UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MAYCON HENRIQUE DE SOUZA

ESTUDO DO TEOREMA DE LAGRANGE E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2019

MAYCON HENRIQUE DE SOUZA

ESTUDO DO TEOREMA DE LAGRANGE E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Profª. Me. Cristiane Aparecida Pendeza Martinez

CORNÉLIO PROCÓPIO
2019

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

BANCA EXAMINADORA

Profª. Me. Cristiane Aparecida Pendeza Martinez
(Orientador)

Prof. Dr. André Luís Machado Martinez

Profª. Drª. Glaucia Maria Bressan

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso"

RESUMO

SOUZA, Maycon Henrique de. **Estudo do Teorema de Lagrange e Aplicações em Problemas de Otimização**. 2019. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019

No estudo de problemas de otimização com restrições de igualdade, o método dos multiplicadores de Lagrange permite que sejam determinados máximos ou mínimos de uma função, respeitando restrições de igualdade. Para isso, apresentam-se os conceitos de análise no $\mathbb{R}^n$, tais como métricas, normas, conjuntos abertos, fechados e compactos, funções contínuas, limites e derivadas de funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, bem como os principais resultados sobre esses conceitos e suas inter-relações, até chegar no método dos multiplicadores de Lagrange. Por fim, são apresentadas aplicações dos multiplicadores de Lagrange na otimização de funções.

Palavras-chave: Análise. Multiplicadores de Lagrange. Otimização. Problemas.

ABSTRACT

SOUZA, Maycon Henrique de. **Study of Lagrange Theorem and Applications in Optimization Problems**. 2019. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2019

In the study of optimization problems with equality constraints, the Lagrange multipliers method allows the maximum or minimum of a function, to be determined while respecting equality constraints. For this, we present the concepts of analysis in $\mathbb{R}^n$, such as metrics, norms, open sets, closed and compact sets, continuous functions, limits and derivatives of $\mathbb{R}^n$ functions in $\mathbb{R}^m$, as well as the main results about these concepts and their interactions, until you reach the Lagrange multiplier method. Finally, applications of the Lagrange multipliers are presented in the optimization of functions.

Keywords: Analysis. Lagrange Multipliers. Optimization. problems.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

A análise matemática, ou simplesmente análise, lida com conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, medidas, limites, séries infinitas e funções analíticas. Segundo Jahnke (2003), a análise surgiu do estudo dos números e funções reais, mas sua abrangência cresceu, de forma a estudar os números complexos, bem como espaços mais gerais, tais como os espaços métricos, espaços normados e os espaços lineares topológicos (ELT).

A análise foi desenvolvida formalmente no século XVII, durante a Revolução Científica, mas muitas das suas ideias remontam aos matemáticos de tempos anteriores. Os primeiros resultados em análise estiveram implicitamente presentes nos primórdios da matemática grega antiga. Mais tarde, matemáticos gregos tais como Eudoxo e Arquimedes fizeram uso mais explícito, mas informal, dos conceitos de limite e convergência, quando usaram o método da exaustão para calcular áreas e volumes de regiões e sólidos. O primeiro uso explícito de infinitesimais aparece na obra "O Método dos Teoremas Mecânicos", de Arquimedes, que foi redescoberta no século XX (JAHNKE, 2003).

No século XVIII, Euler introduziu a noção de função, e a análise começou a emergir como disciplina independente quando o matemático boêmio Bernard Bolzano introduziu a definição moderna de continuidade em 1816. No século XIX, Cauchy ajudou a sistematizar o cálculo infinitesimal em fundamentos lógicos firmes, com a introdução do conceito de sequência de Cauchy. Foi ele também que iniciou a teoria formal da análise complexa. Poisson, Liouville, Fourier e outros mais estudaram a análise harmônica. Com as contribuições destes e de outros matemáticos como Weierstrass, foi-se estabelecendo a ideia moderna de rigor matemático (JAHNKE, 2003).

É sabido que cada área da matemática tem o seu "habitat", que em termos matemáticos, se chama de domínio ou espaço viável, que é onde uma determinada teoria faz sentido. Neste trabalho, o espaço viável que será considerado, é o $\mathbb{R}^n$, um espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Trata-se então de um trabalho na área de análise no $\mathbb{R}^n$.

Como o título sugere, o principal foco deste trabalho será o estudo da teoria necessária para se entender o Teorema de Lagrange, e aplicá-lo a problemas de otimização. Quanto ao referido teorema, seu criador, Joseph Louis Lagrange, (Turim, 25 de janeiro de 1736 - Paris, 10 de abril de 1813) foi um grande matemático italiano, que deu grandes contribuições à matemática e à física. Uma dessas contribuições, foi o Método dos Multiplicadores de Lagrange, pelo qual, é possível encontrar o ponto de mínimo ou de máximo, de uma função real de uma ou mais variáveis, sujeita a uma ou mais restrições.

E, em matemática, o termo otimização, refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais dentro de um conjunto viável. Desse modo, resolver um problema de otimização, significa encontrar os pontos de máximo e/ou de mínimo de uma função, e é nisso que o método dos multiplicadores de Lagrange será utilizado. Mas para isso é necessário estudar os conceitos de análise no $\mathbb{R}^n$ que antecendem esse método, ou seja, primeiro é necessário construir uma base, sobre a qual a teoria desse método estará alicerçada. Portanto, os primeiros capítulos deste trabalhos serão dedicados à revisão bibliográfica de análise no $\mathbb{R}^n$, e depois disso virão as aplicações.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Gerais

O objetivo principal deste trabalho é utilizar o Método dos Multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de otimização.

1.2.2 Específicos

Estudar os conceitos básicos da análise no $\mathbb{R}^n$, tais como normas, conjuntos abertos, fechados e compactos, limites, continuidade, derivabilidade e diferenciabilidade de funções de que vão de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Depois de compreendido todos esses conceitos, será estudado o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange numa versão bastante geral, que é o caso das funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, com a finalidade de resolver problemas de otimização.

1.3 JUSTIFICATIVA

A otimização é usada em muitos campos da ciência, indústria, comércio entre outras atividades. Por exemplo, pode-se utilizá-la para encurtar um caminho para ganhar tempo, economizar para comprar algo, tomar decisão com base em investimentos, etc. Logo, este trabalho pode culminar na solução de problemas de grande importância para a sociedade acadêmica, ou para a sociedade civil da região de Cornélio Procópio, caso se opte por resolver problemas a ela relacionados.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido da seguinte maneira: o Capítulo 1 descreve os elementos da introdução, o Capítulo 2 aborda os conteúdos de métricas e normas, o Capítulo 3 descreve a topologia de espaços vetoriais normados, o Capítulo 4 aborda os limites e continuidade de funções, o Capítulo 5 descreve a teoria de funções diferenciáveis, e na sequência, é apresentado o Capítulo 6, que enuncia e demonstra o teorema dos multiplicadores de Lagrange, e o capítulo 7 apresenta uma aplicação desse teorema na ciência de foguetes, e finalmente, o Capítulo 8 aborda a Conclusão e após isso são apresentadas as Referências usadas neste trabalho.

2 MÉTRICAS E NORMAS

Todos as definições e resultados aqui apresentados, seguem a mesma linha de raciocínio que a apresentada por Cipolatti (2002). Para medir distâncias entre pontos de um dado conjunto A, devemos considerar uma função que a cada dois elementos x e y de A associe um número real positivo, denominado distância de x a y. Tal função deve satisfazer as propriedades usuais da distância euclidiana definidas para pontos do plano. Denominamos Métricas as funções que permitem "medir distâncias" entre pontos de um dado conjunto A. Mais precisamente,

Definição 2.1 *Seja X um dado conjunto. Uma métrica em X é qualquer função $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes propriedades:*

i) $d\,(x, y) \geq 0, \;\; \forall x, y \in X;$

ii) $d\,(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y;$

iii) $d\,(x, y) = d\,(y, x)\,, \;\; \forall x, y \in X$

iv) $d\,(x, y) \leq d\,(x, z) + d\,(z, y)\,, \;\; \forall x, y, z \in X.$

Definição 2.2 *Seja X um espaço vetorial. Uma norma em X é qualquer função $\| \;\; \|$ que satisfaça as seguintes propriedades:*

i) $\|x\| \geq 0, \;\; \forall x \in X;$

ii) $\|x\| = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = 0;$

iii) $\|\lambda x\| = |\,\lambda\,| \cdot \|x\|, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } \forall x \in X;$

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \;\; \forall x, y \in X.$

O conceito de métrica é subsidiário para definirmos o conceito de norma, e o de norma é um conceito fundamental para se entender toda a análise no $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.1 *Se $\| \;\; \|$ é uma norma em X, então para todo $x, y \in X$ temos,*

$$|\; \|x\| - \|y\| \;| \leq \|x + y\| \text{ e } |\; \|x\| - \|y\| \;| \leq \|x - y\|.$$

Demonstração: Da desigualdade triangular, $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x + y\| + \| - y\| = \|x + y\| + \|y\|$, logo

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|. \tag{1}$$

Analogamente, $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x + y\| + \| - x\| = \|x + y\| + \|x\|$, logo,

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|. \tag{2}$$

As desigualdades (1) e (2) nos fornecem a primeira conclusão:

$$|\; \|x\| - \|y\| \;| \leq \|x + y\|. \tag{3}$$

Da desigualdade triangular segue que $\|x\| = \|x + -y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, logo

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|. \tag{4}$$

Analogamente, $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \| - x + y\| + \|x\| = \| - (x - y)\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|$, logo,

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|. \tag{5}$$

Das desigualdades (4) e (5), segue a segunda conclusão:

$$| \ \|x\| - \|y\| \ | \leq \|x - y\|. \tag{6}$$

Por (3) e (6) concluímos o resultado.

Definição 2.3 *Seja X um espaço vetorial e* $\| \ \|_*, \| \ \|_{**}$ *duas normas definidas em X. Dizemos que estas normas são equivalentes se:*

$$\exists a, b > 0 \ \ tais \ que \ \ a\|x\|_* \leq \|x\|_{**} \leq b\|x\|_*, \, \forall x \in X.$$

2.1 NORMAS EM $\mathbb{R}^n$

Sabe-se que o conjunto $\mathbb{R}^n$ munido das operações de soma e produto por escalar é um espaço vetorial de dimensão *n*. Se $x = (x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n) \in \mathbb{R}^n$, as expressões abaixo definem normas equivalentes em $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = | x_1 | + | x_2 | + \ldots + | x_n |,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{| x_1 |^2 + | x_2 |^2 + \ldots + | x_n |^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max\{| x_1 |, \ | x_2 |, \ \ldots, \ | x_n |\}.$$

O principal objetivo desta seção é mostrar que, se $1 \leq p < +\infty$, então a expressão $\|x\|_p = (| \ x_1 \ |^p + | \ x_2 \ |^p + \ldots + | \ x_n \ |^p)^{1/p}$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$. A demonstração deste fato faz uso da *Desigualdade de Young* e de suas consequências, que serão enunciadas e demonstradas a seguir.

Lema 2.2 (Desigualdade de Young) *Sejam* p *e* q *tais que* $1 < p, q < +\infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então, para todo* $x, y \in \mathbb{R}$, *vale a desigualdade*

$$| \, xy \, | \leq \frac{| \, x \, |^p}{p} + \frac{| \, y \, |^q}{q}.$$

Demonstração: A função real $t \mapsto \ln t$ é côncava e crescente. Portanto, para todo α e β positivos,

$$\ln(\lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta) \geq \lambda \ln \alpha + (1 - \lambda) \ln \beta, \quad \forall \lambda \in]0, 1[.$$

Considerando $\lambda = \dfrac{1}{p}$, temos $(1 - \lambda) = \dfrac{1}{q}$, e assim,

$$\ln\left(\frac{1}{p}\alpha + \frac{1}{q}\beta\right) \geq \ \frac{1}{p} \ln{(\alpha)} + \frac{1}{q} \ln{(\beta)} \ = \ \ln\left(\alpha^{1/p}\beta^{1/q}\right). \tag{7}$$

Considerando $|\,x\,|^p = \alpha$ e $|\,y\,|^q = \beta$, em (7) temos

$$\ln\left(\frac{1}{p}\,|\,x\,|^p + \frac{1}{q}\,|\,y\,|^q\right) \geq \ln\left((|\,x\,|^p)^{\frac{1}{p}}\,(|\,y\,|^q)^{\frac{1}{q}}\right),$$

que implica

$$\ln\left(\frac{|\,x\,|^p}{p} + \frac{|\,y\,|^q}{q}\right) \geq \ln\left(|\,x\,|\cdot|\,y\,|\right) = \ln\left(|\,x\cdot y\,|\right),$$

portanto

$$|\,x\cdot y\,| \leq \frac{|\,x\,|^p}{p} + \frac{|\,y\,|^q}{q}.$$

Definição 2.4 *Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, definimos o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ por*

$$\langle x; y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Como consequência do lema acima, temos a desigualdade de Hölder;

Corolário 2.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam p e q tais que $1 < p, q < +\infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$ Então, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale a desigualdade*

$$|\,\langle x; y\rangle\,| \leq \|x\|_p\,\|y\|_q.$$

Demonstração: Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, obtemos da desigualdade de Young,

$$|\,\langle \lambda x; y\rangle\,| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda\,|\,x_i\,||\,y_i\,| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^p}{p}\,|\,x_i\,|^p + \frac{1}{q}\,|\,y_i\,|^q\right),\ \forall \lambda > 0. \tag{8}$$

Dividindo ambos os lados (8) por λ, obtemos

$$|\,\langle x; y\rangle\,| \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{p-1}}{p}\,|\,x_i\,|^p + \frac{1}{\lambda q}\,|\,y_i\,|^q\right),\ \forall \lambda > 0 \tag{9}$$

Para x e y fixos, o lado direito da desigualdade (9) define uma função na variável $\lambda \in (0, +\infty)$:

$$\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|y\|_q^q.$$

Portanto, decorre de (9) que $|\,\langle x; y\rangle\,| \leq \min\limits_{\lambda > 0}\ \varphi(\lambda)$.

