ESTABILIDADE PARA UM PROBLEMA DE TRANSMISSÃO VISCOELÁSTICA

por

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO

Orientador: **Juan Amadeo Soriano Palomino**

Departamento de Matemática - UEM

Maringá, Julho de 2003

Estabilidade para um Problema de Transmissão Viscoelástica

por

Adilandri Mércio Lobeiro

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Juan Amadeo Soriano Palomino
(Presidente)

Higídio Portillo Oquendo

Cícero Lopes Frota

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus e ao
Professor Juan por terem sempre
proporcionado um ambiente
de paz em minha vida.

Agradecimentos

A Deus,

Por iluminar-me e permitir que meus desejos se realizem.

Ao Professor Juan Amadeo Soriano Palomino,

Pela excelente orientação, paciência e disponibilidade ao me acompanhar na realização deste trabalho.

Aos mestres, a minha gratidão pela amizade e pelos conhecimentos.

Aos colegas do curso,

Que nunca faltaram com o espírito de companheirismo e amizade.

A Lúcia, secretária do mestrado de matemática,

Pela presteza e carinhosa atenção.

A Silvana, zeladora,

Pelos excelentes cafezinhos e pela atenção em momentos difícies.

A minha namorada Edcarla,

Minha eterna gratidão pelo tempo que não lhe dediquei.

Ao meu amigo Wellen Pedrochi,

Meu muito obrigado por acordar-me todas as manhãs.

Ao meu irmão Adicherces e família,

Pela disposição em colaborar para a realização deste trabalho.

À Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática e a CAPES-CNPq,

Pelo respaldo financeiro.

Aos meus pais Oswaldo e Antonia,

Que além da vida, ainda revestiram minha existência de amor.

E a todos que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

Meu Muito Obrigado.

Resumo

Analisamos um problema de transmissão de ondas viscoelásticas. Isto é, estudamos a propagação da onda sobre materiais consistindo de componentes elástica e viscoelástica em um conjunto aberto, conexo e limitado com fronteira suave e fronteira com condições de transmissão. Mostramos que para este tipo de material a dissipação produzida pela parte viscoelástica é suficientemente forte para produzir decaimento exponencial da solução, não importando quão pequeno seja o tamanho da parte viscoelástica.

Abstract

We consider a transmission problem of viscoelastic waves. That is, we study the wave propagations over materials consisting of elastic and viscoelastic components in a bounded, open connected set with smooth boundary and transmission boundary conditions. We show that for this type decay of the solution, no matter how small is its size.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência, unicidade e estabilidade exponencial para o problema de transmissão de ondas viscoelásticas, isto é, consideramos a propagação da onda sobre corpos consistindo de dois tipos de materiais fisicamente diferentes. Uma componente é uma parte elástica simples, enquanto a outra é uma componente viscoelástica dotada de "memória de longo alcance"[1]. É reconhecido que um corpo puramente elástico produz uma equação de movimento conservativo, enquanto materiais viscoelásticos induzem a um mecanismo de dissipação. Quando atua de forma efetiva em todo o domínio, produz taxa de decaimento uniforme da energia, desde que a função de relaxação decai exponencialmente (ver[22]).

Estamos interessado em estudar as propriedades resultantes de um material misto quando uma dessas componentes é dissipativa e a outra é do tipo conservativa. Mais precisamente, consideramos um material composto de duas partes, uma parte viscoelástica e outra elástica conservativa. Desta maneira, o assunto principal de nosso trabalho tem por objetivo abordar o comportamento assintótico de um problema de materiais mistos, isto é, mostramos que a dissipação dada pela parte viscoelástica é suficientemente forte para produzir taxa de decaimento uniforme.

O problema de transmissão para equações hiperbólicas foi estudado por Dautray e Lions [6] que provaram a existência e regularidade de soluções para o problema linear, enquanto em Lions [11] provou a controlabilidade exata. Este último resultado significa que o sistema todo pode ser controlado por um controle que atua em uma parte estratégica da fronteira.

[1] Memória de longo alcance significa que as tensões a qualquer momento dependem da história completa de tensões que o material sofreu.

A respeito de sistema viscoelásticos, graças aos trabalhos de Dafermos [3] , [4] , Dassios [5], Muñoz [21] entre outros, é reconhecido agora que a solução do modelo viscoelástico completo decai uniformemente para zero quando o tempo tende para o infinito fazendo com que a função de relaxação decai exponencialmente.

Existe relativamente poucos resultados matemáticos sobre problemas gerais de movimento e deformações de materiais viscoelástico localizados. Dentre estes, podemos destacar o trabalho de Oquendo [23], onde ele analisou a estabilidade de um problema de transmissão viscoelástico, dado pelo seguinte sistema:

$$\rho_1 u_{tt} - \alpha_1 u_{xx} = 0 \quad em \quad]0, L_0[\times]0, \infty[\tag{0.0.1}$$

$$\rho_2 v_{tt} - \alpha_2 v_{xx} + \int_0^t g(t-s) v_{xx}(s) ds = 0 \quad em \quad]L_0, L[\times]0, \infty[\tag{0.0.2}$$

$$u(0,t) = v(L,t) = 0 \quad em \quad]0, \infty[\tag{0.0.3}$$

$$u(L_0,t) = v(L_0,t) \quad em \quad]0, \infty[\tag{0.0.4}$$

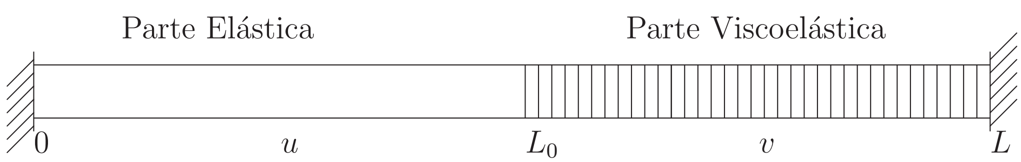
$$\alpha_1 u_x(L_0,t) = \alpha_2 v_x(L_0,t) - \int_0^t g(t-s) v_x(L_0,s) ds \quad em \quad]0, \infty[\tag{0.0.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ \ e \ \ u_t(x,0) = u_1(x) \quad em \quad]0, L_0[\tag{0.0.6}$$

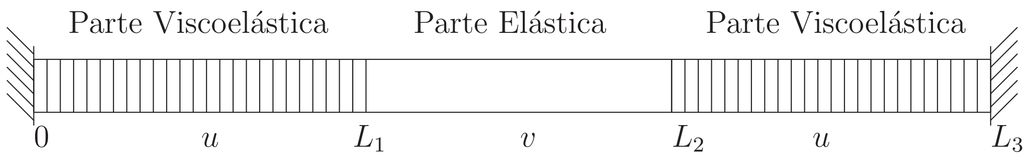
$$v(x,0) = v_0(x) \ \ e \ \ v_t(x,0) = v_1(x) \quad em \quad]L_0, L[\tag{0.0.7}$$

onde as densidades de massa ρ_1 , ρ_2 e os coeficientes de elasticidade α_1 e α_2, assumem valores positivos fixados .

A solução $\{u(x,t), v(x,t)\}$ do sistema acima descreve o deslocamento vertical de uma corda de comprimento L, que tem uma parte elástica sobre $]0, L_0[\subset]0, L[$, outra viscoelástica sobre $]L_0, L[\subset]0, L[$ e fixa nos extremos do intervalo $]0, L[$ como vemos na seguinte figura:



Podemos considerar a equação não linear da corda vibrante de comprimento L_3, de tal maneira, que tem uma parte viscoelástica sobre o conjunto $]0, L_1[\cup]L_2, L_3[\subset]0, L_3[$ que denotamos por $\mathcal{O}$, outra elástica sobre $]L_1, L_2[\subset]0, L_3[$ e fixa nos extremos do intervalo $]0, L_3[$, conforme figura abaixo:



cujo sistema viscoelástico é dado por

$$u_{tt} - au_{xx} + F(u) + g * u_{xx} = 0 \quad em \quad \mathcal{O}\times]0, \infty[\tag{0.0.8}$$

$$v_{tt} - bv_{xx} + G(v) = 0 \quad em \quad]L_1, L_2[\times]0, \infty[\tag{0.0.9}$$

$$u(0, t) = u(L_3, t) = 0 \quad em \quad]0, \infty[\tag{0.0.10}$$

$$u(L_j, t) = v(L_j, t)\ ; j = 1, 2 \quad em \quad]0, \infty[\tag{0.0.11}$$

$$au_x(L_j, t) - g * u_x(L_j, t) = bv_x(L_j, t)\ ; j = 1, 2 \quad em \quad]0, \infty[\tag{0.0.12}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \ \ e \ \ u_t(x, 0) = u_1(x) \quad em \quad x \in \mathcal{O} \tag{0.0.13}$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \ \ e \ \ v_t(x, 0) = v_1(x) \quad em \quad x \in]L_1, L_2[\tag{0.0.14}$$

onde os coeficientes de elasticidade a e b, assumem valores positivos fixados .

A generalização natural do sistema [(0.0.8)-(0.0.14)] é dada pelo seguinte problema misto não linear

$$u_{tt} - a\Delta u + F(u) + g * \Delta u = 0 \quad em \quad \Omega_2\times]0, \infty[\tag{0.0.15}$$

$$v_{tt} - b\Delta v + G(v) = 0 \quad em \quad \Omega_1\times]0, \infty[\tag{0.0.16}$$

$$u(x, t) = 0 \quad em \quad \Gamma\times]0, \infty[\tag{0.0.17}$$

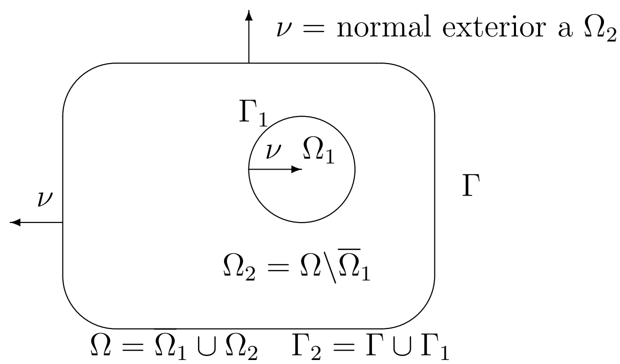
$$u(x, t) = v(x, t) \quad em \quad \Gamma_1\times]0, \infty[\tag{0.0.18}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} = b\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad em \quad \Gamma_1\times]0, \infty[\tag{0.0.19}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \ \ e \ \ u_t(x, 0) = u_1(x) \quad em \quad \Omega_2 \tag{0.0.20}$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \ \ e \ \ v_t(x, 0) = v_1(x) \quad em \quad \Omega_1 \tag{0.0.21}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira Γ regular, sendo $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_1$ ambos subdomínios com fronteiras regulares Γ_1 e $\Gamma_2 = \Gamma \cup \Gamma_1$, conforme figura abaixo.



Em Lions [11] foi estudado o problema de contrabilidade exata para a versão linear do sistema acima quando $g \equiv 0$ e $F = G \equiv 0$. Isto é, existe um controle Ψ atuando sobre Γ que leva o sistema ao repouso. A controlabilidade exata do problema não linear correspondente permanece aberto. Uma resposta parcial é dada por Zuazua & Tcheougoné Tebou em [24].

Nossa dissertação está organizada da seguinte forma:

No **capítulo (1)** apresentamos as notações básicas, resultados preliminares e resultados principais usados na resolução do sistema [(0.0.15)-(0.0.21)].

No **capítulo (2)** mostramos a existência e unicidade das soluções regulares e fracas do sistema [(0.0.15)-(0.0.21)].

Finalmente no **capítulo (3)**, mostramos o decaimento exponencial da solução do sistema [(0.0.8)-(0.0.14)].

Capítulo 1

Notações Básicas, Resultados Auxiliares e Resultado Principal

Estabeleceremos neste capítulo as notações, as hipóteses sobre os dados e apresentaremos em forma de proposições os resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

1.1 Notações Básicas

1.1.1 Topologias Fraca e Fraca Estrela

Uma propriedade importante das topologias é que se uma topologia possui menos abertos então ela possui mais compactos, e estes por sua vez são importantes para os teoremas de existência. De forma breve apresentaremos aqui duas topologias menos fina, isto é, possuem menos abertos que a topologia da norma, esta última chamamos de topologia forte.

Seja E um espaço de Banach com dual E' . A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$. Quando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x em E segundo a topologia fraca denotamos por $x_n \rightharpoonup x$ em E. Temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1 *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência num espaço de Banach* E*. Então*

(a) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $E \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\ f \in E'$.

(b) *Se* $x_n \to x$ *em* E*, então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E.

(c) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E*, então* $\|x_n\|$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(d) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1]. Página 35.

Vale ressaltar aqui que se E tem dimensão finita, então as topologias forte e fraca coincidem.

Sobre E' temos duas topologias: a topologia forte, associada a norma, e a topologia fraca $\sigma(E', E'')$. Podemos ter uma terceira topologia, para isso seja $x \in E$ fixo e defina

$$\begin{aligned} J_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \langle J_x, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E} \end{aligned}$$

verifica-se que J_x é linear e contínua, portanto $(J_x)_{x\in E}$ é uma família de elementos de E''. A topologia menos fina de E' que torna contínuas todas as aplicações da família $(J_x)_{x\in E}$ é chamada topologia fraca estrela, denotada por $\sigma(E', E)$. Quando $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f segundo essa topologia escrevemos: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'. Note que quando E é reflexivo ($E = E''$) as topologias fraca e fraca estrela coincidem. Temos os seguintes resultados:

Proposição 1.2 *Sejam* E *um espaço de Banach e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* E'*. Então*

(a) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* $E' \Leftrightarrow \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\ x \in E$.

(b) *Se* $f_n \to f$ *em* E'*, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E'.

(c) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E'*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(d) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $\|f_n\|$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

(e) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *e* $x_n \to x$ *em* E, *então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver [1]. Página 40.

Destacamos ainda

Proposição 1.3 *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* E'. *Então existe uma subsequência* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver [1]. Página 50.

Proposição 1.4 *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada em* E. *Então existe uma subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Ver [1]. Página 50.

1.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω. A norma em $L^p(\Omega)$ é dada por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso em que $p = \infty$ definimos $L^\infty(\Omega)$ como sendo o espaço das funções mensuráveis que são essencialmente limitadas e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c;\ |u(x)| \leq c \text{ q.s. em } \Omega\},$$

é uma norma em $L^\infty(\Omega)$. Temos que

Proposição 1.5 *$L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração: Ver [1]. Página 57.

Proposição 1.6 (Desigualdade de Hölder) *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

Demonstração: Ver [1]. Página 56.

Quando $p = 2$ temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

e norma induzida

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Um resultado importante é a proposição abaixo, a qual permite identificar o dual de $L^p(\Omega)$ com $L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição 1.7 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_k$ funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $1 \leq i \leq k$, onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 f_3 \cdots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|f_3\|_{L^{p_3}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [1]. Página 57.

Proposição 1.8 (Teorema da Representação de Riesz) *Sejam* $1 < p < \infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall \ v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [1]. Página 61.

Quando $p = \infty$, temos

Proposição 1.9 *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. *Então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall \ v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [1]. Página 63.

Proposição 1.10 *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão limitada em* $L^p(\Omega)$ *e* $f \in L^p(\Omega)$, *tal que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. *Então existe uma subsequência* (f_{n_k}) *tal que*

1. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.s em* Ω
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, $\forall k$ *e q.s em* Ω, *com* $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [1]. Página 58.

1.1.3 Distribuições

No estudo de equações diferenciais parciais, para que seja possível resolver problemas em que os dados iniciais não possuem derivada no sentido clássico surge a necessidade de se obter um novo conceito de derivada. Por volta de 1.936, Sobolev introduziu o conceito de derivada fraca que apresentou o aspecto negativo de que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. Isto ocorreu pelo fato de se exigir que a derivada fosse uma função localmente integrável. Em 1.945, Schwartz apresentou o conceito de distribuição que eliminou este incoveniente da derivada fraca. Além disso se uma função possui derivada no sentido clássico, então ela coincidirá com a derivada distribucional, portanto temos uma generalização do conceito de derivada. Nesta subseção faremos uma breve introdução ao estudo das distribuições, apresentando as notações e resultados que serão usados posteriormente.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ um multi-índice, denotamos $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ e definimos

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \ldots \partial^{k_n} x_n},$$

o operador derivação de ordem $|k|$. Quando $|k| = 0$, define-se $D^0 u = u$, para todo u.

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotamos o espaço das funções testes em Ω. Denomina-se distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω. Neste espaço introduzimos a seguinte noção de convergência: uma sequência $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge para T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ a sequência numérica $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$.

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então T_u definida em $\mathcal{D}(\Omega)$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω.

Proposição 1.11 (Lema de Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se e somente se $u = 0$ q. s. em Ω.*

Demonstração: Ver [18]. Página 10.

Desta proposição tem-se que T_u fica univocamente determinada por u q. s. sobre Ω, isto é, se u, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ q. s. em Ω. Por este motivo, identifica-se u com a distribuição T_u por ela definida.

Ressaltamos aqui que existem distribuições não definidas por funções $L^1_{loc}(\Omega)$, pode-se ver um exemplo em [15], página 28. Desta forma vemos que o conceito de distribuição generaliza o de função localmente integrável.

Proposição 1.12 *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [18]. Página 13.

Define-se a derivada de ordem α de uma distribuição T sobre Ω como segue:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é uma distribuição. Com isso temos que toda distribuição sobre Ω possui derivada de todas as ordens, que ainda é uma distribuição sobre Ω. Além disso, o operador derivação $D^k : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $T \mapsto D^\alpha T$ é linear e contínuo.

1.1.4 Espaços $L^p(0, T; V)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam $1 \leq p \leq \infty$, V um espaço de Hilbert e $0 < T < \infty$. Define-se $L^p(0, T; V)$ como sendo o espaço de Banach formado pelas funções vetoriais $u : (0, T) \to V$ tais que a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_V$ é mensurável e $\|u(t)\|_V \in L^p(0,T)$. Quando $1 \leq p < \infty$ define-se em $L^p(0,T;V)$ a norma:

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

quando $p = \infty$, temos

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \sup_{0<t<T} \text{ess}\|u(t)\|_V.$$

Para o caso em que $p = 2$, temos que $L^2(0,T;V)$ é um espaço de Hilbert, com o produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T;V)} = \int_0^T (u(t),v(t))_V \, dt.$$

Um resultado importante a respeito dos espaços $L^p(0,T;V)$ é o que permite fazer a identificação $(L^p(0,T;V))' \approx L^q(0,T;V')$, onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, para o caso em que $p = 1$, identifica-se $(L^1(0,T;V))' \approx L^\infty(0,T;V')$. Faremos agora o caso em que $p = 1$ e $V = L^2(\Omega)$. Para isso defina

$$\begin{array}{rcl} F : L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) & \to & \left(L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right)\right)' \\ u & \mapsto & F(u) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} F(u) : L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right) & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \langle F(u),\xi\rangle = \displaystyle\int_0^T \langle \xi(t),u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)} \, dt \end{array}$$

F é linear, contínua e bijetiva. Deste modo fazemos a identificação:

$$L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \approx \left(L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right)\right)',$$

e os elementos de $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ podem ser vistos como elementos do dual de $L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right)$. Então quando dizemos que

$$u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

temos que

$$\langle u_\nu, \xi\rangle \to \langle u, \xi\rangle_{(L^1(0,T;(L^2(\Omega))'))'\times L^1(0,T;(L^2(\Omega))')}, \ \forall\ \xi \in L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right),$$

o que significa que

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^T \langle \xi(t), u_\nu(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}\,dt & \to & \displaystyle\int_0^T \langle \xi(t), u(t)\rangle_{(L^2(\Omega))'\times L^2(\Omega)}\,dt, \\ & \forall & \xi \in L^1\left(0,T;(L^2(\Omega))'\right). \end{array} \tag{1.1.1}$$

Temos agora a seguinte proposição

Proposição 1.13 *Se $u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, então $u_\nu \rightharpoonup u$ em $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$.*

Demonstração:

Dada $h \in \left(L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\right)'$, pelo teorema de Riesz existe uma única $\varphi_h \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ tal que

$$\langle h, w\rangle_{(L^2(Q))'\times L^2(Q)} = (\varphi_h, w)_{L^2(Q)}\ \ \forall\ w \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) = L^2(Q).$$

Considere

$$\begin{array}{rcl} \xi : (0,T) & \to & \left(L^2(\Omega)\right)' \\ t & \mapsto & \xi(t), \end{array}$$

onde

$$
\begin{array}{rcl}
\xi(t) : L^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\
f & \mapsto & \langle \xi(t), f \rangle_{(L^2(\Omega))' \times L^2(\Omega)} = (\varphi_h, f) \, .
\end{array}
$$

Então $\xi \in L^1\left(0, T; (L^2(\Omega))'\right)$. Pela hipótese e considerando em (1.1.1) a função ξ acima definida, segue que

$$
\int_0^T (\varphi_h, u_\nu(t))\, dt \to \int_0^T (\varphi_h, u(t))\, dt.
$$

Entretanto note que

$$
\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^T (\varphi_h, u_\nu(t))\, dt & = & \displaystyle\int_Q \varphi_h(x,t) u_\nu(x,t) dx dt = (\varphi_h, u_\nu)_{L^2(Q)} \\
& = & \langle h, u_\nu \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))} \, ,
\end{array}
$$

e analogamente

$$
\int_0^T (\varphi_h, u(t))\, dt = \langle h, u \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))} \, .
$$

Portanto:

$$
\langle h, u_\nu \rangle \to \langle h, u \rangle_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))' \times L^2(0,T;L^2(\Omega))} \, , \ \forall \ h \in \left(L^2 \left(0, T; L^2(\Omega)\right)\right)' ,
$$

ou seja

$$
u_\nu \rightharpoonup u \text{ em } L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right).
$$

□

Uma distribuição vetorial sobre $(0, T)$ é qualquer aplicação linear e contínua de $\mathcal{D}(0, T)$ em V, o espaço das distribuições vetoriais representaremos por $\mathcal{D}'(0, T; V)$.

Considere $u \in L^p(0,T;V)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, a integral (integral de Bochner)

$$\int_0^T u(t)\varphi(t)dt$$

existe como um vetor de V, então

$$\begin{array}{rcl} T_u : \mathcal{D}(0,T) & \to & V \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_0^T u(t)\varphi(t)dt \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência de $\mathcal{D}(0,T)$, isto é, T_u é uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e com isso fazemos a identificação $u \approx T_u$.

Define-se a derivada de uma distribuição vetorial como segue: sejam $u \in \mathcal{D}'(0,T;V)$ e $n \geq 0$, a derivada de ordem n de u é dada por

$$\left\langle \frac{d^n u}{dt}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle u, \frac{d^n \varphi}{dt} \right\rangle, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Seja V um espaço de Banach. Representamos por $C\left([0,T];V\right)$ o espaço das funções vetoriais u de $[0,T]$ com valores em V, tais que $t \mapsto \|u(t)\|_V$ é contínua em $[0,T]$. A norma em $C\left([0,T];V\right)$ é dada por

$$\|u\|_{C([0,T];V)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_V.$$

Dizemos que $u \in C_w\left([0,T];V\right)$ quando a aplicação $t \mapsto \langle \xi, u(t) \rangle_{V' \times V}$ é contínua em $[0,T]$, $\forall\, \xi \in V$. Com respeito a estes espaços, temos

Proposição 1.14 *Sejam V e H dois espaços de Hilbert e $1 \leq p \leq \infty$. Se $V \hookrightarrow H$ e $u \in L^p\left(0,T;V\right)$ com $u' \in L^p\left(0,T;H\right)$, então $u \in C\left([0,T];H\right) \cap C_w\left([0,T];V\right)$.*

Demonstração: [14].

1.1.5 Espaços de Sobolev

Consideremos Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular. Definimos o espaço de Sobolev como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\ |\alpha| \leq m\},$$

onde D^α é o operador de derivação de ordem α, no sentido das distribuições. Este espaço está munido da seguinte norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Em especial, quando $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert que denotamos por $H^m(\Omega)$. O fato que, em geral, $\mathcal{D}(\Omega)$ não é denso em $H^m(\Omega)$ nos motiva a definir um novo espaço

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)},$$

que é um espaço de Hilbert quando munido da topologia induzida do $H^m(\Omega)$. Representamos o dual de $H_0^m(\Omega)$ por $H^{-m}(\Omega)$.

A desigualdade abaixo nos permite estabelecer uma norma em $H_0^1(\Omega)$ equivalente a norma induzida por $H^1(\Omega)$.

