e_2 - g_1h_2 + h_1g_2,$$

$$a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 - e_1g_2 + f_1h_2 + g_1e_2 - h_1f_2,$$

$$a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 - e_1h_2 - f_1g_2 + g_1f_2 + h_1e_2,$$

$$a_1e_2 + b_1f_2 + c_1g_2 + d_1h_2 + e_1a_2 - f_1b_2 - g_1c_2 - h_1d_2,$$

$$a_1f_2 - b_1e_2 - c_1h_2 + d_1g_2 + e_1b_2 + f_1a_2 - g_1d_2 + h_1c_2,$$

$$a_1g_2 + b_1h_2 - c_1e_2 - d_1f_2 + e_1c_2 + f_1d_2 + g_1a_2 - h_1b_2,$$

$$a_1h_2 - b_1g_2 + c_1f_2 - d_1e_2 + e_1d_2 - f_1c_2 + g_1b_2 + h_1a_2)$$

O octônio $(0,0,0,0,0,0,0,0)$ representa o elemento neutro da soma, enquanto que $(1,0,0,0,0,0,0,0)$ é o elemento neutro da multiplicação. Deste modo, o anel dos octônios $(\mathbb{O},+,.)$ não satisfaz todas as propriedades de um corpo, pois não respeita a propriedade comutativa da multiplicação, pois, pela definição da multiplicação, percebe-se que

$$(0,1,0,0,0,0,0,0).(0,0,1,0,0,0,0,0) = (0,0,0,1,0,0,0,0)$$

$$(0,0,1,0,0,0,0,0).(0,1,0,0,0,0,0,0) = (0,0,0,-1,0,0,0,0)$$

Logo

$$(0,1,0,0,0,0,0,0).(0,0,1,0,0,0,0,0) \neq (0,0,1,0,0,0,0,0).(0,1,0,0,0,0,0,0)$$

Assim, também dizemos que $(\mathbb{O},+,.)$ é outro exemplo de anel com divisão ou corpo não comutativo.

Em $\mathbb{O}$ as bases são definidas como

$$1 \leftrightarrow (1,0,0,0,0,0,0)$$

$$i \leftrightarrow (0,1,0,0,0,0,0,0)$$

$$j \leftrightarrow (0,0,1,0,0,0,0,0)$$

$$k \leftrightarrow (0,0,0,1,0,0,0,0)$$

$$l \leftrightarrow (0,0,0,0,1,0,0,0)$$

$$li \leftrightarrow (0,0,0,0,0,1,0,0)$$

$$lj \leftrightarrow (0,0,0,0,0,0,1,0)$$

$$lk \leftrightarrow (0,0,0,0,0,0,0,1)$$

Assim como nos quatérnios, um octônio $o = (a,b,c,d,e,f,g,h)$ com $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{R}$, pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} o = {} & (a,0,0,0,0,0,0,0)(1,0,0,0,0,0,0,0)+ \\ & +(0,b,0,0,0,0,0,0)(0,1,0,0,0,0,0,0)+ \\ & +(0,0,c,0,0,0,0,0)(0,0,1,0,0,0,0,0)+ \\ & +(0,0,0,d,0,0,0,0)(0,0,0,1,0,0,0,0)+ \\ & +(0,0,0,0,e,0,0,0)(0,0,0,0,1,0,0,0)+ \\ & +(0,0,0,0,0,f,0,0)(0,0,0,0,0,1,0,0)+ \\ & +(0,0,0,0,0,0,g,0)(0,0,0,0,0,0,1,0)+ \\ & +(0,0,0,0,0,0,0,h)(0,0,0,0,0,0,0,1) = \\ & = a+bi+cj+dk+el+fli+glj+hlk, \end{aligned}$$

onde, a é a parte escalar (ou parte Real (*Re(o)*)) do octônio o e $r = bi+cj+dk+el+fli+glj+hlk$ a sua parte vetorial (*Ve(o)*).

Deste modo, é possível considerar algumas definições fundamentais:

(i) Octônio conjugado: Seja um octônio $o = a+bi+cj+dk+el+fli+glj+hlk$, define-se seu conjugado como sendo o número:

$$\overline{o} = a-bi-cj-dk-el-fli-glj-hlk.$$

(ii) Norma: Define-se a norma $||o||$ de um octônio como sendo o número real:

$$||o|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2}.$$

(iii) Inverso de um octônio: O inverso de um octônio é dado por:

$$o^{-1} = \frac{\overline{o}}{||o||^2}.$$

E algumas propriedades:

(i) Dados dois octônios o_1 e o_2, temos que:

$$\overline{o_1.o_2} = \overline{o_1}.\overline{o_2}$$

(ii) Dado um octônio o_1, temos que:

$$\overline{o_1}o_1 = o_1\overline{o_1} = ||o_1||^2.$$

2.3 EQUAÇÃO DE DE MOIVRE

Como o presente trabalho visa o estudo da expansão da transformada de Fourier para Hipercomplexos, partindo, inclusive, da série de Fourier Hipercomplexa, algumas identidades e expressões serão necessárias, como é o caso da Equação de De Moivre para hipercomplexos. Por isso, nesta seção apresentamos a dedução de tal equação.

Assim, sendo $z = x + yi$ um número complexo, temos que a equação de De Moivre no conjunto $\mathbb{C}$ nos é dada por:

$$e^z = e^{x+yi} = e^x.e^{yi} = e^x[cos(y) + isen(y)]$$

Para a expressão quaterniônica, nos baseamos em [7] para sua dedução. Sendo assim, considere, agora, os quatérnios $p = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k = p_1 + \overrightarrow{p}$ e $q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k = q_1 + \overrightarrow{q}$.

Temos que $\overrightarrow{p}\overrightarrow{q}$ e $\overrightarrow{p}X\overrightarrow{q}$ são, respectivamente, o produto interno usual e o produto vetorial no espaço euclidiano tridimensional. Assim, é possível construirmos uma sequência de potências $u, u^2, u^3, ...$ para um quatérnio $u = x + y_1i + y_2j + y_3k = x + \overrightarrow{y}$ tal que

$$
\begin{aligned}
u^0 &= 1,\\
u^1 &= x+\overrightarrow{y},\\
\frac{u^2}{2!} &= \frac{x^2}{2!}+\frac{2x\overrightarrow{y}}{2!}+\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{2!},\\
\frac{u^3}{3!} &= \frac{x^3}{3!}-\frac{3x\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!}+\left(\frac{3x^2}{3!}-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!}\right)\overrightarrow{y},\\
\frac{u^4}{4!} &= \frac{x^4}{4!}-\left(\frac{4!x^2\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{2!2!4!}\right)\overrightarrow{y}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{4!}+\left(\frac{4x^3}{4!}-\frac{4x\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{4!}\right)\overrightarrow{y},\\
\frac{u^5}{5!} &= \frac{x^5}{5!}+\frac{5x(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{5!}-\frac{5!x^3\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!2!5!}+\left(\frac{5x^4}{5!}-\frac{5!x^2\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!2!5!}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{5!}\right)\overrightarrow{y},\\
\frac{u^6}{6!} &= \frac{x^6}{6!}+\frac{6!x^2(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{4!2!6!}-\frac{6!x^4(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})}{4!2!6!}-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{6!}\\
&+ \left(\frac{6x^5}{6!}+\frac{6x(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{6!}-\frac{6!x^3(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})}{3!3!6!}\right)\overrightarrow{y}.
\end{aligned}
$$

Simplificando os termos, e definindo:

$$
\begin{aligned}
e^u &= 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\frac{u^5}{5!}+\frac{u^6}{6!}+\ldots\\
&= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)\left(1-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{2!}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{4!}-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{6!}+\ldots\right)\\
&+ \overrightarrow{y}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\right)\\
&+ \overrightarrow{y}\,\frac{\overrightarrow{y}(\overrightarrow{y})^2}{5!}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{7!}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&e^u = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)\left(1-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{2!}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{4!}-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{6!}+\ldots\right)\\
&+\overrightarrow{y}\left\{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right)\left(1-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{5!}-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{7!}+\ldots\right)\right\}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{2!}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{4!}-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{6!}+...\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}})^{2n}}{(2n!)}, \\
\left(1-\frac{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}{3!}+\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^2}{5!}-\frac{(\overrightarrow{y}\overrightarrow{y})^3}{7!}+...\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}})^{2n+1}}{(2n+1)}.\frac{1}{\sqrt{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}}, \\
\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+...\right) &= e^x.
\end{aligned}$$

e, também, sendo

$$cos\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}\right)^{2n}}{(2n)!},$$

$$\frac{sen\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right)}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}.\frac{1}{\sqrt{\overrightarrow{y}\overrightarrow{y}}}.$$

De (1) podemos obter a expressão final de De Moivre em sua forma quaterniônica:

$$e^u = e^{x+y_1i+y_2j+y_3k} = e^x cos\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}\right)+\overrightarrow{y}\left(\frac{sen(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2})}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\right).$$

com $\overrightarrow{y} = y_1i+y_2j+y_4k$ e $u = x+\overrightarrow{y}$.

Analogamente, sendo o octônio $o = u_1+u_2i+u_3j+u_4k+u_5l+u_6li+u_7lj+u_8lk = u_1+\overrightarrow{u}$, com $\overrightarrow{u}$ a parte vetorial de o, obtemos

$$e^o = e^{u_1}\left\{cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}\right)\right.$$

$$\left.+\overrightarrow{u}\left(\frac{sen(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2})}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)\right\}$$

que é a expressão de De Moivre para os Octônios.