Como φ é contínua e diferenciável em $(0, +\infty)$, e $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\varphi = +\infty$, e $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\varphi = +\infty$, segue que φ possui mínimo.

Como $\varphi(\lambda) = \dfrac{\lambda^{p-1}}{p}\|x\|_p^p + \dfrac{1}{\lambda q}\|y\|_q^q$, derivando e igualando a zero, temos:

$$\varphi'(\lambda) = (p-1)\,\lambda^{(p-2)}\frac{\|x\|_p^p}{p} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\|y\|_q^q}{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad (p-1)\,\frac{\lambda^p}{\lambda^2}\frac{\|x\|_p^p}{p} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\|y\|_q^q}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(p-1)}{p}\lambda^p\|x\|_p^p = \frac{\|y\|_q^q}{q} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{p}{(p-1)\,q}\cdot\frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p^p}\right)^{1/p}, \tag{10}$$

mas de $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ vem: $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{(p-1)}{p} \quad \Rightarrow \quad p = (p-1)\,q,$ logo, em (10) temos:

$$\lambda = \left(\frac{p}{p}\cdot\frac{\|y\|_q^q}{\|x\|_p^p}\right)^{1/p} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\left(\|y\|_q^q\right)^{1/p}}{\|x\|_p} = \frac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p}.$$

Como o único ponto crítico de φ é $\lambda_0 = \dfrac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p}$, segue que esse é o ponto de mínimo. Para calcular o mínimo, fazemos:

$$\varphi(\lambda_0) = \varphi\left(\frac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p}\right) = \left(\frac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p}\right)^{p-1}\cdot\frac{1}{p}\cdot\|x\|_p^p + \frac{1}{\left(\dfrac{\|y\|_q^{q/p}}{\|x\|_p}\right)\cdot q}\|y\|_q^q$$

$$= \|y\|_q^{\frac{q(p-1)}{p}}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^{p-1}} + \frac{\|x\|_p}{\|y\|_q^{q/p}}\cdot\frac{\|y\|_q^q}{q}. \tag{11}$$

Como já visto acima, $p = (p-1)\,q \;\Rightarrow\; \dfrac{(p-1)\,q}{p} = 1,$ assim, em (11) temos:

$$\|y\|_q^1\cdot\frac{1}{p}\cdot\|x\|_p^1 + \frac{\|x\|_p}{q}\cdot\|y\|_q^{q-q/p} \tag{12}$$

mas de $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,$ temos: $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{p} = \dfrac{q-1}{q} \quad \Rightarrow \quad 1 = \left(\dfrac{q-1}{q}\right)p \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{1}{\left(\dfrac{q-1}{q}\right)} \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{q}{q-1},$ logo em (12) temos:

$$\frac{1}{p}\,\|y\|_q\,\|x\|_p + \frac{1}{q}\,\|x\|_p\,\|y\|_q^{\,q - \frac{q}{\left(\frac{q}{q-1}\right)}} = \frac{1}{p}\,\|y\|_q\,\|x\|_p + \frac{1}{q}\,\|x\|_p\,\|y\|_q^{\,q-(q-1)}$$

$$= \frac{1}{p}\,\|y\|_q\,\|x\|_p + \frac{1}{q}\,\|x\|_p\,\|y\|_q^1 = \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\|x\|_p\,\|y\|_q = 1\cdot\|x\|_p\,\|y\|_q,$$

concluímos assim, que $|\langle x;y\rangle| \leq \|x\|_p\,\|y\|_q$.

Observação 2.1 *A desigualdade de Hölder no caso $p = 2$ é denominada Desigualdade de Schwarz.*

Agora, vamos enunciar e demonstrar o teorema que foi referido como principal objetivo desta seção, no início desta.

Teorema 2.1 *Se $1 \leq p < +\infty$, então $\|x\|_p = (|\,x_1\,|^p + |\,x_2\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p)^{1/p}$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Para demonstrar este resultado, provaremos que valem as quatro condições da definição de norma. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

i) Queremos provar que $\|x\|_p \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

   Por definição, $\|x\|_p = \sqrt[p]{|\,x_1\,|^p + |\,x_2\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p}$, mas como $|\,x_i\,| \geq 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ e $1 \leq p < +\infty$, temos que $|\,x_1\,|^p + |\,x_2\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p \geq 0$, e portanto $\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |\,x_i\,|^p} \geq 0$, logo $\|x\|_p \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) Primeiramente, vamos provar que $\|x\|_p = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$:
   Por contra positiva, suponhamos que $x \neq 0$, então $x_r \neq 0$ para algum $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, assim, teremos

$$0 \neq \sqrt[p]{|\,x_r\,|^p} \leq \sqrt[p]{|\,x_1\,|^p + \ldots + |\,x_r\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p} = \|x\|_p$$

   ou seja, $\|x\|_p \neq 0$.
   Agora, vamos provar que $x = 0 \;\Rightarrow\; \|x\|_p = 0$.
   Suponhamos então que $x = 0$, logo $x_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Temos:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|\,0\,|^p + |\,0\,|^p + \ldots + |\,0\,|^p} = \sqrt[p]{0} = 0.$$

iii) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

$$\|\lambda x\|_p = \sqrt[p]{|\,\lambda x_1\,|^p + |\,\lambda x_2\,|^p + \ldots + |\,\lambda x_n\,|^p} = \sqrt[p]{(|\,\lambda\,| \cdot |\,x_1\,|)^p + \ldots + (|\,\lambda\,| \cdot |\,x_n\,|)^p}$$

$$= \sqrt[p]{|\,\lambda\,|^p \cdot |\,x_1\,|^p + \ldots + |\,\lambda\,|^p \cdot |\,x_n\,|^p} = \sqrt[p]{|\,\lambda\,|^p \,(|\,x_1\,|^p + |\,x_2\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p)}$$

$$= |\,\lambda\,| \cdot \sqrt[p]{|\,x_1\,|^p + |\,x_2\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p} = |\,\lambda\,| \cdot \|x\|_p\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

iv) Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, temos da definição:

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |\,x_i + y_i\,|^p = |\,x_1 + y_1\,|^p + \ldots + |\,x_n + y_n\,|^p$$

$$= |\,x_1 + y_1\,|^{p-1} \cdot |\,x_1 + y_1\,| + \ldots + |\,x_n + y_n\,|^{p-1} \cdot |\,x_n + y_n\,|$$

$$\leq |\,x_1 + y_1\,|^{p-1} \cdot (|\,x_1\,| + |\,y_1\,|) + \ldots + |\,x_n + y_n\,|^{p-1} \cdot (|\,x_n\,| + |\,y_n\,|)$$

$$= |\,x_1\,| \cdot |\,x_1{+}y_1\,|^{p-1} + |\,y_1\,| \cdot |\,x_1{+}y_1\,|^{p-1} + \ldots + |\,x_n\,| \cdot |\,x_n{+}y_n\,|^{p-1} + |\,y_n\,| \cdot |\,x_n{+}y_n\,|^{p-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\,x_i\,| \cdot |\,x_i + y_i\,|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |\,y_i\,| \cdot |\,x_i + y_i\,|^{p-1}\,.$$

Considerando os vetores $a = (|\,x_1\,|, \ldots, |\,x_n\,|)$, $b = (|\,y_1\,|, \ldots, |\,y_n\,|)$ e $c = (|\,x_1 + y_1\,|^{p-1}, \ldots, |\,x_n + y_n\,|^{p-1})$, podemos expressar a desigualdade acima como

$$\|x + y\|_p^p \;\leq\; \langle a; c\rangle + \langle b; c\rangle\,. \tag{13}$$

Decorre então do corolário 1.1 (desigualdade de Hölder), que

$$\|x + y\|_p^p \;\leq\; \langle a; c\rangle + \langle b; c\rangle \;\leq\; \|a\|_p \cdot \|c\|_q + \|b\|_p \cdot \|c\|_q.$$

Observemos que $\|a\|_p = \sqrt[p]{|\,x_1\,|^p + \ldots + |\,x_n\,|^p} = \|x\|_p$, $\|b\|_p = \sqrt[p]{|\,y_1\,|^p + \ldots + |\,y_n\,|^p} = \|y\|_p$.

Além disso,

$$\|c\|_q = \sqrt[q]{(|\,x_1 + y_1\,|^{p-1})^q + \ldots + (|\,x_n + y_n\,|^{p-1})^q}. \tag{14}$$

Temos ainda:

$$\frac{1}{q} \;=\; \frac{1}{q} \cdot \frac{p}{p} \;=\; \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q}, \tag{15}$$

e de $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, vem $\dfrac{1}{q} = \dfrac{(p-1)}{p}$

$$\Rightarrow \quad p = (p-1)\,q \tag{16}$$

e

$$\frac{p}{q} = (p-1)\,. \tag{17}$$

Usando (15) e (16) em (14) temos:

$$\|c\|_q = \left(\sqrt[p]{|\,x_1 + y_1\,|^p + \ldots + |\,x_n + y_n\,|^p}\right)^{p/q} = \|c\|_p^{p/q},$$

e usando (17) fica: $\|c\|_p^{p/q} = \|c\|_p^{p-1}$.

Em (13) obtemos:

$$\|x + y\|_p^p \;\leq\; \|x\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \ \|x+y\|_p^p \ \leq \ (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x+y\|_p^{p-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\|x+y\|_p^p}{\|x+y\|_p^{p-1}} \ \leq \ \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$\Rightarrow \ \|x+y\|_p^{p-(p-1)} \ \leq \ \|x\|_p + \|y\|_p \quad \Rightarrow \quad \|x+y\|_p \ \leq \ \|x\|_p + \|y\|_p.$$

2.1.1 Espaços Vetoriais de Polinômios

Seja $V = \mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios de coeficientes reais, de grau menor ou igual a n, munido das operações usuais de soma de polinômios e multiplicação por escalar. Então V é espaço vetorial de dimensão $n+1$.

As expressões abaixo definem normas equivalentes em V:

Se $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$,

$$\|P\|_p = \left(\sum_{i=0}^{n} |\, a_i\, |^p \right)^{1/p}, \ \ p \in [1, +\infty)\,,$$

ou seja,

$$\|P\|_p = \sqrt[p]{|\, a_0\,|^p + |\, a_1\,|^p + |\, a_2\,|^p + \ldots + |\, a_n\,|^p +}, \ \ p \in [1, +\infty)\,.$$

e

$$\|P\|_\infty \ = \ \max\{|\, a_i\,|; \ i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Os exemplos a seguir ilustram o cálculo da norma de polinômios.

Exemplo 1: Seja $P_1(x) \in \mathcal{P}_{10}$, tal que $P_1(x) = 7x^6 - 9x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 10x + 2$, então,

$$\|P_1\|_2 = \sqrt[2]{|\,7\,|^2 + |\,-9\,|^2 + |\,4\,|^2 + |\,5\,|^2 + |\,-2\,|^2 + |\,10\,|^2 + |\,2\,|^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + 9^2 + 4^2 + 5^2 + 2^2 + 10^2 + 2^2} = \sqrt{49 + 81 + 16 + 25 + 4 + 100 + 4} = \sqrt{279} \simeq 16,7.$$

Temos ainda,

$$\|P_1\|_\infty \ = \ \max\{|\,7\,|, |\,-9\,|, |\,4\,|, |\,5\,|, |\,-2\,|, |\,10\,|, |\,2\,|,\} \ = \ \max\{7, 9, 4, 5, 2, 10, 2\} \ = \ 10.$$

Exemplo 2: Seja $P_2(x) \in \mathcal{P}_5$, tal que $P_2(x) = 3x^5 - 5x^2 + 3$, então,

$$\|P_2\|_8 = \sqrt[8]{|\,3\,|^8 + |\,0\,|^8 + |\,0\,|^8 + |\,-5\,|^8 + |\,0\,|^8 + |\,3\,|^8} = \sqrt[8]{2 \cdot 3^8 + 5^8} \simeq 5,02,$$

e

$$\|P_2\|_\infty = \max\{|3|, |0|, |-5|,\} = \max\{0, 3, 5\} = 5.$$

2.1.2 Espaços Vetoriais de Matrizes

Seja $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com coeficientes reais, munido das operações usuais de soma de matrizes e multiplicação por escalar. Então V é espaço vetorial de dimensão $m \cdot n$.

As expressões abaixo definem normas equivalentes em V: se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

então

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, +\infty),$$

e

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{ij}|;\ i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Os exemplos a seguir ilustram o cálculo da norma de matrizes.

Exemplo 1: Seja $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que

$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

então,

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt[2]{|5|^2 + |1|^2 + |3|^2 + |6|^2} = \sqrt[2]{25 + 1 + 9 + 36} = \sqrt{81} = 9,$$

e

$$\|A\|_\infty = \max\{|5|, |1|, |3|, |6|\} = \max\{5, 1, 3, 6\} = 6.$$

Exemplo 2: Seja $B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, dada por

$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 9 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$,

então,

$$\|B\|_3 = \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}|^3 \right)^{1/3} = \sqrt[3]{|a_{11}|^3 + |a_{12}|^3 + |a_{21}|^3 + |a_{22}|^3 + |a_{31}|^3 + |a_{32}|^3}$$

$$= \sqrt[3]{|2|^3 + |-3|^3 + |9|^3 + |5|^3 + |6|^3 + |-3|^3 +} = \sqrt[3]{2^3 + 3^3 + 9^3 + 5^3 + 6^3 + 3^3}$$

$$= \sqrt[3]{8 + 27 + 729 + 125 + 216 + 27} = \sqrt[3]{1132} \simeq 10,42,$$

temos ainda que

$$\|B\|_\infty = \max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|, |a_{31}|, |a_{32}|,\}$$

$$= \max\{|2|, |-3|, |9|, |5|, |6|, |-3|,\} = \max\{2, 3, 5, 6, 9\} = 9.$$

Pode-se facilmente perceber, que as definições das normas $\| \ \|_p$, com $p \in [1, +\infty)$, definidas no $\mathbb{R}^n$, nos espaços vetoriais de polinômios, e nos espaços vetoriais de matrizes, são bem parecidas. Isso nos conduz à ideia de construir normas em espaços vetoriais de dimensão n, a partir de normas conhecidas em $\mathbb{R}^n$. De fato, considerando o exemplo dos polinômios, se $T : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é a aplicação definida por $T(P) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, onde $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, então T é injetora, pois se $P \neq Q$, então $T(P) \neq T(Q)$; além disso, T é sobrejetora, pois todo elemento de $\mathbb{R}^{n+1}$ é da forma $(a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n)$, ou seja, $T(\mathcal{P}_n) = \mathbb{R}^{n+1}$, logo T é um isomorfismo, isto é, uma aplicação bijetora que preserva as estruturas algébricas (estruturas de espaços vetoriais) de $\mathcal{P}_n$ e $\mathbb{R}^{n+1}$. Além disso, é possível verificar que

$$\|P\|_p = \|T(P)\|_p, \quad \forall P \in \mathcal{P}_n$$

onde $\| \ \|_p$ representa, respectivamente, norma em $\mathcal{P}_n$ e $\mathbb{R}^{n+1}$. Este exemplo será generalizado no seguinte resultado.