Proposição 1.15 (Desigualdade de Poincaré) *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ limitado em alguma direção x_i. Então*

$$|u| \leq (b - a)|\nabla u|,\ u \in H_0^1(\Omega),$$

onde $proj_i\Omega \subset (a, b)$.

Demonstração: Ver [18]. Página 36.

A aplicação $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = |\nabla u|$ define uma norma em $H_0^1(\Omega)$. De posse da desigualdade de Poincaré, verifica-se facilmente que esta norma é equivalente a norma usual, induzida por $H^1(\Omega)$. Associado a essa norma temos o produto interno

$$((u,v))_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

Proposição 1.16 *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, com fronteira limitada. Sejam $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

$$\begin{array}{llll} se & \frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0, & então & W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ onde } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}, \\ se & \frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0, & então & W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\, q \in [p, +\infty[, \\ se & \frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0, & então & W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), \end{array}$$

Demonstração: Ver [1]. Página 168.

Proposição 1.17 *Seja Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, com fronteira limitada. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então, temos as seguintes imersões contínuas:*

$$\begin{array}{llll} se & 1 \leq p < N & então & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ se & p = N, & então & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\, q \in [p, +\infty[, \\ se & p > N, & então & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega), \end{array}$$

Demonstração: Ver [1]. Página 168.

Proposição 1.18 (Rellich-Kondrachov) *Seja Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1. Então as seguintes imersões são compactas:*

$$\begin{array}{llll} se & p < N & então & W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*[\text{ onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ se & p = N, & então & W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)\ \forall\, q \in [1, +\infty[, \\ se & p > N, & então & W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}), \end{array}$$

Demonstração: Ver [1]. Página 169.

Proposição 1.19 (Lions-Aubin) *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0, B_1 reflexivos, $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ com imersões contínuas e $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B$ com imersão compacta. Seja*

$$W[0,T] = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0), u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, com a norma definida por

$$\|u\|_{W[0,T]} = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

Então, $W[0,T]$ é um espaço de Banach reflexivo que esta imerso compactamente em $L^{p_0}(0,T;B_0)$.

Demonstração: Ver [14]. Página 58.

Proposição 1.20 *(***Lema de Lions***) Seja (u_ν) uma sequência de funções de $L^q(\Omega\times]0,T[)$ e $1 < q < \infty$. Se*

- *$u_\nu \to u$, quase sempre em $\Omega\times]0,T[$*
- *$\|u_\nu\|_{L^q(\Omega\times]0,T[)} \leq c$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$*

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(\Omega\times]0,T[)$

Demonstração: Ver [14]. Página 12.

1.1.6 Teoria Espectral

Muitos problemas em equações diferenciais parciais podem ser reformulados numa forma abstrata envolvendo operadores em espaços de Hilbert. Nesta subseção pretendemos apresentar o clássico Teorema Espectral, fundamental para a escolha de bases convenientes para a construção de soluções aproximadas. Para que fique claro o enunciado do Teorema

Espectral, consideremos dois espaços de Hilbert complexos V e H tais que $V \hookrightarrow H$ e V é denso em H. Consideremos ainda $a(u, v)$ uma forma sesquilinear contínua em $V \times V$.

Seja A um operador linear de V em V. Denotemos por $\mathcal{D}(A)$ ao conjunto dos $u \in V$ tal que a forma antilinear $v \mapsto a(u, v)$ é contínua em V com a topologia induzida por H. Como $\overline{A} = H$, podemos prolongar esta forma antilinear a todo H, e portanto, pela **proposição (1.8)**, para cada $u \in \mathcal{D}(A)$, existe um único $A(u) \in H$ tal que $a(u, v) = (Au, v)$, $\forall v \in V$.

Observemos que

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in V;\ \exists\ f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H,\ \forall\ v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Segue desta caracterização que $\mathcal{D}(A)$ é um subsepaço linear de H e que

$$A : \mathcal{D}(A) \subset V \to H$$

definido acima é um operador de H. Neste contexto, diremos que A é o operador definido pela terna $\{V, H, a(u, v)\}$.

Proposição 1.21 (Teorema Espectral) *Sejam V e H dois espaços de Hilbert, tais que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e V é denso em H. Suponhamos que $a(u, v)$ é uma forma sesquilinear contínua em $V \times V$, com $a(u, v)$ hermitiana. Seja A o operador definido pela terna $\{V, H, a(u, v)\}$. Então:*

(i) *A é auto-adjunto e existe um sistema enumerável, ortonormal e completo $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de H constituido por vetores próprios de A, e além disso, $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é completo em V;*

(ii) *Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os valores próprios de A correspondentes aos $(\omega_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ então*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_\nu \leq \ldots,\ \text{e } \lambda_\nu \to \infty.$$

(iii) *O domínio de A é dado por:*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in H;\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 |(u, \omega_\nu)_H|^2 < \infty \right\}.$$

(iv)

$$Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, \omega_\nu)_H \omega_\nu,\ \forall\ u \in \mathcal{D}(A).$$

Demonstração: Ver [20]. Página 127.

1.1.7 Teoria do Traço

Conforme explicitado em Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [2] existe uma única aplicação

$$\begin{array}{rcl} \gamma : H^m(\Omega) & \rightarrow & \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma(u) = \{\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u\}, \end{array}$$

denominada aplicação traço; que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u = \left(u\Big|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma, \cdots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\Big|_\Gamma \right) \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$$

e admitindo uma inversa à direita, Λ linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\Lambda : \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^m(\Omega)$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\Lambda\xi) = \xi \quad \forall \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\Gamma)$$

Tomando, em particular, $m = 1$ temos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \gamma_0 : H^1(\Omega) & \rightarrow & H^{1/2}(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma_0 u = u|_\Gamma \end{array}$$

que é denominada aplicação traço de ordem zero.

Consideremos $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_1 = ((u, v))_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

que o faz um espaço de Hilbert.

A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) & \rightarrow & H^{-1/2}(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma \end{array}$$

prolonga-se, por continuidade, a uma aplicação linear e contínua

$$\gamma_1 \;:\; \mathcal{H}^1(\Omega) \;\rightarrow\; H^{-1/2}(\Gamma)$$

posto que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

1.2 Resultados Auxiliares

1.2.1 Desigualdades Elementares

A seguir uma coleção elementar, mas fundamental, de desigualdades. Estas estimativas são continuamente empregada em toda parte do texto e é de fácil memorização.

1. **Desigualdade Cauchy's**

$$ab \;\leq\; \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{1.2.2}$$

2. **Desigualdade Cauchy's com η**

$$ab \;\leq\; \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta} \quad (a, b, \eta > 0) \tag{1.2.3}$$

3. **Desigualdade Young's**

   Seja $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \;\leq\; \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0) \tag{1.2.4}$$

4. **Desigualdade Young's com η**

$$ab \;\leq\; \eta a^p + c(\eta) b^q \quad (a, b, \eta > 0) \tag{1.2.5}$$

   para $c(\eta) = (\eta p)^{-p/q} q^{-1}$.

5. **Desigualdade Minkowski's**

   Assuma $1 \leq p, q \leq \infty$ e $u, v \in L^p(\Omega)$. Então

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \;\leq\; \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.2.6}$$

6. **Desigualdade Cauchy-Schwarz**

$$|x \cdot y| \;\; \leq \;\; |x| \cdot |y| \quad (x, y \in \mathbb{R}^n) \tag{1.2.7}$$

7. **Desigualdade** Se $1 \leq \rho < \infty$ e $a \geq 0$, $b \geq 0$ então

$$(a+b)^\rho \;\; \leq \;\; 2^{\rho-1}(a^\rho + b^\rho) \tag{1.2.8}$$

Proposição 1.22 (Fórmula de Green) *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \;\; = \;\; -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ e ν denota o vetor unitário exterior à Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx \;\; = \;\; -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [7]. Página 102.

Proposição 1.23 ($2^{\underline{a}}$ Fórmula de Green Generalizada) *Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e todo $v \in H^1(\Omega)$ tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \;\; = \;\; \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1); H^{1/2}(\Gamma_0)}.$$

Demonstração: Ver [18]. Página 122.

Proposição 1.24 (Lema de Gronwall) *Seja $m \in L^1(a,b)$ tal que $m \geq 0$ q. s. em (a,b) e seja $c \geq 0$. Consideremos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua verificando*

$$\varphi(t) \leq c + \int_a^t m(\xi)\varphi(\xi) d\xi, \;\; \forall \; t \in [a,b].$$

Então

$$\varphi(t) \leq c e^{\int_a^b m(\xi)d\xi}, \ \forall \ t \in [a,b].$$

Demonstração: Ver [15]. Página 198.

1.2.2 Outros Resultados

Reunimos nesta seção outros resultados que serão usados nesta dissertação.

Para facilitar a análise, nos introduziremos os seguintes operadores binários

$$\begin{aligned}
(g * \Delta u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds \\
(g \Box \nabla u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-\tau)|\nabla u(x,t) - \nabla u(x,\tau)|^2 d\tau \\
(g \Box u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-\tau)|u(x,t) - u(x,\tau)|^2 d\tau \\
(g \diamond u)(x,t) &:= \int_0^t g(t-\tau)\{u(x,\tau) - u(x,t)\} d\tau
\end{aligned}$$

Note que o sinal de $g \Box u$ depende unicamente do sinal de g. Com esta notação nós temos

Lema 1.1 *As relações introduzidas satisfazem*

$$\begin{aligned}
(g * u)(x,t) &= \left(\int_0^t g(s)ds\right) u(x,t) + (g \diamond u)(x,t) \\
\Big|\left(g \diamond u\right)(x,t)\Big|^2 &\leq \left(\int_0^t \Big|g(s)\Big| ds\right)\left(\Big|g\Big| \Box u\right)(x,t)
\end{aligned}$$

Demonstração: É uma consequência direta da definição e da desigualdade de Hölder. De fato,

$$\begin{aligned}
& + (g * u)(x,t) \\
= & + \int_0^t g(t-s)u(x,s)ds = \int_0^t g(t-s)\{u(x,s) - u(x,t) + u(x,t)\}ds \\
= & + \int_0^t g(t-s)\{u(x,s) - u(x,t)\}ds + \int_0^t g(t-s)\{u(x,t)\}ds \\
= & + \left(\int_0^t g(s)ds\right) u(x,t) + (g \diamond u)(x,t)
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
& +\Big| \left(g \diamond u\right)(x,t)\Big|^2 \\
= & +\Big| \int_0^t g(t-s)\{u(x,s)-u(x,t)\}ds\Big|^2 \\
\leq & +\left[\int_0^t \Big|g^{1/2}(t-s)\Big|\Big|g^{1/2}(t-s)\Big|\Big|u(x,s)-u(x,t)\Big|ds\right]^2 \\
\leq & +\left[\left(\int_0^t \Big|g^{1/2}(t-s)\Big|^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t \Big|g^{1/2}(t-s)\Big|^2\Big|u(x,s)-u(x,t)\Big|^2 ds\right)^{1/2}\right]^2 \\
\leq & +\left[\left(\int_0^t \Big|g(t-s)\Big|ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t \Big|g(t-s)\Big|\Big|u(x,s)-u(x,t)\Big|^2 ds\right)^{1/2}\right]^2 \\
\leq & +\left(\int_0^t \Big|g(t-s)\Big|ds\right)\left(\int_0^t \Big|g(t-s)\Big|\Big|u(x,s)-u(x,t)\Big|^2 ds\right) \\
\leq & \left(\int_0^t \Big|g(s)\Big|ds\right)\left(\Big|g\Big|\Box u\right)(x,t)
\end{aligned}
$$

■

Temos que

$$
\begin{aligned}
(g' * u)(x,t) &= \left(\int_0^t g'(s)ds\right)u(x,t) + (g' \diamond u)(x,t) \\
\Rightarrow \quad g(0)u(x,t) + (g' * u)(x,t) &= g(t)u(x,t) + (g' \diamond u)(x,t)
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

de forma análoga

$$
g'(0)u(x,t) + (g'' * u)(x,t) = g'(t)u(x,t) + (g'' \diamond u)(x,t) \tag{1.2.10}
$$

Lema 1.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Para algum $v \in C^1(0,T,H^1(\Omega))$ nos temos*

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)\nabla v d\tau \nabla v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g'\Box\nabla v dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega g\Box\nabla v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right\}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)v d\tau \cdot v_t dx &= -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g'\Box v dx \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega g\Box v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega |v|^2 dx\right\}
\end{aligned}
$$

Demonstração: Para mostar as identidades acima é suficiente diferenciar as expressões

$$\int_\Omega g\Box\nabla v dx \qquad e \qquad \int_\Omega g\Box v dx$$

De fato, como

$$\int_\Omega g\Box\nabla v = \int_\Omega \int_0^t g(t-\tau)|\nabla v(x,t) - \nabla v(x,\tau)|^2 d\tau dx$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\Omega g\Box\nabla v dx \quad &= \quad +\int_\Omega g'\Box\nabla v dx + 2\int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\nabla v(x,t)\nabla v_t(x,t)d\tau dx \\ &\quad -2\int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)\nabla v(x,\tau)\nabla v_t(x,t)d\tau dx \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Observando que

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)\int_\Omega \nabla v(x,t)\nabla v_t(x,t)dx \\ = \quad &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g(t-\tau)d\tau\right)\int_\Omega |\nabla v(x,t)|^2 dx\right] \\ &-\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v(x,t)|^2 dx \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

substituindo (1.2.12) em (1.2.11) , resulta

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_0^t g(t-s)\nabla v d\tau\cdot\nabla v_t dx \quad &= \quad -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g'\Box\nabla v dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int g\Box\nabla v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right\} \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que

$$\begin{aligned} \int_\Omega\int_0^t g(t-\tau)v d\tau\cdot v_t dx \quad &= \quad -\frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega g'\Box v dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int g\Box v dx - \left(\int_0^t g d\tau\right)\int_\Omega |v|^2 dx\right\} \end{aligned}$$

■

Lema 1.3 *Para quaisquer $g, u \in C^1(\mathbb{R})$ se verifica a seguinte identidade*

$$2\,[g*u]\,u' \quad = \quad g'\Box u - g(t)|u|^2 - \frac{d}{dt}\left\{g\Box u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|u|^2\right\}$$

Demonstração. Derivando a seguinte expressão,

$$g\Box u - \left(\int_0^t g(s)ds\right)|u|^2$$

a igualdade do Lema se verifica.

$\blacksquare$

Proposição 1.25 (Lema de Kim) *Seja $\{u_k\}$ uma seqüência de funções tal que*

$$\begin{aligned} u^k &\overset{*}{\rightharpoonup} u \quad em \quad L^\infty(0,T,H^\beta(]0,L[)) \\ u_t^k &\rightharpoonup u_t \quad em \quad L^2(0,T,H^\alpha(]0,L[)) \end{aligned}$$

quando $k \to +\infty$, para $\alpha < \beta$. Então

$$u^k \to u \quad em \quad C([0,T];H^r(]0,L[))$$

para todo $r < \beta$.

Demonstração: Ver [8]. Página 22.

1.2.3 A Regularidade do Termo Convolução

Para mostrar a existência da solução forte nós usaremos o seguinte resultado de regularidade para a solução do sistema elíptico associado ao problema [(0.0.15) – (0.0.21)].

Lema 1.4 *Suponhamos que*

$$K \in L^2(\Omega_2)\ ,\ M \in L^2(\Omega_1)\ ,\ D \in H^{1/2}(\Gamma_1)\ ,\ a, b \in \mathbb{R}$$

então existe somente uma solução

$$\{u, v\} \in H^2(\Omega_2) \times H^2(\Omega_1)$$

de

$$-a\Delta u = K \quad em \quad \Omega_2 \tag{1.2.13}$$

$$-b\Delta v = M \quad em \quad \Omega_1 \tag{1.2.14}$$

$$u(x) = 0 \quad em \quad \Gamma \tag{1.2.15}$$

$$u(x) = v(x) \quad em \quad \Gamma_1 \tag{1.2.16}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial \nu} = b\frac{\partial v}{\partial \nu} + D \quad em \quad \Gamma_1 \tag{1.2.17}$$

Demonstração: Ver [10]. Página 119.

Nós também consideraremos o espaço

$$H^m_\Gamma(\Omega_2) = \{\omega \in H^m(\Omega_2)\;; \omega(x) = 0 \; em \; \Gamma\}$$

com $m \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2$.

Lema 1.5 *Seja H um espaço de Hilbert. Consideremos a equação de Volterra's*

$$\omega(t) - \alpha \int_0^t g(t-s)\omega(s)ds = f(t)$$

onde $\alpha > 0$, $0 \leq g \in C^0([0,\infty[)$ satisfazendo $\alpha \displaystyle\int_0^\infty g(s)ds < 1$. Então para $f \in L^\infty(0,T,H)$, existe uma única solução ω satisfazendo

$$\omega \in L^\infty(0,T,H)$$

Além disso, existe uma constante positiva $c > 0$, independente de T, tal que

$$\|\omega\|_{L^\infty(0,T,H)} \leq c\|f\|_{L^\infty(0,T,H)}$$

Demonstração: Sabemos que $L^\infty(0,T,H)$ é um espaço de Banach.

Considere o operador

$$\begin{array}{rcccl} T & : & L^\infty(0,T,H) & \to & L^\infty(0,T,H) \\ & & \omega(t) & & T(\omega(t)) = f(t) + \alpha \displaystyle\int_0^t g(t-s)\omega(s)ds \end{array}$$

o qual é uma contração. De fato, seja $\{\omega_1(t), \omega_2(t)\} \in L^\infty(0,T,H)$, temos

$$\begin{aligned} \|T\omega_1(t) - T\omega_2(t)\|_H &= \left\| \alpha \int_0^t g(t-s)ds(\omega_1(s) - \omega_2(s))ds \right\|_H \\ &\leq \alpha\|\omega_1(s) - \omega_2(s)\|_{L^\infty(0,T,H)} \cdot \int_0^t g(t-s)ds \\ &\leq \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^\infty(0,T,H)} \end{aligned}$$

tomando o supremo essencial

$$\|T\omega_1 - T\omega_2\|_H \quad \leq \quad \|\omega_1 - \omega_2\|_{L^\infty(0,T,H)}$$

e aplicando o teorema do ponto fixo de Banach, temos que existe uma única solução $\omega \in L^\infty(0, T, H)$.

Como

$$\omega(t) = f(t) + \alpha \int_0^t g(t-s)\omega(s)ds$$

conclui-se

$$\|\omega\|_{L^\infty(0,T,H)} \quad \leq \quad c\|f(t)\|_{L^\infty(0,T,H)}$$

■

Observação 1.1 *O Lema (1.5) continua sendo válido se considerarmos o espaço $C^0([0, \infty[; H)$ no lugar de $L^\infty(0, T, H)$*

1.2.4 O Espaço V

Nesta seção vamos introduzir um subespaço de $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$, que denotaremos por V, o qual será utilizado nos capítulos seguintes para o estudo do problema [(0.0.15)-(0.0.21)]. Consideramos $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo e limitado com fronteira Γ regular, sendo $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \backslash \overline{\Omega}_1$ ambos subdomínios com fronteiras regulares Γ_1 e $\Gamma_2 = \Gamma \cup \Gamma_1$, respectivamente. Definimos,

$$V = \{\{\Phi, \Psi\} \in H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1) \; ; \; \Phi = \Psi \; sobre \; \Gamma_1 \; ; \; \Phi = 0 \; sobre \; \Gamma\}$$

Assim vemos que V é um subespaço de $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$. Podemos, de modo natural, induzir o produto interno e a norma de $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$ em V. Na verdade, V é um subespaço fechado de $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$. Com efeito, seja $\{\phi_n, \psi_n\} \in V$ tal que

$$\{\phi_n, \psi_n\} \quad \to \quad \{\phi, \psi\} \quad em \quad H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1) \tag{1.2.18}$$

vamos mostrar que $\{\phi, \psi\} \in V$. De fato, observando (1.2.18) e considerando γ_0 *e* $\overline{\gamma_0}$ traços sobre $H^1(\Omega_2)$ *e* $H^1(\Omega_1)$, respectivamente, temos

$$\begin{cases} \gamma_0\phi_n \quad \to \quad \gamma_0\phi \quad sobre \quad H^{1/2}(\Gamma \cup \Gamma_1) \\ \overline{\gamma_0}\psi_n \quad \to \quad \overline{\gamma_0}\psi \quad sobre \quad H^{1/2}(\Gamma_1) \end{cases} \tag{1.2.19}$$

Como $\{\phi_n, \psi_n\} \in V$, temos que

$$\begin{cases} \gamma_0\phi_n &= \overline{\gamma_0}\psi_n \quad sobre\ \Gamma_1 \\ \gamma_0\phi_n &= \quad 0 \quad\ \ sobre\ \Gamma \end{cases} \tag{1.2.20}$$

por (1.2.19), (1.2.20) e pela unicidade do limite concluímos nossa afirmação.

Como $V \hookrightarrow H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$ é fechado e sendo $H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$ um espaço de Hilbert, temos que V é um espaço de Hilbert.

A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_V & : & V & \rightarrow \mathbb{R} \\ & & \{\phi, \psi\} & \mapsto \|\{\phi, \psi\}\|_V = [a|\nabla\phi|^2_{L^2(\Omega_2)} + b|\nabla\psi|^2_{L^2(\Omega_1)}]^{1/2} \end{array}$$

com $a, b > 0$ é uma norma em V, além disso, as normas $\|, \|_V$ e $\|, \|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}$ são equivalentes. De fato, é claro que a aplicação $\{\phi, \psi\} \in V \mapsto [a|\nabla\phi|^2_{L^2(\Omega_2)} + b|\nabla\psi|^2_{L^2(\Omega_1)}]^{1/2}$ define uma seminorma em V. Agora se $\|\{\phi, \psi\}\|^2_V = a|\nabla\phi|^2_{L(\Omega_2)} + b|\nabla\psi|^2_{L^2(\Omega_1)} = 0$ temos $|\nabla\phi|^2_{L(\Omega_2)} = 0$ e $|\nabla\psi|^2_{L(\Omega_1)} = 0$ então $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i} = 0$ e $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0$, $\forall\ i = 1, \cdots, n$. Logo, como Ω_2 e Ω_1 são conexos, temos que ϕ e ψ são constantes. Sendo o traço de ϕ nulo sobre Γ, segue que $\phi = 0$ q.s em Ω_2. Temos também que o traço de ϕ coincide com o traço de ψ sobre Γ_1, como ϕ é nulo temos que o traço de ψ é nulo sobre Γ_1, segue que $\psi = 0$ q.s em Ω_1.

Para provarmos que $\|, \|_V$ é equivalente a $\|, \|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}$, basta mostrarmos que existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1\|\{u, v\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)} \leq \|\{u, v\}\|_V \leq c_2\ \|\{u, v\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}\ ,\ \forall\ \{u, v\} \in V$$

temos claramente que

$$\|\{u, v\}\|_V \leq c_2\ \|\{u, v\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}$$

provaremos que

$$c_1\|\{u, v\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)} \leq \|\{u, v\}\|_V$$

Suponhamos por absurdo que não exista constante c_1 tal que

$$c_1\|\{u, v\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)} \leq \|\{u, v\}\|_V$$

ou equivalente, fixado $c_1 > 0$, qualquer, existe ao menos um vetor $\{u_1, v_1\}$ de V tal que

$$c_1 \|\{u_1, v_1\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)} > \|\{u_1, v_1\}\|_V$$

daí fixadas as constantes $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$, para cada uma existe ao menos um vetor $\{u, v\} \in V$ para o qual vale a desigualdade acima, isto é, existe uma sequência $(\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de V, tal que

$$\frac{1}{n}\|\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)} \quad > \quad \|\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\}\|_V \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.2.21}$$

fazendo

$$\{u_n, v_n\} \quad = \quad \frac{\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\}}{\|\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}} \tag{1.2.22}$$

temos

$$\|\{u_n, v_n\}\|^2_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)} = 1$$

ou seja,

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega_2)} + \|v_n\|^2_{H^1(\Omega_1)} = 1 \tag{1.2.23}$$

temos de (1.2.22) e (1.2.21), que

$$\|\{u_n, v_n\}\|_V = \frac{\|\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\}\|_V}{\|\{\widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n\}\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}} < \frac{1}{n} \tag{1.2.24}$$

De (1.2.23) e da **Proposição (1.18)**, temos que existe uma subsequência de $(\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ que denotaremos, ainda por $(\{u_n, v_n\})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\{u_n, v_n\} \to \{u, v\} \ em \ L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1)$$

De (1.2.24) temos que

$$a|\nabla u_n|^2_{L^2(\Omega_2)} + b|\nabla v_n|^2_{L^2(\Omega_1)} \to 0$$

então

$$\begin{cases} a|\nabla u_n|^2_{L^2(\Omega_2)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \to 0 \quad em \ L^2(\Omega_2) \\ b|\nabla v_n|^2_{L^2(\Omega_1)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial v_n}{\partial x_i} \to 0 \quad em \ L^2(\Omega_1) \end{cases} \tag{1.2.25}$$

De (1.2.23), temos

$$\{u_n, v_n\} \rightharpoonup \{u, v\} \ em \ H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1)$$

com $\{u, v\} \in V$, pois $\{u_n, v_n\} \in V$ que é completo.