3 ANÁLISE DE FOURIER

Neste capítulo serão apresentados conceitos referentes à Análise de Fourier. As definições e teorema foram baseados em [3] e [4].

Iniciaremos pela definição de funções periódicas, funções seccionalmente contínuas e seccionalmente diferenciáveis, para depois definirmos a Série de Fourier, que possui grande importância no estudo de Equações Diferenciais Parciais, como a equação do calor, e problemas com condições iniciais e valores de contorno, além de representar uma alternativa possível para a representação de funções utilizando tais somas infinitas.

Posteriormente apresentaremos os conceitos preliminares para a definição da transformada de Fourier, que é muito usada na resolução de problemas físicos relacionados a vibração de cordas infinitas e semi-finitas, além dos problemas da condução do calor em barras infinitas e semi-finitas. Sendo este último, tema de motivação para os estudos do próprio Fourier.

3.1 NOTA HISTÓRICA

O desenvolvimento do cálculo diferencial no século XVII trouxe ao mundo - pelo menos no que se refere a física - uma possibilidade matemática de representar os eventos físicos, mais especificamente os que indicam o movimento de corpos, isto é, a dinâmica de partículas. Com isto, as implicações para a matemática foram evidentes, pois trouxeram modelos teoricamente interessantes para os estudiosos da época, incluindo Fourier. Com seu tratado *Théorie analytique de la chaleur*, de 1822, deu à luz uma visão sobre o problema da condução do calor em uma barra, além da estruturação de uma forma de expressar funções periódicas e contínuas em um dado intervalo, que é o conceito atualmente conhecido por série de Fourier.

3.2 SÉRIE DE FOURIER

Definição 2 (Função periódica): Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dita periódica, de período $T>0$ se, para todo $x\in\mathbb{R}$

$$f(x+T)=f(x)$$

Exemplo 1: A função $sen(x)$ é uma função periódica tal que seu menor período é dado por $T=2\pi$.

Agora, seja $f(x)=sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Para determinar o período T de f basta verificar a seguinte igualdade:

$$sen\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right)=sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), x\in\mathbb{R}$$

Pelo seno da soma, obtemos que

$$sen\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right)=sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right)+cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)sen\left(\frac{n\pi T}{L}\right)=sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para $x=\frac{L}{2n}$, temos

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\to cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right)=1 \tag{2}$$

Pela identidade $sen^2\theta+cos^2\theta=1$ é possível rescrever (2) como

$$cos\left(\frac{n\pi T}{L}\right)=cos^2\left(\frac{n\pi T}{L}\right)+sen^2\left(\frac{n\pi T}{L}\right)\Longrightarrow sen^2\left(\frac{n\pi T}{L}\right)=0\Longrightarrow sen\left(\frac{n\pi T}{L}\right)=0 \tag{3}$$

Como queremos o menor valor positivo de T que satisfaça (2) e (3) simultaneamente, segue que

$$\frac{n\pi T}{L}=2\pi\Longrightarrow T=\frac{2L}{n}.$$

Definição 3 (Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno): O produto interno padrão (u,v) de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha\leq x\leq\beta$ é definido por

$$(u,v)=\int_{\alpha}^{\beta}u(x)v(x)dx \tag{4}$$

As funções u e v são ditas ortogonais em $\alpha\leq x\leq\beta$ se seu produto interno for nulo, ou seja, se

$$\int_{\alpha}^{\beta}u(x)v(x)dx=0 \tag{5}$$

Um conjunto de funções é dito ortogonal se cada par de funções diferentes do conjunto é ortogonal.

As funções $sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n=1,2,3,\ldots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[-L,L]$, pois, satisfazem as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se} m \neq n, \\ L, & \text{se} m = n. \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{-L}^{L} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \forall m, n \tag{7}$$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se} m \neq n, \\ L, & \text{se} m = n. \end{cases} \tag{8}$$

Definição 4 (Função seccionalmente contínua): Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua se ela tiver um número finito de descontinuidade de primeira espécie em qualquer intervalo limitado. Ou seja, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < ... < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, 2, ..., n-1$, e existem os limites

$$f(a_j^+) = \lim_{x \to a_j^+} f(x)$$

e

$$f(a_j^-) = \lim_{x \to a_l^-} f(x)$$

Definição 5 (Função seccionalmente diferenciável): Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita seccionalmente diferenciável quando é seccionalmente contínua e sua derivada f' também é seccionalmente contínua.

Definição 6 (Polinômios trigonométricos): Um polinômio trigonométrico, periódico, com período $T = 2\pi$ é uma soma finita na forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} [a_n cos(nx) + b_n sen(nx)], x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

onde $a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N$ são números complexos.

Considerando

$$C(x) = \frac{1}{2}[E(ix) + E(-ix)], S(x) = \frac{1}{2}i[E(ix) - E(-ix)]$$

Segue que (9) pode ser escrito na forma

$$f(x) = \sum_{-N}^{N} C_n e^{inx},$$

de modo que

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Assim, é possível definir que uma série trigonométrica é uma série da forma

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}, x \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo, seja f uma função integrável em $[-\pi,\pi]$, segue que os números C_n, acima definidos, são chamados de *Coeficientes de Fourier* de f e a série formada com tais coeficientes é chamada de *Série de Fourier* de f.

Definição 7 (Coeficientes de Fourier): Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2L$, for integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado, então pode ser expressa na forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{10}$$

Os números a_n, para $n \geq 0$, e b_n, para $n \geq 1$, podem ser expressos por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx, \tag{11}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx \tag{12}$$

são chamados coeficientes de Fourier da função f.

Definição 8 (Série de Fourier): Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $T = 2L$, integrável e absolutamente integrável. Se é possível calcular seus coeficientes de Fourier e, além disso, é possível escrever

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{13}$$

então, significa que (13) é a *Série de Fourier*.

Assim, para determinar os coeficientes, vamos supor que a igualdade

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{14}$$

é verificada e, além disso, a série converge. Assim, utilizando (11) e (12) determina-se cada um dos coeficientes.

Teorema de Fourier: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x \to 0_+) + f(x \to 0_-)]$, isto é:

$$\frac{1}{2}[f(x \to 0_+) + f(x \to 0_-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Demonstração: Ver em [3].

Exemplo 2: Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} -\pi \leq x < 0, \\ 1, & \text{se} 0 \leq x < \pi, \\ f(x+2\pi) = f(x) & \end{cases}$$

Para determinar a série de Fourier de f, primeiramente, é necessário o cálculo de seus respectivos coeficientes de Fourier. Como, neste caso, $L = \pi$, segue que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1$$

para $n \neq 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\frac{sen(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} = 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen(nx)dx = \frac{1}{\pi}\frac{-cos(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}[1 - cos(n\pi)]$$

ou, de modo semelhante, $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$, $k \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Deste modo, a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} sen(2k-1)x.$$

3.3 TRANSFORMADA DE FOURIER

Além de possuir aplicação em áreas como física e engenharia, a Transformada de Fourier é útil na resolução de problemas que envolvem Equações Diferenciais Parciais, por trazer uma alternativa de algebrizar tais conceitos matemáticos. Além de apresentar uma rica motivação para estudos teóricos.

3.3.1 MOTIVAÇÃO

Consideremos a equação diferencial ordinária:

$$3y'' + 5y' + 2y = f(x) \tag{15}$$

Que pode ser reescrita como

$$3D^2y + 5Dy + 2y = f(x)$$

com $D = \frac{d}{dx}$. De certo modo, é tentador resolver esta equação como se ela fosse uma equação algébrica na forma

$$y(x) = \frac{f(x)}{3D^2 + 5D + 2}$$

Porém, isso não faz sentido!

No entanto, é possível (e faz sentido) pensar em uma forma de ”algebrizar”a equação diferencial para que seja mais simples trabalhar com ela, e é aí que temos a ideia da transformada de Fourier.

Assim sendo, é muito comum a transformada de Fourier ser comparada a uma espécie de ”caixa”, onde, normalmente em seu lado esquerdo, temos a função de entrada, enquanto que no lado direito, espera-se uma função de saída correspondente:

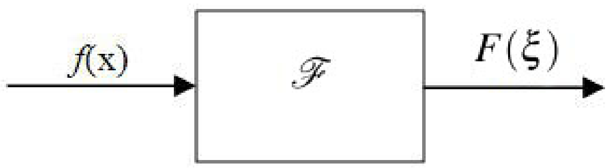

Figura 1: Esquema da transformada

Usando a notação $F(\xi) = \mathscr{F}[f(x)]$, este sistema possui três propriedades importantes:

(i) O sistema é linear, ou seja, é um sistema aditivo. Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, temos que

$$\mathscr{F}[f(x) + g(x)] = \mathscr{F}[f(x)] + \mathscr{F}[g(x)].$$

E, também é um sistema homogêneo, onde

$$\mathscr{F}[\xi f(x)] = \xi \mathscr{F}[f(x)]$$

(ii) O sistema ”quebra”derivadas, ou seja, se $f'(x)$ entra na caixa, então a saída será

$i\xi F(\xi)$, onde $i = \sqrt{-1}$.