Teorema 2.2 *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n, e $T : V \to W$ um isomorfismo. Se $\| \ \|_W$ é norma em W, então a expressão*

$$\|v\|_V = \|T(v)\|_W \tag{18}$$

define uma norma em V. Além disso, se $\| \ \|_\alpha$ e $\| \ \|_\beta$ são normas equivalentes em W, então as normas de V definidas pela relação (18) são normas equivalentes em V.

Demonstração: Para provar a primeira afirmação, precisamos mostrar que são válidas as quatro condições da definição de norma, nas condições da igualdade (18).

i) Como $\| \ \|_W$ é norma em W, então $\|T(v)\|_W \geq 0, \quad \forall v \in V$, mas $\|T(v)\|_W = \|v\|_V$, logo $\|v\|_V \geq 0, \quad \forall v \in V$.

ii) Suponha que $\|x\|_V = 0$, então $\|T(x)\|_W = 0$, mas como $\| \ \|_W$ é norma em W, $\|T(x)\|_W = 0 \Rightarrow T(x) = 0$, logo, $x \in \ker(T)$, mas como T é um isomorfismo, T é injetora, logo, por resultado, temos que $\ker(T) = \{0\}$, logo $x = 0$. Ou seja, mostramos que $\|x\|_V = 0 \Rightarrow x = 0$. Agora, suponhamos que $x = 0$, então $\|0\|_V = \|T(0)\|_W$, mas como T é linear, temos que $T(0) = 0$, logo $\|T(0)\|_W = \|0\|_W$, e por $\| \ \|_W$ ser norma em W, $\|0\|_W = 0$, logo $\|0\|_V = 0$, ou seja, mostramos que $x = 0 \Rightarrow \|x\|_V = 0$.

Fica assim provado que $\|x\|_V = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

iii) Sejam $v \in V, \ \lambda \in \mathbb{R}$, então, $\|\lambda v\|_V = \|T(\lambda v)\|_W$. Usando as propriedades de transformações lineares, temos que

$$\|T(\lambda v)\|_W = \|\lambda T(v)\|_W,$$

e usando o fato de que $\| \ \|_W$ é norma em W, obtemos

$$\|\lambda T(v)\|_W = |\lambda| \cdot \|T(v)\|_W = |\lambda| \cdot \|v\|_V,$$

ou seja, $\|\lambda v\|_V = |\lambda| \cdot \|v\|_V$.

iv) Sejam $x, y \in V$, então, $\|x + y\|_V = \|T(x + y)\|_W$, que pelas propriedades das transformações lineares, fica: $\|T(x + y)\|_W = \|T(x) + T(y)\|_W$, e por $\| \ \|_W$ ser norma em W,

$$\|T(x) + T(y)\|_W \leq \|T(x)\|_W + \|T(y)\|_W = \|x\|_V + \|y\|_V,$$

ou seja, $\|x + y\|_V \leq \|x\|_V + \|y\|_V$.

Portanto $\|v\|_V = \|T(v)\|_W$ define uma norma em V.

Sejam agora $\| \ \|_\alpha$ e $\| \ \|_\beta$ normas equivalentes em W. Tomemos $\| \ \|_{\alpha'}$ e $\| \ \|_{\beta'}$ normas de V, definidas por $\|v\|_{\alpha'} = \|T(v)\|_\alpha$ e $\|w\|_{\beta'} = \|T(w)\|_\beta$. Como $\| \ \|_\alpha$ e $\| \ \|_\beta$ são equivalentes,

$$\exists a, b > 0 \ \ tais\ que \ \ a\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq b\|x\|_\alpha, \ \forall x \in W.$$

Em particular, se tomarmos $x = T(v)$, vale

$$a\|T(v)\|_\alpha \leq \|T(v)\|_\beta \leq b\|T(v)\|_\alpha \Rightarrow a\|v\|_{\alpha'} \leq \|v\|_{\beta'} \leq b\|v\|_{\alpha'} \ \forall v \in V,$$

portanto $\| \ \|_{\alpha'}$ e $\| \ \|_{\beta'}$ são normas equivalentes em V.$\square$

Vejamos agora um exemplo de espaço vetorial de dimensão infinita.

2.1.3 Espaços Vetoriais de Funções Contínuas

Seja $V = C([a, b], \mathbb{R})$ o conjunto das funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$, munido das operações usuais de soma de funções e produto por escalar. Então V é espaço vetorial de dimensão infinita.

As expressões abaixo definem normas em V:

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, p \in [1, +\infty)$$

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [a,b]\}.$$

O exemplo a seguir ilustra o cálculo de normas de de funções contínuas.

Exemplo 1: Seja $f \in C([0,2], \mathbb{R})$, dada por $f(x) = -x^2 + 2x,\ x \in [0,2]$, então

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_0^2 |f(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_0^2 |-x^2 + 2x|^2\, dx} \tag{19}$$

mas para $x \in [0,2]$, $f(x) \geq 0$, logo em (19) temos $\sqrt{\int_0^2 (-x^2+2x)^2\, dx}$, mas

$$\left(-x^2 + 2x\right)^2 = \left(-x^2\right)^2 + 2 \cdot \left(-x^2\right) \cdot 2x + (2x)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2,$$

temos então

$$\sqrt{\int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\, dx}. \tag{20}$$

Mas

$$\int_0^2 \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) dx = \int_0^2 x^4 dx - 4\int_0^2 x^3 dx + 4\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 - 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{2^5}{5} - 2^4 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 = \frac{32}{5} - 16 + \frac{32}{3} = \frac{96 - 240 - 160}{15} \simeq 1,06,$$

então em (20) temos $\sqrt{1,06} \simeq 1,03$, ou seja, $\|f\|_2 \simeq 1,03$.

No caso da norma infinito, teremos:

$$\|f\|_\infty = \max\left\{-x^2 + 2x;\ x \in [0,2]\right\}.$$

Para calcular o máximo, fazemos o teste da derivada segunda:

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \to x = 1.$

$f''(x) = -2$, logo em $x = 1$ temos um ponto de máximo, e $f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = 1$ é o valor máximo.

Desse modo $\|f\|_\infty = 1.$

3 TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS NORMADOS

Os conceitos topológicos que são tratados neste capítulo, são fundamentais para o estudo dos limites, da continuidade e da diferenciabilidade de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Neste capítulo, serão introduzidos os conceitos fundamentais, e os principais resultados da Topologia dos Espaços Normados e, em especial, do espaço $\mathbb{R}^n$. As definições e resultados aqui apresentados, seguem a mesma linha de raciocínio que Cipolatti (2002).

Definição 3.1 *Seja V um espaço vetorial, munido de uma norma $\| \quad \|, x_0 \in V$ e $r > 0$. O conjunto*

$$B_r(x_0) = \{x \in V; \|x - x_0\| < r\}$$

é denominado bola aberta de centro em x_0 e raio r.

Agora, com o conceito de bola aberta, é possível introduzir diversos outros conceitos, os quais constituem a base da Topologia.

Definição 3.2 *Seja A um subconjunto de V, e $x_0 \in V$.*

a) Dizemos que x_0 é ponto interior de A, se existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset A$.

b) Dizemos que x_0 é ponto de acumulação de A, se $\forall r > 0$,

$$(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Note que, se x_0 é ponto de acumulação de A, então x_0 pode ser aproximado por pontos de A em alguma "direção". E, se x_0 é ponto interior de A, então x_0 é ponto de acumulação de A, e $x_0 \in A$, e nesse caso, x_0 pode ser aproximado por pontos de A "em qualquer direção".

Definição 3.3 *Se $x_0 \in A$ não pode ser aproximado por pontos de A, dizemos que x_0 é ponto isolado de A. Mais precisamente, x_0 é ponto isolado de A, se existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$.*

Definição 3.4 *O conjunto de todos os pontos interiores de A, é chamado de interior de A, e denotado por $^\circ A$:*

$$^\circ A = \{x \in A; x \text{ é ponto interior de } A\}.$$

Definição 3.5 *Seja V um espaço vetorial, e $A \subset V$. O conjunto dos pontos de acumulação de A, é chamado de derivado de A, e denotado por A':*

$$A' = \{x \in V; x \text{ é ponto de acumulação de } A\}.$$

Observação: Pode-se verificar que $^\circ A \subset A'$, e $A \setminus A'$ é o conjunto dos pontos isolados de A.

De fato, seja $x \in {}^\circ A$, então x é ponto interior de A, logo $\exists r > 0; B_r(x) \subset A$, logo, $\forall r > 0$, $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, portanto x é ponto de acumulação de A, ou seja, $x \in A'$, e assim, $^\circ A \subset A'$.

Além disso, seja $x_0 \in A \setminus A'$, então $x_0 \in A$ e $x_0 \notin A'$, logo x_0 não é ponto de acumulação de A, ou seja,

$$\exists r > 0; (B_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset$$

ou seja, $\exists r > 0; B_r(x_0) \cap A = \{x_0\}$, e assim, x_0 é ponto isolado, concluímos então que $A \setminus A'$ é o conjunto dos pontos isolados de A.

Definição 3.6 *Dizemos que um subconjunto A de V é aberto, se $A = {}^\circ A$, ou seja, todos os seus pontos são pontos interiores.*

Proposição 3.1 *A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A intersecção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos abertos, e $x \in \bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda$. Então existe um índice λ_0 tal que $x \in A_{\lambda_0}$, mas como A_{λ_0} é um conjunto aberto,

$$\exists r > 0; B_r(x) \subset A_{\lambda_0},$$

logo,

$$B_r(x) \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda} A_\lambda$$

assim $\bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Agora, considerando $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$, então $x \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Como A_i é um conjunto aberto, para todo i, existe $r_i > 0$ tal que $B_{r_i}(x) \subset A_i$.

Tomando $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$, então $B_r(x) \subset A_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$, logo $B_r(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$, e assim, $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$ é um conjunto aberto. $\square$

Definição 3.7 *Dizemos que um subconjunto $A \subset V$ é limitado, se existe $r > 0$ tal que $A \subset B_r(x_0)$.*

Definição 3.8 *Dizemos que um subconjunto $A \subset V$ é fechado se A^c é aberto.*

Lema 3.1 *Se $\{A_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma família de conjuntos, então*

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^c \text{ e } \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c.$$

Demonstração: Seja $x \in \left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)^c$, então $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, logo $x \notin A_\alpha, \forall \alpha \in L$, que implica que $x \in A_\alpha^c, \forall \alpha \in L$, logo $x \in \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^c$, e assim $\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)^c \subset \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^c$. Seja agora $x \in \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^c$, então $x \in A_\alpha^c, \forall \alpha \in L$, logo $x \notin A_\alpha, \forall \alpha \in L$, e assim $x \notin \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, logo $x \in \left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)^c$, portanto $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^c \subset \left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)^c$, e assim, $\left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha^c$.

Seja $y \in \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c$, então $y \notin \bigcap_{\alpha} A_\alpha$, logo $y \notin A_\alpha, \forall \alpha \in L$, temos então que $y \in A_\alpha^c, \forall \alpha \in L$, logo $y \in \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c$, e assim, $\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c \subset \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c$. Seja agora $y \in \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c$, então $y \in A_\alpha^c$, para algum $\alpha \in L$, logo $y \notin A_\alpha$, para algum $\alpha \in L$, que implica que $y \notin \bigcap_{\alpha} A_\alpha$, logo $y \in \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c$, portanto $\bigcup_{\alpha} A_\alpha^c \subset \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c$, e deste modo,

$$\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha} A_\alpha^c. \square$$

Proposição 3.2 *A intersecção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado. A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração: Seja $\{F_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família qualquer de conjuntos fechados. Então, pela definição de conjunto fechado, $\{F_\lambda^c\}_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos. No entanto, temos por resultado que a união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto, logo $\bigcup_{\lambda} F_\lambda^c$ é um conjunto aberto, mas pelo lema (3.1), $\bigcup_{\lambda} F_\lambda^c = \left(\bigcap_{\lambda} F_\lambda\right)^c$, logo o complementar de $\left(\bigcap_{\lambda} F_\lambda\right)^c$ é aberto, e assim $\bigcap_{\lambda} F_\lambda$ é um conjunto fechado, ou seja, provamos que a intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Por resultado a intersecção finita de abertos é aberto, então $\bigcap_{i=1}^{m} F_i^c$ é aberto, mas pelo Lema (3.1), $\bigcap_{i=1}^{m} F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^{m} F^i\right)^c$, logo $\left(\bigcup_{i=1}^{m} F^i\right)^c$ é um conjunto aberto, logo $\bigcup_{i=1}^{m} F^i$ é fechado, ou seja, provamos que a união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.$\square$

Definição 3.9 *O conjunto $\bar{A} = A \cup A'$ é denominado aderência ou fecho de A.*

3.1 CONJUNTOS COMPACTOS

Definição 3.10 *Uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de V é denominada cobertura de um dado conjunto B, se*

$$B \subset \bigcup_{\lambda} A_\lambda.$$

Se A_λ é um conjunto aberto, para todo $\lambda \in L$, dizemos que a cobertura é aberta. Se L é um conjunto finito, dizemos que a cobertura é finita.