Sabendo que $\{u, v\} \in V$ temos $u = v$ *sobre* Γ_1 *e* $u = 0$ *sobre* Γ, onde

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_2)\ ;\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_1)$$

como

$$\{u_n, v_n\} \rightharpoonup \{u, v\} \quad em\ H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1) \tag{1.2.26}$$

temos

$$\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \frac{\partial v_n}{\partial x_i}\right\} \rightharpoonup \left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right\} \quad em\ L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1) \tag{1.2.27}$$

logo por (1.2.25),(1.2.27) e pela unicidade do limite, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \tag{1.2.28}$$

então, u é constante e como $u = 0$ sobre Γ, temos $u = 0$ q.s em Ω_2. Segue de (1.2.26)

$$u_n \rightharpoonup 0\ em\ H^1(\Omega_2)$$

logo pela **proposição (1.18)**

$$u_n \rightarrow 0 \quad em \quad L^2(\Omega_2) \tag{1.2.29}$$

e por (1.2.25), temos

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow 0\ em\ L^2(\Omega_2) \tag{1.2.30}$$

Analisando (1.2.29) e (1.2.30), obtemos

$$u_n \rightarrow 0 \quad em \quad H^1(\Omega_2) \tag{1.2.31}$$

Observando (1.2.28) vemos que v é constante, como $\{u, v\} \in V$ e $u = 0$ q.s em Ω_2 temos $v = 0$ sobre Γ_1 e daí $v = 0$ q.s em Ω_1. De forma análoga ao que foi feito para u, obtemos que

$$v_n \rightarrow 0 \quad em \quad H^1(\Omega_1) \tag{1.2.32}$$

Portanto de (1.2.31),(1.2.32) e (1.2.23) temos um absurdo, o que prova nossa afirmação.

Seja

$$\begin{array}{rcll}\mathbf{a} & : & V\times V & \to \ \mathbb{R}\\ & & (\{\phi,\psi\},\{u,v\}) & \mapsto \ \mathbf{a}(\{\phi,\psi\},\{u,v\}) = a\left(\nabla\phi,\nabla u\right)_{L^2(\Omega_2)} + b\left(\nabla\psi,\nabla v\right)_{L^2(\Omega_1)}\end{array}$$

uma forma bilinear e coerciva em V. Notemos que V é denso com imersão compacta em $L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1)$.

Neste trabalho denotaremos o produto interno em V por

$$((\{\phi,\psi\},\{u,v\}))_V = a\left(\nabla\phi,\nabla u\right)_{L^2(\Omega_2)} + b\left(\nabla\psi,\nabla v\right)_{L^2(\Omega_1)}$$

Em virtude do **Teorema da Regularidade Elíptica (1.4)** e do fato que o operador A é definido pela terna

$$\{V; L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1); ((,))_V\}$$

obtemos que o domínio do operador A é definido por

$$\mathcal{D}(A) = \{\{\phi,\psi\}\in V\cap\left(H^2(\Omega_2)\times H^2(\Omega_1)\right); a\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = b\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\ sobre\ \Gamma_1\}$$

Para finalizar esta subseção vamos obter uma formulação para a solução fraca do problema [(0.0.15)-(0.0.21)].

Seja $\{\Phi,\Psi\}\in C^2(0,T,V)$; $\Phi(T)=\Phi_t(T)=\Psi(T)=\Psi_t(T)=0$. Formalmente multiplicamos (0.0.15) por Φ e integramos sobre $\Omega_2\times]0,T[$, temos

$$\begin{aligned} &+\int_0^T\int_{\Omega_2} u_{tt}(x,t)\Phi(t)dxdt + a\int_0^T\int_{\Omega_2} -\Delta u(x,t)\Phi(t)dxdt\\ &+\int_0^T\int_{\Omega_2} F(u(x,t))\Phi(t)dxdt + \int_0^T\int_{\Omega_2}(g*\Delta u)(x,t)\Phi(t)dxdt = 0\end{aligned} \tag{1.2.33}$$

Aplicando Fubini em (1.2.33), depois integrando por partes e usando a fórmula de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} &+\int_{\Omega_2}\left[\Phi(T)u_t(x,T) - \Phi(0)u_t(x,0) - \int_0^T u_t(x,t)\Phi_t(t)dt\right]dx\\ &+a\int_0^T\left[\int_{\Omega_2}\nabla u(x,t)\nabla\Phi(x,t)\right]dx - a\int_0^T\left[\int_{\Gamma_2}\nabla u\cdot\nu\Phi d\Gamma\right]dt\\ &+\int_0^T\int_{\Omega_2}F(u(x,t))\Phi(t)dxdt + \int_0^T\int_0^t\int_{\Gamma_2}g(t-s)\nabla u\cdot\nu\Phi d\Gamma dsdt\\ &+\int_0^T\int_0^t\int_{\Omega_2}g(t-s)\{-\nabla u(x,s)\nabla\Phi(x,t)\}dxdsdt = 0\end{aligned} \tag{1.2.34}$$

substituindo em (1.2.34), $\Phi(T) = 0$ e $\Gamma_2 = \Gamma \cup \Gamma_1$, obtemos.

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \left[-\ \Phi(0) u_t(x,0)\ -\ \int_0^T u_t(x,t)\Phi_t(t)dt \right] dx \\
-a \int_0^T \left[\int_{\Gamma_1} \nabla u \cdot \nu \Phi d\Gamma \right] dt + a \int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla u(x,t) \nabla \Phi(x,t) dxdt \\
+ \int_0^T \int_{\Omega_2} F(u(x,t))\Phi(t) dxdt + \int_0^T \int_0^t \int_\Gamma g(t-s) \nabla u \cdot \nu \Phi d\Gamma dsdt \\
+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(t-s) \nabla u \cdot \nu \Phi d\Gamma dsdt - a \int_0^T \left[\int_\Gamma \nabla u \cdot \nu \Phi d\Gamma \right] dt \\
+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega_2} g(t-s) \{ -\nabla u(x,s) \nabla \Phi(x,t) \} dxdsdt \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{1.2.35}
$$

integrando por partes, observando o sentido de $\nu = \{\text{normal exterior a } \Omega_2\}$, substituindo quando necessário $\Phi_t(T) = 0$, sabendo que $\{\Phi(t), \Psi(t)\} \in V$ e aplicando Fubini em (1.2.35) encontramos

$$
\begin{aligned}
- \int_{\Omega_2} \Phi(0) u_t(x,0) dx + \int_{\Omega_2} \Phi_t(0) u(x,0) dx \\
+ \int_0^T \int_{\Omega_2} u(x,t) \Phi_{tt}(t) dxdt + a \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi d\Gamma dt \\
+a \int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla u(x,t) \nabla \Phi(x,t) dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} F(u(x,t)) \Phi(t) dxdt \\
+ \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega_2} g(t-s) \{ -\nabla u(x,s) \nabla \Phi(x,t) \} dxdsdt \\
- \int_0^T \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(t-s) \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi d\Gamma dsdt \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{1.2.36}
$$

substituindo (0.0.20) em (1.2.36) observando que $\{\Phi(t), \Psi(t)\} \in V$, temos

$$
\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_{\Omega_2} u(x,t) \Phi_{tt}(t) dxdt + a \int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla u(x,t) \nabla \Phi(x,t) dxdt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_2} F(u(x,t)) \Phi(t) dxdt - \int_0^T \int_{\Omega_2} (g * \nabla u) \nabla \Phi dxdt \\
= \quad & + \int_{\Omega_2} u_1(x) \Phi(0) dx - \int_{\Omega_2} \Phi_t(0) u_0(x) dx \\
& + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[-a \frac{\partial u}{\partial \nu} + g * \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] \Psi d\Gamma dt
\end{aligned}
\tag{1.2.37}
$$

De forma análoga multiplicando formalmente (0.0.16) por Ψ e integramos sobre $\Omega_1 \times]0, T[$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_1} v_{tt}(x,t)\Psi(t)dxdt \\
-b\int_0^T \int_{\Omega_1} \Delta v(x,t)\Psi(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_1} G(v(x,t))\Psi(t)dxdt \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{1.2.38}
$$

aplicando Fubini, integrando por partes e usando a Fórmula de Green em (1.2.38) , temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\left[\Psi(T)v_t(x,T) - \Psi(0)v_t(x,0) - \int_0^T v_t(x,t)\Psi_t(t)dt\right]dx & \\
+b\int_0^T\left[\int_{\Omega_1}\nabla v(x,t)\nabla\Psi(x,t)dx - \int_{\Gamma_1}\Psi\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma\right]dt & \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} G(v(x,t))\Psi(t)dxdt \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{1.2.39}
$$

substituindo em (1.2.39), $\Psi(T)=0$ e observando que $\{\Phi(t),\Psi(t)\}\in V$, resulta

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_1}\left[-\Psi(0)v_t(x,0) - \int_0^T v_t(x,t)\Psi_t(t)dt\right]dx & \\
+b\int_0^T\int_{\Omega_1}\nabla v(x,t)\nabla\Psi(x,t)dxdt & \\
-b\int_0^T\int_{\Gamma_1}\Psi\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega_1} G(v(x,t))\Psi(t)dxdt \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{1.2.40}
$$

integrando por partes, sabendo que $\Psi_t(T)=0$ e aplicando Fubini em (1.2.40) encontramos

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega_1}\Psi(0)v_t(x,0)dx + \int_{\Omega_1}\Psi_t(0)v(x,0)dx & \\
+\int_0^T\int_{\Omega_1} v(x,t)\Psi_{tt}(t)dxdt - b\int_0^T\int_{\Gamma_1}\Psi\frac{\partial v}{\partial\nu}d\Gamma dt & \\
+b\int_0^T\int_{\Omega_1}\nabla v(x,t)\nabla\Psi(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_1} G(v(x,t))\Psi(t)dxdt \quad &= \quad 0
\end{aligned}
\tag{1.2.41}
$$

substituindo (0.0.21) em (1.2.39) e observando que $\{\Phi(t),\Psi(t)\}\in V$, temos

$$
\begin{aligned}
& +\int_0^T\int_{\Omega_1} v(x,t)\Psi_{tt}(t)dxdt \\
& +b\nabla v(x,t)\nabla\Psi(x,t)dxdt + G(v(x,t))\Psi(t)dxdt \\
= \quad & +\int_{\Omega_1} v_1(x)\Psi(0)dx - \int_{\Omega_1}\Psi_t(0)v_0(x)dx + \int_0^T\int_{\Gamma_1}\left[b\frac{\partial v}{\partial\nu}\right]\Psi\, d\Gamma dt
\end{aligned}
\tag{1.2.42}
$$

somando (1.2.37) com (1.2.42), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_2} u(x,t)\Phi_{tt}(t)dxdt + a\int_0^T \int_{\Omega_2} \nabla u(x,t)\nabla\Phi(x,t)dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_2} F(u(x,t))\Phi(t)dxdt - \int_0^T \int_{\Omega_2} (g * \nabla u)\nabla\Phi dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_1} [v(x,t)\Psi_{tt}(t) + b\nabla v(x,t)\nabla\Psi(x,t) + G(v(x,t))\Psi(t)]dxdt \\
= &+ \int_{\Omega_2} u_1(x)\Phi(0)dx - \int_{\Omega_2} u_0(x)\Phi_t(0)dx + \int_{\Omega_1} v_1(x)\Psi(0)dx \\
&- \int_{\Omega_1} v_0(x)\Psi_t(0)dx + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left[-a\frac{\partial u}{\partial \nu} + g * \frac{\partial u}{\partial \nu} + b\frac{\partial v}{\partial \nu}\right] \Psi \, d\Gamma dt
\end{aligned}
\tag{1.2.43}
$$

substituindo (0.0.19) em (1.2.43) e observando que $\{\Phi(t), \Psi(t)\} \in V$, temos

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^T \int_{\Omega_2} [u(x,t)\Phi_{tt}(t) + a\nabla u(x,t)\nabla\Phi(x,t) + F(u(x,t))\Phi(t) - (g * \nabla u)\nabla\Phi]dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_1} [v(x,t)\Psi_{tt}(t) + b\nabla v(x,t)\nabla\Psi(x,t) + G(v(x,t))\Psi(t)dxdt \\
= &+ \int_{\Omega_2} u_1(x)\Phi(0)dx - \int_{\Omega_2} u_0(x)\Phi_t(0)dx + \int_{\Omega_1} v_1(x)\Psi(0)dx - \int_{\Omega_1} v_0(x)\Psi_t(0)dx
\end{aligned}
$$

Isto motiva a seguinte definição de solução fraca para o problema [(0.0.15)-(0.0.21)].

Definição 1.1 *Dizemos que o par $\{u, v\}$ é solução fraca de $[(0.0.15) - (0.0.21)]$ quando*

$$
\{u, v\} \in L^\infty(0, T; V) \quad , \quad \{u_t, v_t\} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1))
$$

e satisfaz a seguinte identidade

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^T \int_{\Omega_2} [u\Phi_{tt} + a\nabla u\nabla\Phi - (g * \nabla u)\nabla\Phi + F(u)\Phi] \, dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_1} [v\Psi_{tt} + b\nabla v\nabla\Psi + G(v)\Psi] \, dxdt \\
= &\int_{\Omega_2} u_1(x)\Phi(0)dx - \int_{\Omega_2} u_0(x)\Phi_t(0)dx + \int_{\Omega_1} v_1(x)\Psi(0)dx - \int_{\Omega_1} v_0(x)\Psi_t(0)dx
\end{aligned}
$$

para qualquer $\{\Phi, \Psi\} \in C^2(0, T; V)$ tal que

$$
\Phi(T) = \Phi_t(T) = \Psi(T) = \Psi_t(T) = 0
$$

onde

$$
V = \{\{\Phi, \Psi\} \in H^1(\Omega_2) \times H^1(\Omega_1) \, ; \; \Phi = \Psi \; em \; \Gamma_1 \, ; \; \Phi = 0 \, ; \; em \; \Gamma\}
$$

Definição 1.2 *Dizemos que o par* $\{u, v\}$ *é solução forte de* [(0.0.15) − (0.0.21)] *quando*

$$\begin{aligned}
u_{tt} - a\Delta u + F(u) + g * \Delta u = 0 \quad & em \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)) \\
v_{tt} - b\Delta v + G(v) = 0 \quad & em \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)) \\
u(x,t) = 0 \quad & em \quad \Gamma \times]0,T[\\
u(x,t) = v(x,t) \quad & em \quad \Gamma_1 \times]0,T[\\
a\frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} = b\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad & em \quad L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)) \\
u(x,0) = u_0(x) \;\; e \;\; u_t(x,0) = u_1(x) \quad & em \quad \Omega_2 \\
v(x,0) = v_0(x) \;\; e \;\; v_t(x,0) = v_1(x) \quad & em \quad \Omega_1
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\{u, v\} &\in L^\infty(0,T;(\mathcal{H}^1(\Omega_2) \times \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap V) \\
\{u_t, v_t\} &\in L^\infty(0,T;V) \\
\{u_{tt}, v_{tt}\} &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)) \times L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))
\end{aligned}$$

1.3 Hipóteses e Resultado Principal

1.3.1 Hipóteses sobre F

Considere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponha que existe $c > 0$ tal que

$$sF(s) \geq c|s|^{\rho+1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \tag{1.3.1}$$

$$|F(s)| \leq c(|s| + |s|^\rho), \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \tag{1.3.2}$$

$$|F'(s)| \leq c|s|^{\rho-1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \tag{1.3.3}$$

onde

$$\rho \geq 1 \text{ se a dimensão do espaço } n \leq 2 \tag{1.3.4}$$

e

$$1 < \rho \leq \frac{n}{n-2} \text{ se a dimensão do espaço } n \geq 3 \tag{1.3.5}$$

1.3.2 Hipóteses sobre G

Considere $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponha que existe $c > 0$ tal que

$$\begin{aligned} sG(s) &\geq c|s|^{\rho+1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} && (1.3.6)\\ |G(s)| &\leq c(|s| + |s|^{\rho}), \text{ para todo } s \in \mathbb{R} && (1.3.7)\\ |G'(s)| &\leq c|s|^{\rho-1}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} && (1.3.8) \end{aligned}$$

onde

$$\rho \geq 1 \text{ se a dimensão do espaço } n \leq 2 \qquad (1.3.9)$$

e

$$1 < \rho \leq \frac{n}{n-2} \text{ se a dimensão do espaço } n \geq 3 \qquad (1.3.10)$$

1.3.3 Hipóteses sobre o núcleo g

Assume que a função de relaxação, $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}_+$ é de classe C^1 e satisfaz as seguintes condições:

$$g(t) \geq 0 \quad , \quad g'(t) \leq 0 \quad , \quad 0 < \beta_0 := a - \int_0^\infty g(\tau) d\tau \qquad (1.3.11)$$

De modo a obter a existência de soluções globais fortes, as seguintes hipóteses são feitas sobre os dados iniciais.

1.3.4 Hipóteses sobre os dados iniciais

Assuma que

$$\{u_0, v_0\} \in \left[(H^2(\Omega_2) \times H^2(\Omega_1)) \cap V\right] \qquad (1.3.12)$$

e

$$\{u_1, v_1\} \in V \qquad (1.3.13)$$

satisfazendo a condição de compatibilidade

$$a\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - b\frac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0 \ \ sobre \ \ \Gamma_1 \qquad (1.3.14)$$

Denotemos com E_1 e E_2 os funcionais de energia

$$E_1(t,u) \;=\; +\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|u_t|^2+\beta(t)|\nabla u|^2+2\widehat{F}(u)+g\Box\nabla u\right]dx$$

e

$$E_2(t,v) \;=\; +\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|v_t|^2+b|\nabla v|^2+2\widehat{G}(v)\right]dx$$

onde "$\Box$" denota a operação binária introduzida no **capítulo (1)** e $\beta(t)$ denota a função

$$\beta(t): \;=\; a-\int_0^t g(\tau)d\tau \;>0$$

A condição (1.3.11) implica que

$$\beta_0 \;\leq\; \beta(t) \;\leq\; a$$

Definimos a energia associada ao sistema [(0.0.15) $-$ (0.0.21)], como sendo

$$E(t,u,v) := E_1(t,u)+E_2(t,v)$$

Agora estamos em posição de apresentar nossos principais resultados.

Teorema 1.1 *Sob as* **hipóteses [(1.3.1)-(1.3.4)]** *o problema [(0.0.15)-(0.0.21)] possui uma única solução forte $\{u,v\}$, satisfazendo*

$$\begin{aligned}\{u,v\} &\in L^\infty(0,T;(\mathcal{H}^1(\Omega_2)\times\mathcal{H}^1(\Omega_1))\cap V)\\ \{u_t,v_t\} &\in L^\infty(0,T;V)\\ \{u_{tt},v_{tt}\} &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))\end{aligned}$$

Teorema 1.2 *Sob as* **hipóteses [(1.3.1)-(1.3.3)]** *e tomando os dados iniciais tais que*

$$\{u_0,v_0\}\in V \quad e \quad \{u_1,v_1\}\in L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1)$$

o problema [(0.0.15) $-$ (0.0.21)] *possui uma única solução fraca,* $\{u,v\}$ *satisfazendo*

$$\{u,v\}\in C(0,T;V)\cap C^1(0,T;L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))$$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Soluções Fortes e Fracas

2.1 Existência e Unicidade de Soluções Fortes

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de soluções fortes para o problema [(0.0.15) − (0.0.21)] e usando argumentos de densidade estenderemos o mesmo resultado para soluções fracas.

Para mostrar a existência da solução forte usaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste em aproximar o problema por problemas análogos porém em dimensão finita.

Escolhemos uma base $\{\{\phi_i, \psi_i\} \;\; i \in \mathbb{N}^*\}$ de V tal que

$$\{u_0, v_0\}, \{u_1, v_1\} \in l[\{\phi_1, \psi_1\}, \{\phi_2, \psi_2\}]$$

onde $l[\{\phi_1, \psi_1\}, \{\phi_2, \psi_2\}]$ é o subespaço gerado por $\{\phi_1, \psi_1\}$ *e* $\{\phi_2, \psi_2\}$. Denotemos por

$$V_m = l[\{\phi_1, \psi_1\}, \{\phi_2, \psi_2\}, \cdots, \{\phi_m, \psi_m\}]$$

o subespaço gerado por $\{\phi_1, \psi_1\}, \{\phi_2, \psi_2\}, \ldots, \{\phi_m, \psi_m\}$.

Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} \{u^m, v^m\} & : & [0, t_m] & \rightarrow & V_m \\ & & t & \mapsto & \{u^m(t), v^m(t)\} = \sum\limits_{i=1}^{m} g_{im}(t)\{\phi_i, \psi_i\} \end{array} \tag{2.1.1}$$

solução do seguinte problema aproximado:

$$\left|\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Omega_2}[u^m_{tt}\phi_i + a\nabla u^m\nabla\phi_i - (g*\nabla u^m)\nabla\phi_i + F(u^m)\phi_i]\,dx & & \\ \displaystyle +\int_{\Omega_1}[v^m_{tt}\psi_i + b\nabla v^m\nabla\psi_i + G(v^m)\psi_i]dx & = & 0 \\ \{u^m_0(x), v^m_0(x)\} = \{u_0(x), v_0(x)\} \in [(H^2(\Omega_2)\times H^2(\Omega_1))\cap V] & & \\ \{u^m_1(x), v^m_1(x)\} = \{u_1(x), v_1(x)\} \in V & & \end{array}\right. \tag{2.1.2}$$

De acordo com a teoria padrão de existência de equações diferenciais ordinárias existe uma solução do sistema (2.1.2), sobre algum intervalo $[0, t_m]$. Esta solução pode ser estendida a qualquer intervalo fechado $[0, T]$ em virtude da primeira estimativa.