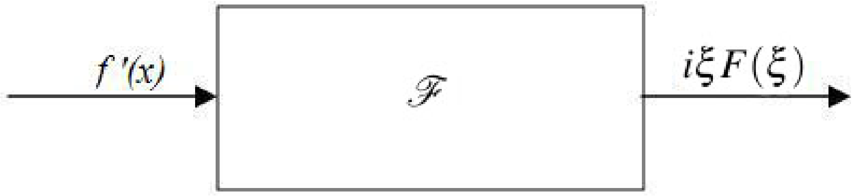

Figura 2: "Quebra"de derivada

(iii) O sistema é inversível, isto é, admite uma função inversa expressa por $\mathscr{F}^{-1}$, de modo que à partir de $F(\xi)$ fornece $f(x)$, assim, se $F(\xi) = \mathscr{F}[f(x)]$, temos $f(x) = \mathscr{F}^{-1}[F(\xi)]$.

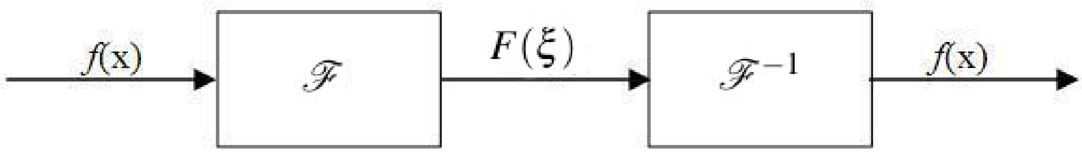

Figura 3: Existência da inversa

Deste modo, tomando (1) é possível reescrever a equação diferencial utilizando as três propriedades acima.

Aplicando a transformada na equação, obtemos que

$$3y'' + 5y' + 2y = f(x) \to -3\xi^2 Y(\xi) + 5i\xi Y(\xi) + 2Y(\xi) = F(\xi)$$

Ou seja, ao passar a equação por um lado da caixa da transformada, temos do outro lado a expressão já exibida acima, como mostra o esquema abaixo:

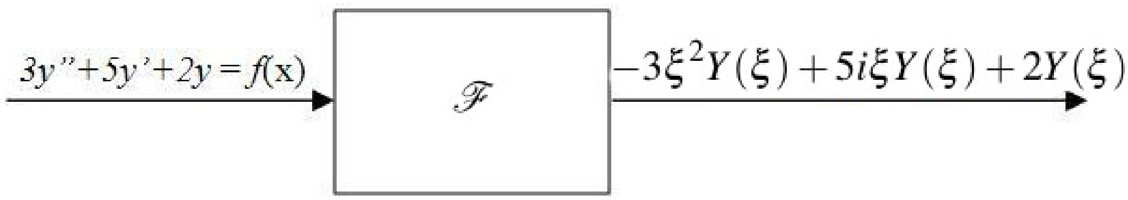

Figura 4: Ilustração do problema

Assim, o problema algébrico pode ser resolvido trivialmente:

$$Y(\xi) = \frac{F(\xi)}{-3\xi^2 + 5i\xi + 2}$$

Por fim, a ideia é usar Y em $\mathscr{F}^{-1}$ para obter $y(x)$ do problema proposto.

3.3.2 DA SÉRIE DE FOURIER PARA A TRANSFORMADA DE FOURIER

Seja $f(x)$ uma função $\mathscr{L}^1$ em $[-L,L]$ e periódica de período $T=2L$. Assim, considerando $h=\frac{\pi}{L}$ e $\xi_n = nh$, com $n=0,\pm 1,\pm 2,...$, temos

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\xi_n x},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\xi_n x}dx.$$

Considerando a expressão

$$c(\xi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\xi_n x}dx \tag{16}$$

com $n=0,\pm 1,\pm 2,...$

É possível escrever

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} hc(\xi_n)e^{i\xi_n x} \tag{17}$$

Tomando o limite em (1) e (2), quando $L\to\infty$ e $h\to 0$, temos que a série (17) toma o aspecto formal de uma soma de Riemann para a integral de $c(\xi)e^{i\xi x}$.

Logo, de (16) e (17), obtemos que

$$c(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \tag{18}$$

e

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} c(\xi)e^{i\xi x}d\xi. \tag{19}$$

3.3.3 A TRANSFORMADA DE FOURIER

Dada uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nosso objetivo aqui é definir a transformada de Fourier pela expressão

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f(x)dx. \tag{20}$$

Considerando a integral imprópria de (16):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f(x)dx = \lim_{M,N\to\infty}\int_{-M}^{N} e^{-ix\xi}f(x)dx. \tag{21}$$

Agora, vamos mostrar uma classe de funções para as quais (16) está bem definida. Ou seja, afirmar que (16) está bem definida significa afirmar que para cada ξ, a integral converge para um número e, portanto, temos uma função F definida em $\mathbb{R}$. Assim, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está em tal classe se:

(i) f é seccionalmente contínua no intervalo $[-M,N]$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$.

Por (i) é possível afirmar que $e^{-ix\xi} f(x)$ é limitada e integrável em $[-M,N]$. Enquanto que por (ii), temos que o limite em (2) existe, pois, dado $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$\int_{|x|>K} |f(x)|dx < \varepsilon \tag{22}$$

e que

$$\left| \int_{|x|>K} e^{-ix\xi} f(x)dx \right| \leq \int_{|x|>K} |f(x)|dx \tag{23}$$

O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que as integrais impróprias de f e $|f|$ existem é chamado de espaço $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Isso exige que f e $|f|$ sejam integráveis em cada intervalo $[-M,N]$ e que os limites abaixo existam

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_{-M}^{N} f(x)dx, \tag{24}$$

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_{-M}^{N} |f(x)|dx. \tag{25}$$

Considerando, agora, funções definidas em $\mathbb{R}$ e que tomam valores no plano complexo $\mathbb{C}$, isto é, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de modo que ela pode ser escrita na forma $f(x) = u(x) + iv(x)$, onde u e v são, respectivamente, suas partes real e imaginária, de modo que

$$\int f(x)dx = \int u(x)dx + i \int v(x)dx,$$

onde $\int$ representa a integral definida ou a imprópria. De fato, tal ideia já foi utilizada quando f real:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} cos(\xi x) f(x)dx - i \int_{-\infty}^{\infty} sen(\xi x) f(x)dx$$

Assim, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função $\mathscr{L}^1$ se suas partes real e imaginária e $|f|$, que são funções reais, forem $\mathscr{L}^1$, ou seja, se (24) e (25) existem. Desse modo, segue a definição:

Definição 9 (Transformada de Fourier): Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for uma função $\mathscr{L}^1$, sua transformada de Fourier $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é definida pela expressão:

$$\mathscr{F}[f](\xi) \equiv F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx. \tag{26}$$

Com isso, é possível considerar algumas implicações, como o fato de que (26) é um operador linear, ou seja,

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha\mathscr{F}[f]+\beta\mathscr{F}[g],$$

para f e g funções $\mathscr{L}^1$, e α e β números complexos.

Além disso, se f é uma função par, temos que

$$\mathscr{F}[f(x)]=F(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(\xi x)dx$$

E, se f ímpar,

$$\mathscr{F}[f(x)]=F(\xi)=i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sen(\xi x)dx$$

Exemplo 3: Considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tal que

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{se}|t|<k,\\ 0, & \text{se}|t|>k.\end{cases}$$

com $k>0$.

Como f é uma função par, temos que a transformada de Fourier de f é dada por:

$$F(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{sen(\xi t)}{\xi}\right]_{-K}^{K}=\frac{2sen(\xi K)}{\xi}$$

para $\xi\neq 0$.

4 SÉRIE DE FOURIER HIPERCOMPLEXA

A série de Fourier possui grande importância teórica para a matemática. Além de ser um tema atraente por trazer à tona questionamentos sobre sua convergência, pelo fato de representar funções contínuas, há a possibilidade de tal série ser expandida para o conjunto dos números complexos.

Assim, a série de Fourier vem sendo estudada dentro do contexto da análise Hipercomplexa, trazendo possibilidades de aplicações, no que diz respeito a ressolução de problemas de valores de fronteira, além da motivação teórica.

4.1 SÉRIE DE FOURIER PARA QUATÉRNIOS

Nesta seção será apresentada a série de Fourier Hipercomplexa, usando a formulação clássica de série de Fourier e o conceito de número quatérnio.

Considere uma função f definida em $[-L,L]$, $L>0$, periódica, ou seja, com $f(x) = f(x+2L)$, sendo $T=2L$ o período de f. Sendo f e sua derivada f' contínuas, temos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{27}$$

é convergente e seu limite dado por $\tilde{f}(x) = \frac{lim_{a\to x^+} f(x) + lim_{a\to x^-} f(x)}{2}$.