Definição 3.11 *Um conjunto $K \subset V$ é chamado compacto, se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita, isto é, se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ é uma cobertura aberta de K, então existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que*

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_k}.$$

Proposição 3.3 *Todo conjunto compacto é fechado e limitado.*

Demonstração: Seja K compacto. Provemos inicialmente que K é limitado.

Sejam $B_1(x), x \in K$, bolas abertas de centro em $x \in K$ e raio igual a 1. Então $\{B_1(x)\}_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de k. Logo existem $x_1, \ldots, x_m \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_1(x_i).$$

Seja $\bar{r} := \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_m\|\} + 1$. Afirmamos que $B_{\bar{r}}(0) \supset K$. De fato, seja $x \in K$, então $x \in \bigcup_{i=1}^{m} B_1(x_i)$, logo $x \in B_1(x_i)$, para algum $i = 1, \ldots, m$. Assim,

$$\|x\| = \|x + x_i - x_i\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\|, \tag{1}$$

mas como $x \in B_1(x_i)$, $\|x - x_i\| < 1$, logo, em (1) temos:

$$\|x - x_i\| + \|x_i\| < 1 + \|x_i\|, \tag{2}$$

mas $\|x_i\| \leq \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_m\|\}$, logo em (2) temos

$$1 + \|x_i\| \leq 1 + \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_m\|\} = \bar{r},$$

ou seja, $1 + \|x_i\| \leq \bar{r}$, e assim, $\|x\|, \bar{r}$, logo $x \in B_{\bar{r}}(0)$, portanto $K \subset B_{\bar{r}}(0)$, e assim K é limitado.

Provemos que k é fechado, isto é, que K^c é aberto. Seja $x_0 \in K^c$. Para cada $x \in K$, considere $r_x = \dfrac{1}{2}\|x - x_0\|$. Então $\{B_{r_x}(x)\}_{x\in K}$ é uma cobertura aberta de K. Mas como K é compacto, existem $x_1, \ldots, x_m \in K$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i). \tag{3}$$

Seja $\bar{r} := \min\{r_{x_1}, r_{x_2}, \ldots, r_{x_m}\} > 0$. Afirmamos que $B_{\bar{r}}(x_0) \subset K^c$. De fato, pela definição de $\bar{r}$ temos

$$B_{\bar{r}}(x_0) = \bigcap_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_0). \tag{4}$$

Passando ao complementar em (3), (faça analogia com multiplicar por -1 em ambos os lados de uma inequação, passando ao complementar em ambos os lados, invertendo o sentido da inclusão e da união), obtemos:

$$K^c \supset \bigcup_{i=1}^{m} \left(B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c.$$

Mas, $\bigcap_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{m} \left(B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c$. De fato, pela definição de r_{x_i},

$$B_{r_{x_i}}(x_i) \cap B_{r_{x_i}}(x_0) = \emptyset \tag{5}$$

Seja $y \in \bigcap_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_0)$, então $y \in B_{r_{x_i}}(x_0)$, $\forall i = \ldots, m$.
Logo, por (5), $y \notin B_{r_{x_i}}(x_i)$, $\forall i = \ldots, m$, logo $y \notin \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i)$, e assim $y \in \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c$, mas pelo lema (3.1), $\left(\bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c = \bigcap_{i=1}^{m} \left(B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c$, logo $y \in$

$\bigcap_{i=1}^{m} \left(B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c$, portanto

$$\bigcap_{i=1}^{m} B_{r_{x_i}}(x_0) \subset \bigcap_{i=1}^{m} \left(B_{r_{x_i}}(x_i)\right)^c \subset K^c, \tag{6}$$

mas substituindo $B_{\bar{r}}(x_0)$ de (4) em (6), temos:

$$B_{\bar{r}}(x_0) \subset K^c.$$

Logo K^c é aberto, e assim, K é fechado. $\square$

Proposição 3.4 *Seja $F \subset K \subset V$, com F fechado e K compacto. Então F é compacto.*

Demonstração: Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma cobertura aberta de F. Então, vamos mostrar que $\{G_\alpha \cup F^c\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de K. De fato, como $K \subset V = F \cup F^c$, então, se $x \in K$, temos que $x \in F$ ou $x \in F^c$. No primeiro caso, se $x \in F$, então $x \in \bigcup_\alpha G_\alpha$, logo $x \in \bigcup_\alpha (G_\alpha \cup F^c)$. No segundo caso, se $x \in F^c$, então $x \in \bigcup_\alpha (G_\alpha \cup F^c)$, logo $K \subset \bigcup_\alpha (G_\alpha \cup F^c)$, ou seja, $\{G_\alpha \cup F^c\}_{\alpha \in A}$ é uma cobertura aberta de K. Mas como K é compacto, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} (G_{\alpha_i} \cup F^c) = \left(\bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i}\right) \cup F^c,$$

mas como $F \subset K$, $F \subset (\bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i}) \cup F^c$, logo

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i},$$

portanto F é compacto.$\square$

3.2 CONJUNTOS COMPACTOS DE $\mathbb{R}^n$

Nesta secção, serão enunciados e demonstrados, alguns resultados que visam caracterizar os conjuntos compactos.

Definição 3.12 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b, \ \forall x \in A$. E neste caso, dizemos que b é cota superior de A.*

Definição 3.13 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente se $\exists \ a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x, \ \forall x \in A$. Neste caso, dizemos que a é cota inferior de A.*

Definição 3.14 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número b chama-se o supremo de A, e escreve-se $b = \sup A$ se b for a menor das cotas superiores de A. Mais explicitamente, b é o supremo de A, se cumpre as seguintes condições:*

i) $x \leq b, \ \forall x \in A$;

ii) *Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$, então $b \leq c$.*

Definição 3.15 *Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio. Um número $a \in \mathbb{R}$ é chamado o ínfimo de A, e escreve-se $a = \inf A$ se a é a maior das cotas inferiores de A. Mais explicitamente, a é o ínfimo de A, se a cumpre as seguintes condições:*

i) $a \leq x, \ \ \forall x \in A$;

ii) Se $c \leq x \forall x \in A$ *então* $c \leq a$.

Lema 3.2 (Princípio dos intervalos encaixados:) *Seja* $\{I_k\}$ *uma família de intervalos fechados e limitados de* $\mathbb{R}$, *tais que* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$. *Então*

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset.$$

Demonstração: Se $I_k = [a_k, b_k]$, pela hipótese temos que $I_{k+1} \subset I_k$, temos então que $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_k \ldots \leq b_k \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Chamemos de A o conjunto dos a_k, e B o conjunto dos b_k. Temos que A é limitado, pois a_1 é cota inferior, e b_k é cota superior de $A, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Semelhantemente, B é limitado, pois b_1 é cota superior, e a_k é cota inferior de $B, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Sejam $\alpha = \sup A$ e $\beta = \inf B$. Como b_k é cota superior de $A, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$, temos $\alpha \leq b_k, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Assim, α é cota inferior de B, e portanto, $\alpha \leq \beta$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_k \leq \ldots \alpha \leq \beta \leq \ldots b_k \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1.$$

Concluímos assim que α e β pertencem a todos os I_k, donde $[\alpha, \beta] \subset I_k, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Logo $[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.$\square$

Definição 3.16 *Chama-se paralelepípedo de* $\mathbb{R}^n$ *todo conjunto* P *da forma*

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i].$$

Lema 3.3 *Seja* $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *uma família de paralelepípedos de* $\mathbb{R}^n$ *tais que* $P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_k \ldots$. *Então*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \neq \emptyset.$$

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, $P_k = \prod_{i=1}^{n} [a_{i,k}, b_{i,k}]$. Como $P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_k \ldots$, segue que $I_{i,k} = [a_{i,k}, b_{i,k}]$ satisfaz $I_{i,1} \supset I_{i,2} \supset \ldots \supset I_{i,k} \supset \ldots$ Logo, pelo Princípio dos intervalos encaixados (lema acima),

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_{i,k} \neq \emptyset,$$

logo

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \neq \emptyset.$$

Teorema 3.1 (Bolzano - Weierstrass) *Seja* $A \subset \mathbb{R}^n$ *limitado, contendo uma infinidade de pontos. Então* $A' \neq \emptyset$.

Demonstração: Sendo A limitado, existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \supset A$, onde B_r denota a bola aberta de raio r relativa à norma $\| \quad \|_\infty$. Seja $P_0 = \overline{B_r}(0)$. Então $P_0 \supset A$ e

$$P_0 = \prod_{i=1}^{n} I_{i,0}, \text{ onde } I_{i,0} = [-r, r].$$

Dividindo cada intervalo $I_{i,0}$ no ponto médio, obtemos 2^n bolas fechadas de raio $\frac{r}{2}$. Como A possui infinitos pontos, algumas dessas bolas fechadas contém infinitos pontos de A. Seja

$$P_1 = \prod_{i=1}^{n} [a_{i,1}, b_{i,1}]$$

tal bola.

Novamente, dividindo cada intervalo $[a_{i,1}, b_{i,1}]$ pelo ponto médio, obtemos 2^n bolas fechadas de raio $\frac{r}{4}$. Seja P_2 uma dessas bolas, que contenha infinitos pontos de A.

Repetindo o procedimento acima ad infinitum, obtemos uma família de bolas fechadas $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisfaz

$$P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$$

Pelo Lema (3.3), existe $\bar{x} \in \bigcap_k P_k$. Provemos que $\bar{x} \in A'$.

Dado $\delta > 0$, seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r}{2^{k_0}} < \frac{\delta}{2}$. Como $\bar{x} \in P_k$ para todo k, temos $P_{k_0} \subset B_\delta(\bar{x})$. Como P_{k_0} contém infinitos pontos de A, segue que

$$B_\delta(\bar{x}) \cap (A \setminus \{\bar{x}\}) \neq \emptyset.$$

Teorema 3.2 *Todo paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ é compacto.*

Demonstração: Seja $P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ um paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$ e

$$\delta = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

seu diâmetro.

Suponhamos que $\{G_\alpha\}_{\alpha\in L}$ seja uma cobertura aberta de P que não admite subcobertura finita.

Os pontos médios $c_i = \frac{(a_i + b_i)}{2}$ dos intervalos que compõem P dividem P em 2^n paralelepípedos de diâmetro $\frac{\delta}{2}$. Algum desses 2^n paralelepípedos não pode ser coberto por um número finito de abertos de $\{G_\alpha\}$. Seja P_1 tal paralelepípedo.

Repetindo-se o procedimento acima ad infinitum, construímos uma família $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de paralelepípedos, cada P_k com diâmetro $\frac{\delta}{2^k}$, tais que $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$

Pelo Lema (3.3), $\exists \bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} P_k \subset P$. Portanto, $\exists \alpha_0 \in L$ tal que $\bar{x} \in G_{\alpha_0}$. Como G_{α_0} é aberto, $\exists r > 0$ tal que $B_r(\bar{x}) \subset G_{\alpha_0}$.

Escolhendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\delta}{2^k} < \frac{r}{2}$ tem-se $P_k \subset B_r(\bar{x}) \subset G_{\alpha_0}$, o que é uma contradição, pois P_k não pode ser coberto por uma quantidade finita de conjuntos abertos.

Teorema 3.3 *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é fechado e limitado, então K é compacto.*

Demonstração: Se K é limitado, então existe um paralelepípedo $P \in \mathbb{R}^n$ tal que $K \subset P$. Pelo teorema (3.2) P é compacto, e como por hipótese K é fechado, pela proposição (3.4) K é compacto.

Teorema 3.4 *Seja $\{K_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de compactos $\mathbb{R}^n$ com a propriedade da intersecção finita, isto é, "toda subfamília finita tem intersecção não vazia". Então*

$$\bigcap_{\alpha \in L} K_\alpha \neq \emptyset.$$

Demonstração: Suponhamos que $\bigcap_{\alpha \in L} K_\alpha \neq \emptyset$ e fixe $\alpha_0 \in L$. Afirmação: $\{K_\alpha^c\}_{\alpha \in L}$ é uma cobertura aberta de K_{α_0}.

De fato, se $x \in K_{\alpha_0}$, como $\bigcap_\alpha K_\alpha \neq \emptyset$, então

$$x \in \left(\bigcap_\alpha K_\alpha\right)^c,$$

mas pelo Lema (3.1),

$$\left(\bigcap_\alpha K_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha K_\alpha^c,$$

logo $x \in \bigcup_\alpha K_\alpha^c$, e assim $K_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha K_\alpha^c$, ou seja, $\{K_\alpha^c\}_{\alpha \in L}$ é uma cobertura aberta de K_{α_0}.

Como K_{α_0} é compacto, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$ tais que

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^m K_{\alpha_i}^c,$$

mas pelo Lema (3.1), $\displaystyle\bigcup_{i=1}^m K_{\alpha_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^m K_{\alpha_i}\right)^c$, logo

$$K_{\alpha_0} \subset \left(\bigcap_{i=1}^m K_{\alpha_i}\right)^c,$$

logo $K_{\alpha_0} \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^m K_{\alpha_i}\right) = \emptyset$.

Assim, encontramos uma subfamília finita cuja intersecção é vazia, o que é um absurdo! c. q. d.