2.1.1 Estimativas a Priori

Estimativa 1:

Multiplicando (2.1.2) por $g'_{im}(t)$ e somando em i, obtemos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\Omega_2}[u^m_{tt}u^m_t + a\nabla u^m\nabla u^m_t - (g*\nabla u^m)\nabla u^m_t + F(u^m)u^m_t]\,dx & & \\ \displaystyle +\int_{\Omega_1}[v^m_{tt}v^m_t + b\nabla v^m\nabla v^m_t + G(v^m)v^m_t]\,dx & = & 0 \end{array} \tag{2.1.3}$$

logo

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_2}(|u^m_t|^2 + a|\nabla u^m|^2)dx\right] - \int_{\Omega_2}(g*\nabla u^m)\nabla u^m_t + \int_{\Omega_2}F(u^m)u^m_t dx & & \\ \displaystyle +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1}(|v^m_t|^2 + b|\nabla v^m|^2)dx\right] + \int_{\Omega_1}G(v^m)v^m_t dx & = & 0 \end{array} \tag{2.1.4}$$

Fazendo

$$\widehat{F}(s) = \int_0^s F(\theta)d\theta \qquad e \qquad \widehat{G}(s) = \int_0^s G(\theta)d\theta$$

temos

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_2}2\widehat{F}(u^m)dx\right] & = & \displaystyle\int_{\Omega_2}F(u^m)u^m_t dx \\ \displaystyle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1}2\widehat{G}(v^m)dx\right] & = & \displaystyle\int_{\Omega_1}G(v^m)v^m_t dx \end{array} \tag{2.1.5}$$

substituindo (2.1.5) em (2.1.4), conseguimos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_2}\left(|u_t^m|^2+a|\nabla u^m|^2+2\widehat{F}(u^m)\right)dx\right]-\int_{\Omega_2}(g*\nabla u^m)\,\nabla u_t^m dx&\\ +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1}\left(|v_t^m|^2+b|\nabla v^m|^2+2\widehat{G}(v^m)\right)dx\right]&=0\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

pelo **Lema (1.2)**

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}(g*\nabla u^m)\,\nabla u_t^m dx&=+\int_{\Omega_2}\left(\int_0^t g(t-\tau)\nabla u^m d\tau\right)\nabla u_t^m dx\\&=-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega_2}|\nabla u^m|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}g'\Box\nabla u^m dx\\&\quad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega_2}g\Box\nabla u^m dx-\left(\int_0^t g d\tau\right)\int_{\Omega_2}|\nabla u^m|^2dx\right\}\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

substituindo (2.1.7) em (2.1.6), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\Omega_2}\left[|u_t^m|^2+\beta(t)|\nabla u^m|^2+2\widehat{F}(u^m)+g\Box\nabla u^m\right]dx\right\}&\\ +\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left(g(t)|\nabla u^m|^2dx-g'\Box\nabla u^m\right)dx&\\ +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1}\left(|v_t^m|^2+b|\nabla v^m|^2+2\widehat{G}(v^m)\right)dx\right]&=0\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

portanto

$$\frac{d}{dt}E(t,u^m,v^m)=+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}g'\Box\nabla u^m dx-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega_2}|\nabla u^m|^2dx\tag{2.1.9}$$

onde

$$\begin{aligned}E(t,u^m,v^m)&=+\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|u_t^m|^2+\beta(t)|\nabla u^m|^2+2\widehat{F}(u^m)+g\Box\nabla u^m\right]dx\\&\quad+\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|v_t^m|^2+b|\nabla v^m|^2+2\widehat{G}(v^m)\right]dx\end{aligned}\tag{2.1.10}$$

Analizando (2.1.9), (2.1.10) e as **hipóteses** [**(1.3.1)**-**(1.3.4)**], obtemos que

$$E(t,u^m,v^m)\geq 0$$

e

$$\frac{d}{dt}E(t,u^m,v^m)\leq 0$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 *a* t, concluímos que

$$E(t,u^m,v^m)\leq E(0,u^m,v^m)\tag{2.1.11}$$

o que implica

$$
\begin{aligned}
E(t,u^m,v^m) \;\; \leq \;\; & +\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|u_1^m(x)|^2+a|\nabla u_0^m(x)|^2+2\widehat{F}(u_0^m(x))\right]dx \\
& +\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|v_1^m(x)|^2+b|\nabla v_0^m(x)|^2+2\widehat{G}(v_0^m(x))\right]dx
\end{aligned}
\tag{2.1.12}
$$

temos por (2.1.2) que

$$
\begin{aligned}
E(t,u^m,v^m) \;\; \leq \;\; & +\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|u_1(x)|^2+a|\nabla u_0(x)|^2+2\widehat{F}(u_0(x))\right]dx \\
& +\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|v_1(x)|^2+b|\nabla v_0(x)|^2+2\widehat{G}(v_0(x))\right]dx
\end{aligned}
\tag{2.1.13}
$$

Portanto de (2.1.13), obtemos

$$
\begin{cases}
\{u^m,v^m\} & \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;V) \\
\{u_t^m,v_t^m\} & \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2))\times L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))
\end{cases}
\tag{2.1.14}
$$

daí pela **proposição (1.3)**, temos

$$
\begin{cases}
\{u^m,v^m\} & \overset{*}{\rightharpoonup} \quad \{u,v\} \quad\; em \quad L^\infty(0,T,H^1_\Gamma(\Omega_2))\times L^\infty(0,T,H^1(\Omega_1)) \\
\{u_t^m,v_t^m\} & \overset{*}{\rightharpoonup} \quad \{u_t,v_t\} \quad em \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2))\times L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))
\end{cases}
\tag{2.1.15}
$$

Segue de (2.1.14), que

$$
\begin{cases}
u^m & \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H^1_\Gamma(\Omega_2))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega_2)) \\
u_t^m & \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega_2)) = L^2(\Omega_2\times]0,T[)
\end{cases}
\tag{2.1.16}
$$

e

$$
\begin{cases}
v^m & \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;H^1(\Omega_1))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega_1)) \\
v_t^m & \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega_1)) = L^2(\Omega_1\times]0,T[)
\end{cases}
\tag{2.1.17}
$$

aplicando a **Teorema Aubin-Lions (1.19)** em (2.1.16) e (2.1.17), resulta que existe uma subsucessão de $\{u^m,v^m\}$ ainda denotada por $\{u^m,v^m\}$, tal que

$$
\{u^m,v^m\} \quad \longrightarrow \quad \{u,v\} \quad \text{forte em} \quad L^2(\Omega_2\times]0,T[)\times L^2(\Omega_1\times]0,T[)
\tag{2.1.18}
$$

donde segue pela **proposição (1.10)** que

$$
\{u^m,v^m\} \quad \longrightarrow \quad \{u,v\} \quad \text{q.s em} \quad (\Omega_2\times]0,T[)\times(\Omega_1\times]0,T[)
\tag{2.1.19}
$$

e pela continuidade da F e G, temos

$$\{F(u^m), G(v^m)\} \quad \longrightarrow \quad \{F(u), G(v)\} \quad \text{q.s em} \quad (\Omega_2 \times]0,T[) \times (\Omega_1 \times]0,T[) \tag{2.1.20}$$

Vamos mostrar agora que

$$\begin{cases} F(u^m) & \text{é limitada em} \quad L^\infty\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2 \times]0,T[) \\ G(u^m) & \text{é limitada em} \quad L^\infty\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1)\right) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1 \times]0,T[) \end{cases} \tag{2.1.21}$$

De fato, por (1.3.2), temos

$$|F(u^m(t))|^{\frac{\rho+1}{\rho}}_{L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)} = \int_{\Omega_2} |F(u^m(t))|^{\frac{\rho+1}{\rho}} dx \leq \int_{\Omega_2} [c(|u^m(t)| + |u^m(t)|)^\rho]^{\frac{\rho+1}{\rho}} dx$$

Fazendo uso da desigualdade (1.2.8) e da **proposição (1.6)**, obtemos

$$|F(u^m(t))|^{\frac{\rho+1}{\rho}}_{L^{\frac{\rho+1}{\rho}}} \quad \leq \quad c(\rho)|u^m(t)|^{\rho+1}_{L^{\rho+1}(\Omega_2)} \tag{2.1.22}$$

Segue de (1.3.4), (1.3.5), da **proposição (1.16)** e da estimativa (2.1.16) que

$$u^m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^{\rho+1}(\Omega_2)) \tag{2.1.23}$$

De (2.1.22) e (2.1.23), resulta que

$$F(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2))$$

analogamente, mostra-se que

$$G(v^m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1)\right)$$

Pelo **Lema de Lions (1.20)** e observando (2.1.20) e (2.1.21), temos que

$$\begin{cases} F(u^m) & \rightharpoonup & F(u) & \text{fraco em} & L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2 \times]0,T[) \\ G(v^m) & \rightharpoonup & G(v) & \text{fraco em} & L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1 \times]0,T[) \end{cases} \tag{2.1.24}$$

Para finalizar mostraremos que

$$\begin{cases} F(u^m) \rightharpoonup F(u) & em & L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right) \\ G(v^m) \rightharpoonup G(v) & em & L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1)\right) \end{cases} \tag{2.1.25}$$

De fato, temos de (2.1.21) que

$$F(u^m) \text{ é limitada em } L^\infty\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right) \hookrightarrow L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right)$$

e pela **proposição (1.3)**, resulta

$$F(u^m) \rightharpoonup \chi \; em \; L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right) \hookrightarrow L^{\frac{\rho+1}{\rho}}\left(\Omega_2\times]0,T[\right).$$

Desta convergência, (2.1.24) e pela unicidade de limite, conclui-se

$$F(u^m) \rightharpoonup F(u) \; em \; L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right)$$

analogamente, mostra-se que

$$G(v^m) \rightharpoonup G(v) \; em \; L^2(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1))$$

Observando (2.1.15) e (2.1.25), e pela **proposição (1.13)** temos que

$$u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u \; em \; L^\infty(0,T,H^1_\Gamma(\Omega_2)) \;\Rightarrow\; u^m \rightharpoonup u \; em \; L^2(\Omega_2\times]0,T[) \tag{2.1.26}$$

$$v^m \overset{*}{\rightharpoonup} v \; em \; L^\infty(0,T,H^1(\Omega_1)) \;\Rightarrow\; v^m \rightharpoonup v \; em \; L^2(\Omega_1\times]0,T[) \tag{2.1.27}$$

$$u^m_t \overset{*}{\rightharpoonup} u_t \; em \; L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \;\Rightarrow\; u^m_t \rightharpoonup u_t \; em \; L^2(\Omega_2\times]0,T[) \tag{2.1.28}$$

$$v^m_t \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \; em \; L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1)) \;\Rightarrow\; v^m_t \rightharpoonup v_t \; em \; L^2(\Omega_1\times]0,T[) \tag{2.1.29}$$

$$F(u^m) \rightharpoonup F(u) \quad em \quad L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_2)\right) \tag{2.1.30}$$

$$G(v^m) \rightharpoonup G(v) \quad em \quad L^2\left(0,T,L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega_1)\right) \tag{2.1.31}$$

$$\nabla u^m \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u \; em \; L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \;\Rightarrow\; \nabla u^m \rightharpoonup \nabla u \; em \; L^2(\Omega_2\times]0,T[) \tag{2.1.32}$$

$$\nabla v^m \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla v \; em \; L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1)) \;\Rightarrow\; \nabla v^m \rightharpoonup \nabla v \; em \; L^2(\Omega_1\times]0,T[) \tag{2.1.33}$$

Estimativa 2:

Como estamos interesados em soluções regulares derivamos (2.1.2) em relação a t, para obter

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_2} u^m_{ttt}\phi_i dx + a\int_{\Omega_2}\nabla u^m_t\nabla\phi_i dx - \frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_2}(g*\nabla u^m)\nabla\phi_i dx\right] \\ &+\int_{\Omega_2}F'(u^m)u^m_t\phi_i dx + \int_{\Omega_1} v^m_{ttt}\psi_i dx + b\int_{\Omega_1}\nabla v^m_t\nabla\psi_i dx + \int_{\Omega_1}G'(v^m)v^m_t\psi_i dx \;=\; 0 \end{aligned} \tag{2.1.34}$$

onde

$$-\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_2}(g*\nabla u^m)\nabla\phi_i dx\right] = -\int_{\Omega_2}(g*\nabla u_t^m)\nabla\phi_i dx - g(t)\int_{\Omega_2}\nabla u_0\nabla\phi_i dx \quad (2.1.35)$$

Substituindo (2.1.35) em (2.1.34), resulta

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}u_{ttt}^m\phi_i dx + a\int_{\Omega_2}\nabla u_t^m\nabla\phi_i dx - \int_{\Omega_2}(g*\nabla u_t^m)\nabla\phi_i dx - g(t)\int_{\Omega_2}\nabla u_0\nabla\phi_i dx& \\ +\int_{\Omega_2}F'(u^m)u_t^m\phi_i dx + \int_{\Omega_1}v_{ttt}^m\psi_i dx + b\int_{\Omega_1}\nabla v_t^m\nabla\psi_i dx + \int_{\Omega_1}G'(v^m)v_t^m\psi_i dx &= 0\end{aligned} \quad (2.1.36)$$

Multiplicando a equação (2.1.36) por $g_{im}^{''}(t)$ e somando em i, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}u_{ttt}^m u_{tt}^m dx + a\int_{\Omega_2}\nabla u_t^m\nabla u_{tt}^m dx - \int_{\Omega_2}(g*\nabla u_t^m)\nabla u_{tt}^m dx& \\ -g(t)\int_{\Omega_2}\nabla u_0\nabla u_{tt}^m dx + \int_{\Omega_2}F'(u^m)u_t^m u_{tt}^m dx& \\ +\int_{\Omega_1}v_{ttt}^m v_{tt}^m dx + b\int_{\Omega_1}\nabla v_t^m\nabla v_{tt}^m dx + \int_{\Omega_1}G'(v^m)v_t^m v_{tt}^m dx &= 0\end{aligned} \quad (2.1.37)$$

usando o **Lema (1.3)**, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_3(t,u_t^m,v_t^m) &= +\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}g'\Box\nabla u_t^m dx - \frac{g(t)}{2}\int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2 dx \\ &\quad -\int_{\Omega_2}F'(u^m)u_t^m u_{tt}^m dx - \int_{\Omega_1}G'(v^m)v_t^m v_{tt}^m dx \\ &\quad +\int_{\Omega_2}g(t)\nabla u_0\nabla u_{tt}^m dx\end{aligned} \quad (2.1.38)$$

onde

$$\begin{aligned}E_3(t,u_t^m,v_t^m) &= \frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega_2}\left[|u_{tt}^m|^2 + \beta(t)|\nabla u_t^m|^2 + g\Box\nabla u_t^m\right]dx\right\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega_1}\left[|v_{tt}^m|^2 + b|\nabla v_t^m|^2\right]dx\right\}\end{aligned} \quad (2.1.39)$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\underbrace{\left\{E_3(t,u_t^m,v_t^m) - g(t)\int_{\Omega_2}\nabla u_0\nabla u_t^m dx\right\}}_{:=M(t,u_t^m,v_t^m)} &= +\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}(g'\Box\nabla u_t^m)dx - \frac{g(t)}{2}\int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2 dx \\ &\quad -\int_{\Omega_2}F'(u^m)u_t^m u_{tt}^m dx - \int_{\Omega_1}G'(v^m)v_t^m v_{tt}^m dx \\ &\quad -\int_{\Omega_2}g'(t)\nabla u_0\nabla u_t^m dx\end{aligned}$$

Usando a condição (1.3.11), obtemos

$$\frac{d}{dt}M(t,u_t^m,v^m) \leq \underbrace{-\int_{\Omega_2} F'(u^m)u_t^m u_{tt}^m dx - \int_{\Omega_1} G'(v^m)v_t^m v_{tt}^m dx}_{I_1} - \int_{\Omega_2} g'(t)\nabla u_0 \nabla u_t^m dx \tag{2.1.40}$$

Usando as hipóteses sobre F e G [(1.3.3)-(1.3.5),(1.3.8)-(1.3.10)], a **Desigualdade de Hölder Generalizada (1.7)**, as **Imersões de Sobolev (1.17)**, a estimativa (2.1.14) e a equivalência entre as normas $\|,\|_V$ e $\|,\|_{H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)}$, conclui-se

$$I_1 \leq c\left[|\nabla u_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |\nabla v_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega_1)}\right]^{1/2}\cdot\left[|u_{tt}^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m|^2_{L^2(\Omega_1)}\right]^{1/2} \tag{2.1.41}$$

Substituindo (2.1.41) em (2.1.40), temos

$$\frac{d}{dt}M(t,u_t^m,v^m) \leq c\left[|\nabla u_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |\nabla v_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega_1)}\right]^{1/2}\cdot\left[|u_{tt}^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m|^2_{L^2(\Omega_1)}\right]^{1/2} - \int_{\Omega_2} g'(t)\nabla u_0\nabla u_t^m dx \tag{2.1.42}$$

Usando a desigualdade (1.2.2) e a hipótese (1.3.11) em (2.1.42), resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M(t,u_t^m,v^m) \leq\ & \frac{c}{2}\left[|\nabla u_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |u_{tt}^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)}\right] \\ &+\frac{c}{2}\left[|\nabla v_t^m(t)|^2_{L^2(\Omega_1)} + |v_{tt}^m(t)|^2_{L^2(\Omega_2)}\right] \\ &-\frac{g'(t)}{2}\left\{\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx + \int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2dx\right\}\end{aligned} \tag{2.1.43}$$

Integrando de 0 até t, tem-se

$$\begin{aligned}M(t,u_t^m,v^m) \leq\ & M(0,u_t^m,v^m) + c\int_0^t E_3(s,u_t^m,v_t^m)ds \\ & -\int_0^t \frac{g'(s)}{2}\left\{\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx + \int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2dx\right\}ds\end{aligned} \tag{2.1.44}$$

A desigualdade

$$\left|g(t)\int_{\Omega_2}\nabla u_0\nabla u_t^m dx\right| \leq \frac{g(t)^2}{\beta(t)}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx + \frac{\beta(t)}{4}\int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2dx \tag{2.1.45}$$

implica que

$$\frac{1}{2}E_3(t,u_t^m,v_t^m) - \frac{g(t)^2}{\beta(t)}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx \leq M(t,u_t^m,v_t^m) \leq \frac{3}{2}E_3(t,u_t^m,v_t^m) + \frac{g(t)^2}{\beta(t)}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx$$

Usando estas desigualdades em (2.1.44), tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}E_3(t,u_t^m,v_t^m) &\leq +M(t,u_t^m,v_t^m)+\frac{g(t)^2}{\beta(t)}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx \\
&\leq +M(0,u_t^m,v^m)+c\int_0^t E_3(s,u_t^m,v_t^m)ds+\frac{g(t)^2}{\beta(t)}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx \\
&\quad -\int_0^t\frac{g'(s)}{2}\left\{\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2dx\right\}ds \\
&\leq \frac{3}{2}E_3(0,u_t^m,v_t^m)+\frac{g(0)^2}{a}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx+c\int_0^t E_3(s,u_t^m,v_t^m)ds \\
&\quad +\frac{g(t)^2}{\beta(t)}\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx-\int_0^t\frac{g'(s)}{2}\left\{\int_{\Omega_2}|\nabla u_0|^2dx+\int_{\Omega_2}|\nabla u_t^m|^2dx\right\}ds
\end{aligned}
$$

de onde, concluímos

$$
E_3(t,u_t^m,v_t^m) \leq c\left[|\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega_2)}+E_3(0,u_t^m,v_t^m)\right]+\int_0^t(c-g'(s))E_3(s,u_t^m,v_t^m)ds
$$

Aplicando o **Lema de Gronwall (1.24)** na desigualdade anterior, resulta

$$
E_3(t,u_t^m,v_t^m) \leq c(T)\left[\underbrace{|\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega_2)}}_{limitado}+E_3(0,u_t^m,v_t^m)\right] \tag{2.1.46}
$$

A seguir estimaremos $E_3(0,u_t^m,v_t^m)$. Temos de (2.1.39)

$$
\begin{aligned}
E_3(0,u_t^m,v_t^m) &= +\frac{1}{2}\left[|u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)}+a\underbrace{|\nabla u_1|^2_{L^2(\Omega_2)}}_{limitado}\right] \\
&\quad +\frac{1}{2}\left[|v_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)}+b\underbrace{|\nabla v_1|^2_{L^2(\Omega_1)}}_{limitado}\right]
\end{aligned} \tag{2.1.47}
$$

também de (2.1.2), que

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2}[u_{tt}^m(x,0)\phi_i(x)+a\nabla u_0\nabla\phi_i(x)-(g*\nabla u_0)\nabla\phi_i(x)+F(u_0)\phi_i(x)]dx \\
&\qquad +\int_{\Omega_1}[v_{tt}^m(x,0)\psi_i(x)+b\nabla v_0\nabla\psi_i(x)+G(v_0)\psi_i(x)]\,dx = 0
\end{aligned} \tag{2.1.48}
$$

Multiplicando (2.1.48) por $g_{im}^{''}(0)$ e somando em i, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2}|u_{tt}^m(x,0)|^2dx+a\int_{\Omega_2}\nabla u_0\nabla u_{tt}^m(x,0)dx \\
&+\int_{\Omega_2}F(u_0)u_{tt}^m(x,0)dx+\int_{\Omega_1}|v_{tt}^m(x,0)|^2dx \\
+b&\int_{\Omega_1}\nabla v_0\nabla v_{tt}^m(x,0)dx+\int_{\Omega_1}G(v_0)v_{tt}^m(x,0)dx = 0
\end{aligned} \tag{2.1.49}
$$

então

$$\begin{aligned} |u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_1)} &= -a\int_{\Omega_2} \nabla u_0 \nabla u_{tt}^m(x,0)dx - \int_{\Omega_2} F(u_0)u_{tt}^m(x,0)dx \\ &\quad -b\int_{\Omega_1} \nabla v_0 \nabla v_{tt}^m(x,0)dx - \int_{\Omega_1} G(v_0)v_{tt}^m(x,0)dx \end{aligned} \tag{2.1.50}$$

aplicando a **proposição (1.22)**, resulta

$$\begin{aligned} |u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_1)} &= -\int_{\Omega_2} F(u_0)u_{tt}^m(x,0)dx + b\int_{\Omega_1} \Delta v_0 v_{tt}^m(x,0)dx \\ &\quad +a\int_{\Omega_2} \Delta u_0 u_{tt}^m(x,0)dx + a\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_{tt}^m(x,0)d\Gamma \\ &\quad -b\int_{\Gamma_1} \frac{\partial v_0}{\partial \nu} v_{tt}^m(x,0)d\Gamma - \int_{\Omega_1} G(v_0)v_{tt}^m(x,0)dx \end{aligned} \tag{2.1.51}$$

De (2.1.51) e observando que $u_{tt}^m(x,0) = v_{tt}^m(x,0)$ sobre Γ_1, temos que

$$\begin{aligned} |u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_1)} &= \underbrace{+\,a\int_{\Omega_2} \Delta u_0 u_{tt}^m(x,0)dx + b\int_{\Omega_1} \Delta v_0 v_{tt}^m(x,0)dx}_{I_2} \\ &\quad +\int_{\Gamma_1} \left[a\frac{\partial u_0}{\partial \nu} - b\frac{\partial v_0}{\partial \nu}\right] u_{tt}^m(x,0)d\Gamma \\ &\quad \underbrace{-\int_{\Omega_2} F(u_0))u_{tt}^m(x,0)dx - \int_{\Omega_1} G(v_0)v_{tt}^m(x,0)dx}_{I_3} \end{aligned} \tag{2.1.52}$$

após cálculos diretos, obtemos

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 \ \leq\ & +c\Big[|u_0|^2_{L^2(\Omega_2)} + |u_0|^{2\rho}_{L^2(\Omega_2)} + |v_0|^2_{L^2(\Omega_1)} + |v_0|^{2\rho}_{L^2(\Omega_1)} \\ & +|\Delta u_0|^2_{L^2(\Omega_2)} + |\Delta v_0|^2_{L^2(\Omega_1)}\Big] \\ & +\frac{1}{2}\left[|u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_1)}\right] \end{aligned} \tag{2.1.53}$$

Substituindo (2.1.53) em (2.1.52) e usando a hipótese de compatibilidade (1.3.14), resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[|u_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_2)} + |v_{tt}^m(0)|^2_{L^2(\Omega_1)}\right] \\ \leq\ & +c\Big[\underbrace{|u_0|^2_{L^2(\Omega_2)} + |u_0|^{2\rho}_{L^2(\Omega_2)} + |v_0|^2_{L^2(\Omega_1)} + |v_0|^{2\rho}_{L^2(\Omega_1)} + |\Delta u_0|^2_{L^2(\Omega_2)} + |\Delta v_0|^2_{L^2(\Omega_1)}}_{limitado}\Big] \end{aligned}$$

assim temos que os dados iniciais $\{u_{tt}^m(0), v_{tt}^m(0)\}$ são limitados em $L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1)$, logo de (2.1.47) concluímos que:

$$E_3(0, u_t^m, v_t^m) \quad \text{é limitada.} \tag{2.1.54}$$

De (2.1.46) e (2.1.54), obtemos que $E_3(t, u_t^m, v_t^m)$ é limitada em $L^\infty(0,T)$. Portanto de (2.1.39), resulta

$$\{u_{tt}^m, v_{tt}^m\} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \times L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1)) \tag{2.1.55}$$

e

$$\{u_t^m, v_t^m\} \quad \text{é limitada em} \quad L^\infty(0,T;V) \tag{2.1.56}$$

2.1.2 Passagem ao Limite

Multiplicando (2.1.2) por $\theta \in D(0,T)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega_2} [u_{tt}^m \phi_i]\theta(t)dxdt + a\int_0^T \int_{\Omega_2} [\nabla u^m \nabla \phi_i]\theta(t)dxdt \\
-\int_0^T \int_{\Omega_2} [(g * \nabla u^m)\nabla \phi_i]\theta(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} [F(u^m)\phi_i]\,\theta(t)dxdt \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} [v_{tt}^m \psi_i]\theta(t)dxdt + b\int_0^T \int_{\Omega_1} [\nabla v^m \nabla \psi_i]\theta(t)dxdt \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} [G(v^m)\psi_i]\theta(t)dxdt &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.57}$$

Das estimativas a priori [(2.1.26)-(2.1.33)] e (2.1.55) acima podemos passar o limite na identidade (2.1.57) quando $m \to \infty$ de modo a obter

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega_2} [u_{tt} \phi_i]\theta(t)dxdt + a\int_0^T \int_{\Omega_2} [\nabla u \nabla \phi_i]\theta(t)dxdt \\
-\int_0^T \int_{\Omega_2} [(g * \nabla u)\nabla \phi_i]\theta(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} [F(u)\phi_i]\,\theta(t)dxdt \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} [v_{tt} \psi_i]\theta(t)dxdt + b\int_0^T \int_{\Omega_1} [\nabla v \nabla \psi_i]\theta(t)dxdt \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} [G(v)\psi_i]\theta(t)dxdt &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.58}$$

Por densidade, a identidade acima permane válida para todo $\{\phi, \psi\} \in V$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega_2} [u_{tt} \phi]\theta(t)dxdt + a\int_0^T \int_{\Omega_2} [\nabla u \nabla \phi]\theta(t)dxdt \\
-\int_0^T \int_{\Omega_2} [(g * \nabla u)\nabla \phi]\theta(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} [F(u)\phi]\,\theta(t)dxdt \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} [v_{tt} \psi]\theta(t)dxdt + b\int_0^T \int_{\Omega_1} [\nabla v \nabla \psi]\theta(t)dxdt \\
+\int_0^T \int_{\Omega_1} [G(v)\psi]\theta(t)dxdt &= 0
\end{aligned} \tag{2.1.59}$$

de onde resulta

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_2} [u_{tt}\phi]\theta(t)dxdt + a\int_0^T \int_{\Omega_2} [\nabla u \nabla \phi]\theta(t)dxdt \\ \displaystyle -\int_0^T \int_{\Omega_2} [(g * \nabla u)\nabla \phi]\theta(t)dxdt + \int_0^T \int_{\Omega_2} [F(u)\phi]\,\theta(t)dxdt = 0 \quad ; \forall\ \theta \in D(0,T)\ ,\ \forall\ \phi \in D(\Omega_2) \\ \\ \displaystyle\int_0^T \int_{\Omega_1} [v_{tt}\psi]\theta(t)dxdt + b\int_0^T \int_{\Omega_1} [\nabla v \nabla \psi]\theta(t)dxdt \\ \displaystyle + \int_0^T \int_{\Omega_1} [G(v)\psi]\theta(t)dxdt = 0 \quad ; \forall\, \theta \in D(0,T)\ ,\ \forall\ \ \psi \in D(\Omega_1) \end{cases}$$

conseqüentemente

$$\begin{cases} \langle u_{tt} - a\Delta u + g * \Delta u + F(u), \Phi \rangle = 0 \quad ; \forall\ \ \Phi \in D(\Omega_2 \times]0,T[) \\ \langle v_{tt} - b\Delta v + G(v), \Psi \rangle = 0 \quad ; \forall\ \ \Psi \in D(\Omega_1 \times]0,T[) \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + g * \Delta u + F(u) = 0 \quad em \quad D'(\Omega_2 \times]0,T[) \\ v_{tt} - b\Delta v + G(v) = 0 \quad em \quad D'(\Omega_1 \times]0,T[) \end{cases} \tag{2.1.60}$$

Prova-se que

$$\begin{cases} u_{tt} - a\Delta u + g * \Delta u + F(u) = 0 \quad em \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \\ v_{tt} - b\Delta v + G(v) = 0 \quad em \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1)) \end{cases} \tag{2.1.61}$$

De fato,

Parte a: Vimos que

$$u_{tt} \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \quad , \quad F(u) \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2))$$

e como

$$a\Delta u - g * \Delta u = u_{tt} + F(u)$$

temos pelo **lema (1.5)** que

$$a\Delta u \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \tag{2.1.62}$$

segue de (2.1.60) e (2.1.62) que

$$g * \Delta u \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega_2)) \tag{2.1.63}$$

Parte b: Temos

$$v_{tt} \;\in\; L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1)) \quad , \quad G(v) \;\in L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))$$

e de (2.1.60), segue-se que

$$b\Delta v \in L^\infty(0,T,L^2(\Omega_1))$$

Da Parte A e B, concluímos (2.1.61).