Os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \tag{28}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \tag{29}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \tag{30}$$

os quais determinam a série de Fourier da função f na série (27). Apresentamos, agora, algumas propriedades da função exponencial que nos serão muito úteis. Note que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... \tag{31}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{32}$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \tag{33}$$

Considerando a definição de e^z com $z \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + ... \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - ... \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + ...\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + ...\right) \end{aligned} \tag{34}$$

De (32) e (33) obtemos:

$$e^{iy} = cosy + iseny.$$

Assim, é possível definir a exponencial complexa e^z:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + iseny)$$

Agora, vamos detalhar algumas propriedades considerando um quatérnio $q = x + y_1 i + y_2 j + y_3 k$. Escrevendo

$$e^q = e^{x+y_1 i+y_2 j+y_3 k} = e^x e^{y_1 i} e^{y_2 j} e^{y_3 k} \tag{35}$$

temos que,

$$e^q = e^x[(cosy_1 + iseny_1)(cosy_2 + jseny_2)(cosy_3 + kseny_3)] \tag{36}$$

Como $cos(y) = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}$ e $seny = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2}$, temos que,

$$a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = a_n\left[\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}\right] + b_n\left[\frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2}\right] =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)}_{c_n^1} e^{\frac{in\pi x}{L}} + \underbrace{\left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)}_{c_{-n}^1} e^{\frac{-in\pi x}{L}}$$

Note que,

$$c_n^1 = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

Utilizando as expressões que determinam os coeficientes de Fourier a_n e b_n, obtemos que,

$$c_n^1 = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$
$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left[cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - isen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

Assim,

$$c_n^1 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx \tag{37}$$

Usando o mesmo raciocínio é possível obter

$$c_{-n}^1 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left[cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + isen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]dx$$

Ou seja,

$$c_{-n}^1 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{-n\pi x}{L}\right)}dx \tag{38}$$

Deste modo, de (37) e (38) é possível escrever a série apresentada em (27).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}[c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}} + c_{-n}^1 e^{-i\frac{n\pi x}{L}}]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^1 e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$
$$= \sum_{-\infty}^{-1} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$
$$= \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

Considerando $c_0 = \frac{a_0}{2}$, segue que

$$\tilde{f}(x) = c_0 + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}} \tag{39}$$

é a série de Fourier para funções complexas.

Deste modo, considerando ainda um quatérnio $q = x + y_1 i + y_2 j + y_3 k$, temos que, de De Moivre:

$$e^q = e^{x+y_1 i+y_2 j+y_3 k} = e^x[(cos(y_1) + isen(y_1))(cos(y_2) + jsen(y_2))(cos(y_3) + ksen(y_3))]$$

Uma vez que $cos(y) = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ e $sen(y) = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}$, da base quaterniônica $1, i, j, k$ e utilizando o mesmo raciocínio de (37) e (38), podemos obter a série de Fourier quaterniônica, considerando:

$$c_n^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-j\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx, \tag{40}$$

$$c_{-n}^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{j\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}, \tag{41}$$

Como $j^2 = -1$

$$c_n^3 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-k\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx, \tag{42}$$

e

$$c_{-n}^1 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{k\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx, \tag{43}$$

Como $k^2 = -1$ e ainda utilizando o mesmo argumento usado para determinar (13), temos que

$$\tilde{f}(x) = c_o + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^2 e^{j\frac{n\pi x}{L}} \tag{44}$$

e

$$\tilde{f}(x) = c_o + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^3 e^{i\frac{n\pi x}{L}} \tag{45}$$

Deste modo, podemos escrever $f(x)$ como

$$\tilde{f}(x) = c_o + \frac{1}{3}\left\{\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^2 e^{j\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^3 e^{i\frac{n\pi x}{L}}\right\} \tag{46}$$

Por fim, sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica, tal que seu período seja dado por $T = 2L$, contínua, assim como sua derivada f', temos que a série de Fourier de f pode ser escrita como

$$\tilde{f}(x) = c_o + \frac{1}{3}\left\{\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^1 e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^2 e^{j\frac{n\pi x}{L}} + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^3 e^{i\frac{n\pi x}{L}}\right\} \tag{47}$$

que é a série de Fourier quaterniônica da função f.

Exemplo 4: Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se} 0 \leq x < \pi, \\ 0, & \text{se} -\pi < x \leq 0. \end{cases}$$

Para determinar a série de Fourier quaterniônica de f é necessário o cálculo dos coeficientes de Fourier:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 2dx\right] = 1,$$

$$c_n^1 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 2e^{-inx}dx = \frac{i}{n\pi}[cos(n\pi) - 1] = \frac{i}{n\pi}[(-1)^n - 1],$$

$$c_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2e^{-jnx}dx = \frac{j}{n\pi}[cos(n\pi)-1] = \frac{j}{n\pi}[(-1)^n-1],$$
$$c_n^3 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2e^{-knx}dx = \frac{k}{n\pi}[cos(n\pi)-1] = \frac{k}{n\pi}[(-1)^n-1],$$

Portanto,

$$\tilde{f}(x) = 1 + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty}\left[\frac{i[(-1)^n-1]}{n\pi}e^{inx} + \frac{j[(-1)^n-1]}{n\pi}e^{jnx} + \frac{k[(-1)^n-1]}{n\pi}e^{knx}\right].$$

é a série de Fourier quaterniônica da função f.

4.2 SÉRIE DE FOURIER PARA OCTÔNIOS

Baseado [5], considere uma função f, definida no intervalo $[-L, L]$, $L > 0$, periódica, tal que $f(x) = f(x+2L)$. Se f e sua derivada f' são contínuas, temos que a série da função é dada por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{48}$$

converge e seu limite é dado por

$$\tilde{f}(x) = \frac{\lim_{a\to x^+} f(x) + \lim_{a\to x^-} f(x)}{2}$$

Os coeficientes de Fourier de f são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \tag{49}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \tag{50}$$

A série (48) juntamente com os números expressos em (49) e (50) exprimem a série de Fourier da função f.

Agora, considere um octônio $o \in \mathbb{O}$, dado por

$$o = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 l + u_6 Li + u_7 lj + u_8 lk = u_1 + \overrightarrow{u}$$

Ainda, a equação de De Moivre em sua forma expandida para os octônios é dada por

$$e^o = e^{u_1}\left\{cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}\right)\right.$$
$$\left. + \overrightarrow{u}\left(\frac{sen(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2})}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)\right\} \tag{51}$$

Por (51) obtemos

$$\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\frac{e^{0}\left(cos|y|+i\frac{y}{|y|}sen|y|\right)+e^{0}\left(cos|-y|+i\frac{-y}{|-y|}sen|-y|\right)}{2}$$

Sendo $cos(-y)=cos(y)$ e $sen(-y)=-sen(y)$, segue que

$$\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=cos(y)$$

Assim, seguindo o mesmo raciocínio, obtemos que,

$$\begin{aligned} cos(y) &= \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}=\frac{e^{jy}+e^{-jy}}{2}=\frac{e^{ky}+e^{-ky}}{2}=\frac{e^{ly}+e^{-ly}}{2} \\ &= \frac{e^{(li)y}+e^{-(li)y}}{2}=\frac{e^{(lj)y}+e^{-(lj)y}}{2}=\frac{e^{(lk)y}+e^{-(lk)y}}{2} \end{aligned} \tag{52}$$

e

$$\begin{aligned} sen(y) &= \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}=\frac{e^{jy}-e^{-jy}}{2j}=\frac{e^{ky}-e^{-ky}}{2k}=\frac{e^{ly}-e^{-ly}}{2l} \\ &= \frac{e^{(li)y}-e^{-(li)y}}{2li}=\frac{e^{(lj)y}-e^{-(lj)y}}{2lj}=\frac{e^{(lk)y}-e^{-(lk)y}}{2lk} \end{aligned} \tag{53}$$

De (52) e (53), obtemos

$$cos(y)=\frac{(e^{iy}+e^{jy}+...+e^{(lk)y})+(e^{-iy}+e^{-jy}+...+e^{-(lk)y})}{14}$$

$$sen(y)=\frac{1}{7}\left[\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}+\frac{e^{jy}-e^{-jy}}{2j}+...+\frac{e^{(lk)y}-e^{-(lk)y}}{2lk}\right]$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} & a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= a_n\left[\frac{(e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}+...+e^{(lk)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)})+(e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}+...+e^{-(lk)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)})}{14}\right] \\ &+ b_n\frac{1}{7}\left[\frac{e^{i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}-e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}}{2i}+...+\frac{e^{(lk)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}-e^{-(lk)\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}}{2lk}\right] \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{7}\left[\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2i}\right)e^{\frac{in\pi x}{L}}}_{c_n^1}+\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2i}\right)e^{\frac{-in\pi x}{L}}}_{c_{-n}^1}+...+\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}+\frac{b_n}{2(lk)}\right)e^{\frac{(lk)n\pi x}{L}}}_{c_n^7}+\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}-\frac{b_n}{2(lk)}\right)e^{\frac{-(lk)n\pi x}{L}}}_{c_{-n}^7}\right]$$

Considerando

$$c_n^1 = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \tag{54}$$

À partir de (49) e (50), temos

$$c_n^1 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{55}$$

E, utilizando o mesmo raciocínio obtemos

$$c_{-n}^1 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\left(\frac{(-n)\pi x}{L}\right)}dx \tag{56}$$

Expandindo o argumento, concluímos que:

$$c_n^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-j\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{57}$$

e

$$c_{-n}^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{j\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{58}$$

com $(j)^2 = -1$,

$$c_n^3 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-k\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{59}$$

e

$$c_{-n}^3 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{k\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{60}$$

com $(k)^2 = -1$

$$c_n^4 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-l\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{61}$$

e

$$c_{-n}^4 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{l\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{62}$$

com $(l)^2 = -1$

$$c_n^5 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-li\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{63}$$

e

$$c_{-n}^5 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{li\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{64}$$

com $(li)^2 = -1$

$$c_n^6 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-lj\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{65}$$

e

$$c_{-n}^6 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{lj\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{66}$$

com $(lj)^2 = -1$

$$c_n^7 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-lk\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{67}$$

e

$$c_{-n}^7 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{lk\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}dx \tag{68}$$

com $(lk)^2 = -1$.