Corolário 3.1 *Seja $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, tais que $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ Então*

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}} K_\alpha \neq \emptyset.$$

3.3 SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS VETORIAIS

O estudo das sequências em espaços vetorias, visa estabelecer resultados gerais, que posteriormente, serão especificadas para o espaço $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.17 *Uma sequência de um espaço vetorial V, é uma função $\varphi : \mathbb{N} \to V$, que associa a cada número natural n um elemento de V, denotado por x_n. Em geral, a notação para a sequência φ tal que $\varphi(n) = x_n$ é $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente $\{x_n\}$.*

Definição 3.18 *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de V. Uma subsequência de $\{x_n\}$, é a restrição da função $\varphi(n) = x_n$, a um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$. Neste caso, usa-se a notação $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}_1}$, para denotar a subsequência.*

Definição 3.19 *Seja V um espaço vetorial normado, e $x_0 \in V$. Dizemos que uma sequência $\{x_n\}$ de V converge para x_0, se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| < \varepsilon.$$

Neste caso, dizemos que $\{x_n\}$ é convergente, e denotamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ ou } x_n \to x_0.$$

Proposição 3.5 *Seja $\{x_n\}$ uma sequência de V.*

a) se $\{x_n\}$ converge, então o limite é único.

b) se $\{x_n\}$ converge, então $\{x_n\}$ é limitada.

c) $A \subset V$ e $x_0 \subset A'$ $\Leftrightarrow$ existe uma sequência $\{x_k\}$ de A que converge para x_0.

Demonstração:

a) Suponhamos que $x_n \leftarrow l_1$ e $x_n \leftarrow l_2$, com $l_1 \neq l_2$, e considere $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\|l_1 - l_2\|$. Então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow \|x_n - l_1\| < \varepsilon$$

$$n > n_2 \Rightarrow \|x_n - l_2\| < \varepsilon$$

Se $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então

$$\|l_1 - l_2\| = \|l_1 - l_2 + x_n - x_n\| = \|(x_n - l_2) + (l_1 - x_n)\|$$

$$\leq \|x_n - l_2\| + \|l_1 - x_n\| = \|x_n - l_2\| + \|-(x_n - l_1)\| = \|x_n - l_2\| + \|x_n - l_1\| < \varepsilon + \varepsilon$$

$$= 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{1}{3}\|l_1 - l_2\| = \frac{2}{3}\|l_1 - l_2\|$$

ou seja, $\|l_1 - l_2\| < \dfrac{2}{3}\|l_1 - l_2\|$, absurdo! Logo $l_1 = l_2$.

b) Seja $\{x_n\} \to l$. Então $\exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \;\Rightarrow\; \|x_n - l\| < \varepsilon$.

Tomando $\varepsilon = 1$, temos que se

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - l\| < 1.$$

Tomando $R = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots, \|x_{k_0} + 1\|, \}$. Então $\|x_n - 0\| \le R \Rightarrow x_n \in B_R(0) \Rightarrow \{x_n\} \subset B_R(0)$, logo $\{x_n\}$ é limitada.

c) Seja $x_0 \in A'$. Então, $\forall\; r > 0$, $(B_r(0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq 0$. Em particular, para $r = 1$, existe

$$x_1 \in A; 0 < \|x_1 - x_0\| < 1.$$

Analogamente, para $r = \dfrac{1}{2}$, existe

$$x_2 \in A; 0 < \|x_2 - x_0\| < \frac{1}{2},$$

Para $r = \dfrac{1}{3}$, repete-se o procedimento, etc. A sequência assim construída tem todos os elementos de A, e converge para x_0.

Reciprocamente, se existe uma sequência $\{x_n\}$ de elementos de A que converge para x_0, com $x_k \neq x_0$ para todo K, então, dado $r > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \|x_{k_0} - x_0\| < r$, logo

$$x_{k_0} \in A \cap (B_r(x_0) \setminus \{x_0\}).$$

Logo $x_0 \in A$. c. q. d.

Corolário 3.2 *Seja $A \subset V$ um conjunto fechado e $\{x_n\}$ uma sequência de elementos de A. Se $\{x_n\} \to x_0$ então $x_0 \in A$.*

Demonstração: Pela recíproca da parte c) da proposição anterior, se $x_n \to x_0$, então $x_0 \in A'$, mas como A é fechado, $A = A' \cup A$, logo $x \in A$.

Teorema 3.5 *Seja V um espaço vetorial normado e $K \subset V$. Então K é compacto se, e somente se, toda sequência $\{x_n\}_n$ de K possui subsequência $\{x_{n_i}\}_i$ tal que $x_{n_i} \to \bar{x} \in K$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $\{x_n\} \in K$ possui subsequência convergente, e $\{x_{n_i}\}_i \to x_0$, temos que $x_0 \in K'$, mas como K é fechado, $K' \subset K$, e assim, $x_0 \in K$.

Suponhamos então que existe alguma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que não possui subsequência convergente, e considere $B = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, \}$. Então, como $x_i, i = 1, \ldots, n$ é um ponto isolado, temos que $B' = \emptyset$, logo ${}^\circ B = \emptyset$, e portanto B é fechado. Além disso, como x_n é ponto isolado de B, para todo n, temos que, para cada

$$n \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon_n > 0; B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap B = \{x_n\}.$$

Logo $\{B_{\varepsilon_n}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de B que não admite subcobertura finita, pois cada $B_{\varepsilon_i}(x_i)$ cobre apenas um elemento de B, mas como B é fechado e $B \subset F$, pela Proposição (3.4), B é compacto, então temos uma contradição.

($\Leftarrow$) Suponhamos que existe $\{A_\alpha\}_{\alpha\in L}$ uma cobertura aberta de K que não admite subcobertura finita. Para cada $x \in K$, seja

$$\delta(x) = \sup\{\delta > 0, B_\delta(x) > 0, B_\delta(x) \subset A_\alpha, \text{para algum } \alpha \in L\}.$$

Então $\delta(x) > 0, \forall x \in K$. Seja

$$\delta_0 = \inf\{\delta(x); x \in K\}.$$

Se provarmos que $\delta_0 > 0$, podemos construir uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em K que não possui subsequência convergente. De fato, segue da definição que existe uma sequência $\{x_n\}$ em K tal que $\delta(x_n) \to \delta_0$. Por hipótese, existe uma subsequência $\{x_{n_i}\}$ que converge para algum ponto $x_0 \in K$. Seja

$$\varepsilon_0 = \frac{\delta(x_0)}{2} > 0.$$

Logo, para algum $\alpha \in A$,

$$B_{\varepsilon_0}(x_{n_i}) \subset B_{\delta(x_0)}(x_0) \subset A_\alpha.$$

Portanto, $\delta(x_{n_i}) \geq \varepsilon_0 > 0, \forall i \geq i_0$, logo $\delta_0 > 0$. c. q. d.

3.4 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

As sequências de Cauchy, são o aporte teórico para se definir os espaços de Banach, que serão tratados no final desta seção.

Definição 3.20 *Uma sequência $\{x_k\}$ de V é dita sequência de Cauchy se,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}; k, l > k_0 \Rightarrow \|x_k - x_l\|_V < \varepsilon.$$

Lema 3.4 *Se $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em V, então $\{x_k\}$ é limitada em V.*

Demonstração: Seja $\varepsilon = 1$. Então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se

$$k > k_0 \text{ então } \|x_k - x_{k_0}\|_V < 1,$$

mas $\|x_k - x_{k_0}\|_V \leq \|x_k\|_V - \|x_{k_0}\|_V < 1 \Rightarrow \|x_k\|_V < 1 + \|x_{k_0}\|_V, \forall k > k_0$.

Assim, se $M = 1 + \max\{\|x_1\|_V, \|x_2\|_V, \ldots, \|x_{k_0-1}\|_V, \|x_{k_0}\|_V\}$, então $\|x_k\|_V \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$. Logo $\{x_k\}$ é limitada.

Teorema 3.6 *Toda sequência convergente de um espaço vetorial normado é sequência de Cauchy.*

Demonstração: Seja $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, então

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; m > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_{n_0}\|_V < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo $m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\|_V = \|x_m - x_n - x_{n_0} + x_{n_0}\|_V$

$$\leq \|x_m - x_{n_0}\|_V + \|-(x_n - x_{n_0})\|_V = \|x_m - x_{n_0}\|_V + \|x_n - x_{n_0}\|_V < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, se $m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\|_V < \varepsilon$, logo $\{x_n\}$ é sequência de Cauchy.

Neste teorema foi mostrado que se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de V, com V espaço vetorial normado, então $\{x_n\}$ é de Cauchy, no entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira. Os casos em que a recíproca é verdadeira, serão tratados de uma maneira diferente, conforme as próximas definições e resultados.

Definição 3.21 *Seja V um espaço vetorial normado, se toda sequência de Cauchy de V é convergente, então V é chamado de espaço de Banach.*

3.5 SEQUÊNCIAS EM $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, estudando as sequências em $\mathbb{R}^n$, mostraremos que $\mathbb{R}^n$ é espaço de Banach.

Aqui, denotaremos por $\|\ \|$ uma norma qualquer de $\mathbb{R}^n$.

Se $\{x_k\}_k$, onde $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, \ldots, x_{n,k})$, é uma sequência de $\mathbb{R}^n$ que converge para $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n,0})$, então existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(k) = x_k$. Segue da definição (3.17) que $\{x_{j,k}\}_k$ é sequência de números reais que converge para $x_{j,0}$.

Simplificando, isso significa que se $\{x_k\}_k$, onde $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k})$ é uma sequência de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^n$ que converge para $x_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$, então decorre da definição (3.17), que a sequência formada pelos i-ésimos termos de cada um dos termos de $\{x_k\}_k$ tende para o i-ésimo termo do limite $x_0 = (x_{1,0}, \ldots, x_{n,0})$, ou seja, $\{x_{i,k}\}_k$ tende para $x_{i,0}$.

Proposição 3.6 *Toda sequência limitada de $\mathbb{R}^n$ possui subsequência convergente.*

Demonstração: Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ uma sequência de $\mathbb{R}^n$. Seja A o conjunto dos elementos de φ, ou seja, $A = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n), \ldots\}$.

Se A é finito, então existe uma infinidade de números naturais $k_1 < k_2 < \ldots$ para os quais $\varphi(k_1) = \varphi(k_2) = \ldots$, logo existe uma subsequência constante de φ que é convergente, pois sequências constantes são convergentes.

Se A é infinito, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $A' \neq \emptyset$, logo, pelo item c da Proposição (3.5), se $x_0 \in A'$, então existe sequência $\{x_k\}$ de A que converge para x_0, com $x_k \neq x_0, \forall k$. Logo, neste caso, existe subsequência convergente de φ.

Teorema 3.7 *$\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $\{x_k\}_k$ uma sequência de Cauchy de $\mathbb{R}^n$. Então, pelo Lema (3.4), $\{x_k\}$ é limitada, logo pela Proposição (3.6), $\{x_k\}_k$ possui $\{x_{k_i}\}_i$ que converge para $\bar{x} \in \mathbb{R}_n$. Assim

$$\forall\varepsilon > 0, \exists i_0 \in \mathbb{N}; i > i_0 \Rightarrow \|x_{k_i} - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Como a sequência é de Cauchy,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}; k, l \geq k_0 \Rightarrow \|x_k - x_l\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Seja $k_1 = \max\{k_0, k_{i_0}\}$. Se $k \geq k_1$, então

$$\|x_k - \bar{x}\| = \|x_k - x_{k_{i_0}}\| + \|x_{k_{i_0}} - \bar{x}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{9}$$

ou seja, $\|x_k - \bar{x}\| < \varepsilon$, logo $\{x_k\}_k$ tente a $\bar{x}$.

Teorema 3.8 *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$. Então as afirmativas abaixo são equivalentes:*

a) K *é compacto;*

b) K *é fechado e limitado;*

c) Toda sequência de K *possui subsequência que converge para um ponto de* K.

Demonstração: $a) \Rightarrow b)$: está provado pela Proposição 3.3.
$b) \Rightarrow a)$: está provado pelo Teorema 3.3.
$a) \Leftrightarrow c)$: está provado pelo Teorema 3.5.

Como $b) \Rightarrow a)$, e $a) \Rightarrow c)$, então por transitividade, $b) \Rightarrow c)$, e o resultado fica provado.

4 LIMITES E CONTINUIDADE

As definições e resultados enunciados, seguem a mesma linha de raciocínio de a apresentada em Cipolatti (2002).

Iniciaremos o estudo de limites e continuidade de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Denotaremos as normas euclidianas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ ($\| \ \|_2$) apenas por $\| \ \|$ indistintamente.

Definição 4.1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A'$ e $b \in \mathbb{R}^n$.*
Se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \quad \text{e} \ \ 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$$

(relativamente às normas euclidianas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$), então dizemos que b é o limite de $f(x)$, quando x se aproxima de x_0, e denotamos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

Observação 4.1 *A definição de limite pode também ser expressa em notação de bolas:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \cap (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b).$$

Ou ainda,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; f(A \cap (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})) \subset B_\varepsilon(b).$$

Este teorema relaciona o limite da função f, com limite das suas componentes.

Teorema 4.1 *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ onde $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\forall i = 1, \ldots, m$, $x_0 \in A'$, $b \in \mathbb{R}^m$, com $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f_i = b_i, \ \forall i = 1, \ldots, m.$$

Demonstração: Suponhamos $\lim\limits_{x \to x_0} f_i(x) = b_i$, e seja $\varepsilon > 0$. Então existem $\delta_1, \ldots, \delta_m > 0$ tais que $x \in A$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta_i \Rightarrow | f_i(x) - b_i | < \frac{\varepsilon}{m}$. $Se \{e_1, \ldots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$, então considerando-se $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, temos: para $x \in A, \ 0 < \|x - x_0\| < \delta :$

$$\|f(x) - b\| = \| (f_1(x), \ldots, f_m(x)) - (b_1, \ldots, b_m) \| = \| (f_1(x) - b_1, \ldots, f_m(x) - b_m) \|.$$

Agora escrevemos o vetor m-dimensional $f(x) - b$, como combinação linear dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^m$:

$$\| (f_1(x) - b_1) e_1 + \ldots + (f_m(x) - b_m) e_m \| \leq | f_1(x) - b_1 | \cdot \|e_1\| + \ldots + | f_m(x) - b_m | \cdot \|e_m\|$$

=

$$| f_1(x) - b_1 | + \ldots + | f_m(x) - b_m | < \frac{\varepsilon}{m} + \ldots + \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon,$$

ou seja, $\|f(x)-b\|<\varepsilon$, e assim $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$

Reciprocamente, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, para $\varepsilon>0$ dado, existe $\delta>0$ tal que se $x\in A$ e $0<\|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|f(x)-b\|<\varepsilon$.
Como $\mid f_i(x)-b_i\mid \leq \|f(x)-b\|<\varepsilon,\ \ \forall i=1,\ldots,m$, logo $\mid f_i(x)-b_i \mid<\varepsilon,\ \ \forall i=1,\ldots,m$, portanto $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)=b_i,\ \forall i=1,\ldots,m.\square$

O próximo Teorema faz relação entre limites de sequências e limites de funções.