Sabemos que $\{u,v\} \in V$, logo

$$\begin{cases} u(x,t) &= 0 \quad em \quad \Gamma\times]0,T[\\ u(x,t) &= v(x,t) \quad em \quad \Gamma_1\times]0,T[\end{cases} \tag{2.1.64}$$

Afirmamos que

$$a\frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} - b\frac{\partial v}{\partial \nu} \;=\; 0 \quad em \quad L^\infty(0,T,H^{-1/2}(\Gamma_1))$$

De fato, sabemos que

$$\{u,v\} \;\in\; H^1_\Gamma(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1) \quad , \quad \{\Delta u, \Delta v\} \;\in\; L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1) \quad , \quad \{\phi,\psi\} \;\in\; H^1(\Omega_2)\times H^1(\Omega_1)$$

logo, pela **proposição (1.23)**

$$\begin{cases} (\nabla u, \nabla\phi)_{L^2(\Omega_2)} &= -\langle\gamma_1 u, \gamma_0\phi\rangle - (\Delta u, \phi)_{L^2(\Omega_2)} \\ (g*\nabla u, \nabla\phi)_{L^2(\Omega_2)} &= -\langle g*\gamma_1 u, \gamma_0\phi\rangle - (g*\Delta u, \phi)_{L^2(\Omega_2)} \\ (\nabla v, \nabla\psi)_{L^2(\Omega_1)} &= \langle\gamma_1 v, \gamma_0\psi\rangle - (\Delta v, \psi)_{L^2(\Omega_1)} \end{cases} \tag{2.1.65}$$

Substituindo (2.1.65) em (2.1.59), temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u_{tt},\phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt - a\int_0^T (\Delta u,\phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt - a\int_0^T \langle\gamma_1 u,\gamma_0\phi\rangle\,\theta(t)dt \\ &+\int_0^T (g*\Delta u,\phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt + \int_0^T \langle g*\gamma_1 u,\gamma_0\phi\rangle\,\theta(t)dt + \int_0^T (F(u),\phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt \\ &+\int_0^T (v_{tt}\psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta(t)dt + b\int_0^T \langle\gamma_1 v,\gamma_0\psi\rangle\,\theta(t)dt \\ &-b\int_0^T (\Delta v,\psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta(t)dt + \int_0^T (G(v),\psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta(t)dt \;=\; 0 \end{aligned} \tag{2.1.66}$$

de onde resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_{tt} - a\Delta u + g * \Delta u + F(u), \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt \\ + \int_0^T (v_{tt} - b\Delta v + G(v), \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta(t)dt \\ + \int_0^T \langle -a\gamma_1 u + g * \gamma_1 u + b\gamma_1 v, \gamma_0\psi\rangle\,\theta(t)dt &= 0\end{aligned} \tag{2.1.67}$$

Substituindo (2.1.61) em (2.1.67), obtemos

$$\int_0^T \langle -a\gamma_1 u + g * \gamma_1 u + b\gamma_1 v, \gamma_0\psi\rangle\,\theta(t)dt = 0$$

de onde concluímos

$$a\frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} - b\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad em \quad L^\infty(0, T, H^{-1/2}(\Gamma_1)) \tag{2.1.68}$$

De (2.1.61), (2.1.65) e (2.1.68), consegue-se

$$u_{tt} - a\Delta u + F(u) + g * \Delta u = 0 \quad em \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \tag{2.1.69}$$

$$v_{tt} - b\Delta v + G(v) = 0 \quad em \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \tag{2.1.70}$$

$$u(x, t) = 0 \quad em \quad \Gamma\times]0, T[\tag{2.1.71}$$

$$u(x, t) = v(x, t) \quad em \quad \Gamma_1\times]0, T[\tag{2.1.72}$$

$$a\frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu} = b\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad em \quad L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_1)) \tag{2.1.73}$$

$$\tag{2.1.74}$$

com

$$\begin{aligned}\{u, v\} &\in L^\infty(0, T; (\mathcal{H}^1(\Omega_2) \times \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap V) \\ \{u_t, v_t\} &\in L^\infty(0, T; V) \\ \{u_{tt}, v_{tt}\} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \times L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)\end{aligned} \tag{2.1.75}$$

2.1.3 Condições Iniciais

Temos por (2.1.75) e pela **proposição (1.14)**, que

$$\begin{aligned}\{u, v\} &\in (C([0, T]; H^1_\Gamma(\Omega_2))) \times (C([0, T]; H^1(\Omega_1))) \cap (C_\omega([0, T]; H^1_\Gamma(\Omega_2))) \times (C_\omega([0, T]; H^1(\Omega_1))) \\ \{u_t, v_t\} &\in (C([0, T]; L^2(\Omega_2))) \times (C([0, T]; L^2(\Omega_1))) \cap (C_\omega([0, T]; H^1_\Gamma(\Omega_2))) \times (C_\omega([0, T]; H^1(\Omega_1)))\end{aligned}$$

logo faz sentido calcular

$$\{u(0), v(0)\} \quad e \quad \{u_t(0), v_t(0)\}$$

Seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Das estimativas a priori, obtemos

$$\left\{\begin{array}{lcll} \displaystyle\int_0^T (u^m, \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta_t(t)dt & \rightarrow & \displaystyle\int_0^T (u, \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta_t(t)dt & \forall\, \phi \in L^2(\Omega_2) \\ \\ \displaystyle\int_0^T (v^m, \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta_t(t)dt & \rightarrow & \displaystyle\int_0^T (v, \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta_t(t)dt & \forall\, \psi \in L^2(\Omega_1) \end{array}\right. \tag{2.1.76}$$

e

$$\left\{\begin{array}{lcll} \displaystyle\int_0^T (u_t^m, \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt & \rightarrow & \displaystyle\int_0^T (u_t, \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta(t)dt & \forall\, \phi \in L^2(\Omega_2) \\ \\ \displaystyle\int_0^T (v_t^m, \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta(t)dt & \rightarrow & \displaystyle\int_0^T (v_t, \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta(t)dt & \forall\, \psi \in L^2(\Omega_1) \end{array}\right. \tag{2.1.77}$$

integrando-se por partes (2.1.77), obtem-se

$$\left\{\begin{array}{lcl} -(u_0, \phi)_{L^2(\Omega_2)} - \displaystyle\int_0^T (u^m(t), \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta_t(t)dt & \rightarrow & -(u(0), \phi)_{L^2(\Omega_2)} - \displaystyle\int_0^T (u(t), \phi)_{L^2(\Omega_2)}\theta_t(t)dt \\ \\ -(v_0, \psi)_{L^2(\Omega_1)} - \displaystyle\int_0^T (v^m(t), \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta_t(t)dt & \rightarrow & -(v(0), \psi)_{L^2(\Omega_1)} - \displaystyle\int_0^T (v(t), \psi)_{L^2(\Omega_1)}\theta_t(t)dt \end{array}\right. \tag{2.1.78}$$

de (2.1.76) e (2.1.78), consegue-se

$$\left\{\begin{array}{lcll} (u(0), \phi)_{L^2(\Omega_2)} & = & (u_0, \phi)_{L^2(\Omega_2)} & ,\ \forall\, \phi \in L^2(\Omega_2) \\ (v(0), \psi)_{L^2(\Omega_1)} & = & (v_0, \psi)_{L^2(\Omega_1)} & ,\ \forall\, \psi \in L^2(\Omega_1) \end{array}\right.$$

conseqüentemente,

$$\{u(0), v(0)\} = \{u_0, v_0\}$$

Analogamente, prova-se que

$$\{u_t(0), v_t(0)\} = \{u_1, v_1\}$$

2.1.4 Unicidade

Sejam $\{\widehat{u},\widehat{v}\}$ e $\{\overline{u},\overline{v}\}$ duas soluções regulares para o problema $[(0.0.15)-(0.0.21)]$, logo:

$$
\begin{array}{rcl}
\widehat{u}_{tt}-a\Delta\widehat{u}+F(\widehat{u})+g*\Delta\widehat{u}=0 & em & L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega_{2}))\\
\widehat{v}_{tt}-b\Delta\widehat{v}+G(\widehat{v})=0 & em & L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega_{1}))\\
\widehat{u}=0 & em & \Gamma\times]0,T[\\
\widehat{u}=\widehat{v} & em & \Gamma_{1}\times]0,T[\\
a\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial\nu}-g*\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial\nu}=b\dfrac{\partial\widehat{u}}{\partial\nu} & em & L^{\infty}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_{1}))\\
\widehat{u}(x,0)=u_{0}(x) & e\ \ \widehat{u}_{t}(x,0)=u_{1}(x) & em\ \Omega_{2}\\
\widehat{v}(x,0)=v_{0}(x) & e\ \ \widehat{v}(x,0)=v_{1}(x) & em\ \Omega_{1}
\end{array}
\tag{2.1.79}
$$

e

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{u}_{tt}-a\Delta\overline{u}+F(\overline{u})+g*\Delta\overline{u}=0 & em & L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega_{2}))\\
\overline{v}_{tt}-b\Delta\overline{v}+G(\overline{v})=0 & em & L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega_{1}))\\
\overline{u}=0 & em & \Gamma\times]0,T[\\
\overline{u}=\overline{v} & em & \Gamma_{1}\times]0,T[\\
a\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}-g*\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}=b\dfrac{\partial\overline{v}}{\partial\nu} & em & L^{\infty}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_{1}))\\
\overline{u}(x,0)=u_{0}(x) & e\ \ \overline{u}_{t}(x,0)=u_{1}(x) & em\ \Omega_{2}\\
\overline{v}(x,0)=v_{0}(x) & e\ \ \overline{v}_{t}(x,0)=v_{1}(x) & em\ \Omega_{1}
\end{array}
\tag{2.1.80}
$$

fazendo (2.1.79) menos (2.1.80) e tomando

$$
\left\{
\begin{array}{lllll}
z=\widehat{u}-\overline{u} & \Rightarrow & z_{t}=\widehat{u}_{t}-\overline{u}_{t} & \Rightarrow & z_{tt}=\widehat{u}_{tt}-\overline{u}_{tt}\\
w=\widehat{v}-\overline{v} & \Rightarrow & w_{t}=\widehat{v}_{t}-\overline{v}_{t} & \Rightarrow & w_{tt}=\widehat{v}_{tt}-\overline{v}_{tt}
\end{array}
\right.
\tag{2.1.81}
$$

temos

$$z_{tt}-a\Delta z+g*\Delta z=-F(\widehat{u})+F(\overline{u}) \quad em\ L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega_{2})) \tag{2.1.82}$$

$$w_{tt}-b\Delta w=-G(\widehat{v})+G(\overline{v}) \quad em\ L^{\infty}(0,T;L^{2}(\Omega_{1})) \tag{2.1.83}$$

$$z=0 \quad em\ \Gamma\times]0,T[\tag{2.1.84}$$

$$z=w \quad em\ \Gamma_{1}\times]0,T[\tag{2.1.85}$$

$$a\frac{\partial z}{\partial\nu}-g*\frac{\partial z}{\partial\nu}=b\frac{\partial w}{\partial\nu} \quad em\ L^{\infty}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_{1})) \tag{2.1.86}$$

$$z(x,0)=z_{t}(x,0)=0 \quad em\ \Omega_{2} \tag{2.1.87}$$

$$w(x,0)=w_{t}(x,0)=0 \quad em\ \Omega_{1} \tag{2.1.88}$$

Multiplicando (2.1.82) por z_t e (2.1.83) por w_t, depois, integrando sobre Ω_2 e Ω_1, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_2}\left[z_{tt}-a\Delta z+g*\Delta z\right]z_t dx+\int_{\Omega_1}\left[w_{tt}-b\Delta w\right]w_t dx\\ = &+\int_{\Omega_2}\left[F(\overline{u})-F(\widehat{u})\right]z_t dx+\int_{\Omega_2}\left[G(\overline{v}-G(\widehat{v})\right]w_t dx\end{aligned}$$

aplicando a **proposição (1.23)**

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_2}\left(|z_t|^2+a|\nabla z|^2\right)dx\right]+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega_1}\left(|w_t|^2+b|\nabla w|^2\right)dx\right]\\ &-\int_{\Omega_2}(g*\nabla z)\nabla z_t dx+\underbrace{\langle a\gamma_1 z-g*\gamma_1 z-b\gamma_1 w,\gamma_0 z\rangle}_{=0}\\ = &+\int_{\Omega_2}\left[F(\overline{u})-F(\widehat{u})\right]z_t dx+\int_{\Omega_2}\left[G(\overline{v}-G(\widehat{v})\right]w_t dx\end{aligned}\tag{2.1.89}$$

e depois usando o **Lema (1.2)**, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_3(t,z,w) = &+\int_{\Omega_2}\left[F(\overline{u})-F(\widehat{u})\right]z_t dx+\int_{\Omega_2}\left[G(\overline{v}-G(\widehat{v})\right]w_t dx\\ &\underbrace{-\frac{1}{2}g(t)\int_{\Omega_2}|\nabla z|^2 dx}_{<0}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}(g'\Box\nabla z)dx}_{<0}\end{aligned}\tag{2.1.90}$$

onde

$$E_3(t,z,w) = \frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega_2}\left[|z_t|^2+\beta(t)|\nabla z|^2+(g\Box\nabla z)\right]dx+\int_{\Omega_1}\left[|w_t|^2+b|\nabla w|^2\right]dx\right\}$$

De (2.1.90), segue-se

$$\frac{d}{dt}E_3(t,z,w) \leq \int_{\Omega_2}[F(\overline{u})-F(\widehat{u})]z_t dx+\int_{\Omega_1}[G(\overline{v})-G(\widehat{v})]w_t dx\tag{2.1.91}$$

Aplicando o teorema do valor médio em (2.1.91), as hipóteses (1.3.3), (1.3.8) e a **desigualdade (1.2.8)**, temos

$$\frac{d}{dt}E_3(t,z,w) \leq c\left\{\int_{\Omega_2}\left[|\overline{u}|^{\rho-1}|z||z_t|+|\widehat{u}|^{\rho-1}|z||z_t|\right]dx+\int_{\Omega_1}\left[|\overline{v}|^{\rho-1}|w||w_t|+|\widehat{v}|^{\rho-1}|w||w_t|dx\right]dx\right\}$$

Usando a **proposição (1.7)**, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_3(t,z,w) \leq &+c\underbrace{|\overline{u}|^{\rho-1}_{L^{n(\rho-1)}(\Omega_2)}}_{limitada}|z|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_2)}|z_t|_{L^2(\Omega_2)}+c\underbrace{|\widehat{u}|^{\rho-1}_{L^{n(\rho-1)}(\Omega_2)}}_{limitada}|z|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_2)}|z_t|_{L^2(\Omega_2)}\\ &+c\underbrace{|\overline{v}|^{\rho-1}_{L^{n(\rho-1)}(\Omega_1)}}_{limitada}|w|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)}|w_t|_{L^2(\Omega_1)}+c\underbrace{|\widehat{v}|^{\rho-1}_{L^{n(\rho-1)}(\Omega_1)}}_{limitada}|w|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega_1)}|w_t|_{L^2(\Omega_1)}\end{aligned}\tag{2.1.92}$$

de onde resulta

$$\frac{d}{dt}E_3(t,z,w) \quad \leq \quad +c[|\nabla z|_{L^2(\Omega_2)}|z_t|_{L^2(\Omega_2)} + |\nabla w|_{L^2(\Omega_1)}|w_t|_{L^2(\Omega_1)}] \tag{2.1.93}$$

aplicando a **desigualdade (1.2.2)** e integrando de 0 a t, temos

$$E_3(t,z,w) \quad \leq \quad c\int_0^T E_3(s,z,w)ds \tag{2.1.94}$$

De (2.2.29) e da **proposição (1.24)**, conclui-se

$$E_3(t,z,w) \quad \leq \quad 0 \tag{2.1.95}$$

logo

$$\|\{z,w\}\|_V = 0$$

de onde resulta

$$\{\widehat{u},\widehat{v}\} = \{\overline{u},\overline{v}\}$$

2.2 Existência e Unicidade de Soluções Fracas

Nesta seção nós resolveremos o problema [(0.0.15)-(0.0.21)] com dados iniciais menos regulares, isto é, suponhamos

$$\{u_0,v_0\} \in V \qquad , \qquad \{u_1,v_1\} \in L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1) \tag{2.2.1}$$

A solução correspondente será chamada solução fraca. A metodologia usada consiste em obter aproximações para $\{u_0,v_0\}$ *e* $\{u_1,v_1\}$ por sequências de vetores de

$$V\cap[H^2(\Omega_2)\times H^2(\Omega_1)] \quad e \quad V$$

respectivamente, aplicando resultados do **Teorema (1.1)**, provaremos o **Teorema (1.2)**.

Como foi dito acima, nós obtemos sequências $(\{u_0^n,v_0^n\})_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(\{u_1^n,v_1^n\})_{n\in\mathbb{N}}$ de funções de $V\cap(H^2(\Omega_2)\times H^2(\Omega_1))$ e V, respectivamente, tal que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\{u_0^n,v_0^n\} = \{u_0,v_0\} \quad em \quad V \quad ; \quad \lim\limits_{n\to\infty}\{u_1^n,v_1^n\} = \{u_1,v_1\} \quad em \quad L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1) \\ \\ \qquad a\dfrac{\partial u_0^n}{\partial\nu} - b\dfrac{\partial v_0^n}{\partial\nu} = 0 \quad em \quad \Gamma_1 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

De fato, é suficiente considerar

$$\{u_1^n, v_1^n\} \in V \text{ convergindo para } \{u_1, v_1\} \in L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1)$$

e

$$\{u_0^n, v_0^n\} \in \mathcal{D}(A) = \{\{\phi, \psi\} \in V \cap (H^2(\Omega_2) \times H^2(\Omega_1))\ ; a\frac{\partial \phi}{\partial \nu} - b\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \ sobre\ \Gamma_1\}$$

que é denso em V, porque é o domínio do operador definido pela terna

$$\{V, L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1), ((,))_V\}$$

Para cada par $\{\{u_0^n, v_0^n\}, \{u_1^n, v_1^n\}\}$, definido acima, nos determinamos uma única solução forte $\{u^n, v^n\}$ verificando as condições do **Teorema (1.1)**, ou seja, o problema

$$u_{tt}^n - a\Delta u^n + F(u^n) + g * \Delta u^n = 0 \qquad em \qquad L^\infty(0,T; L^2(\Omega_2)) \tag{2.2.3}$$

$$v_{tt}^n - b\Delta v^n + G(v^n) = 0 \qquad em \qquad L^\infty(0,T; L^2(\Omega_1)) \tag{2.2.4}$$

$$u^n = 0 \qquad em \qquad \Gamma\times]0,T[\tag{2.2.5}$$

$$u^n = v^n \qquad em \qquad \Gamma_1\times]0,T[\tag{2.2.6}$$

$$a\frac{\partial u^n}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u^n}{\partial \nu} = b\frac{\partial v^n}{\partial \nu} \qquad em \qquad L^\infty(0,T; H^{-1/2}(\Gamma_1)) \tag{2.2.7}$$

$$u^n(x,0) = u_0^n(x) \quad e \quad u_t^n(x,0) = u_1^n(x) \quad em\ \Omega_2 \tag{2.2.8}$$

$$v^n(x,0) = v_0^n(x) \quad e \quad v_t^n(x,0) = v_1^n(x) \quad em\ \Omega_1 \tag{2.2.9}$$

possui uma única solução forte $\{u^n, v^n\}$, satisfazendo

$$\begin{aligned}
\{u^n, v^n\} &\in L^\infty(0,T; (\mathcal{H}^1(\Omega_2) \times \mathcal{H}^1(\Omega_1)) \cap V) \\
\{u_t^n, v_t^n\} &\in L^\infty(0,T; V) \\
\{u_{tt}^n, v_{tt}^n\} &\in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_2))
\end{aligned}$$

2.2.1 Estimativas a Priori

Multiplicando (2.2.3) por u_t^n e (2.2.4) por v_t^n, depois, integrando sobre Ω_2 e Ω_1, respectivamente, e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned}
(u_{tt}^n, u_t^n)_{L^2(\Omega_2)} + a(-\Delta u^n, u_t^n)_{L^2(\Omega_2)} + (F(u^n), u_t^n)_{L^2(\Omega_2)} + (g * \Delta u^n, u_t^n)_{L^2(\Omega_2)} & \\
+(v_{tt}^n, v_t^n)_{L^2(\Omega_1)} + b(-\Delta v^n, v_t^n)_{L^2(\Omega_1)} + (G(v^n), v_t^n)_{L^2(\Omega_1)} &= 0
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Aplicando em (2.2.10) a **Fórmula de Green Generalizada (1.23)** e usando (2.2.7), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\left[u_{tt}^n u_t^n + a\nabla u^n \nabla u_t^n - (g*\nabla u^n)\nabla u_t^n + F(u^n)u_t^n\right]dx & \\ + \int_{\Omega_1}\left[v_{tt}^n v_t^n + b\nabla v^n\nabla v_t^n + G(v^n)v_t^n\right]dx &= 0\end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Levando em conta (2.2.2) e raciocinando de forma análoga ao que foi feito na **estimativa 1** para soluções regulares, concluímos que

$$E(t,u^n,v^n)\le c$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\left[|u_t^n|^2+\beta(t)|\nabla u^n|^2+2\widehat{F}(u^n)+g\Box\nabla u^n\right]dx & \\ +\frac{1}{2}\int_{\Omega_1}\left[|v_t^n|^2+b|\nabla v^n|^2+2\widehat{G}(v^n)\right]dx &\le c\end{aligned} \quad (2.2.12)$$

de onde segue que

$$\begin{cases}\{u^n,v^n\}\text{ é limitada } & em \quad L^\infty(0,T;V)\\ \{u_t^n,v_t^n\}\text{ é limitada } & em \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))\end{cases} \quad (2.2.13)$$

Por raciocíonio similar ao que foi feita na **estimativa 1** para soluções regulares, temos condições de passar limite nos termos não lineares do sistema anterior.