Pelas equações (55)-(68), temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] = \frac{1}{7}\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty}\left[c_n^1 e^{\frac{in\pi x}{L}} + c_n^2 e^{\frac{jn\pi x}{L}} + c_n^3 e^{\frac{kn\pi x}{L}}\right.$$

$$\left. + c_n^4 e^{\frac{ln\pi x}{L}} + c_n^5 e^{\frac{lin\pi x}{L}} + c_n^6 e^{\frac{ljn\pi x}{L}} + c_n^7 e^{\frac{lkn\pi x}{L}}\right]$$

Portanto, sendo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica, com período $T = 2L$, contínua, assim como sua derivada f', temos que a série de Fourier de f pode ser escrita como

$$\tilde{f}(x) = c_0 + \frac{1}{7}\left\{\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} c_n^1 e^{\frac{in\pi x}{L}} + c_n^2 e^{\frac{jn\pi x}{L}} + c_n^3 e^{\frac{kn\pi x}{L}}\right.$$

$$\left. + c_n^4 e^{\frac{ln\pi x}{L}} + c_n^5 e^{\frac{lin\pi x}{L}} + c_n^6 e^{\frac{ljn\pi x}{L}} + c_n^7 e^{\frac{lkn\pi x}{L}}\right\}, \tag{69}$$

onde $c_0 = \frac{a_0}{2}$.

A série (69) é a série de Fourier octoniônica da função f.

Exemplo 5: Seja a função $f(t) = t$, com $t \in (-1, 1)$ e $f(t+2) = f(t)$.

Os coeficientes octoniônicos são dados por:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t dx = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$c_n^1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-in\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{(in\pi)},$$

$$c_n^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jn\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{(jn\pi)},$$

$$c_n^3 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-kn\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{(kn\pi)},$$

$$c_n^4 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-ln\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{(ln\pi)},$$

$$c_n^5 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-(li)n\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{((li)n\pi)},$$
$$c_n^6 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-(lj)n\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{((lj)n\pi)},$$
$$c_n^k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-(lk)n\pi t}dt = \frac{(-1)^{n+1}}{((lk)n\pi)}.$$

Portanto, a série de Fourier octoniônica de f é

$$\tilde{f}(t) = \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} e^{in\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{jn\pi} e^{jn\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{kn\pi} e^{kn\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{ln\pi} e^{ln\pi t} \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{n+1}}{(li)n\pi} e^{(li)n\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{(lj)n\pi} e^{(lj)n\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{(lk)n\pi} e^{(lk)n\pi t} \right\}$$

5 TRANSFORMADA DE FOURIER HIPERCOMPLEXA

5.1 TRANSFORMADA DE FOURIER PARA QUATÉRNIOS

Nesta seção vamos considerar o que foi mostrado em [5], partindo da definição da série de Fourier quaterniônica

$$\tilde{f}(x) = 1 + \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left[\frac{i[(-1)^n - 1]}{n\pi} e^{inx} + \frac{j[(-1)^n - 1]}{n\pi} e^{jnx} + \frac{k[(-1)^n - 1]}{n\pi} e^{knx} \right]. \tag{70}$$

para a dedução da transformada de Fourier hipercomplexa. De (70), considerando a função f definida no intervalo $(-L, L)$ e contínua, assim como sua derivada f', e denotando $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$, obtemos

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{6L}\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-i(\alpha_n u)}du\right]e^{i\alpha_n x}$$
$$+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-j(\alpha_n u)}du\right]e^{j\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-k(\alpha_n u)}du\right]e^{k\alpha_n x}$$

Considerando $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, temos

$$\tilde{f}) = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{6\pi}\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-i(\alpha_n u)}du\right]e^{i\alpha_n x}$$
$$+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-j(\alpha_n u)}du\right]e^{j\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-k(\alpha_n u)}du\right]e^{k\alpha_n x}\Delta\alpha$$

Tomando o limite $\Delta\alpha \to 0$ e assumindo $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|du < \infty$, absolutamente integrável, obtemos

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{6\pi}\sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty}\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-i(\alpha_n u)}du\right]e^{i\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-j(\alpha_n u)}du\right]e^{j\alpha_n x}$$
$$+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-k(\alpha_n u)}du\right]e^{k\alpha_n x}\Delta\alpha$$

Da defnição de Integral de Riemann obtemos

$$\frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(\alpha u)}du\right]e^{i\alpha x}+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j(\alpha u)}du\right]e^{j\alpha x}$$
$$+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-k(\alpha u)}du\right]e^{k\alpha x}d\alpha$$

Ou de maneira equivalente

$$\frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-k\alpha u}du\right)\right.$$
$$\left.(e^{i\alpha x},e^{j\alpha x},e^{k\alpha x})\right\rangle d\alpha \tag{71}$$

Denotando,

$$F_i(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du,$$
$$F_j(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\alpha u}du,$$
$$F_k(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-k\alpha u}du,$$

Assim, a expressão (71) pode ser reescrita como

$$\tilde{f}(x)=\frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle(F_i(\alpha),F_j(\alpha),F_k(\alpha)),(e^{i\alpha x},e^{j\alpha x},e^{k\alpha x})\right\rangle d\alpha \tag{72}$$

Portanto, definimos a transformada Hipercomplexa, em sua forma quaterniônica, como

$$F_{\mathbb{H}}(\alpha)=\mathscr{F}_{\mathbb{H}}(f(x))=(F_i(\alpha),F_j(\alpha),F_k(\alpha))$$

E a transformada inversa é definida pela equação

$$\mathscr{F}_{\mathbb{H}}^{-1}=\frac{1}{6\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle F_{\mathbb{H}}(\alpha),(e^{i\alpha x},e^{j\alpha x},e^{k\alpha x})\right\rangle d\alpha$$

Exemplo 6: Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{se} -\pi<x<0,\\ -1, & \text{se} 0<x<\pi.\end{cases}$$

A transformada de Fourier Hipercomplexa de f, é dada por:

$$F_{\mathbb{H}}(\alpha)=\mathscr{F}(f(x))=2\left(i\frac{cos(\alpha\pi)-1}{\alpha},j\frac{cos(\alpha\pi)-1}{\alpha},k\frac{cos(\alpha\pi)-1}{\alpha}\right).$$

5.2 TRANSFORMADA DE FOURIER PARA OCTÔNIOS

Nesta seção vamos considerar o que foi mostrado em [5], partindo da definição da série de Fourier octoniônica

$$\tilde{f}(t) = \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi} e^{in\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{jn\pi} e^{jn\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{kn\pi} e^{kn\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{ln\pi} e^{ln\pi t} \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n+1}}{(li)n\pi} e^{(li)n\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{(lj)n\pi} e^{(lj)n\pi t} + \frac{(-1)^{n+1}}{(lk)n\pi} e^{(lk)n\pi t} \right\} \tag{73}$$

De modo análogo ao que foi feito para $\mathbb{H}$, a dedução da transformada de Fourier hipercomplexa, à partir de (73), considerando uma função f definida no intervalo $(-L, L)$ e contínua, assim como sua derivada f', e denotando $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$, obtemos

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{14L} \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left\{ \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-i(\alpha_n u)} du \right] e^{i\alpha_n x} \right.$$

$$+ \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-j(\alpha_n u)} du \right] e^{j\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-k(\alpha_n u)} du \right] e^{k\alpha_n x}$$

$$+ \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-l(\alpha_n u)} du \right] e^{l\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-li(\alpha_n u)} du \right] e^{li\alpha_n x}$$

$$\left. + \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-lj(\alpha_n u)} du \right] e^{lj\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-lk(\alpha_n u)} du \right] e^{lk\alpha_n x} \right\}, \tag{74}$$

Considerando $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, obtemos

$$\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi + \pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{n\pi + \pi - n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Assim

$$\frac{1}{2L} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{\pi L}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{\pi}{L}\right) \to \left(\frac{1}{2\pi}\right)\Delta n = \frac{\Delta n}{2\pi}.$$

O mesmo vale para

$$\frac{1}{14L} = \frac{1}{14}\frac{1}{L} = \frac{1}{14}\frac{\pi}{\pi L} = \frac{1}{14\pi}\frac{\pi}{L} = \frac{1}{14\pi}\Delta n = \frac{\Delta n}{14\pi}$$

Deste modo

$$\tilde{f}(x) = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(u)du + \frac{1}{14\pi} \sum_{-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-i(\alpha_n u)} du \right] e^{i\alpha_n x}$$

$$+ \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-j(\alpha_n u)} du \right] e^{j\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-k(\alpha_n u)} du \right] e^{k\alpha_n x} \Delta\alpha$$

$$+ \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-l(\alpha_n u)} du \right] e^{l\alpha_n x} + \left[\int_{-L}^{L} f(u) e^{-li(\alpha_n u)} du \right] e^{li\alpha_n x}$$

$$+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-lj(\alpha_n u)}du\right]e^{lj\alpha_n x}+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-lk(\alpha_n u)}du\right]e^{lk\alpha_n x} \quad (75)$$

Tomando o limite $\Delta\alpha \to 0$ e assumindo $\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|du < \infty$, absolutamente integrável, obtemos