Teorema 4.2 *Seja $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $x_0\in A'$. Então, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A$ tal que $x_k\neq x_0,\ \forall k\in\mathbb{N}$, tem-se $x_k\to x_0\Rightarrow f(x_k)\to b$.*

Demonstração: Suponha que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$. Suponha ainda que $\forall\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A$ tal que $x_k\neq x_0,\ \forall k\in\mathbb{N}$, tem-se $x_k\to x_0$. Então

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0; x\in A \text{ e } 0<\|x_k-x_0\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-b\|<\varepsilon$$

e

$$\forall\varepsilon_2>0,\exists k_0\in\mathbb{N}; k>k_0\Rightarrow\|x_k-x_0\|<\varepsilon_2.$$

Em particular, $\forall\delta>0,\ \exists k_{0\in\mathbb{N}}$; se

$$x\in A, k>k_0\Rightarrow\|x_k-x_0\|<\delta\Rightarrow\|f(x_k)-b\|<\varepsilon$$

ou seja, $f(x_k)\to b$.

Reciprocamente, suponha que $\forall\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset A$ e $x_k\neq x_0,\ \forall k\in\mathbb{N}$ e $x_k\to x_0\Rightarrow (x_k)\to b.\square$

Teorema 4.3 (Operações aritméticas com limites) *Sejam $f,g:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $x_0\in A'$. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x)=c,$$

então,

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=b\pm c\\ \lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=b\cdot c\end{cases}$$

Além disso, se $c\neq 0$, então

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{b}{c}.$$

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.32.

Corolário 4.1 *Sejam $f,g:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e $x_0\in A'$. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x)=c,$$

então

$$\lim_{x\to x_0}\langle f(x);g(x)\rangle=\langle b;c\rangle.$$

Lema 4.1 *Sejam* $\| \ \|_*$ *e* $\| \ \|_{**}$ *respectivamente normas de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *equivalentes às normas euclidianas. Então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

relativamente às normas $\| \ \|_*$ *e* $\| \ \|_{**}$*, se, e somente se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

relativamente às normas euclidianas.

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.33.

4.1 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Iniciaremos esta seção com a definição de função contínua.

Definição 4.2 *Seja* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *e* $x_0 \in A \cap A'$. *Dizemos que* f *é contínua em* x_0 *se* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. *Mais precisamente,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \text{ e } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Pela definição de bolas, dizemos que f *é contínua em* x_0 *se e somente se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in A \cap B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(x_0)),$$

ou ainda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; f(A \cap B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \subset B_\varepsilon(f(x_0)).$$

Observação 4.2 *Os seguintes fatos são decorrências imediatas das propriedades de limites.*

a) Se $f = (f_1, \ldots, f_m)$*, então* f *é função contínua em* x_0*, se e somente se,* $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é contínua em* x_0.

b) Se $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *são contínuas em* x_0*, e além disso, se* $g(x_0) \neq 0$*, então a função* $\frac{f}{g}$ *é contínua em* x_0.

Teorema 4.4 *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *tais que* $f(A) \subset B$. *Se* $x_0 \in A'$, $y_0 \in B \cap B'$,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \text{ e } g \textit{ é contínua em } y_0,$$

então

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(y_0).$$

Demonstração:

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como g é contínua em y_0, existe $\mu > 0$ tal que $y \in B \cap B_\mu(y_0) \Rightarrow g(y) \in B_\varepsilon(g(y_0))$. Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in B_\mu(y_0).$$

Portanto,

$$x \in (B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \Rightarrow y = f(x) \in B_\mu(y_0),$$

e consequentemente

$$g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(y_0)).\square$$

Definição 4.3 *Quando uma função f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos que f é uma função contínua.*

Teorema 4.5 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

a) f é uma função contínua;

b) Se A é aberto em $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(A)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$;

c) Se F é fechado em $\mathbb{R}^m \Rightarrow f^{-1}(F)$ é fechado em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.35.

4.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS E COMPACTOS

Os resultados a seguir são importantes, pois embasam os tópicos dos Mulplicadores de Lagrange.

Teorema 4.6 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Então $f(K)$ é conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$*

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.35.

Corolário 4.2 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ é conjunto compacto, então existem $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in K$ tais que*

$$f(\bar{x}) = \min\{f(x); x \in K\} \text{ e} f(\bar{\bar{x}}) = \max\{f(x); x \in K\}$$

Em outras palavras, f admite pontos de mínimo e de máximo em K.

Demonstração: Pelo Teorema anterior $f(K)$ é compacto de $\mathbb{R}$. Logo e fechado e limitado. Por ser limitado, exitem $\bar{s}, \bar{\bar{s}} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\bar{s} = \sup f(K) < +\infty \text{ e } \bar{\bar{s}} = \inf f(K) > -\infty.$$

Como K é fechado, temos que $\bar{s} \in f(K)$ e $\bar{\bar{s}} \in f(K)$. Portanto, existem $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in K$ tais que

$$\bar{s} = f(\bar{x}) \text{ e } \bar{\bar{s}} = f(\bar{\bar{x}}),$$

ou seja, $f(\bar{x})$ é o mínimo e $f(\bar{\bar{x}})$ é o máximo de $f(K)$.$\square$

O próximo Teorema é consequência dos resultados anteriores.

Teorema 4.7 (Equivalência das normas em $\mathbb{R}^n$) *Todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração: A ideia chave é: se todas as normas são equivalentes à norma 1, então elas são equivalentes entre si. Em outras palavras, se $\| \ \|_*$ é equivalente a $\| \ \|_\star$, e $\| \ \|_\star$ é equivalente à $\| \ \|_\triangle$, então $\| \ \|_*$ é equivalente a $\| \ \|_\triangle$ (transitividade).

Observação 4.3 *Decorre do Teorema (4.7) e do Lema (4.1) que se uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é contínua em relação a determinadas normas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, então f será contínua em relação a quaisquer outras normas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.*

4.3 FUNÇÕES CONTÍNUAS E CONJUNTOS CONEXOS

Relembrando dos conceitos e resultados da Análise Real, de acordo com (LIMA, 2006) sabe-se que o Teorema do Valor Intermediário, diz que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < 0 < f(b)$ ou $f(a) > 0 > f(b)$, então $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = 0$, ou seja, f possui uma raíz em $[a, b]$.

O Teorema do Valor Intermediário, se generaliza para o caso vetorial, utilizando-se o conceito de conjunto conexo.

Definição 4.4 *Um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo, se $\forall A_1, A_2$ abertos tais que*

$$B \subset A_1 \cup A_2 \text{ e } B \cap A_i \neq \emptyset, i = 1, 2,$$

tem-se

$$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset.$$

Teorema 4.8 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é função contínua, e $B \subset \mathbb{R}^n$ é conjunto conexo, então $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ é conjunto conexo.*

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.37.

4.4 CONJUNTOS CONVEXOS E FUNÇÕES CONVEXAS

A definição seguinte diz que o segmento que liga os vetores x e y, está inteiramente contido em A.

Definição 4.5 *Um subconjunto A de um espaço vetorial V é dito convexo se, $\forall x, y \in A$ tem-se*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A, \ \forall \lambda, \lambda \in \left]0, 1\right[.$$

Definição 4.6 *Uma função $f : A \subset V \to \mathbb{R}$ é dita convexa se A é convexo e para todos $x, y \in A$ vale a desigualdade*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \forall \lambda \in \left]0, 1\right[.$$

Lema 4.2 *Seja $f : A \subset V \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Se $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in (0, 1)$ são tais que*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = 1,$$

então

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k}\lambda_i f\left(x_i\right).$$

Demonstração: Ver Cipolatti (2002).

O Teorema seguinte, é o mais importante resultado desta seção.

Teorema 4.9 *Toda função convexa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.38.

4.5 CONTINUIDADE UNIFORME

O conceito de continuidade que foi enunciado anteriormente, é um conceito local. Ao invés disso, a próxima definição enunciará um conceito de continuidade global.

Definição 4.7 *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua em A, se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que, se $x, y \in A$ e $\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.*

Toda função uniformemente contínua é contínua em seu domínio, pois a diferença nas duas definições, é que na de continuidade, o ponto ao qual a função tende, x_0, cumpre a condição $x_0 \in A \cap A'$, enquanto na de continuidade uniforme, $x \in A$ apenas, logo, se a função é contínua em A, em particular também o é em $A \cap A'$.

Definição 4.8 *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita Lipschitz-contínua em A se existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|, \forall x, y \in A.$$

Observação 4.4 *Toda função Lipschitz-contínua é uniformemente contínua.*

Proposição 4.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função linear. Então f é Lipschitz-contínua.*

Demonstração: As Lipschitz-contínuas são casos particulares da Hölder-contínuas, que vem logo a seguir.

Definição 4.9 *Seja $0 < \alpha \leq 1$. Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é dita Hölder-contínua de ordem α em A, se existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|^\alpha, \forall x, y \in A.$$

Observação 4.5 *Os conceitosde continuidade uniforme, Lipschitz-contnuidade e Hölder-continuidade não se alteram para normas equivalentes, ou seja, não dependem das normas que estejam fixadas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.*

Teorema 4.10 *Toda função contínua definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.*

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.41.

4.6 O TEOREMA DO PONTO FIXO DE BANACH

Definição 4.10 *Seja V um espaço vetorial normado, $A \subset V$ e $f : A \to V$ uma função. Dizemos que f é uma contração em A se existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que*

$$\|f(x) - f(y)\|_V \leq \alpha \|x - y\|_V, \forall x, y \in A.$$

Definição 4.11 *Dizemos que $\bar{x} \in V$ é um ponto fixo para uma função $f : V \to V$ se $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Teorema 4.11 *Seja V um espaço de Banach relativamente à norma $\| \ \|_V$. Se $f : V \to V$ é uma contração em V, então f possui um único ponto fixo.*

Demonstração: Ver Cipolatti (2002), p.43.

Observação 4.6 *O fato de uma função ser uma contração em V para uma norma $\| \ \|_*$, não implica necessariamente que f seja contração para uma norma equivalente.*

5 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

As definições e resultados apresentados neste capítulo, seguem a mesma linha de raciocínio que a apresentada em Cipolatti (2002), e as demonstrações dos resultados deste capítulo são muito avançadas, e extrapolam o alcance deste trabalho, assim, serão só enunciados, mas suas demonstrações podem ser encontrados na mesma referência.

Iniciaremos aqui, o estudo da diferenciabilidade de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

5.1 DERIVADAS DIRECIONAIS

Definição 5.1 *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f possui derivada direcional em x_0 na direção de $\vec{u}$, se existe o limite*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)}{\lambda},$$

denominado derivada direcional de f em x_0, na direção de $\vec{u}$, e denotada por

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0).$$

No caso em que $\vec{u} = e_i$ é o i-ésimo vetor da base canônica, denotamos a derivada direcional na direção de e_i por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

que denominamos derivada parcial de f em x_0 em relação a x_i.

Definição 5.2 *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita Gateaux-derivável em x_0 se f possui derivadas direcionais em todas as direções $\vec{u}$.*

5.2 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Para fixar a notação no que se segue, consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\| \ \|$ a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 5.3 *Dizemos que f é diferenciável (ou Fréchet-derivável) em $x_0 \in \Omega$ se existem funções $L, \varepsilon_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \varepsilon_{x_0}(h),$$

com L linear e ε_{x_0} satisfazendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\ \varepsilon_{x_0}(h)\ |}{\|h\|} = 0.$$

Se ε_{x_0} satisfaz (5.3), diz-se que ε_{x_0} é função $\circ(\|h\|)$. Para simplificar a notação, em vez de ε_{x_0}, escreveremos apenas $\varepsilon(h)$, deixando de explicitar a dependência de ε em x_0.

Se f é função diferenciável em x_0, então a transformação linear L é denominada diferencial de f em x_0 (ou a derivada de Fréchet de f em x_0), e denotamos $f'(x_0)$.

Lema 5.1 *Se f é função diferenciável em $x_0 \in \Omega$ e L_1, L_2 são diferenciais de f, então $L_1 = L_2$.*

Proposição 5.1 *Se f é diferenciável em $x_0 \in \Omega$, então f é contínua em x_0.*

5.3 O VETOR GRADIENTE

Para se definir o vetor gradiente de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é necessário relembrar alguns fatos da Álgebra Linear, que serão enunciados a seguir.

Observação 5.1 *Se $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, fixadas as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, existe uma matriz $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ tal que*

$$L(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Neste caso dizemos que A é a matriz associada à transformação L, ou representação matricial (ou representação em coordenadas) de L relativamente à base canônica.

Representaremos a matriz associada a uma transformação L por $[L]$.

Observação 5.2 *Se $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $L_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ são duas transformações lineares, então podemos definir $L_2 \circ L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e*

$$[L_2 \circ L_1] = [L_2] \cdot [L_1].$$

Definição 5.4 *O vetor $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$ de $\mathbb{R}^n$, é denominado vetor gradiente de f em x_0 e é tal que se f é função diferenciável em x_0, então*

$$f'(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0); h \rangle, \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

É importante ressaltar que a existência do vetor gradiente não implica a diferenciabilidade de uma função, mas se a função for diferenciável então o vetor gradiente é a representação matricial de $f'(x_0)$ relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^n$.

