

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CÂMPUS CURITIBA
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETROTÉCNICA
ENGENHARIA ELÉTRICA E ENGENHARIA DE CONTROLE E
AUTOMAÇÃO

BRUNO GABRIEL NIZER
GABRIELA CESCATTO
LORENA DE FIGUEIREDO COELHO

CONTROLE ÓTIMO EM TREMOR PARKINSONIANO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

BRUNO GABRIEL NIZER
GABRIELA CESCATTO
LORENA DE FIGUEIREDO COELHO

CONTROLE ÓTIMO EM TREMOR PARKINSONIANO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, dos cursos de Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) como requisito parcial para obtenção do título de Engenheiro Eletricista e Engenheiro de Controle e Automação.

Orientador: Profa. Dra. Mariana Furucho

Coorientador: Prof. Dr. Rafael Fontes Souto

CURITIBA
2018

Bruno Gabriel Nizer
Gabriela Cescatto
Lorena de Figueiredo Coelho

Controle ótimo em tremor parkinsoniano

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação foi julgado e aprovado como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Eletricista, do curso de Engenharia Elétrica do Departamento Acadêmico de Eletrotécnica (DAELT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Curitiba, 11 de junho de 2018.

Prof. Antonio Carlos Pinho, Dr.
Coordenador de Curso
Engenharia Elétrica

Profa. Annemarlen Gehrke Castagna, Ma.
Responsável pelos Trabalhos de Conclusão de Curso
de Engenharia Elétrica do DAELT

ORIENTAÇÃO

Mariana Antonia Aguiar Furucho, Dra.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Orientadora

Rafael Fontes Souto, Dr.
Instituto Federal de Brasília, IFB, Brasil
Co-Orientador

BANCA EXAMINADORA

Mariana Antonia Aguiar Furucho, Dra.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Rafael Fontes Souto, Dr.
Instituto Federal de Brasília, IFB, Brasil

Victor Baptista Frencl, Dr.
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

A folha de aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso de Engenharia Elétrica

Às pessoas que diariamente instigam a pesquisa e a busca pela cultura.
Aos amigos e mestres que nos guiam pelos desafios de nossa jornada.

AGRADECIMENTOS

A meus pais - meus fundamentais mestres - o meu verdadeiro obrigado, não apenas pelos ensinamentos, mas principalmente por acreditarem em mim e me orientarem a buscar sempre o ótimo.

RESUMO

NIZER, Bruno G. CESCATTO, Gabriela. COELHO, Lorena de F. Controle Ótimo em Tremor Parkinsoniano. 2018. 102f. Trabalho de Conclusão de Curso – Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Esse trabalho tem como objetivo o estudo do tremor parkinsoniano, a obtenção do seu respectivo modelo a partir de um oscilador não linear e a atuação do controle quando o paciente está submetido a um tratamento via estimulação cerebral profunda. A partir do sinal de aceleração da mão do paciente, é feita uma investigação variando diferentes parâmetros deste modelo. É proposta, então, uma lei de controle por realimentação de estados, a fim de controlar a intensidade do sinal. Essa mesma lei de controle será usada na determinação da amplitude do sinal de estímulo cerebral usado no tratamento, substituindo o controle em malha aberta realizado na terapia de estimulação cerebral. Intenciona-se a construção de um dispositivo clínico automático para ser usado por pessoas com a doença de Parkinson. O controle proposto é analisado e comparado a outras estratégias de controle por meio de simulações computacionais.

Palavras-chave: Tremor parkinsoniano, estimulação cerebral profunda, oscilador não linear, controle ótimo.

ABSTRACT

NIZER, Bruno G. CESCATTO, Gabriela. COELHO, Lorena de F. Optimal control in the Parkinsonian tremor. 2018. 102f. – Engenharia Elétrica e Engenharia de Controle e Automação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

This work aims the study of Parkinsonian tremor, obtaining its respective model from a non-linear oscillator and the performance of the control when the patient is submitted to a treatment through deep brain stimulation. From the acceleration signal of the patient's hand, an investigation is performed by varying different parameters of this model. It is proposed, then, a state feedback control law, in order to control the signal intensity. This same control law will be used to determine the amplitude of the brain stimulation signal used in the treatment, replacing the open loop control traditionally applied in the brain stimulation therapy. It is intended to construct an automatic clinical device to be used by people with Parkinson's disease. The proposed control is analyzed and compared to other control strategies by means of computational simulations.