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{1}{14\pi}\sum_{-\infty,n\neq 0}^{\infty}\left\{\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-i(\alpha_n u)}du\right]e^{i\alpha_n x}+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-j(\alpha_n u)}du\right]e^{j\alpha_n x}\right.$$

$$+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-k(\alpha_n u)}du\right]e^{k\alpha_n x}+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-l(\alpha_n u)}du\right]e^{l\alpha_n x}$$

$$+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-li(\alpha_n u)}du\right]e^{li\alpha_n x}+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-lj(\alpha_n u)}du\right]e^{lj\alpha_n x}$$

$$\left.+\left[\int_{-L}^{L} f(u)e^{-lk(\alpha_n u)}du\right]e^{lk\alpha_n x}\right\}\Delta\alpha$$

Da defnição de Integral de Riemann obtemos

$$\frac{1}{14\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i(\alpha u)}du\right]e^{i\alpha x}+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j(\alpha u)}du\right]e^{j\alpha x}\right.$$

$$+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-k(\alpha u)}du\right]e^{k\alpha x}+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-l(\alpha u)}du\right]e^{l\alpha x}$$

$$+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-li(\alpha u)}du\right]e^{li\alpha x}+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-lj(\alpha u)}du\right]e^{lj\alpha x}$$

$$\left.+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-lk(\alpha u)}du\right]e^{lk\alpha x}\right\}d\alpha \quad (76)$$

Ou de maneira equivalente

$$\frac{1}{14\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-k\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-l\alpha u}du,\right.\right.$$

$$\left.\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-li\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-lj\alpha u}du,\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-lk\alpha u}du\right)$$

$$\left.(e^{i\alpha x},e^{j\alpha x},e^{k\alpha x},e^{l\alpha x},e^{li\alpha x},e^{lj\alpha x},e^{lk\alpha x})\right\rangle d\alpha \quad (77)$$

Denotando,

$$F_i(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}du,$$

$$F_j(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\alpha u}du,$$

$$F_k(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-k\alpha u}du,$$

$$F_l(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-l\alpha u}du,$$

$$F_{li}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-li\alpha u}du,$$

$$F_{lj}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-lj\alpha u}du,$$

$$F_{lk}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-lk\alpha u}du,$$

Assim, a expressão (77) pode ser reescrita como

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{14\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big\langle (F_i(\alpha), F_j(\alpha), F_k(\alpha), F_l(\alpha), F_{li}(\alpha), F_{lj}(\alpha), F_{lk}(\alpha))$$

$$(e^{i\alpha x}, e^{j\alpha x}, e^{k\alpha x}, e^{l\alpha x}, e^{li\alpha x}, e^{lj\alpha x}, e^{lk\alpha x})\Big\rangle d\alpha \qquad (78)$$

Portanto, definimos a transformada Hipercomplexa, em sua forma octoniônica, como

$$F_{\mathbb{O}}(\alpha) = \mathscr{F}_{\mathbb{O}}(f(x)) = (F_i(\alpha), F_j(\alpha), F_k(\alpha), F_l(\alpha), F_{li}(\alpha), F_{lj}(\alpha), F_{lk}(\alpha)).$$

E a transformada inversa é definida pela equação

$$\mathscr{F}_{\mathbb{O}}^{-1} = \frac{1}{14\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Big\langle F_{\mathbb{O}}(\alpha), (e^{i\alpha x}, e^{j\alpha x}, e^{k\alpha x}, e^{l\alpha x}, e^{li\alpha x}, e^{lj\alpha x}, e^{lk\alpha x})\Big\rangle d\alpha.$$

6 APÊNDICE

Neste capítulo apresentaremos conceitos fundamentais referentes a estruturas algébricas de *Grupos*, *Anéis* e *Corpos*, exibindo suas respectivas definições e propriedades, e uma extensão do Teorema do Erro Quadrático e da desigualdade de Bessel para octônios.

6.1 GRUPOS

Um grupo é um conjunto não vazio, munido de uma operação interna que satisfaz determinadas propriedades.

Definição 1 (Operação interna): Uma operação interna em um conjunto G é uma aplicação ρ do produto cartesiano GxG, em G, que associa a cada par $(x,y) \in GxG$ um elemento $\rho(x,y) \in G$. Ou seja:

$$\rho : GxG \to G$$

$$(x,y) \to \rho(x,y)$$

Denotamos por (G,ρ) o conjunto G munido da operação ρ.

Definição 2 (Grupos): Um grupo é um conjunto não vazio G, munido de uma operação interna denotada por $\rho(x,y) = x*y$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) *Associatividade*: Para quaisquer $x,y,z \in G$, temos que

$$(x*y)*z = x*(y*z);$$

(ii) *Existência de elemento neutro*: Existe um elemento $e \in G$ tal que

$$x*e = e*x = x$$

para qualquer $x \in G$;

(iii) *Existência de simétricos*: Existe um elemento $x' \in G$ tal que

$$x * x' = x' * x = e.$$

Se, além disso, ainda for cumprido o axioma da *comutatividade*, onde, para quaisquer $x, y \in G$

$$x * y = y * x$$

Então $(G, *)$ é um grupo abeliano.

Exemplo 1: Consideremos o conjunto $\mathbb{H}$ dos números quatérnios, sendo

$$\mathbb{H} = \{(a, b, c, d); a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

tal que para quaisquer $p, q \in \mathbb{H}$ temos $(p * q) = p + q$ a soma de p com q. Neste caso, usamos a notação $(\mathbb{H}, +)$ para representar a operação de soma nos quatérnios. Além disso, vamos mostrar que $\mathbb{H}$ satisfaz as seguintes propriedades para as operações internas de soma:

i) *Associatividade*: Dados quaisquer $p, q, r \in \mathbb{H}$, com $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ e $r = (r_0, r_1, r_2, r_3)$, temos

$$(p+q)+r = [(p_0, p_1, p_2, p_3) + (q_0, q_1, q_2, q_3)] + (r_0, r_1, r_2, r_3)$$

$$= ((p_0+q_0), (p_1+q_1), (p_2+q_2), (p_3+q_3)) + (r_0, r_1, r_2, r_3)$$

$$= ((p_0+q_0)+r_0, (p_1+q_1)+r_1, (p_2+q_2)+r_2, (p_3+q_3)+r_3)$$

$$= (p_0+(q_0+r_0), p_1+(q_1+r_1), p_2+(q_2+r_2), p_3+(q_3+r_3))$$

$$= (p_0, p_1, p_2, p_3) + ((q_0+r_0), (q_1+r_1), (q_2+r_2), (q_3+r_3))$$

$$= (p_0, p_1, p_2, p_3) + [(q_0, q_1, q_2, q_3) + (r_0, r_1, r_2, r_3)]$$

$$= p + (q + r)$$

ii) *Existência de elemento neutro*: Existe $e = (0, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}$ tal que

$$q + e = (q_0, q_1, q_2, q_3) + (0, 0, 0, 0) = (q_0+0, q_1+0, q_2+0, q_3+0) = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

para todo $q \in \mathbb{H}$.

iii) *Existência de elemento simétrico*: Existe $q' = (-q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$ tal que

$$q + q' = (q_0, q_1, q_2, q_3) + (-q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$$

$$= (q_0 + (-q_0), q_1 + (-q_1), q_2 + (-q_2), q_3 + (-q_3))$$

$$= (q_0 - q_0, q_1 - q_1, q_2 - q_2, q_3 - q_3) = (0,0,0,0) = e$$

Deste modo $(\mathbb{H},+)$ é um grupo e,além disso, verifica-se que, dados $p,q \in \mathbb{H}$:

$$p + q = (p_0, p_1, p_2, p_3) + (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

$$= ((p_0 + q_0), (p_1 + q_1), (p_2 + q_2), (p_3 + q_3))$$

$$= ((q_0 + p_0), (q_1 + p_1), (q_2 + p_2), (q_3 + p_3))$$

$$= (q_0, q_1, q_2, q_3) + (p_0, p_1, p_2, p_3) = q + p$$

Ou seja, $(\mathbb{H},+)$ é um grupo abeliano.

Proposição 1: Seja $(G,*)$ um grupo. Então valem:

1. Existe um único $e \in G$ que satisfaz $g * e = e * g = g$ para todo $g \in G$;

2. Para todo $g \in G$ existe um único $h \in G$ que satisfaz $g * h = h * g = e$;

3. Para todo $g \in G$ temos $(g^{-1})^{-1} = g$;

4. Para todos $g,h \in G$ temos que $(g*h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$.

Demonstração:

1. De fato, se e e f são elementos neutros para G, pela definição de elemento neutro, segue que $e = e * f = f$, ou seja, $e = f$. Logo, e é único;

2. Se h e k são elementos inversos de g temos que

$$h = h * e = h * (g * k) = (h * g) * k = e * k = k$$

Ou seja, como $h = k$ segue a unicidade de h;

3. Como g^{-1} é inverso de g, temos que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. Há ainda que $g^{-1} * (g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} * g^{-1} = e$. Deste modo, $g * g^{-1} = (g^{-1})^{-1} * g^{-1} \to g = (g^{-1})^{-1}$;

4. Considere que

$$(g * h) * (h^{-1} * g^{-1}) = g * (h * h^{-1}) * g^{-1} = g * e * g^{-1} = e$$

Analogamente,

$$(h^{-1} * g^{-1}) * (g * h) = h^{-1} * (g^{-1} * g) * h = h^{-1} * e * h = e$$

Sabendo que $(g*h)*(g*h)^{-1}=e$, de modo geral, obtemos que

$$(g*h)*(g*h)^{-1}=(g*h)*(h^{-1}*g^{-1})\rightarrow(g*h)^{-1}=h^{-1}*g^{-1}$$

Definição 2 (semigrupo): Seja S um conjunto munido de uma operação interna, denotada por $s*t$. Diz-se que $(S,*)$ é um semigrupo se a propriedade associativa é satisfeita para os elementos de S, ou seja, se para todo $s,t,u\in S$, tivemos que $(s*t)*u=s*(t*u)$.