5.4 REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO

Proposição 5.2 *Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em x_0. Então*

a) $f + g$ é diferenciável em x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

b) fg é diferenciável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$;

c) se $g(x_0) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é diferenciável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{1}{g(x_0)^2}\left(g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)\right).$$

5.5 A MATRIZ JACOBIANA

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $x_0 \in \Omega$, então sua diferencial (ou sua derivada de Fréchet), $f'(x_0)$, é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

A matriz associada a $f'(x_0)$ relativamente às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é dada por

$$[f'(x_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

Definição 5.5 *No caso em que, na matriz da transformação linear, que é a derivada, m for igual a n, diz-se que a matriz $[f'(x_0)]$ é denominado matriz Jacobiana de f em x_0. O seu determinante é chamado Jacobiano de f em x_0, e o seu traço é denominado Divergente de f em x_0.*

Denota-se o Jacobiano de f em x_0 por

$$J_f(x_0) = det\,[f'(x_0)]$$

.

Denota-se o Divergente de f em x_0 por

$$div\ f(x_0) = tr\,[f'(x_0)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_0)\,.$$

5.6 A REGRA DA CADEIA

A regra da cadeia é uma fórmula que é usada para derivar funções compostas.

Teorema 5.1 (Regra da Cadeia) *Sejam Ω subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e A subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Suponha $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ e $g : A \to \mathbb{R}^k$ duas funções tais que $f(\Omega) \subset A$. Se f é diferenciável em x_0 e g é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$, então $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e*

$$(g \circ f)'\, x_0 = g'(y_0) \circ f'(x_0)\,.$$

Em particular

$$\left[(g \circ f)'\, x_0\right] = [g'(y_0)]\,[f'(x_0)]\,.$$

5.7 O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Teorema 5.2 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e x_1, x_2 dois pontos de $\mathbb{R}^n$. Então existe $\bar{x}$ sobre o seguimento de reta que liga x_1 a x_2 tal que*

$$f(x_2) - f(x_1) = \langle \nabla f(\bar{x})\,; x_2 - x_1 \rangle\,.$$

5.8 O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA

Teorema 5.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $J_f(x_0) \neq 0$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que*

a) f é injetora em $U = B_{\delta_0}(x_0)$;

b) $V = f(U)$ é aberto;

c) $f^{-1} : V \to U$ é de classe C^1 e $\left[(f^{-1})'(f(x_0))\right] = [f'(x_0)]^{-1}$.

6 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Os resultados deste capítulo seguem a mesma linha de raciocínio que a apresentada em (CIPOLATTI, 2002).

Finalmente, chegamos ao capítulo em que será enunciado o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, mas para isso, primeiro será necessário enunciar o:

Teorema 6.1 (da Função Implícita) *Seja $f : \mathbb{R}^k \times \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1. Suponha $f(x_0, y_0) = 0$ e*

$$\det\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right] \neq 0.$$

Então existe um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ função de classe C^1 tais que

a) $x_0 \in \Omega$ *e* $\varphi(x_0) = y_0$*;*

b) $f(x, \varphi(x)) = 0, \forall x \in \Omega.$

Demonstração: Recomendamos Cipolatti, 2002, p.122.

Teorema 6.2 (Multiplicadores de Lagrange) *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e $S = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) = 0\}$. Suponha $x_0 \in S$ tal que $g'(x_0) \neq 0$ e $f(x_0) = \min\{f(x); x \in S\}$. Então existe (multiplicador de Lagrange) $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

Demonstração: Como $g'(x_0) \neq 0$, podemos supor sem perda de generalidade que $\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0).$$

Para completar a demonstração, basta mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)$$

é verdade para $i = 1, \ldots, n-1$.

Denotando $x = (\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, x_0 = (\tilde{x_0}, y_0)$ temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x_0}, y_0) \neq 0,$$

pois x_n é a n-ésima componente de x, e segundo a notação $x = (\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, y também é a n-ésima componente de x. Decorre então do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança aberta $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de $\tilde{x_0}$ e uma função $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que $\varphi(\tilde{x_0}) = y_0$ e

$$g(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})) = 0, \forall \tilde{x} \in \Omega \qquad (1)$$

Além disso, como $x_0 = (\tilde{x_0}, y_0)$, por hipótese temos que

$$f(\tilde{x_0}, \varphi(\tilde{x_0})) \leq f(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x})), \forall \tilde{x} \in \Omega,$$

logo $\tilde{x_0} \in \Omega$ é ponto de mínimo para a função diferenciável $\tilde{x} \mapsto \psi(\tilde{x}) = f(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))$. Portanto $\psi'(\tilde{x_0}) = 0$, e da Regra da Cadeia vem,

$$\psi'(\tilde{x_0}) = \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\left[\varphi'(\tilde{x_0})\right] = 0, \quad (2)$$

e derivando (1) em relação a $\tilde{x}$, obtemos

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0)\left[\varphi'(\tilde{x_0})\right] = 0. \quad (3)$$

Agora, como (2) e (3) são ambas iguais a 0, multiplicando (3) por λ e subtraindo de (2) obtemos:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\left[\varphi'(\tilde{x_0})\right] - \lambda\left(\left[\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0)\left[\varphi'(\tilde{x_0})\right]\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] - \lambda\left[\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) - \lambda\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right)\left[\varphi'(\tilde{x_0})\right] = 0,$$

mas como $\varphi(\tilde{x_0}) = y_0$, com y_0 constante, temos que $\varphi'(\tilde{x_0}) = 0$, portanto em (6) temos

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right] = \lambda\left[\frac{\partial g}{\partial \tilde{x}}(x_0)\right]. \square$$

O Método dos Multiplicadores de Lagrange, na prática funciona basicamente assim: Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujeitos à restrição $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$, supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq 0$ sobre a restrição $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$, siga os seguintes passos.

a) Determine todos os valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e λ tais que

$$\nabla f(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}) = \lambda \nabla g(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0})$$

e

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k.$$

b) Calcule f em todos os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f, sujeitos à restrição do problema. Se escrevermos a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ em termos de suas componentes, as equações do passo (a) ficam $f_{x_1} = \lambda g_{x_1}$, $f_{x_2} = \lambda g_{x_2}$, $f_{x_n} = \lambda g_{x_n}$ e $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$. Isto é um sistema de $n + 1$ equações a $n + 1$ incógnitas, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e λ.

7 APLICAÇÃO

Neste capítulo, será resolvido um problema retirado de Stewart (2013). Será utilizado o Método dos Multiplicadores de Lagrange, na otimização de projetos de foguetes, tais como o Pegasus XL, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o Saturno V, que colocou o primeiro homem na Lua. Esses foguetes são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio, impulsiona o foguete até que seu combustível acabe, e então esse estágio e ejetado, diminuindo a massa do foguete. O segundo e o terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma maneira, e o resultado da propulsão total dos três estágios, é que a carga do foguete entra em órbita em torno da terra.

Aqui, o objetivo principal é determinar as massas individuais dos três estágios, que foram projetados de forma a minimizar a massa total do foguete, e ao mesmo tempo permitir que ele atinja a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio, consumindo combustível a uma taxa constante, a variação na velocidade resultante da aceleração do foguete, foi modelada por

$$\Delta V = -c\ln\left(1 - \frac{(1-S)\,M_r}{P + M_r}\right)$$

onde M_r é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o *fator estrutural* determinado pelo projeto do foguete (neste caso específico, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga, e a massa do foguete com carga e combustível), e c é a velocidade de exaustão relativa do foguete (constante).

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A. Suponha que as forças externas sejam desprezíveis, e que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Sem M_i é a massa do i-ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha uma massa M_1, e sua carga tenha massa $M_2 + M_3 + A$; o segundo e o terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right) + \ln\left(\frac{M_2+M_3+A}{SM_2+M_3+A}\right) + \ln\left(\frac{M_3+A}{SM_3+A}\right)\right]$$

Solução: Temos que a velocidade ao final do 1º estágio é dada por

$$\Delta V_1 = -c\ln\left(1 - \frac{(1-S)\,M_1}{M_1+(M_2+M_3+A)}\right) = -c\ln\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A-M_1+SM_1}{M_1+M_2+M_3+A}\right)$$

$$-c\ln\left(\frac{SM_1+M_2+M_3+A}{M_1+M_2+M_3+A}\right) = ln\left(\frac{SM_1+M_2+M_3+A}{M_1+M_2+M_3+A}\right)^{-c}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{SM_1+M_2+M_3+A}{M_1+M_2+M_3+A}\right)^c}\right) = \ln\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{(M_1+M_2+M_3+A)^c}{(SM_1+M_2+M_3+A)^c}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right)^c = c\cdot\ln\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right).$$

A variação da velocidade resultante da aceleração do 2º estágio é :

$$\Delta V_2 = -c\ln\left(1-\frac{(1-S)\,M_2}{P+M_2}\right) = \ln\left(\frac{(P+M_2)-M_2+SM_2}{(P+M_2)}\right)^{-c}$$

$$\ln\left(\frac{M_3+A+M_2-M_2+SM_2}{M_3+A+M_2}\right)^{-c} = \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{SM_2+M_3+A}{M_2+M_3+A}\right)^c}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{(M_2+M_3+A)^c}{(SM_2+M_3+A)^c}\right) = \ln\left(\frac{M_2+M_3+A}{SM_2+M_3+A}\right)^c$$

$$= c\cdot\ln\left(\frac{M_2+M_3+A}{M_2+M_3+A}\right).$$

A variação da velocidade resultante da aceleração do 3º estágio é :

$$\Delta V_3 = -c\ln\left(1-\frac{(1-S)\,M_3}{P+M_3}\right) = \ln\left(\frac{A+M_3-M_3+SM_3}{A+M_3}\right)^{-c} = \ln\left(\frac{1}{\left(\frac{SM_3+A}{M_3+A}\right)^c}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{(M_3+A)^c}{(SM_3+A)^c}\right) = \ln\left(\frac{M_3+A}{SM_3+A}\right)^c = c\cdot\ln\left(\frac{M_3+A}{SM_3+A}\right).$$

Logo, a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados, é dada por

$$v_f = c\cdot\ln\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right) + c\cdot\ln\left(\frac{M_2+M_3+A}{M_2+M_3+A}\right) + c\cdot\ln\left(\frac{M_3+A}{SM_3+A}\right),$$

que implica

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right) + \ln\left(\frac{M_2+M_3+A}{SM_2+M_3+A}\right) + \ln\left(\frac{M_3+A}{SM_3+A}\right)\right]_\square$$

2. Desejamos minimizar a massa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ do propulsor do foguete, sujeita à restrição que a velocidade desejada v_f do item 1 seja atingida. O método dos Multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificarmos, definimos variáveis N_i de modo que a restrição possa ser expressa como $v_f = c\,(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Como é difícil expressar M em termos dos N_i, é desejável usar uma função mais simples, que ao ser minimizada, leve também à minimização de M. Mostre que

$$\frac{M_1+M_2+M_3+A}{M_2+M_3+A} = \frac{(1-S)\,N_1}{1-SN_1},\ \frac{M_2+M_3+A}{M_3+A} = \frac{(1-S)\,N_2}{1-SN_2},\ e\ \frac{M_3+A}{A} = \frac{(1-S)\,N_3}{1-SN_3}$$

e conclua que

$$\frac{M+A}{A}=\frac{(1-S)^3 N_1N_2N_3}{(1-SN_1)(1-SN_2)(1-SN_3)}$$

Solução:

$$\frac{(1-S)N_1}{1-SN_1}=\frac{N_1-SN_1}{1-SN_1}$$

$$\Rightarrow\left[\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}-S\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right)\right]$$

$$\div\left[1-S\left(\frac{M_1+M_2+M_3+A}{SM_1+M_2+M_3+A}\right)\right]$$

$$=\frac{M_1+M_2+M_3+A-S(M_1+M_2+M_3+A)}{(SM_1+M_2+M_3+A)}$$

$$\cdot\left[\frac{(SM_1+M_2+M_3+A)}{(M_2+M_3+A)-S(M_2+M_3+A)}\right]$$

$$=\frac{(1-S)(M_1+M_2+M_3+A)}{(1-S)(M_2+M_3+A)}=\frac{M_1+M_2+M_3+A}{M_2+M_3+A}$$

ou seja,

$$\frac{M_1+M_2+M_3+A}{M_2+M_3+A}=\frac{(1-S)N_1}{1-SN_1}$$

Além disso,

$$\frac{M_2+M_3+A}{M_3+A}=\frac{(1-S)(M_2+M_3+A)}{(1-S)(M_3+A)}=\frac{(M_2+M_3+A)-S(M_2+M_3+A)}{(M_3+A)-S(M_3+A)}$$

$$=\frac{(M_2+M_3+A)-S(M_2+M_3+A)}{(M_3+A)-S(M_3+A)}\cdot\frac{(SM_2+M_3+A)}{(SM_2+M_3+A)}$$

$$=\frac{(M_2+M_3+A)-S(M_2+M_3+A)}{(SM_2+M_3+A)}\cdot\frac{(SM_2+M_3+A)}{(M_3+A)-S(M_3+A)}$$

$$=\frac{(M_2+M_3+A)-S(M_2+M_3+A)}{(SM_2+M_3+A)}\div\frac{(M_3+A)-S(M_3+A)}{(SM_2+M_3+A)}$$

$$\left[\frac{(M_2+M_3+A)}{(SM_2+M_3+A)}-\frac{S(M_2+M_3+A)}{(SM_2+M_3+A)}\right]\div\left[\frac{(M_3+A)-S(M_3+A)(SM_2-SM_2)}{(SM_2+M_3+A)}\right]$$

$$[(1-S)N_2]\div[1-SN_2]=\frac{(1-S)N_2}{1-SN_2}.$$

Ainda temos:

$$\frac{M_3+A}{A}=\frac{M_3+A}{A}\cdot\frac{(1-S)}{(1-S)}=\frac{M_3+A-S\,(M_3+A)}{A-SA}$$

$$=\frac{M_3+A-S\,(M_3+A)}{A-SA}\cdot\frac{(SM_3+A)}{(SM_3+A)}=\frac{M_3+A-S\,(M_3+A)}{(SM_3+A)}\cdot\frac{(SM_3+A)}{A-SA}$$

$$=\left[\frac{M_3+A}{(SM_3+A)}-\frac{S\,(M_3+A)}{(SM_3+A)}\right]\div\left[\frac{A-SA}{(SM_3+A)}\right]-S\,(M_3+A)$$

$$=(N_3-SN_3)\div\left[\frac{A-SA+(SM_3-SM_3)}{(SM_3+A)}\right]=(N_3-SN_3)\div\left[\frac{(SM_3+A)}{(SM_3+A)}-\frac{S\,(M_3+A)}{(SM_3+A)}\right]$$

$$=(N_3-SN_3)\div(1-SN_3)=\frac{(1-S)\,N_3}{1-SN_3}.$$

Portanto, temos

$$\frac{M+A}{A}=\frac{M_1+M_2+M_3+A}{A}=\frac{M_1+M_2+M_3+A}{A}\cdot\frac{(M_2+M_3+A)}{(M_2+M_3+A)}$$

$$=\frac{M_1+M_2+M_3+A}{(M_2+M_3+A)}\cdot\frac{(M_2+M_3+A)}{A}=\frac{(1-S)\,N_1}{(1-SN_1)}\cdot\frac{(M_2+M_3+A)}{A}\cdot\frac{(M_3+A)}{(M_3+A)}$$

$$=\frac{(1-S)\,N_1}{(1-SN_1)}\cdot\frac{(M_2+M_3+A)}{(M_3+A)}\cdot\frac{(M_3+A)}{A}$$

$$=\frac{(1-S)\,N_1}{(1-SN_1)}\cdot\frac{(1-S)\,N_2}{(1-SN_2)}\cdot\frac{(1-S)\,N_3}{(1-SN_3)}=\frac{(1-S)^3\,N_1N_2N_3}{(1-SN_1)\,(1-SN_2)\,(1-SN_3)}.\square$$