2.2.2 Passagem ao Limite

Seja $\{\Phi,\Psi\}\in C^2(0,T;V)$ tal que

$$\Phi(T) \;=\; \Phi_t(T) \;=\; \Psi(T) \;=\; \Psi_t(T) \;=\; 0 \quad (2.2.14)$$

Multiplicando (2.2.3) por Φ e (2.2.4) por Ψ, depois, integrando sobre $\Omega_2\times]0,T[$ e $\Omega_1\times]0,T[$, respectivamente, e somando-as, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T(u_{tt}^n,\Phi)_{L^2(\Omega_2)}dt+a\int_0^T(-\Delta u^n,\Phi)_{L^2(\Omega_2)}dt & \\ +\int_0^T(F(u^n),\Phi)_{L^2(\Omega_2)}dt+\int_0^T(g*\Delta u^n,\Phi)_{L^2(\Omega_2)}dt & \\ +\int_0^T(v_{tt}^n,\Psi)_{L^2(\Omega_1)}dt+b\int_0^T(-\Delta v^n,\Psi)_{L^2(\Omega_1)}dt+\int_0^T(G(v^n),\Psi)_{L^2(\Omega_1)}dt &= 0\end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Aplicando em (2.2.15) a **Fórmula Generalizada de Green (1.23)** e usando (2.2.7), temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2}\int_0^T u_{tt}^n \Phi dtdx + \int_{\Omega_2}\int_0^T a\nabla u^n \nabla\Phi dtdx \\
&- \int_{\Omega_2}\int_0^T (g*\nabla u^n)\nabla\Phi dtdx + \int_{\Omega_2}\int_0^T F(u^n)\Phi dtdx \\
&+ \int_{\Omega_1}\int_0^T v_{tt}^n \Psi dtdx + \int_{\Omega_1}\int_0^T b\nabla v^n \nabla\Psi dtdx + \int_{\Omega_1}\int_0^T G(v^n)\Psi dtdx \quad = \quad 0
\end{aligned} \tag{2.2.16}
$$

integrando duas vezes por partes na variável t e usando (2.2.14), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_2}\int_0^T u^n \Phi_{tt} dtdx + \int_{\Omega_2}\int_0^T a\nabla u^n \nabla\Phi dtdx \\
&- \int_{\Omega_2}\int_0^T (g*\nabla u^n)\nabla\Phi dtdx + \int_{\Omega_2}\int_0^T F(u^n)\Phi dtdx \\
&+ \int_{\Omega_1}\int_0^T v^n \Psi_{tt} dtdx + \int_{\Omega_1}\int_0^T b\nabla v^n \nabla\Psi dtdx + \int_{\Omega_1}\int_0^T G(v^n)\Psi dtdx \quad = \\
&+ \int_{\Omega_2} u_1^n(x)\Phi(0)dx - \int_{\Omega_2} u_0^n(x)\Phi_t(0)dx + \int_{\Omega_1} v_1^n(x)\Psi(0)dx - \int_{\Omega_1} v_0^n(x)\Psi_t(0)dx
\end{aligned} \tag{2.2.17}
$$

Tomando o limite em (2.2.17) quando $n \to \infty$, concluímos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_2} \left[u\Phi_{tt} + a\nabla u \nabla\Phi - (g*\nabla u)\nabla\Phi + F(u)\Phi\right] dxdt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_1} \left[v\Psi_{tt} + b\nabla v\nabla\Psi + G(v)\Psi\right] dxdt \\
= \quad &+ \int_{\Omega_2} u_1(x)\Phi(0)dx - \int_{\Omega_2} u_0(x)\Phi_t(0)dx + \int_{\Omega_1} v_1(x)\Psi(0)dx - \int_{\Omega_1} v_0(x)\Psi_t(0)dx
\end{aligned}
$$

para todo $\{u, v\} \in V$ e $\{\Phi, \Psi\} \in C^2(0, T, V)$, tal que

$$
\Phi(T) \quad = \quad \Phi_t(T) \quad = \quad \Psi(T) \quad = \quad \Psi_t(T) \quad = \quad 0
$$

Para finalizar esta subseção vamos mostrar que

$$
\{u, v\} \in C([0, T]; V) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1))
$$

De fato, sejam $\{u^\mu, v^\mu\}$ e $\{u^\varsigma, v^\varsigma\}$ duas soluções regulares para o problema [(0.0.15) −

(0.0.21)], logo:

$$\begin{aligned}
u^\mu_{tt} - a\Delta u^\mu + F(u^\mu) + g * \Delta u^\mu = 0 & \qquad em \qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)) \\
v^\mu_{tt} - b\Delta v^\mu + G(v^\mu) = 0 & \qquad em \qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)) \\
u^\mu(x,t) = 0 & \qquad em \qquad \Gamma\times]0,T[\\
u^\mu(x,t) = v^\mu(x,t) & \qquad em \qquad \Gamma_1\times]0,T[\\
a\frac{\partial u^\mu}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u^\mu}{\partial \nu} = b\frac{\partial v^\mu}{\partial \nu} & \qquad em \qquad L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)) \\
u^\mu(x,0) = u^\mu_0(x) & \quad e \quad u^\mu_t(x,0) = u^\mu_1(x) \quad em\ \Omega_2 \\
v^\mu(x,0) = v^\mu_0(x) & \quad e \quad v^\mu_t(x,0) = v^\mu_1(x) \quad em\ \Omega_1
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

e

$$\begin{aligned}
u^\varsigma_{tt} - a\Delta u^\varsigma + F(u^\varsigma) + g * \Delta u^\varsigma = 0 & \qquad em \qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)) \\
v^\varsigma_{tt} - b\Delta v^\varsigma + G(v^\varsigma) = 0 & \qquad em \qquad L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)) \\
u^\varsigma(x,t) = 0 & \qquad em \qquad \Gamma\times]0,T[\\
u^\varsigma(x,t) = v^\varsigma(x,t) & \qquad em \qquad \Gamma_1\times]0,T[\\
a\frac{\partial u^\varsigma}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u^\varsigma}{\partial \nu} = b\frac{\partial v^\varsigma}{\partial \nu} & \qquad em \qquad L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)) \\
u^\varsigma(x,0) = u^\varsigma_0(x) & \quad e \quad u^\varsigma_t(x,0) = u^\varsigma_1(x) \quad em\ \Omega_2 \\
v^\varsigma(x,0) = v^\varsigma_0(x) & \quad e \quad v^\varsigma_t(x,0) = v^\varsigma_1(x) \quad em\ \Omega_1
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

fazendo (2.2.18) menos (2.2.19) e tomando

$$\begin{cases} \vartheta = u^\mu - u^\varsigma \;\Rightarrow\; \vartheta_t = u^\mu_t - u^\varsigma_t \;\Rightarrow\; \vartheta_{tt} = u^\mu_{tt} - u^\varsigma_{tt} \\ \chi = v^\mu - v^\varsigma \;\Rightarrow\; \chi_t = v^\mu_t - v^\varsigma_t \;\Rightarrow\; \chi_{tt} = v^\mu_{tt} - v^\varsigma_{tt} \end{cases} \tag{2.2.20}$$

temos

$$\vartheta_{tt} - a\Delta\vartheta + g * \Delta\vartheta = -F(u^\mu) + F(u^\varsigma) \qquad em\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega_2)) \tag{2.2.21}$$

$$\chi_{tt} - b\Delta\chi = -G(v^\mu) + G(v^\varsigma) \qquad em\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega_1)) \tag{2.2.22}$$

$$\vartheta = 0 \qquad em\ \Gamma\times]0,T[\tag{2.2.23}$$

$$\vartheta = \chi \qquad em\ \Gamma_1\times]0,T[\tag{2.2.24}$$

$$a\frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} - g * \frac{\partial \vartheta}{\partial \nu} = b\frac{\partial \chi}{\partial \nu} \quad em\ L^\infty(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)) \tag{2.2.25}$$

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_0(x) \quad e \quad \vartheta_t(x,0) = \vartheta_1(x) em\ \Omega_2 \tag{2.2.26}$$

$$\chi(x,0) = \chi_0(x) \quad e \quad \chi_t(x,0) = \chi_1(x) em\ \Omega_1 \tag{2.2.27}$$

Utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido para a unicidade da solução regular do **Teorema (1.1)** e observando que as condicões iniciais são diferentes de zero, concluímos:

$$E_3(t,\vartheta,\chi) \leq E_3(0,\vartheta,\chi) + c\int_0^T E_3(s,\vartheta,\chi)ds \tag{2.2.28}$$

onde

$$E_3(t,\vartheta,\chi) = \frac{1}{2}\left\{\int_{\Omega_2}\left[|\vartheta_t|^2 + \beta(t)|\nabla\vartheta|^2 + (g\Box\nabla\vartheta)\right]dx + \int_{\Omega_1}\left[|\chi_t|^2 + b|\nabla\chi|^2\right]dx\right\}$$

De (2.2.28) e da **proposição (1.24)**, conclui-se

$$E_3(t,\vartheta,\chi) \leq c(T)E_3(0,\vartheta,\chi) \tag{2.2.29}$$

de onde resulta

$$\left\{\begin{array}{rcl} +\|\{\vartheta,\chi\}\|_{(C[0,T],V)} & \leq & \sqrt{c(T)E_3(0,\vartheta,\chi)} \\ +\|\{\vartheta_t,\chi_t\}\|_{(C[0,T],L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))} & \leq & \sqrt{c(T)E_3(0,\vartheta,\chi)} \end{array}\right. \tag{2.2.30}$$

Segue de (2.2.20) e (2.2.30), que

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} +0 & \leq & \|\{u^\mu - u^\varsigma, v^\mu - v^\varsigma\}\|_{C([0,T],V)} & \leq & \sqrt{c(T)E_3(0,\vartheta,\chi)} \\ +0 & \leq & \|\{u_t^\mu - u_t^\varsigma, v_t^\mu - v_t^\varsigma\}\|_{C([0,T],L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))} & \leq & \sqrt{c(T)E_3(0,\vartheta,\chi)} \end{array}\right. \tag{2.2.31}$$

quando $\mu,\varsigma \to \infty$, temos por (2.2.2) que $E_3(0,\vartheta,\chi) \to 0$, logo de (2.2.31) temos que as seqüências são de cauchy e portanto existe

$$\{u,v\} \in C([0,T],V) \qquad e \qquad \{u_t,v_t\} \in C([0,T],L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))$$

tal que

$$\left\{\begin{array}{rcll} \{u^n,v^n\} & \to & \{u,v\} & em \quad C([0,T];V) \\ \{u_t^n,v_t^n\} & \to & \{u_t,v_t\} & em \quad C([0,T];L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1)) \end{array}\right. \tag{2.2.32}$$

onde, concluímos que

$$\{u,v\} \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_2)\times L^2(\Omega_1))$$

2.2.3 Condições Iniciais

Por (2.2.32), temos que

$$\begin{cases} \{u^n(0), v^n(0)\} & \rightarrow & \{u(0), v(0)\} & em & V \\ \{u_t^n(0), v_t^n(0)\} & \rightarrow & \{u_t(0), v_t(0)\} & em & L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1) \end{cases} \tag{2.2.33}$$

Por outro lado, temos de (2.2.2) que

$$\begin{cases} \{u^n(0), v^n(0)\} = \{u_0^n, v_0^n\} & \rightarrow & \{u_0, v_0\} & em & V \\ \{u_t^n(0), v_t^n(0)\} = \{u_1^n, v_1^n\} & \rightarrow & \{u_1, v_1\} & em & L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1) \end{cases} \tag{2.2.34}$$

Portanto de (2.2.33), (2.2.34) e unicidade de limite, temos

$$\begin{cases} \{u(0), v(0)\} & = & \{u_0, v_0\} & em & V \\ \{u_t(0), v_t(0)\} & = & \{u_1, v_1\} & em & L^2(\Omega_2) \times L^2(\Omega_1) \end{cases}$$

onde concluímos o desejado.

Observação 2.1 *A unicidade da solução fraca é provada pelo método de Lions Magenes [13], ver também Visik-Ladyznhenskaya [25].*

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

Nesta seção provaremos que a energia de primeira ordem associada ao sistema [(0.0.8)-(0.0.14)] decai exponencialmente desde que a função g satisfaça hipóteses adicionais de decaimento, como por exemplo

$$\begin{array}{rcl} -\kappa_{1,1}g(t) & \leq & g'(t) \leq -\kappa_{1,2}g(t), \\ \kappa_{2,1}g(t) & \leq & g''(t) \leq \kappa_{2,2}g(t), \\ & & |g'''(t)| \leq \kappa_3 g(t), \end{array} \tag{3.0.1}$$

onde $\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}, \kappa_3$ são constantes positivas com $i = 1, 2$ e $g \in C^3[0, \infty[$. Consideraremos também

$$F \equiv G = 0,$$

logo o problema [(0.0.8)-(0.0.14)] reduz ao sistema linear viscoelástico dado por

$$u_{tt} - au_{xx} + g * u_{xx} = 0 \quad em \quad \mathcal{O}\times]0, \infty[\tag{3.0.2}$$

$$v_{tt} - bv_{xx} = 0 \quad em \quad]L_1, L_2[\times]0, \infty[\tag{3.0.3}$$

$$u(0, t) = u(L_3, t) = 0 \quad em \quad]0, \infty[\tag{3.0.4}$$

$$u(L_j, t) = v(L_j, t)\ ; j = 1, 2 \quad em \quad]0, \infty[\tag{3.0.5}$$

$$au_x(L_j, t) - g * u_x(L_j, t) = bv_x(L_j, t)\ ; j = 1, 2 \quad em \quad]0, \infty[\tag{3.0.6}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \ \ e \ \ u_t(x, 0) = u_1(x) \quad em \quad x \in \mathcal{O} \tag{3.0.7}$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \ \ e \ \ v_t(x, 0) = v_1(x) \quad em \quad x \in]L_1, L_2[\tag{3.0.8}$$

onde os coeficientes de elasticidade a e b, assumem valores positivos fixados. O sistema [(3.0.2)-(3.0.8)] será estritamente dissipativo se

$$g(0) > 0. \tag{3.0.9}$$

A seguir introduzimos algumas notações que serão úteis ao longo deste capítulo. Consideremos os espaço funcional

$$V = \{\{\Phi, \Psi\} \in H^1(\mathcal{O}) \times H^1(L_1, L_2)\ ;\ \Phi(0) = \Psi(L_3) = 0\ ;\ \Phi(L_j) = \Psi(L_j)\ ;\ j = 1, 2\}$$

Note que V munido do produto interno

$$\langle\{\Phi^1, \Psi^1\}, \{\Phi^2, \Psi^2\}\rangle_V = a \int_\Theta \Phi^1_x, \Phi^2_x dx + b \int_{L_1}^{L_2} \Psi^1_x, \Psi^2_x dx$$

é um espaço de Hilbert.

Denotemos com E_1 e E_2 os funcionais de energia

$$E_1(t, u) \ = \ +\frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} \left[|u_t|^2 + \beta(t)|u_x|^2 + g\Box u_x\right] dx$$

e

$$E_2(t, v) \ = \ +\frac{1}{2} \int_{L_1}^{L_2} \left[|v_t|^2 + b|v_x|^2\right] dx$$

onde "$\Box$" denota a operação binária introduzida no **capítulo (1)** e $\beta(t)$ denota a função

$$\beta(t) : \ = \ a - \int_0^t g(\tau) d\tau \ > 0$$

A condição (1.3.11) implica que

$$\beta_0 \ \leq \ \beta(t) \ \leq \ a$$

Definimos a energia associada ao sistema $[(3.0.2) - (3.0.8)]$, como sendo

$$E(t, u, v) := E_1(t, u) + E_2(t, v)$$

Verificamos no **capítulo (2)** que o sistema [(0.0.15)-(0.0.21)] possui uma única solução forte, logo em particular, [(0.0.8)-(0.0.14)] possui uma única solução, de onde segue que, [(3.0.2)-(3.0.8)] possui uma única solução na classe

$$\begin{aligned}
\{u, v\} \ &\in \ L^\infty_{loc}(0, \infty; V)\\
\{u_t, v_t\} \ &\in \ L^\infty_{loc}(0, \infty; V)\\
\{u_{tt}, v_{tt}\} \ &\in \ L^\infty_{loc}(0, \infty; L^2(\mathcal{O}) \times L^2]L_1, L_2[)
\end{aligned}$$

de onde concluímos pelo **Lema (1.5)** que

$$\{u, v\} \in L^\infty_{loc}(0, \infty, H^2(\mathcal{O})) \times L^\infty_{loc}(0, \infty, H^2]L_1, L_2[)$$

A propriedade dissipativa da equação viscoelástica é resumida no seguinte Lema.

Lema 3.1 *Suponhamos que $\{u, v\}$ é uma solução forte do sistema [(3.0.2)-(3.0.8)]. Então temos que*

$$\frac{d}{dt}E(t, u, v) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x, t)dx - \frac{1}{2}g(t)\int_{\mathcal{O}}|u_x(x, t)|^2 dx$$

Demonstração: Multiplicando as equações [(3.0.2),(3.0.3)] por u_t e v_t respectivamente, temos

$$u_{tt}(x, t)u_t(x, t) - au_{xx}(x, t)u_t(x, t) + (g * u_{xx})(x, t)u_t(x, t) = 0 \;\; em \;\; \mathcal{O}\times]0, \infty[\quad (3.0.10)$$

e

$$v_{tt}(x, t)v_t(x, t) - bv_{xx}(x, t)v_t(x, t) \;\; = \;\; 0 \;\; em \;\;]L_1, L_2[\times]0, \infty[\qquad (3.0.11)$$

onde $\{u_t, v_t\} \in L^\infty(0, T, V)$.

Integrando (3.0.10) sobre $\mathcal{O}$ e (3.0.11) sobre $]L_1, L_2[$, obtemos

$$\int_{\mathcal{O}} u_{tt}(x, t)u_t(x, t)dx \underbrace{-a\int_{\mathcal{O}} u_{xx}(x, t)u_t(x, t)dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathcal{O}}(g * u_{xx})(x, t)u_t(x, t)dx}_{I_2} = 0 \quad (3.0.12)$$

e

$$\int_{L_1}^{L_2} v_{tt}(x, t)v_t(x, t)dx \underbrace{-b\int_{L_1}^{L_2} v_{xx}v_t(x, t)dx}_{I_3} \;\; = \;\; 0 \qquad (3.0.13)$$

Observamos que

$$I_1 \;\; = \;\; -au_t(L_1, t)u_x(L_1, t) + au_t(L_2, t)u_x(L_2, t) + a\int_{\mathcal{O}}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x(x, t)|^2 dx \qquad (3.0.14)$$

$$\begin{aligned} I_2 \;\; = \;\; & +(g * u_x)u_t(L_1, t) - (g * u_x)u_t(L_2, t) \\ & -\int_{\mathcal{O}}\int_0^t g(t - s)u_x(x, s)ds u_{tx}(x, t)dx \end{aligned} \qquad (3.0.15)$$

e

$$I_3 = -bv_t(L_2,t)v_x(L_2,t) + bv_t(L_1,t)v_x(L_1,t) + b\int_{L_1}^{L_2} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_x(x,t)|^2 dx \qquad (3.0.16)$$

Substituindo (3.0.14), (3.0.15) e (3.0.16) em (3.0.12) e (3.0.13), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} &+\int_{\mathcal{O}} u_{tt}(x,t)u_t(x,t)dx + a\int_{\mathcal{O}} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x(x,t)|^2 dx \\ &+au_t(L_2,t)u_x(L_2,t) - au_t(L_1,t)u_x(L_1,t) - (g*u_x)u_t(L_2,t) \\ &+(g*u_x)u_t(L_1,t) - \int_{\mathcal{O}}\int_0^t g(t-s)u_x(x,s)dsu_{tx}(x,t)dx = 0 \end{aligned} \qquad (3.0.17)$$

e

$$\begin{aligned} &\int_{L_1}^{L_2} v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx + b\int_{L_1}^{L_2} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_x(x,t)|^2 dx \\ &-bv_t(L_2,t)v_x(L_2,t) + bv_t(L_1,t)v_x(L_1,t) = 0 \end{aligned} \qquad (3.0.18)$$

somando (3.0.17) e (3.0.18), resulta

$$\begin{aligned} &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathcal{O}} \left[|u_t(x,t)|^2 + a|u_x(x,t)|^2\right] dx + \int_{L_1}^{L_2} \left[|v_t(x,t)|^2 + b|v_x(x,t)|^2\right] dx\right\} \\ &+\left[\underbrace{au_x(L_2,t) - (g*u_x) - bv_x(L_2,t)}_{0}\right] u_t(L_2,t) - \int_{\mathcal{O}}\int_0^t g(t-s)u_x(x,s)dsu_{tx}(x,t)dx \\ &+\left[\underbrace{-au_x(L_1,t) + (g*u_x) + bv_x(L_1,t)}_{0}\right] u_t(L_1,t) = 0 \end{aligned} \qquad (3.0.19)$$

de onde segue

$$\begin{aligned} &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathcal{O}} \left[|u_t(x,t)|^2 + a|u_x(x,t)|^2\right] dx + \int_{L_1}^{L_2} \left[|v_t(x,t)|^2 + b|v_x(x,t)|^2\right] dx\right\} \\ &= +\int_{\mathcal{O}}\int_0^t g(t-s)u_x(x,s)dsu_{tx}(x,t)dx \end{aligned} \qquad (3.0.20)$$

aplicando o **Lema (1.2)**, obtemos

$$\begin{aligned} &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{\mathcal{O}}\left[|u_t(x,t)|^2 + \beta(t)|u_x(x,t)|^2 + \int_{\mathcal{O}}(g\Box u_x)(x,t)dx\right] dx\right\} \\ &+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_{L_1}^{L_2} \left[|v_t(x,t)|^2 + b|v_x(x,t)|^2\right] dx\right\} \\ &= +\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}}|u_x(x,t)|^2 dx \end{aligned} \qquad (3.0.21)$$

onde concluímos

$$\frac{d}{dt}E(t,u,v) = +\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dx - \frac{1}{2}g(t)\int_{\mathcal{O}}|u_x(x,t)|^2 dx$$

sendo

$$\begin{aligned} E(t,u,v) &= +\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}\left[|u_t(x,t)|^2+\beta(t)|u_x(x,t)|^2+(g\Box u_x)(x,t)\right]dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\left[|v_t(x,t)|^2+b|v_x(x,t)|^2\right]dx \end{aligned}$$

■

A seguir enunciaremos várias desigualdades que satisfazem as soluções fortes do sistema [(3.0.2)-(3.0.8)]; para isso recorremos às técnicas multiplicativas e argumentos de compacidade.