Exemplo 2: Seja $S=\mathbb{H}$ o conjunto dos números quatérnios com a operação interna de soma. Como foi mostrado acima, esta operação é associativa, portanto, o conjunto dos quatérnios é um semigrupo para esta operação.

Definição 3 (subgrupo): Sejam $(G,*)$ um grupo e H um subconjunto não vazio de G. Se H, com a mesma operação $*$ de G for um grupo, então H é dito subgrupo de G. Se, ainda, $(H,*)$ for grupo abeliano, diz-se que H é subgrupo abeliano de G.

6.2 ANÉIS

Como foi apresentado acima, grupos são conjuntos não vazios munidos de uma única operação, de modo que satisfaz determinadas propriedades. Agora apresentaremos o conceito de Anéis, que são conjuntos não vazios, munidos de duas operações chamadas de soma e produto (ou multiplicação).

Definição 4: Um anel é um conjunto não vazio A munido de duas operaç˜ oes internas, uma chamada de soma, denotada por $+$, e outra chamada multiplicação, denotada por ., satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) Para quaisquer $a,b\in A$ tem-se que $a+b=b+a$;

(ii) Para quaisquer $a,b,c\in A$, tem-se que $a+(b+c)=(a+b)+c$;

(iii) Existe $0\in A$ tal que $a+0=a$, para qualquer $a\in A$;

(iv) Para qualquer $a\in A$ existe $-a\in A$ tal que $a+(-a)=0$;

(v) Para quaisquer $a,b,c\in A$, tem-se que $a.(b.c)=(a.b).c$;

(vi) Para quaisquer $a,b,c\in A$, tem-se que $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$ e $(b+c).a=b.a+c.a$.

Assim sendo, um anel com as operações de soma e produto é denotado por $(A,+,.)$.

Definição 5: Um anel $(A,+,.)$ é dito anel com unidade se existe $1\in A$ satisfazendo

$1.a = a.1 = a$.

Definição 6: Um anel $(A, +, .)$ é dito anel comutativo se satisfaz $a.b = b.a$ para todos $a, b \in A$.

Proposição 2: Seja $(A, +, .)$ um anel e $a, b \in A$. Então, são satisfeitas:

1. $a.0 = 0.a = 0$;

2. $a.(-b) = (-a).b = -a.b$;

3. $(-a).(-b) = a.b$;

Além disso, se A tem uma unidade, então também vale:

4. $(-1).a = -a$;

5. $(-1).(-1) = 1$.

Demonstração:

1. Tomando $a \in A$ segue que

$$a.0 = a.(0+0) = a.0 + a.0$$

Como $(A, +)$ é um grupo, pela lei do cancelamento segue que $a.0 = 0$. Analogamente, se mostra que $0.a = 0$;

2. Basta considerar que

$$a.b + [-(a.b)] = 0 = a.0 = a.[b + (-b)] = a.b + a.(-b) \rightarrow -(a.b) = a.(-b)$$

Analogamente mostra-se que $-(a.b) = (-a).b$.

3. Para mostrar que $(-a).(-b) = a.b$, usaremos 2., pois, assim, vamos obter que:

$$(-a).(-b) = -(a.(-b)) = -(-(a.b)) = a.b$$

Ou seja, $(-a).(-b) = a.b$.

4. Usando 2., obtemos que:

$$(-1).a = -(1.a) = -a.$$

5. E considerando 3., segue que:

$$(-1).(-1) = 1.1 = 1.$$

6.3 CORPOS

Assim como anéis são conjuntos dotados de duas operações de soma e produto, de modo que se cumpram algumas propriedades, o conceito de corpo não se distancia de tal ideia. Entretanto, é necessário considerar uma gama maior de propriedades à serem respeitadas.

Definição 7: Um conjunto não vazio $\mathbb{K}$ é um corpo se em $\mathbb{K}$ for possível definir duas operações, adição, denotada por $+$, e multiplicação, denotada por ., satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $a+b=b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$ (comutatividade na soma);

(ii) $a+(b+c)=(a+b)+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (associatividade na soma);

(iii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por 0 e chamado de elemento neutro da adição, que satisfaz $0+a=a+0=a$, $\forall a \in \mathbb{K}$;

(iv) Para cada $a \in \mathbb{K}$, existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por $-a$ e chamado de oposto de a tal que $a+(-a)=(-a)+a=0$;

(v) $a.b=b.a$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$ (comutatividade na multiplicação);

(vi) $a.(b.c)=(a.b).c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$ (associatividade na multiplicação);

(vii) Existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por 1 e chamado de elemento neutro da multiplicação, tal que $1.a=a.1=a$, $\forall a \in \mathbb{K}$;

$(viii)$ Para cada $a \in \mathbb{K}$ não nulo existe um elemento em $\mathbb{K}$, denotado por a^{-1} e chamado de inverso multiplicativo de a, tal que $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$;

(ix) $(a+b).c=a.c+b.c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$.

Exemplo 3: Os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, são exemplos de corpos. Entretanto, o conjunto $\mathbb{Z}$ não é corpo, pois, dado um $a \in \mathbb{Z}$ não nulo, nota-se que a não assume inverso multiplicativo, logo, não satisfazendo a propriedade $(viii)$.

6.4 UMA EXTENSÃO DO TEOREMA DO ERRO QUADRÁTICO PARA SÉRIE DE FOURIER OCTONIÔNICA E A DESIGUALDADE DE BESSEL

Nesta seção vamos apresentar uma importante propriedade da Série de Fourier Hipercomplexa. Partindo de resultados clássicos, faremos uma extensão do Teorema do Erro Quadrático (Walter Rudin [8]) e da desigualdade de Bessel para o conjunto dos octônios.

Sendo assim, seja ϕ uma função octoniônica definida por:

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{O},$$

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)i + \phi_3(x)j + \phi_4(x)k + \phi_5(x)l + \phi_6(x)li + \phi_7(x)lj + \phi_8 lk$$

Onde ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5, ϕ_6, ϕ_7 e ϕ_8 são funções reais. Podemos considerar

$$\overline{\phi(x)} = \phi_1(x) - [+\phi_2(x)i + \phi_3(x)j + \phi_4(x)k + \phi_5(x)l + \phi_6(x)li + \phi_7(x)lj + \phi_8 lk],$$

$$|\phi(x)|^2 = \phi\overline{\phi(x)} = \sum_{m=1}^{8} (\phi_m(x))^2$$

Definição 8: Seja $\{\phi_n\}$, $n = 1,2,3,4,...$, uma sequência de funções octoniônicas definidas no intervalo $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}dx = 0, (n \neq m) \tag{1}$$

Então, dizemos que $\{\phi_n\}$ é um sistema ortogonal de funções octoniônicas em $[a,b]$. Além disso, se

$$\int_a^b |\phi_n(x)|^2 dx = 1, \tag{2}$$

Para todo n, dizemos que $\{\phi_n(x)\}$ é ortonormal.

Por exemplo, considere a sequência de funções

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{56L}} \left(e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{\frac{jn\pi x}{L}} + e^{\frac{kn\pi x}{L}} + e^{\frac{ln\pi x}{L}} + e^{\frac{lin\pi x}{L}} + e^{\frac{ljn\pi x}{L}} + e^{\frac{lkn\pi x}{L}} \right), n = 1,2,3,...$$

É um sistema ortonormal em $[-L,L]$.

Por este exemplo, podemos definir

$$c_n^1 + c_n^2 i + c_n^3 j + c_n^4 k + c_n^5 l + c_n^6 li + c_n^7 lj + c_n^8 lk = \int_a^b f(t)\overline{\phi_n(t)}dt, \forall n = 1,2,3,... \tag{3}$$

Onde $\{\phi_n\}$ é uma sequênca ortonormal em $[a,b]$ e $c_n^1, c_n^2, c_n^3, c_n^4, c_n^5, c_n^6, c_n^7$ e c_n^8 sequências reais. Sendo c_n o *n-ésimo* coeficiente octoniônico de Fourier de f (relativa a $\{\phi_n\}$). Podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n^1 + c_n^2 i + c_n^3 j + c_n^4 k + c_n^5 l + c_n^6 li + c_n^7 lj + c_n^8 lk)\phi_n(x) \tag{4}$$

Que é a série de Fourier octoniônica de f.

O teorema a seguir parte de resultados clássicos de ([8]) que já foi estendido para o conjunto dos números quatérnios. Deste modo, vamos mostrar que as somas parciais da série de Fourier octoniônica de uma função f tem certa propriedade mínima, assumindo que f é uma função real.