3. Verifique se $\ln\left(\frac{(M+A)}{A}\right)$ tem os mesmo pontos de mínimo que M; utilize os Multiplicadores de Lagrange e o resultado do item 2 para determinar as expressões para os valores de N_i onde o mínimo ocorre sujeito à restrição $v_f=c\,(\ln N_1+\ln N_2+\ln N_3)$.
Solução: Seja

$$f\,(N_1,N_2,N_3)=\ln\left(\frac{(1-S)^3\,N_1N_2N_3}{(1-SN_1)\,(1-SN_2)\,(1-SN_3)}\right)$$

e

$$g\,(N_1,N_2,N_3)=[\ln(N_1)+\ln(N_2)+\ln(N_3)]=v_f,$$

pelo método dos Multiplicadores de Lagrange temos:

$$\nabla f=\lambda\nabla g\Rightarrow\langle f_{N_1},f_{N_2},f_{N_3}\rangle=\langle\lambda g_{N_1},\lambda g_{N_2},\lambda g_{N_3}\rangle\,.$$

Usando as propriedades dos logaritmos, podemos simplificar f.

$$f(N_1, N_2, N_3) = \ln(1-S)^3 + \ln(N_1) + \ln(N_2) + \ln(N_3) +$$
$$- \ln(1-SN_1) - \ln(1-SN_2) - \ln(1-SN_3)$$

$$f_{N_1} = \frac{1}{N_1} - \left(\frac{1}{(1-SN_1)} \cdot (-S)\right) = \frac{1}{N_1} + \frac{S}{1-SN_1},$$
$$f_{N_2} = \frac{1}{N_2} + \frac{S}{1-SN_2}, \quad f_{N_3} = \frac{1}{N_3} + \frac{S}{1-SN_3},$$
$$g_{N_1} = \frac{c}{N_1}, \quad g_{N_2} = \frac{c}{N_2}, \quad g_{N_3} = \frac{c}{N_3}.$$

Temos então:

$$\frac{1}{N_1} + \frac{S}{1-SN_1} = \lambda \cdot \frac{c}{N_1}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{N_2} + \frac{S}{1-SN_2} = \lambda \cdot \frac{c}{N_2}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{N_3} + \frac{S}{1-SN_3} = \lambda \cdot \frac{c}{N_3}, \tag{3}$$

e

$$v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3) \tag{4}$$

De (1) vem: $\lambda = \frac{N_1}{c} \cdot \left(\frac{1}{N_1} + \frac{S}{(1-SN_1)}\right)$, que substituindo em (2) vem:

$$\frac{1}{N_2} + \frac{S}{(1-SN_2)} = \left[\frac{1}{c} + \frac{SN_1}{c(1-SN_1)}\right] \frac{C}{N_2} \Rightarrow \frac{N_2}{c}\left[\frac{1}{N_2} + \frac{S}{(1-SN_2)}\right] = \frac{1}{c} + \frac{SN_1}{c(1-SN_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{SN_2}{c(1-SN_2)} = \frac{1}{c} + \frac{SN_1}{c(1-SN_1)} \Rightarrow N_2 = N_1.$$

Substituindo λ de (1) em (3) temos:

$$\frac{1}{N_3} + \frac{S}{(1-SN_3)} = \left[\frac{1}{c} + \frac{SN_1}{c(1-SN_1)}\right] \frac{C}{N_3} \Rightarrow \frac{N_3}{c}\left[\frac{1}{N_3} + \frac{S}{(1-SN_3)}\right] = \frac{1}{c} + \frac{SN_1}{c(1-SN_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} + \frac{SN_3}{c(1-SN_3)} = \frac{1}{c} + \frac{SN_1}{c(1-SN_1)} \Rightarrow N_3 = N_1.$$

Substituindo N_1, N_2 e N_3 em (4), temos:

$$c(\ln(N_1) + \ln(N_1) + \ln(N_1)) = v_f$$

$$\Rightarrow \; 3\ln(N_1) = \frac{v_f}{c} \;\; \ln(N_1) = \frac{v_f}{3c} \;\Rightarrow\; N_1 = N_2 = N_3 = e^{\frac{v_f}{3c}}.$$

4. Determine uma expressão para o valor mínimo de M como função de v_f.
Solução:

$$\min f\left(N_1, N_2, N_3\right) = \ln\left(\frac{(1-S)^3 e^{\frac{v_f}{3c}} e^{\frac{v_f}{3c}} e^{\frac{v_f}{3c}}}{\left(1-Se^{\frac{v_f}{3c}}\right)\left(1-Se^{\frac{v_f}{3c}}\right)\left(1-Se^{\frac{v_f}{3c}}\right)}\right) = \ln\left(\frac{(1-S)^3\left(e^{\frac{v_f}{3c}}\right)^3}{\left(1-Se^{\frac{v_f}{3c}}\right)^3}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{(1-S)\left(e^{\frac{v_f}{3c}}\right)}{\left(1-Se^{\frac{v_f}{3c}}\right)}\right)^3 = 3\ln\left(\frac{(1-S)\left(e^{\frac{v_f}{3c}}\right)}{\left(1-Se^{\frac{v_f}{3c}}\right)}\right) \cdot \square$$

5. Se desejarmos colocar um foguete de três estágios em uma órbita 160 km acima da superfície terrestre, a velocidade final necessária é de aproximadamente 28.000 km/h. Suponha que cada estágio seja construído com um fator estrutural $S = 0,2$ e que a velocidade de exaustão seja $c = 9.600 km/h$.
a) Determine a massa total mínima M do propulsor do foguete como função de A.
Solução:

$$\min \ln\left(\frac{M+A}{A}\right) = \ln\left(\frac{(1-0,2)\left(e^{\frac{28000}{3\cdot 9600}}\right)}{1-0,2\left(e^{\frac{28000}{3\cdot 9600}}\right)}\right)^3 \Rightarrow \frac{M+A}{A} = \left(\frac{0,8\cdot e^{0,97}}{1-0,2e^{0,97}}\right)^3$$

$$\Rightarrow \min M \approx A\cdot 89,14697 - A \approx A\left(89,14697-1\right) \approx A\cdot 88,14697$$

b) Determine a massa de cada estágio como função de A.
Solução:

$$\frac{M_3+A}{A} = \frac{(1-S)\,N_3}{1-SN_3} = \left(\frac{(1-0,2)\left(e^{\frac{28000}{3\cdot 9600}}\right)}{1-0,2\left(e^{\frac{28000}{3\cdot 9600}}\right)}\right)$$

$$\Rightarrow M_3 \approx A\cdot\left(\frac{0,8\cdot e^{0,97}}{1-0,2\cdot e^{0,97}}\right) - A \approx A\cdot(4,46720-1) \approx A\cdot 3,46720$$

$$\frac{M_2+M_3+A}{M_3+A} = \frac{(1-S)\,N_2}{1-SN_2} \Rightarrow M_2 = \left(\frac{0,8\cdot e^{0,97}}{1-0,2\cdot e^{0,97}}\right)\cdot\left(M_3-M_3\right) - M_3 - A$$

$$\Rightarrow M_2 = (4,46720)\cdot\left[A\,(4,46720) - A + A\right] - \left[A\,(4,46720) - A + A\right]$$

$$\Rightarrow M_2 = A\cdot(4,46720)^2 - A\,(4,46720)$$

Agora,

$$\frac{(M_1 + M_2 + M_3 + A)}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1-S)\,N_1}{1-SN_1} \Rightarrow \left[\frac{(1-S)\,N_1}{1-SN_1}\right] \cdot [M_2 + M_3 + A] - [M_2 + M_3 + A]$$

$$\Rightarrow M_1 = (4,46720) \cdot \left[A \cdot (4,46720)^2 - A \cdot (4,46720) + [A \cdot (4,46720) - A] + A\right]$$

$$-\left[A \cdot (4,46720)^2 - A \cdot (4,46720) + A\,(4,46720) - A + A\right]$$

$$\Rightarrow M_1 = A \cdot (4,46720)^3 - A \cdot (4,46720)^2\,.$$

6. O mesmo foguete precisaria de uma velocidade final de 39.700 km/h, aproximadamente, para escapar da gravidade terrestre. Determine a massa de cada estágio que minimizaria a massa total do propulsor do foguete, e lhe permitiria carregar uma sonda de 200 kg para o espaço.

Solução:

$$M_3 = 200 \cdot \left(\frac{0,8 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}{1 - 0,2 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}\right) - 200 \approx 2879,10196u.m.$$

$$M_2 = 200 \cdot \left(\frac{0,8 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}{1 - 0,2 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}\right)^2 - 200\left(\frac{0,8 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}{1 - 0,2 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}\right) \approx 44.325,24243u.m.$$

$$M_1 = 200\left(\frac{0,8 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}{1 - 0,2 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}\right)^3 - 200\left(\frac{0,8 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}{1 - 0,2 \cdot e^{\frac{39700}{3 \cdot 9600}}}\right)^2 = \approx 682.409,6744u.m.$$

8 CONCLUSÃO

Os conceitos de análise no $\mathbb{R}^n$ não fazem parte do conteúdo previsto na grade curricular do curso de licenciatura em matemática da UTFPR, câmpus Cornélio Procópio, no entanto, o estudo desses conceitos propicia uma maior aproximação entre a matemática estudada na graduação e a pesquisa em matemática. No Capítulo 2 deste trabalho, os conceitos de métricas e normas, servem de generalização de medições, que usualmente são feitas em linha reta, ou espaço real unidimensional, em medidas de área em planos, ou espaços euclidianos bidimensionais, e medidas de volume, no espaço euclidiano tridimensional. Já o Capítulo 3, que fala da topologia dos espaços normados, traz uma descrição topológica desses espaços, e culmina na descrição topológica do $\mathbb{R}^n$, que é o espaço de interesse final do trabalho. Nos Capítulos 4 e 5 trata-se da teoria de limites, continuidade e derivadas de funções nesse espaço, porque na aplicação dos multiplicadores de Lagrange, são utilizadas funções desse tipo. E no capítulo 6, chega-se à teoria dos multiplicadores de Lagrange propriamente dita, e precede o capítulo 7, da aplicação. Assim, vê-se que é necessário percorrer um caminho até se chegar a resolver o problema final, e foi necessário extrapolar a abrangência do conceitos estudados no curso regular da licenciatura em matemática.

Neste trabalho, pode-se perceber a potencialidade das aplicações da matemática, para o desenvolvimento da indústria, comércio e da tecnologia, como é o caso da aplicação dos multiplicadores de Lagrange na ciência dos foguetes, que permitiu otimizar a massa de cada um dos três estágios (tanques de combustível), para que a massa fosse a menor possível, e ainda permitisse atingir a velocidade final desejada. Portanto essa aplicação mostra o quão útil são os conceitos matemáticos, no desenvolvimento tecnológico.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, Stephen. **Principles of Mathematical Analysis**. 3. ed. S.I.: McGraw-Hill, 2001. Nenhuma citação no texto.

ABBOTT, S. **Understanding Analysis**. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 2001. Nenhuma citação no texto.

CIPOLATTI, Rolci. **Cálculo Avançado I**. 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil: Universidade Federal do Rio de Janeiro. IM, 2002. Citado 11 vezes nas páginas 13, 25, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47 e 51.

CONWAY, J. B. **A course in Functional Analysis**. 2. ed. S.I.: Springer-Verlag, 1994. Nenhuma citação no texto.

HEWITT, E.; STROMBERG, K. **Real and Abstract Analysis**. 1. ed. Springer-Verlag: American Mathematical Society, 1965. Nenhuma citação no texto.

JAHNKE, Hans Niels. **A History of Analysis**. 1. ed. S.I.: American Mathematical Society, 2003. Citado na página 11.

LIMA, Elon Lages. **Análise Real volume 1: funções de uma variável**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. Citado na página 43.

RUDIN, W. **Functional Analysis**. S.I.: McGraw-Hill Science, 1991. Nenhuma citação no texto.

STEWART, James. **Cálculo Volume 2**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado na página 53.

TAO, Terence. **An Introduction to Measure Theory**. S.I.: American Mathematical Society, 2011. Nenhuma citação no texto.

WANNER, G.; HARRIER, E. **Analysis by its history**. 1. ed. S.I.: Springer, 2005. Nenhuma citação no texto.

ZILL, D. G.; WRIGHT, S.; WRIGHT, W. S. **Calculus: Early Transcendentals**. 3. ed. S.I.: Jones and Bartlett Learning, 2009. Nenhuma citação no texto.