Lema 3.2 *Seja $\{u,v\}$ uma solução forte de [(3.0.2)-(3.0.8)]. Nestas condições existe uma constante positiva K_1 independente dos dados iniciais tal que*

$$\int_0^T E_2(t,v)dt \;\le\; K_1\left\{\int_0^T\left[|v_t(L_2,t)|^2+|v_x(L_2,t)|^2+|v_t(L_1,t)|^2+|v_x(L_1,t)|^2\right]dt+E_2(T,v)\right\}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.0.3) por $\sigma(x)v_x$ e integrando sobre $]L_1,L_2[$, obtemos

$$\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_{tt}(x,t)v_x(x,t)dx-b\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_{xx}(x,t)v_x(x,t)dx = 0 \tag{3.0.22}$$

observe que

$$\begin{aligned} &+\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_{tt}(x,t)v_x(x,t)dx \\ =\; &+\frac{d}{dt}\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_t(x,t)v_x(x,t)dx-\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_t(x,t)v_{xt}(x,t)dx \end{aligned} \tag{3.0.23}$$

Substituindo (3.0.23) em (3.0.22), temos

$$\begin{aligned} &+\frac{d}{dt}\left\{\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_t(x,t)v_x(x,t)dx\right\} \\ &-\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)\left[v_t(x,t)v_{xt}(x,t)+bv_{xx}(x,t)v_x(x,t)\right]dx = 0 \end{aligned} \tag{3.0.24}$$

onde

$$\begin{aligned} &-\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)\left[v_t(x,t)v_{xt}(x,t)+bv_{xx}(x,t)v_x(x,t)\right]dx \\ =\; &-\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\frac{d}{dx}\left\{\sigma(x)\left[|v_t(x,t)|^2+b|v_x(x,t)|^2\right]\right\}dx+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\sigma_x(x)\left[|v_t(x,t)|^2+b|v_x(x,t)|^2\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.25}$$

Substituindo (3.0.25) em (3.0.24) e aplicando o teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{\int_{L_1}^{L_2}\sigma(x)v_t(x,t)v_x(x,t)dx\right\} &= \frac{\sigma(L_2)}{2}\left[|v_t(L_2,t)|^2+b|v_x(L_2,t)|^2\right]\\ &-\frac{\sigma(L_1)}{2}\left[|v_t(L_1,t)|^2+b|v_x(L_1,t)|^2\right]\\ &-\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\sigma_x(x)\left[|v_t(x,t)|^2+b|v_x(x,t)|^2\right]dx\end{aligned}\tag{3.0.26}$$

Tomando $\sigma(x)=x$ em (3.0.26) e integrando de 0 a T, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_{L_1}^{L_2}xv_t(x,T)v_x(x,T)dx-\int_{L_1}^{L_2}xv_t(x,0)v_x(x,0)dx\\ =&\ +\frac{L_2}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_2,t)|^2+b|v_x(L_2,t)|^2\right]dt-\frac{L_1}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_1,t)|^2+b|v_x(L_1,t)|^2\right]dx\\ &-\int_0^T E_2(t,v)dt\end{aligned}$$

desta igualdade, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T E_2(t,v)dt &= \frac{L_2}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_2,t)|^2+b|v_x(L_2,t)|^2\right]dt-\frac{L_1}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_1,t)|^2+b|v_x(L_1,t)|^2\right]dx\\ &-\int_{L_1}^{L_2}xv_t(x,T)v_x(x,T)dx+\int_{L_1}^{L_2}xv_t(x,0)v_x(x,0)dx\end{aligned}\tag{3.0.27}$$

Temos as seguintes desigualdades

$$\left\{\begin{aligned}-\int_{L_1}^{L_2}xv_t(x,T)v_x(x,T)dx &\le \frac{L_2}{\sqrt{b}}E_2(T,v)\\ \int_{L_1}^{L_2}xv_t(x,0)v_x(x,0)dx &\le \frac{L_2}{\sqrt{b}}E_2(0,v)\end{aligned}\right.\tag{3.0.28}$$

substituindo (3.0.28) em (3.0.27), consegue-se

$$\begin{aligned}\int_0^T E_2(t,v)dt &\le +\frac{L_2}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_2,t)|^2+b|v_x(L_2,t)|^2\right]dt+\frac{L_2}{\sqrt{b}}E_2(T,v)\\ &-\frac{L_1}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_1,t)|^2+b|v_x(L_1,t)|^2\right]dx+\frac{L_2}{\sqrt{b}}E_2(0,v)\end{aligned}\tag{3.0.29}$$

Por outro lado, multiplicando a equação (3.0.3) por v_t e integrando sobre $]L_1,L_2[\times]0,T[$, obtemos

$$\int_0^T\int_{L_1}^{L_2}v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dxdt-b\int_0^T\int_{L_1}^{L_2}v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dxdt = 0\tag{3.0.30}$$

observe,

$$\int_0^T\int_{L_1}^{L_2}v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dxdt = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}[|v_t(x,T)|^2-|v_t(x,0)|^2]dx\tag{3.0.31}$$

e

$$
\begin{aligned}
-b\int_0^T\int_{L_1}^{L_2} v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dxdt &= b\int_0^T v_t(L_1,t)v_x(L_1,t)dt+\frac{b}{2}\int_{L_1}^{L_2}|v_x(x,T)|^2dx \\
&\quad -b\int_0^T v_t(L_2,t)v_x(L_2,t)dt-\frac{b}{2}\int_{L_1}^{L_2}|v_x(x,0)|^2dx
\end{aligned} \tag{3.0.32}
$$

Substituindo (3.0.32) e (3.0.31) em (3.0.30), temos

$$
E_2(0,v) = E_2(T,v)-b\int_0^T v_t(L_2,t)v_x(L_2,t)dt+b\int_0^T v_t(L_1,t)v_x(L_1,t)dt \tag{3.0.33}
$$

Temos as seguintes desigualdades

$$
\begin{cases}
-b\displaystyle\int_0^T v_t(L_2,t)v_x(L_2,t)dt \le \frac{\sqrt{b}}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_2,t)|^2+b|v_x(L_2,t)|^2\right]dt \\
b\displaystyle\int_0^T v_t(L_1,t)v_x(L_1,t)dt \le \frac{\sqrt{b}}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_1,t)|^2+b|v_x(L_1,t)|^2\right]dt
\end{cases} \tag{3.0.34}
$$

Substituindo (3.0.34) em (3.0.33), resulta

$$
\begin{aligned}
E_2(0,v) &\le +E_2(T,v)+\frac{\sqrt{b}}{2}\int_0^T\left[|v_t(L_2,t)|^2+b|v_x(L_2,t)|^2\right]dt \\
&\quad +\frac{\sqrt{b}}{2}\int_0^T\int_0^T\left[|v_t(L_1,t)|^2+b|v_x(L_1,t)|^2\right]dt
\end{aligned} \tag{3.0.35}
$$

De (3.0.35) e (3.0.29), concluímos

$$
\int_0^T E_2(t,v)dt \le K_1\left\{\int_0^T\left[\left(|v_t(L_2,t)|^2+|v_x(L_2,t)|^2\right)+\left(|v_t(L_1,t)|^2+|v_x(L_1,t)|^2\right)\right]dt+E_2(T,v)\right\}
$$

■

Lema 3.3 *Seja $g\in C^3[0,\infty[$ satisfazendo as condições (3.0.1). Nestas condições existem constantes K_2, K_3, e K_4 independentes dos dados iniciais, tais que, as desigualdades se verificam*

$$
\begin{aligned}
\int_0^T E_1(t,u)dt &\le K_2\left\{\int_0^T\left[\left(|v_t(L_1,t)|^2+|v_x(L_1,t)|^2\right)+\left(|v_t(L_2,t)|^2+|v_x(L_2,t)|^2\right)\right]dt+E_1(T,u)\right\} \\
&\quad +K_3\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\left[|v_t(L_1,t)|^2+|v_x(L_1,t)|^2+|v_t(L_2,t)|^2+|v_x(L_2,t)|^2\right]dt \\
&\le +K_4\left\{\int_0^T E_1(t,u)dt+E_1(T,u)+E_1(0,u)\right\}
\end{aligned}
$$

para toda solução forte $\{u,v\}$ de [(3.0.2)-(3.0.8)].

Demonstração: Multiplicando a equação (3.0.2) por $\sigma_1(x)[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)]$ e integrando sobre $]0, L_1[$, temos

$$\begin{aligned} &\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_{tt}(x,t)[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)]dx \\ -&\int_0^{L_1} \sigma_1(x)[au_{xx}(x,t) - (g * u_{xx})(x,t)][au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)]dx = 0 \end{aligned} \tag{3.0.36}$$

Observe que

$$\begin{aligned} &\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_{tt}(x,t)[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)]dx \\ = &+\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t)\left[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)\right]dx\right\} \\ &-a\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t) u_{xt}(x,t)dx + \int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t)\left\{g(t)u_x(x,t) + (g' \diamond u_x)(x,t)\right\}dx \end{aligned} \tag{3.0.37}$$

e

$$\begin{aligned} &-\int_0^{L_1} \sigma_1(x)[au_{xx}(x,t) - (g * u_{xx})(x,t)][au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)]dx \\ = &-\frac{\sigma_1(x)}{2}\left[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)\right]_{x=0}^{x=L_1} + \frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left[\sigma_{1x}(x)|au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)|^2\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.38}$$

Substituindo (3.0.38), (3.0.37) em (3.0.36) e observando que

$$\begin{aligned} &a\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t) u_{xt}(x,t)dx \\ = &+\frac{a}{2}\left[\sigma_1(x)|u_t(x,t)|^2\right]_{x=0}^{x=L_1} - \frac{a}{2}\int_0^{L_1} \sigma_{1x}(x)|u_t(x,t)|^2dx \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t)\left[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)\right]dx\right\} \\ = &+\frac{\sigma_1(x)}{2}\left[a|u_t(x,t)|^2 + |au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)|^2\right]_{x=0}^{x=L_1} \\ &-\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left\{\sigma_{1x}(x)\left[a|u_t(x,t)|^2 + |au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)|^2\right]\right\}dx \\ &-\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t) + (g' \diamond u_x)(x,t)\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.39}$$

usando o **Lema (1.1)**, resulta

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t)\left[au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)\right]dx\right\} \\ = &+\frac{1}{2}\left\{\sigma_1(x)\left[a|u_t(x,t)|^2 + |au_x(x,t) - (g * u_x)(x,t)|^2\right]_{x=0}^{x=L_1}\right\} \\ &-\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left\{\sigma_{1x}(x)\left[a|u_t(x,t)|^2 + |\beta(t)u_x(x,t) - (g \diamond u_x)(x,t)|^2\right]\right\}dx \\ &-\int_0^{L_1} \sigma_1(x) u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t) + (g' \diamond u_x)(x,t)\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.40}$$

Tomando $\sigma_1(x) = x$ em (3.0.40), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\{\int_0^{L_1} xu_t(x,t)\left[au_x(x,t)-(g*u_x)(x,t)\right]dx\right\} \\ = & +\frac{L_1}{2}\left[a|u_t(L_1,t)|^2+|au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right] \\ & -\frac{1}{2}\int_0^{L_1}\left[a|u_t(x,t)|^2+|\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)|^2\right]dx \\ & -\int_0^{L_1} xu_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.41}$$

de onde, consegue-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_0^{L_1} a|u_t(x,t)|^2dx+\frac{1}{2}\beta^2(t)\int_0^{L_1}|u_x(x,t)|^2dx \\ \leq & +\frac{L_1}{2}\left[a|u_t(L_1,t)|^2+|au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right] \\ & -\frac{d}{dt}\left[\int_0^{L_1} xu_t(x,t)[\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)dx\right] \\ & -\int_0^{L_1} xu_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \\ & -\beta(t)\int_0^{L_1} u_x(x,t)(g\diamond u_x)(x,t)dx \end{aligned} \tag{3.0.42}$$

De forma análoga, multiplicando a equação (3.0.2) por $\sigma_2(x)[au_x(x,t)-(g*u_x)(x,t)]$, integrando sobre $]L_2, L_3[$, usando o **Lema (1.1)**, resulta

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\{\int_{L_2}^{L_3} \sigma_2(x)u_t(x,t)\left[au_x(x,t)-(g*u_x)(x,t)\right]dx\right\} \\ = & +\frac{\sigma_2(x)}{2}\left\{\left[a|u_t(x,t)|^2+|au_x(x,t)-(g*u_x)(x,t)|^2\right]_{x=L_2}^{x=L_3}\right\} \\ & -\frac{1}{2}\int_{L_2}^{L_3}\sigma_{2x}(x)\left[a|u_t(x,t)|^2+|\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)|^2\right]dx \\ & -\int_{L_2}^{L_3} \sigma_2(x)u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.43}$$

e tomando $\sigma_2(x) = x - L_3$, consegue-se

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left\{\int_{L_2}^{L_3} (x-L_3)u_t(x,t)\left[au_x(x,t)-(g*u_x)(x,t)\right]dx\right\} \\ = & +\frac{(L_3-L_2)}{2}\left[a|u_t(L_2,t)|^2+|au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right] \\ & -\frac{1}{2}\int_{L_2}^{L_3}\left[a|u_t(x,t)|^2+|\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)|^2\right]dx \\ & -\int_{L_2}^{L_3} (x-L_3)u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \end{aligned} \tag{3.0.44}$$

de onde resulta

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{L_2}^{L_3} a|u_t(x,t)|^2dx + \frac{\beta^2(t)}{2}\int_{L_2}^{L_3}|u_x(x,t)|^2dx \\
\leq\ & +\frac{(L_3-L_2)}{2}\left[a|u_t(L_2,t)|^2 + |au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right] \\
& -\frac{d}{dt}\left[\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,t)[\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)dx]\right] \\
& -\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \\
& -\beta(t)\int_{L_2}^{L_3}u_x(x,t)(g\diamond u_x)(x,t)dx
\end{aligned}
\tag{3.0.45}
$$

Adicionando (3.0.45) e (3.0.42), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} a|u_t(x,t)|^2dx + \frac{\beta^2(t)}{2}\int_{\mathcal{O}}|u_x(x,t)|^2dx \\
\leq\ & +\frac{L_1}{2}\left[a|u_t(L_1,t)|^2 + |au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right] \\
& +\frac{(L_3-L_2)}{2}\left[a|u_t(L_2,t)|^2 + |au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right] \\
& -\frac{d}{dt}\left[\int_{0}^{L_1}xu_t(x,t)[\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)dx\right] \\
& -\frac{d}{dt}\left[\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,t)[\beta(t)u_x(x,t)-(g\diamond u_x)(x,t)dx]\right] \\
& -\int_{0}^{L_1}xu_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \\
& -\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dx \\
& -\beta(t)\int_{0}^{L_1}u_x(x,t)(g\diamond u_x)dx - \beta(t)\int_{L_2}^{L_3}u_x(x,t)(g\diamond u_x)dx
\end{aligned}
\tag{3.0.46}
$$

Integrando de 0 até T, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_0\int_0^T E_1(t,u)dt \quad\leq\quad & +\frac{L_1}{2}\int_0^T \left[a|u_t(L_1,t)|^2+|au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right]dt \\
& +\frac{(L_3-L_2)}{2}\int_0^T \left[a|u_t(L_2,t)|^2+|au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right]dt \\
& \underbrace{-\int_0^{L_1} xu_t(x,T)\left[\beta(T)u_x(x,T)-(g\diamond u_x)(x,T)\right]dx}_{I_1} \\
& \underbrace{-\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,T)[\beta(T)u_x(x,T)-(g\diamond u_x)(x,T)]dx}_{I_2} \\
& \underbrace{+\int_0^{L_1} xu_t(x,0)\left[\beta(0)u_x(x,0)-(g\diamond u_x)(x,0)\right]dx}_{I_3} \\
& \underbrace{+\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,0)\left[\beta(0)u_x(x,0)-(g\diamond u_x)(x,0)\right]dx}_{I_4} \\
& \underbrace{-\int_0^T\int_0^{L_1} xu_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dxdt}_{I_5} \\
& \underbrace{-\int_0^T\int_{L_2}^{L_3}(x-L_3)u_t(x,t)\left[g(t)u_x(x,t)+(g'\diamond u_x)(x,t)\right]dxdt}_{I_6} \\
& \underbrace{-\int_0^T\int_0^{L_1}\beta(t)u_x(x,t)(g\diamond u_x)dxdt}_{I_7}\underbrace{-\int_0^T\int_{L_2}^{L_3}\beta(t)u_x(x,t)(g\diamond u_x)dxdt}_{I_8} \\
& \underbrace{+\frac{\gamma_0}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g\Box u_x)(x,t)dxdt}_{I_9}
\end{aligned} \tag{3.0.47}$$

onde $\gamma_0=min\{a,\beta_0\}$.

Usando as desigualdades elementares, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\left\{\begin{aligned}
I_1+I_2+I_9 &\leq cE_1(T,u) \\
I_3+I_4 &\leq cE_1(0,u) \\
I_5+I_6 &\leq +\eta_1\int_0^T E_1(t,u)dt+\eta_1 c\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt \\
&\quad -c\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt \\
I_7+I_8 &\leq +c\int_0^T E_1(t,u)dt
\end{aligned}\right. \tag{3.0.48}$$

Substituindo (3.0.48) em (3.0.47), temos

$$\begin{aligned}\gamma_0\int_0^T E_1(t,u)dt \;\; \leq \;\; & +\frac{L_1}{2}\int_0^T \left[a|u_t(L_1,t)|^2+|au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right]dt\\ & +\frac{(L_3-L_2)}{2}\int_0^T \left[a|u_t(L_2,t)|^2+|au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right]dt\\ & +c\left(E_1(T,u)+E_1(0,u)\right)+(\eta_1+c)\int_0^T E_1(t,u)dt\\ & +\eta_1 c\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt-c\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt\end{aligned}\tag{3.0.49}$$

escolhendo η_1, tal que, $\gamma_0-(\eta_1+c)=\dfrac{\gamma_0}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}&\gamma_0\int_0^T E_1(t,u)dt\\ \leq\;\; & +L_1\int_0^T \left[a|u_t(L_1,t)|^2+|au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right]dt\\ & +(L_3-L_2)\int_0^T \left[a|u_t(L_2,t)|^2+|au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right]dt\\ & +c\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt+E_1(0,u)+E_1(T,u)\right\}\end{aligned}\tag{3.0.50}$$

Multiplicando a equação (3.0.2) por u_t, integrando por partes em $\mathcal{O}$, consegue-se

$$\begin{aligned}E_1(0,u) \;\; = \;\; & E_1(T,u)-\int_0^T u_t(L_1,t)[au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)]dt\\ & +\frac{1}{2}\int_0^T u_t(L_2,t)[au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)]dt\\ & -\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\end{aligned}\tag{3.0.51}$$

Substituindo (3.0.51) em (3.0.50), resulta

$$\begin{aligned}&\gamma_0\int_0^T E_1(t,u)dt\\ \leq\;\; & +c\int_0^T \left[a|u_t(L_1,t)|^2+|au_x(L_1,t)-(g*u_x)(L_1,t)|^2\right]dt\\ & +c\int_0^T \left[a|u_t(L_2,t)|^2+|au_x(L_2,t)-(g*u_x)(L_2,t)|^2\right]dt\\ & +\frac{3c}{2}\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt\right\}+\frac{3c}{2}\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}+c\{2E_1(T,u)\}\end{aligned}\tag{3.0.52}$$

Usando [(3.0.4)-(3.0.6)] em (3.0.52), concluímos

$$\begin{aligned}\int_0^T E_1(t,u)dt \;\; \leq \;\; & K_2\left\{\int_0^T \left[|v_t(L_1,t)|^2+|v_x(L_1,t)|^2+|v_t(L_2,t)|^2+|v_x(L_2,t)|^2\right]dt+E_1(T,u)\right\}\\ & +K_3\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}\end{aligned}$$

Para obter a segunda desigualdade raciocinamos de forma similar. Tomando $\sigma_1(x) = x$ em (3.0.40) e integrando de 0 a T, consegue-se

$$\begin{aligned}
&\frac{L_1}{2}\int_0^T [a|u_t(L_1,t)|^2 + |au_x(L_1,t) - (g*u_x)(L_1,t)|^2]dt \\
\leq\ & +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^{L_1} |u_t(x,T)|^2dx + \int_0^{L_1} \beta(T)|u_x(x,T)|^2dx + \int_0^{L_1} (g\Box u_x)(x,T)dx\right]\right\} \\
& +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^{L_1} |u_t(x,0)|^2dx + \int_0^{L_1} a|u_x(x,0)|^2dx\right]\right\} \\
& +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^T\int_0^{L_1} |u_t(x,t)|^2dx + \int_0^T\int_0^{L_1} \beta(t)|u_x(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_0^{L_1} (g\Box u_x)(x,t)dxdt\right]\right\}
\end{aligned}$$

usando [(3.0.4)-(3.0.6)], temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [|v_t(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2]dt \\
\leq\ & +\frac{2c}{L_1}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^{L_1} |u_t(x,T)|^2dx + \int_0^{L_1} \beta(T)|u_x(x,T)|^2dx + \int_0^{L_1} (g\Box u_x)(x,T)dx\right]\right\} \\
& +\frac{2c}{L_1}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^{L_1} |u_t(x,0)|^2dx + \int_0^{L_1} a|u_x(x,0)|^2dx\right]\right\} \\
& +\frac{2c}{L_1}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^T\int_0^{L_1} |u_t(x,t)|^2dx + \int_0^T\int_0^{L_1} \beta(t)|u_x(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_0^{L_1} (g\Box u_x)(x,t)dxdt\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.0.53}$$

De modo análogo, tomando $\sigma_2(x) = x - L_3$ em (3.0.43) e integrando de 0 a T, consegue-se

$$\begin{aligned}
&\frac{L_3 - L_2}{2}\int_0^T [a|u_t(L_2,t)|^2 + |au_x(L_2,t) - (g*u_x)(L_2,t)|^2]dt \\
\leq\ & +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{L_2}^{L_3} |u_t(x,T)|^2dx + \int_{L_2}^{L_3} \beta(T)|u_x(x,T)|^2dx + \int_{L_2}^{L_3} (g\Box u_x)(x,T)dx\right]\right\} \\
& +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{L_2}^{L_3} |u_t(x,0)|^2dx + \int_{L_2}^{L_3} a|u_x(x,0)|^2dx\right]\right\} \\
& +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^T\int_{L_2}^{L_3} |u_t(x,t)|^2dx + \int_0^T\int_{L_2}^{L_3} \beta(t)|u_x(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_0^{L_1} (g\Box u_x)(x,t)dxdt\right]\right\}
\end{aligned}$$

usando [(3.0.4)-(3.0.6)], obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [|v_t(L_2,t)|^2 + |v_x(L_2,t)|^2]dt \\
\leq\ & +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{L_2}^{L_3} |u_t(x,T)|^2dx + \int_0^{L_1} \beta(T)|u_x(x,T)|^2dx + \int_{L_2}^{L_3} (g\Box u_x)(x,T)dx\right]\right\} \\
& +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{L_2}^{L_3} |u_t(x,0)|^2dx + \int_{L_2}^{L_3} a|u_x(x,0)|^2dx\right]\right\} \\
& +c\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^T\int_{L_2}^{L_3} |u_t(x,t)|^2dx + \int_0^T\int_{L_2}^{L_3} \beta(t)|u_x(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_{L_2}^{L_3} (g\Box u_x)(x,t)dxdt\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.0.54}$$

Adicionando (3.0.53) e (3.0.54), concluímos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[v_t(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2 + |v_t(L_2,t)|^2 + |v_x(L_2,t)|^2\right] dt \\
\leq\ & +K_4 \left\{ \int_0^T E_1(t,u)dt + E_1(T,u) + E_1(0,u) \right\}
\end{aligned}$$

para toda solução forte $\{u,v\}$ de [(3.0.2)-(3.0.8)]

■

Lema 3.4 *Com as mesmas condições do Lema (3.2). Existem constantes positivas K_5 e K_6 independentes dos dados iniciais, tais que,*

$$\int_0^T E(t,u,v)dt \ \leq\ K_5 \int_0^T E_1(t,u)dt + K_6 \left\{ -\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2 dxdt \right\}$$

para toda solução forte $\{u,v\}$ de [(3.0.2)-(3.0.8)], com T suficientemente grande.

Demonstração: Pela **Lema (3.2)**, temos

$$\int_0^T E_2(t,v)dt \ \leq\ K_1 \left\{ \int_0^T \left[|v_t(L_2,t)|^2 + |v_x(L_2,t)|^2 + |v_t(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2\right] dt + E_2(T,v) \right\}$$

e pelo **Lema (3.3)**, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T E_1(t,u)dt \ \leq\ & K_2 \left\{ \int_0^T \left[|v_t(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2 + |v_t(L_2,t)|^2 + |v_x(L_2,t)|^2\right] dt + E_1(T,u) \right\} \\
& +K_3 \left\{ -\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2 dxdt \right\}
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
&\int_0^T E(t,u,v)dt = \int_0^T E_1(t,u)dt + \int_0^T E_2(t,v)dt \\
\leq\ & +(K_1+K_2) \left\{ \int_0^T \left[|v_t(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2 + |v_t(L_2,t)|^2 + |v_x(L_2,t)|^2\right] \right\} dt \\
& +K_3 \left\{ -\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2 dxdt \right\} \\
& +K_1 E_2(T,v) + K_2 E_1(T,u)
\end{aligned} \tag{3.0.55}$$

Temos pelo **Lema (3.3)**

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[|v_t(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2 + |v_t(L_2,t)|^2 + |v_x(L_2,t)|^2\right] dt \\
\leq\ & +K_4 \left\{ \int_0^T E_1(t,u)dt + E_1(T,u) + E_1(0,u) \right\}
\end{aligned} \tag{3.0.56}$$

Substituindo (3.0.56) em (3.0.55), consegue-se

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t,u,v)dt &\leq +c_1\left\{\int_0^T E_1(t,u)dt + E(T,u,v) + E(0,u,v)\right\}dt \\ &+K_3\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}\end{aligned} \quad (3.0.57)$$

Temos pelo **Lema (3.1)** que

$$\frac{d}{dt}E(t,u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dx - \frac{1}{2}g(t)\int_{\mathcal{O}}|u_x(x,t)|^2dx$$

integrando de 0 a T e aplicando o teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$\begin{aligned}E(0,u,v) &= +E(T,u,v) - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt \\ &+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dx\end{aligned} \quad (3.0.58)$$

Substituindo (3.0.58) em (3.0.57), consegue-se

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2a}{T}\right)\int_0^T E(t,u,v)dt &\leq +c_1\int_0^T E_1(t,u)dt \\ &+c_3\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}\end{aligned}$$

tomando T suficientemente grande, concluímos

$$\int_0^T E(t,u,v)dt \leq K_5\int_0^T E_1(t,u)dt + K_6\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}$$

para toda solução forte $\{u,v\}$ de [(3.0.2)-(3.0.8)].