Teorema 1: Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência de funções ortonormais no intervalo $[a,b]$. Considere a *n-ésima* soma parcial da série de Fourier octoniônica de f

$$s_n(x) = \sum_{m=1}^{n} (c_m^1 + c_m^2 i + c_m^3 j + c_m^4 k + c_m^5 l + c_m^6 li + c_m^7 lj + c_m^8 lk)\phi_m(x), \tag{5}$$

Onde c_m^1, c_m^2, c_m^3, c_m^4, c_m^5, c_m^6, c_m^7 e c_m^8 são dadas em (3). Além disso, definindo

$$t_n(x) = \sum_{m=1}^{n} (d_m^1 + d_m^2 i + d_m^3 j + d_m^4 k + d_m^5 l + d_m^6 li + d_m^7 lj + d_m^8 lk)\phi_m(x), \tag{6}$$

Onde $d_m^1, d_m^2, d_m^3, d_m^4, d_m^5, d_m^6, d_m^7$ e d_m^8 são sequências reais, então

$$\int_a^b |f(x) - s_n(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - t_n(x)|^2 dx, \tag{7}$$

E a igualdade é válida se, e somente se

$$d_m^1 = c_m^1, d_m^2 = c_m^2, d_m^3 = c_m^3, d_m^4 = c_m^4$$

$$d_m^5 = c_m^5, d_m^6 = c_m^6, d_m^7 = c_m^7, d_m^8 = c_m^8 \tag{8}$$

Isto significa que dentre todas as funções t_n, s_n dão a melhor aproximação quadrada média possível para f.

Demonstração: À fim de simplificar a notação, seja $\int$ a integral em $[a,b]$ e $\sum$ a soma de 1 até n. Da definição de (6) e (3), temos que

$$\begin{aligned}
\int f\overline{t_n} &= \int f\left[\overline{\sum(d_m^1 + d_m^2 i + d_m^3 j + d_m^4 k + d_m^5 l + d_m^6 li + d_m^7 lj + d_m^8 lk)\phi_m}\right] \\
&= \sum \overline{(d_m^1 + d_m^2 i + d_m^3 j + d_m^4 k + d_m^5 l + d_m^6 li + d_m^7 lj + d_m^8 lk)} \int f\overline{\phi_m} \\
&= \sum \overline{(d_m^1 + d_m^2 i + \ldots + d_m^7 lj + d_m^8 lk)}(c_m^1 + c_m^2 i + \ldots + c_m^7 lj + c_m^8 lk).
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int f\overline{t_n} + \int \overline{f} t_n = \sum \Big[&2(d_m^1 c_m^1) + 2(d_m^2 c_m^2) + 2(d_m^3 c_m^3) + 2(d_m^4 c_m^4) \\
&+2(d_m^5 c_m^5) + 2(d_m^6 c_m^6) + 2(d_m^7 c_m^7) + 2(d_m^8 c_m^8)\Big]
\end{aligned}$$

Além disso

$$\begin{aligned}
\int |t_n|^2 &= \int t_n \overline{t_n} \\
&= \int \sum_{m=1}^{n} [(d_m^1 + ... + d_m^8 lk)\phi_m] \overline{\sum_{p=1}^{n} [(d_p^1 + ... + d_p^8 lk)\phi_p]} \\
&= \sum_{m=1}^{n} [(d_m^1)^2 + (d_m^2)^2 + (d_m^3)^2 + (d_m^4)^2 + (d_m^5)^2 + (d_m^6)^2 + (d_m^7)^2 + (d_m^8)^2]
\end{aligned}$$

Um vez que $\{\phi_n\}$ é ortonormal. Assim sendo

$$\begin{aligned}
\int |f - t_n|^2 &= \int |f|^2 - \int f\overline{t_n} - \int \overline{f} t_n + \int |t_n|^2 \\
&= \int |f|^2 - \sum \left[2(d_m^1 c_m^1) + 2(d_m^2 c_m^2) + ... + 2(d_m^7 c_m^7) + 2(d_m^8 c_m^8)\right] \\
&+ \sum_{m=1}^{n} \left[(d_m^1)^2 + (d_m^2)^2 + ... + (d_m^7)^2 + (d_m^8)^2\right] \\
&= \int |f|^2 + \sum \left[(d_m^1 - c_m^1)^2 + (d_m^2 - c_m^2)^2 + ... + (d_m^7 - c_m^7)^2 + (d_m^8 - c_m^8)^2\right] \\
&- \sum_{m=1}^{n} \left[(c_m^1)^2 + (c_m^2)^2 + ... + (c_m^7)^2 + (c_m^8)^2\right]
\end{aligned}$$

Que é minimizado se, e somente se

$$d_m^1 = c_m^1, d_m^2 = c_m^2, d_m^3 = c_m^3, d_m^4 = c_m^4, d_m^5 = c_m^5,$$
$$d_m^6 = c_m^6, d_m^7 = c_m^7, d_m^8 = c_m^8, (m = 1, 2, 3, ..., n).//$$

Corolário 1: Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência de funções octoniônicas em $[a,b]$, e se

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m^1 + c_m^2 i + c_m^3 j + c_m^4 k + c_m^5 l + c_m^6 li + c_m^7 lj + c_m^8 lk\right) \phi_m(x)$$

Então

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[(c_m^1)^2 + (c_m^2)^2 + ... + (c_m^7)^2 + (c_m^8)^2\right] \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \tag{9}$$

Demonstração: Do teorema 1 temos que

$$\begin{aligned}
\int |f - t_n|^2 &= \int |f|^2 + \sum \left[(d_m^1 - c_m^1)^2 + (d_m^2 - c_m^2)^2 + ... + (d_m^7 - c_m^7)^2 + (d_m^8 - c_m^8)^2\right] \\
&- \sum_{m=1}^{n} \left[(c_m^1)^2 + (c_m^2)^2 + ... + (c_m^7)^2 + (c_m^8)^2\right]
\end{aligned}$$

Colocando $d_m^1 = c_m^1$, $d_m^2 = c_m^2$, $d_m^3 = c_m^3$, $d_m^4 = c_m^4$, $d_m^5 = c_m^5$, $d_m^6 = c_m^6$, $d_m^7 = c_m^7$, $d_m^8 = c_m^8$, obtemos que

$$\sum_{m=1}^{n} \left[(c_m^1)^2 + (c_m^2)^2 + ... + (c_m^7)^2 + (c_m^8)^2\right] \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \tag{10}$$

Desde que $\int |f - t_n|^2 \geq 0$. E, tomando $n \to \infty$ em (10), obtemos (9) que é a generalização da desigualdade de Bessel para octônios. //

7 CONCLUSÃO

Historicamente, o desenvolvimento dos hipercomplexos está vinculado às tentativas de dar possíveis aplicações para tais conjuntos, desde a época em que *Hamilton* se debruçou sobre o problema da multiplicação de ternas ordenadas. Assim, percebe-se que tais conjuntos vêm sendo tema de estudos devido suas estruturas algébricas interessantes e peculiares. Deste modo, é notável a presença dos quatérnios e octônios em diversas áreas do conhecimento humano, principalmente na física e engenharia, além, é claro, da própria matemática.

Assim, considerando as representações complexas (em $\mathbb{C}$) tanto da série de Fourier quanto da transformada, é interessante o estudo das expansões hipercomplexas de tais estruturas matemáticas, já que se tratam de conceitos amplamente utilizados, devido o fato de estarem relacionados a modelos de fenômenos físicos como a condução do calor em uma barra, por exemplo, além de estarem apoiadas em uma teoria matemática bastante interessante, que diz respeito ao estudo de equações diferenciais.

Deste modo, as expansões hipercomplexas aqui apresentadas, tanto da série quanto da transformada de Fourier, por terem relação direta com o cálculo diferencial, podem encorajar estudos sobre possíveis aplicações em áreas como a engenharia, além de possuirem estruturas conceituais que incitam futuros desenvolvimentos e contribuições para a matemática, devido sua riqueza teórica.

REFERÊNCIAS

[1] OLIVEIRA, A.C., **Quatérnios, operadores de Fueter e relações quaterniônicas transcendentais**, São José do Rio Preto, 2006. Dissertação de Mestrado, pós graduação em Matemática Aplicada, Universidade Estadual Paulista.

[2] MARTINEZ, C.A.P., **Álgebras Não associtaivas octoniônicas e relações extensivas do tipo "De Moivre"**, São José do Rio Preto, 2006. Dissertação de Mestrado, pós graduação em Matemática Aplicada, Universidade Estadual Paulista.

[3] FIGUEIREDO, D.G. DE. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[4] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações elementares e problemas de valores de contorno**. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

[5] MARTINEZ, C.A.P., MARTINEZ A.L.M., BORGES F.M., CASTELANI V.E., **Square of the Error Octonionic Theorem and Hypercomplex Fourier Serier**. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA), vol.14, n.3, p.483-495, 2013.

[6] MARTINEZ, C.A.P., MARTINEZ A.L.M., **ALTERNATIVE TO THE HYPERCOMPLEX FOURIER TRANSFORM DEFINITION**. International Journal of Applied Mathematics, vol. 29, n.6, p. 717-725, Mar. 2016.

[7] OLIVEIRA A.C.,BORGES M.F.,MACHADO J.M., **Expansão do Teorema de Moivre para quatérnios e séries de potências**, São José do Rio Preto, 2007. Departamento de ciências de computação e estatística, IBILCE, UNESP.

[8] RUDIN W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3 ed. United States os America: McGraw-Hill, 1976.

[9] BARROS C.J.B.; SANTANA A.J. **Estruturas algébricas - Com ênfase em elementos da teoria de Lie**. Maringá: Eduem, 2011.

[10] COELHO F.U.; LOURENÇO M.L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2 ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2013.

[11] DOMINGUES H.H.; IEZZI G. **Álgebra Moderna**. 4 ed. São Paulo: Atual, 2003.