■

Lema 3.5 *Assumamos as hipóteses do Lema (3.3). Dado $\eta > 0$ existe C_η independente dos dados iniciais, tal que*

$$\begin{aligned}\int_0^T\left[|u(L_1,t)|^2 + |u(L_2,t)|^2\right]dt &\leq \eta\int_0^T E_1(t,u)dt \\ &+C_\eta\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\}\end{aligned}$$

para toda solução forte $\{u,v\}$ de [(3.0.2)-(3.0.8)], com T suficientemente grande.

Demonstração: A nossa prova é por redução ao absurdo. Suponhamos que existam sequências de dados iniciais $(u^{k,0}, v^{k,0})$ em $[H^2(\mathcal{O}) \times H^2(L_1, L_2)] \cap V$, $(u^{k,1}, v^{k,1})$ em V e uma constante positiva η_0, tal que as soluções (u^k, v^k) do sistema

$$u^k_{tt} - au^k_{xx} + g * u^k_{xx} = 0 \quad em \quad \mathcal{O}\times]0,\infty[\tag{3.0.59}$$

$$v^k_{tt} - bv^k_{xx} = 0 \quad em \quad]L_1, L_2[\times]0,\infty[\tag{3.0.60}$$

$$u^k(0,t) = u^k(L_3,t) = 0 \quad em \quad]0,\infty[\tag{3.0.61}$$

$$u^k(L_j,t) = v^k(L_j,t)\ ; j = 1,2 \quad em \quad]0,\infty[\tag{3.0.62}$$

$$au^k_x(L_j,t) - g * u^k_x(L_j,t) = bv^k_x(L_j,t)\ ; j = 1,2 \quad em \quad]0,\infty[\tag{3.0.63}$$

$$u^k(x,0) = u^{k,0}(x) \ \ e \ \ u^k_t(x,0) = u^{k,1}(x) \quad em \quad x \in \mathcal{O} \tag{3.0.64}$$

$$v^k(x,0) = v^{k,0}(x) \ \ e \ \ v^k_t(x,0) = v^{k,1}(x) \quad em \quad x \in]L_1, L_2[\tag{3.0.65}$$

verificam a desigualdade

$$\begin{aligned}\int_0^T \left[|u^k(L_1,t)|^2 + |u^k(L_2,t)|^2\right] dt \quad > \quad & k\left\{-\int_0^T \int_{\mathcal{O}} (g'\Box u^k_x)(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathcal{O}} g(t)|u^k_x(x,t)|^2 dxdt\right\} \\ & + \eta_0 \int_0^T E_1(t,u^k)dt\end{aligned} \tag{3.0.66}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos as função (y^k, z^k), definidas como

$$y^k(x,t) := \frac{1}{\lambda_k} u^k(x,t) \quad ; \quad z^k(x,t) := \frac{1}{\lambda_k} v^k(x,t) \quad ; \quad \lambda_k^2 := \int_0^T \left[|u^k(L_1,t)|^2 + |u^k(L_2,t)|^2\right] dt$$

temos

$$\int_0^T \left[|y^k(L_1,t)|^2 + |y^k(L_2,t)|^2\right] dt \quad = \quad \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2} = 1 \tag{3.0.67}$$

além disso, satisfazem as equações

$$y^k_{tt}(x,t) - ay^k_{xx}(x,t) + (g * y^k_{xx})(x,t) = 0 \quad em \quad \mathcal{O}\times]0,\infty[\tag{3.0.68}$$

$$z^k_{tt}(x,t) - bz^k_{xx}(x,t) = 0 \quad em \quad]L_1, L_2[\times]0,\infty[\tag{3.0.69}$$

as condições de contorno

$$y^k(0,t) = y^k(L_3,t) = 0 \quad em \quad]0,\infty[\tag{3.0.70}$$

$$y^k(L_j,t) = z^k(L_j,t)\ ; j = 1,2 \quad em \quad]0,\infty[\tag{3.0.71}$$

$$ay^k_x(L_j,t) - (g * y^k_x)(L_j,t) = bz^k_x(L_j,t)\ ; j = 1,2 \quad em \quad]0,\infty[\tag{3.0.72}$$

os dados iniciais

$$y^k(x,0)=\frac{1}{\lambda_k}u^{k,0}(x)\ \ e\ \ y^k_t(x,0)=\frac{1}{\lambda_k}y^{k,1}(x)\quad em\quad x\in\mathcal{O} \tag{3.0.73}$$

$$z^k(x,0)=\frac{1}{\lambda_k}z^{k,0}(x)\ \ e\ \ z^k_t(x,0)=\frac{1}{\lambda_k}z^{k,1}(x)\quad em\quad x\in]L_1,L_2[\tag{3.0.74}$$

e a desigualdade

$$\begin{aligned} 1 &> \eta_0\int_0^T E_1(t,y^k)dt \\ &+k\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box y^k_x)(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|y^k_x(x,t)|^2dxdt\right\} \end{aligned} \tag{3.0.75}$$

para todo $k\in\mathbb{N}$. Daqui deduz-se que

$$\int_0^T E_1(t,y^k)dt \quad \text{é limitado,} \tag{3.0.76}$$

para todo $k\in\mathbb{N}$, e tem-se as convergências.

$$\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box y^k_x)(x,t)dxdt\to 0 \tag{3.0.77}$$

$$\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|y^k_x(x,t)|^2dxdt\to 0 \tag{3.0.78}$$

quando $k\to\infty$. Multiplicamos as equações (3.0.68) e (3.0.69) por y^k_t e z^k_t respectivamente e integramos por partes. Usando o **Lema (1.3)**, e as condições [(3.0.70)-(3.0.72)], temos:

$$\begin{aligned} & E(t,y^k,z^K) \\ =\ & E(T,y^k,z^K)-\frac{1}{2}\int_t^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box y^k_x)(x,t)dxdt+\frac{1}{2}\int_t^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|y^k_x(x,t)|^2dx \\ \le\ & \frac{1}{T}\int_0^T E(t,y^k,z^k)-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box y^k_x)(x,t)dxdt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|y^k_x(x,t)|^2dx \end{aligned} \tag{3.0.79}$$

Em virtude do **Lema (3.4)**, temos

$$\begin{aligned} & \int_0^T E(t,y^k,z^K)dt \\ \le\ & K_5\int_0^T E_1(t,y^k)dt+K_6\left\{-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box y^k_x)(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|y^k_x(x,t)|^2dxdt\right\} \end{aligned} \tag{3.0.80}$$

Substituindo (3.0.80) em (3.0.79), temos

$$\begin{aligned} & E(t,y^k,z^K) \\ \le\ & +\frac{K_5}{T}\int_0^T E_1(t,y^k)dt-(\frac{K_6}{T}+\frac{1}{2})\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box y^k_x)(x,t)dxdt \\ & +(\frac{K_6}{T}+\frac{1}{2})\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|y^k_x(x,t)|^2dxdt \end{aligned} \tag{3.0.81}$$

Segue de (3.0.76),(3.0.77),(3.0.78) e (3.0.81),que

$$E(t, y^k, z^k) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T) \tag{3.0.82}$$

logo podemos extrair uma subseqüência de $(y^k, z^k)_{k\in\mathbb{N}}$, denotada da mesma forma tal que

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \{y^k, z^k\} & \overset{*}{\rightharpoonup} & \{y, z\} & em \quad L^\infty(0,T,V) \\ \{y_t^k, z_t^k\} & \overset{*}{\rightharpoonup} & \{y_t, z_t\} & em \quad L^\infty(0,T,L^2(\mathcal{O})) \end{array} \right. \tag{3.0.83}$$

de onde temos

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y^k & \overset{*}{\rightharpoonup} & y & em \quad L^\infty(0,T,H^1]0,L_1[) \\ y_t^k & \rightharpoonup & y_t & em \quad L^2(0,T,L^2]0,L_1[) \end{array} \right. \tag{3.0.84}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{lcll} y^k & \overset{*}{\rightharpoonup} & y & em \quad L^\infty(0,T,H^1]L_2,L_3[) \\ y_t^k & \rightharpoonup & y_t & em \quad L^2(0,T,L^2]L_2,L_3[) \end{array} \right. \tag{3.0.85}$$

Aplicando o **Lema (1.25)**

$$y^k \quad \to \quad y \quad em \quad C([0,T],H^r]0,L_1[) \tag{3.0.86}$$

e

$$y^k \quad \to \quad y \quad em \quad C([0,T],H^r]L_2,L_3[) \tag{3.0.87}$$

para $r < 1$.

De (3.0.86), (3.0.87), Lema do Traço e (3.0.67), temos

$$\int_0^T \left[|y(L_1,t)|^2 + |y(L_2,t)|^2\right] dt \quad = \quad 1 \tag{3.0.88}$$

A convergência (3.0.78) implica que

$$y_x \quad = \quad 0 \quad em \quad L^2(\mathcal{O}\times]0,T[)$$

mas

$$\int_0^T \left[|y(L_1,t)|^2 + |y(L_2,t)|^2\right] dt \quad \leq \quad c_\rho^2 \int_0^T \int_{\mathcal{O}} |y_x(t)|^2 dx dt = 0$$

onde c_ρ é a constante da desigualdade de Poincaré, assim temos uma contradição com (3.0.88), logo o Lema se verifica.

■

O resultado principal deste capítulo é dado por

Teorema 3.1 *Seja (u,v) a solução forte de [(3.0.2)-(3.0.8)]. Se o núcleo $g \in C^3([0,\infty[)$ satisfaz as condições (3.0.1) e (3.0.9), então existem constantes positivas C_0 e μ independentes dos dados iniciais, tal que*

$$E(t,u,v) \;\leq\; C_0 E(0,u,v) e^{-\mu t}$$

Demonstração: Como $\{u,v\}$ é solução forte de [(3.0.2)-(3.0.8)], temos pelo **Lema (3.1)**

$$\frac{d}{dt}E(t,u,v) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} g'\Box u_x dx - \frac{1}{2}g(t)\int_{\mathcal{O}} |u_x|^2 dx$$

Denotemos com $R_1(t,u)$, o funcional

$$R_1(t,u) := \int_{\mathcal{O}} u(x,t)u_t(x,t)dx.$$

Multiplicando a equação (3.0.2) por u, usando o **Lema (1.1)** e [(3.0.4),(3.0.6)], consegue-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_1(t,u) &= +\int_{\mathcal{O}} |u_t(x,t)|^2 dx - \int_{\mathcal{O}} \left[\beta(t)u_x(x,t) - (g\diamond u_x)(x,t)\right] u_x(x,t)dx \\ &\quad + bv_x(L_1,t)u(L_1,t) - bv_x(L_2,t)u(L_2,t)\end{aligned}$$

Denotemos com $R_2(t,u)$, o funcional

$$\begin{aligned}R_2(t,u) &:= -\int_{\mathcal{O}} u_t(x,t)(g*u)_t(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} (g"\Box u)(x,t)dx \\ &\quad + \frac{g'(t)}{2}\int_{\mathcal{O}} |u(x,t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} |(g*u_x)(x,t)|^2 dx\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.0.2) por $(g*u)_t$, usando o **Lema (1.1)** e [(3.0.4)-(3.0.6)], resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_2(t,u) &= -g(0)\int_{\mathcal{O}} |u_t(x,t)|^2 dx - bv_x(L_1,t)\{g(t)u(L_1,t) + (g'\diamond u)(L_1,t)\} \\ &\quad + bv_x(L_2,t)\{g(t)u(L_2,t) + (g'\diamond u)(L_2,t)\} + a\int_{\mathcal{O}} g(t)|u_x(x,t)|^2 dx \\ &\quad + a\int_{\mathcal{O}} u_x(x,t)(g'\diamond u_x)(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} (g'''\Box u)(x,t)dx + \frac{g''(t)}{2}\int_{\mathcal{O}} |u(x,t)|^2 dx\end{aligned}$$

Definimos

$$L(t,u,v) := NE(t,u,v) + \frac{g(0)}{2}R_1(t,u) + R_2(t,u)$$

onde N denota uma constante grande. Das estimativas anteriores tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t,u,v) &= \frac{N}{2}\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dx - \frac{N}{2}g(t)\int_{\mathcal{O}}|u_x(x,t)|^2dx \\
&+\frac{g(0)}{2}\int_{\mathcal{O}}|u_t(x,t)|^2dx - \frac{g(0)}{2}\int_{\mathcal{O}}\left[\beta(t)u_x(x,t) - (g\diamond u_x)(x,t)\right]u_x(x,t)dx \\
&+\frac{g(0)}{2}bv_x(L_1,t)u(L_1,t) - \frac{g(0)}{2}bv_x(L_2,t)u(L_2,t) \\
&-g(0)\int_{\mathcal{O}}|u_t(x,t)|^2dx - bv_x(L_1,t)\{g(t)u(L_1,t) + (g'\diamond u)(L_1,t)\} \\
&+bv_x(L_2,t)\{g(t)u(L_2,t) + (g'\diamond u)(L_2,t)\} + a\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dx \\
&+a\int_{\mathcal{O}}u_x(x,t)(g'\diamond u_x)(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}}(g'''\Box u)(x,t)dx + \frac{g''(t)}{2}\int_{\mathcal{O}}|u(x,t)|^2dx
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young, Poincaré, Teorema do Traço , o **Lema (1.1)** e [(3.0.4)-(3.0.6)] tem-se que, para N suficientemente grande

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(t,u,v) &\leq +\frac{N}{4}\left\{\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dx - g(t)\int_{\mathcal{O}}|u_x(x,t)|^2dx\right\} - \frac{g(0)}{2}\int_{\mathcal{O}}E_1(t,u)dt \\
&+\delta_0\int_{\mathcal{O}}\left[|v_x(L_1,t)|^2 + |v_x(L_1,t)|^2\right] + c_1\left[|u(L_1,t)|^2 + |u(L_2,t)|^2\right]
\end{aligned}$$

onde δ_0 representa uma constante positiva pequena que será determinada posteriormente. Integrando de 0 até T, com T suficientemente grande, e usando a segunda parte do **Lema (3.3)**, obtemos

$$\begin{aligned}
L(T,u,v) - L(0,u,v) &\leq +\frac{N}{8}\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt - \int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\} \\
&-\frac{g(0)}{2}\int_0^T E_1(t,u)dt + c_1\int_0^T\left[|u(L_1,t)|^2 + |u(L_2,t)|^2\right]dt \\
&+\delta_0K_4\left\{\int_0^T E_1(t,u)dt + E_1(T,u) + E_1(0,u)\right\} \\
&\leq +\frac{N}{8}\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt - \int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\} \\
&-\frac{g(0)}{2}\int_0^T E_1(t,u)dt + c_1\int_0^T\left[|u(L_1,t)|^2 + |u(L_2,t)|^2\right]dt \\
&+\delta_0K_4\left\{\int_0^T E(t,u,v)dt + E(T,u,v) + E(0,u,v)\right\}
\end{aligned}$$

temos pelo **Lema (3.1)** que

$$E(0,u,v) = E(T,u,v) - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dx$$

substituindo na desigualdade anterior, e tomando N suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned} L(T,u,v)-L(0,u,v) &\leq +\frac{N}{16}\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\} \\ &\quad -\frac{g(0)}{2}\int_0^T E_1(t,u)dt+c_1\int_0^T\left[|u(L_1,t)|^2+|u(L_2,t)|^2\right]dt \\ &\quad +\delta_0 K_4\left(1+\frac{2}{T}\right)\int_0^T E(t,u,v)dt \end{aligned}$$

usando o **Lema (3.4)**, temos que para N suficientemente grande, se satisfaz

$$\begin{aligned} L(T,u,v)-L(0,u,v) &\leq +\frac{N}{32}\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\} \\ &\quad -\frac{g(0)}{2K_5}\int_0^T E(t,u,v)dt+c_1\int_0^T\left[|u(L_1,t)|^2+|u(L_2,t)|^2\right]dt \\ &\quad +\delta_0 K_4\left(1+\frac{2}{T}\right)\int_0^T E(t,u,v)dt \end{aligned}$$

aplicando o **Lema (3.5)** com $\eta=\delta_0$ temos que, para N suficientemente grande

$$\begin{aligned} L(T,u,v)-L(0,u,v) &\leq +\frac{N}{64}\left\{\int_0^T\int_{\mathcal{O}}(g'\Box u_x)(x,t)dxdt-\int_0^T\int_{\mathcal{O}}g(t)|u_x(x,t)|^2dxdt\right\} \\ &\quad -\left(\frac{g(0)}{2K_5}-\delta_0\left(c_1+K_4+\frac{2K_4}{T}\right)\right)\int_0^T E(t,u,v)dt \end{aligned}$$

escolhendo δ_0, como a solução da equação

$$-\left(\frac{g(0)}{2K_5}-\delta_0\left(c_1+K_4+\frac{2K_4}{T}\right)\right) = \frac{g(0)}{4K_5}$$

obtemos

$$\begin{aligned} L(T,u,v)-L(0,u,v) &\leq -\frac{g(0)}{4K_5}\int_0^T E(t,u,v)dt \\ &\leq -\frac{g(0)T}{4K_5}E(T,u,v)dt \end{aligned} \tag{3.0.89}$$

Usando a desigualdade de Young e Poincaré, pode-se mostrar que

$$|R_i(t,u)| \leq c_2E(t,u,v) \quad , \quad i=1,2$$

assim, deduz-se que, para N suficientemente grande, tem-se

$$\frac{N}{2}E(t,u,v) \leq L(t,u,v) \leq 2NE(t,u,v) \tag{3.0.90}$$

Combinando (3.0.89) e (3.0.90), obtemos

$$L(T,u,v)-L(0,u,v) \leq -\frac{g(0)T}{8K_5N}L(T,u,v)dt$$

o qual implica

$$L(T,u,v) \ \leq \ \alpha L(0,u,v) \quad , \quad \alpha := \left(1+\frac{g(0)T}{8K_5N}\right)^{-1}$$

Note que a constante α independe dos dados iniciais. Pela propriedade de semigrupo do sistema [(3.0.2)-(3.0.6)], temos que

$$L(\hat{t}+T,u,v) \ \leq \ \alpha L(\hat{t},u,v) \quad , \quad \forall \hat{t} \geq 0. \tag{3.0.91}$$

Seja $t>0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ e r um número real satisfazendo $0 \leq r < T$, tal que,

$$t = nT + r, \qquad \textit{equivalentemente} \qquad n = \frac{t}{T} - \frac{r}{T},$$

usando recursivamente a estimativa (3.0.91) e a desigualdade (3.0.90), obtemos

$$\begin{aligned} L(t,u,v) \ &\leq \ \alpha^n L(r,u,v) \\ &\leq \ 2N\alpha^n E(r,u,v) \end{aligned}$$

Lembrando que a energia $E(t,u,v)$ é decrescente, obtemos

$$\begin{aligned} L(t,u,v) \ &\leq \ 2N\alpha^{\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{T}\right)} E(0,u,v) L(r,u,v) \\ &\leq \ 2N\alpha^{-1} E(0,u,v) e^{-\mu t} \end{aligned}$$

onde a constante μ é dada por

$$-\mu := \ln(\alpha^{\frac{1}{T}})$$

Usando (3.0.90), concluímos

$$E(t,u,v) \ \leq \ 4\alpha^{-1} E(0,u,v) e^{-\mu t}$$

Logo, o Teorema se verifica, o que completa a demonstração.

■

O decaimento da energia das soluções fracas é uma consequência direta do **Teorema (3.1)**, para isso basta usar argumentos de densidade e a semicontinuidade inferior da energia. Este resultado é dado por

Corolário 3.1 *Com as mesmas hipóteses do* **Teorema (3.1)**. *Existem constantes positivas C_0 e μ, tal que*

$$E(t,u,v) \ \leq \ C_0 E(0,u,v) e^{-\mu t}$$

para toda solução fraca $\{u,v\}$ do problema [(3.0.2)-(3.0.8)]

Bibliografia

[1] Brezis, H. - *Analyse Fonctionnelle, Thèorie et Applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, MASSON, 1987. 1.1.1, 1.1.1, 1.1.1, 1.1.1, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.2, 1.1.5, 1.1.5, 1.1.5

[2] Cavalcanti, M. M. & Domingos Cavalcanti, V. N. *Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.* Vol. I e II. Maringá: Textos do Dep. de Matemática- UEM, 2000.

[3] Dafermos, C. M. - *Asymptotic stability in viscoelasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal. 37, pp. 297-308, (1970). 1.1.7 1

[4] Dafermos, C. M. - *An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity.* Journal of Differential Equations 7, pp. 554-569, (1970). 1

[5] Dassios, G. & Zafiropoulos, F. - *Equipartition of energy in Linearized 3-D Viscoelastliclity.* Quart. Appl. Math. vol 48(4), pp. 715-730, (1990). 1

[6] Dautray, R. & Lions, J. L. - *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Vol. 1,2 and 4, Springer-Verlag, Berlin, (1990). 1

[7] Kesavan, S. - *Topics in Functional Analysis and Aplications.* New Delhi:Willey Easten Limited, 1990. 1.2.1

[8] Kim, J. U. - *A boundary thin obstacle problem for a wave equation.* Partial Differential Equations 14(8-9), pp. 1011-1026 (1989). 1.2.2

[9] Kirchhorff, G. - *Vorlesungen über Mechanik.* Tauber, Leipzig, 1883.

[10] Ladyzhenskaya, O. A. & Uraltseva, N. N. - *Linear and Quaselinear Elliptic Equations.* Academic Press, New York, (1968). 1.2.3

[11] Lions, J. L. - *Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation Problems.* Tome 1,Contrôlabilité Exacte, Collection RMA vol.8, Masson, Paris, (1988). 1, 1

[12] Lions, J. L. - *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod, Gauthier-Villars, 1968. 1.1.4, 1.1.5, 1.1.5

[13] Lions, J. L. & Magenes, E. - *Problémes aux Limites non Homogènes, Applications 1,.* Dunod, Paris, 1968. 2.1

[14] Lions, J. L. - *On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathmatical Physics.* Contemporary Development in Continuum Mechanics and Partial Differential Equation, Edited by G. M. de La Penha and L. A. Medeiros, North-Holland, Amsterdam, pag 285-346, 1977. 1.1.4, 1.1.5, 1.1.5

[15] Medeiros, L. A. - *Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações.* Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1983. 1.1.3, 1.2.1

[16] Medeiros, L. A. & Mello, E. A. de - *A Integral de Lebesgue.* Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1989.

[17] Medeiros, L. A. & Miranda, M. M. - *On Nonlinear Wave Equation With Damping.* Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid, Vol. 13, $n\underline{o}$ 2 y 3, pag 213-231, 1990.

[18] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M. - *Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos.* Instituto de Matemática, UFRJ, 2000. 1.1.3, 1.1.3, 1.1.5, 1.2.1

[19] Menzala, G. P. - *Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais.* Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1977.

[20] Milla Miranda, M. - *Análise Espectral em Espaços de Hilbert.* Textos de Métodos Matemáticos, UFRJ, 1990. 1.1.6

[21] Muñoz Rivera, J. E. & Salvatierra, A. P. - *Asymptotic Behaviour of the Energy in Partially Viscoelastic Materials*. Quarterly of Applied Mathematics, vol.LIX, (3), pp. 557-578, (2001). 1

[22] Muñoz Rivera, J. E. - *Asymptotic Behaviour in Linear Viscoelastic*. Quarterly of Applied Mathematics, vol.III, (4), pp. 629-648, (1994). 1

[23] Oquendo, H.P. - *Estabilidade para Problemas de Contato e Materiais Mistos*. Instituto de Matemática, UFRJ, 1999. 1

[24] Tcheougoné Tebou, L. R. & Zuazua, E. - *Uniform Exponential Long Time Decay for the Space semi-discretization of a Locally Damped Wave Equations via an Artificial numerical Viscosity*. Preprint. 1

[25] Visik, M.I.& Ladyzhenskaia, O. A. - *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Centain Classes of Operator Equations, A.M.S. Translations Series.* 2 10, (1958), 223-281. 2.1