Keywords: Parkinsonian tremor, deep brain stimulation, nonlinear oscillator, optimal control.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1	– Ilustração de sinapse nervosa	14
FIGURA 2	– Diagrama de blocos da representação por espaço de estados	22
FIGURA 3	– Problema de regulação por realimentação de estados de um sistema LIT .	24
FIGURA 4	– Configuração do circuito LC	29
FIGURA 5	– Sistema massa-mola	31
FIGURA 6	– Oscilador harmônico amortecido e forçado.	33
FIGURA 7	– Diagrama de blocos de um oscilador harmônico forçado e amortecido ...	37
FIGURA 8	– Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo do sistema harmônico amortecido e forçado para $b = 2 \text{ Ns/cm}$	39
FIGURA 9	– Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo do sistema harmônico amortecido e forçado para $b = 0,2 \text{ Ns/cm}$	41
FIGURA 10	– Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo de um oscilador harmônico forçado e sem amortecimento	42
FIGURA 11	– Gráfico da resposta natural do sistema	43
FIGURA 12	– Diagrama de blocos - Realimentação por controle ótimo	44
FIGURA 13	– Gráfico da resposta do sistema com controle ótimo	46
FIGURA 14	– Gráfico do critério de desempenho da resposta do sistema com controle ótimo	46
FIGURA 15	– Gráfico da resposta do sistema com realimentação $K = [0,2 \ 0,8]$	48
FIGURA 16	– Gráfico do critério de desempenho da resposta do sistema com realimentação $K = [0,2 \ 0,8]$	48
FIGURA 17	– Gráfico da resposta do sistema com realimentação $K = [5 \ 5]$	49
FIGURA 18	– Gráfico do critério de desempenho da resposta do sistema com realimentação $K = [5 \ 5]$	50
FIGURA 19	– Ciclo do AG	52
FIGURA 20	– Sintonia do Controlador PID através do AG	53
FIGURA 21	– Diagrama de realimentação - $\Delta(s)M(s)$	57
FIGURA 22	– Diagrama duas portas - Controle H_∞	59
FIGURA 23	– Implantação de eletrodos no cérebro para controle da doença de Parkinson	61
FIGURA 24	– Modelo completo do DBS e da medição do tremor	63
FIGURA 25	– Diagrama de blocos do modelo de um tremor linear sem termo estabilizador	66
FIGURA 26	– Gráfico da aceleração em função do tempo de um tremor linear sem termo estabilizador	67
FIGURA 27	– Gráfico da aceleração em função do tempo de um tremor linear com termo estabilizador	70
FIGURA 28	– Sistema completo do tremor parkinsoniano em malha aberta representado em diagrama de blocos	73
FIGURA 29	– Resposta natural do tremor com $\alpha > \beta$	74
FIGURA 30	– Resposta natural do tremor com $\alpha \gg \beta$	74
FIGURA 31	– Resposta natural do tremor com $\alpha = \beta$	75
FIGURA 32	– Resposta natural do tremor com $\alpha = \beta = 0$	75

FIGURA 33	– Resposta natural do tremor com $\alpha < \beta$	76
FIGURA 34	– Resposta natural do tremor com $\alpha \ll \beta$	76
FIGURA 35	– Diagrama de blocos do sistema completo do tremor parkinsoniano em malha fechada com aplicação do controle ótimo	77
FIGURA 36	– Resposta do sinal do tremor $\alpha > \beta$ com a aplicação do controle	78
FIGURA 37	– Resposta do sinal do tremor $\alpha = \beta$ com a aplicação do controle	80
FIGURA 38	– Resposta do sinal do tremor $\alpha < \beta$ com a aplicação do controle	81
FIGURA 39	– Resposta de AG pela <i>toolbox</i>	85
FIGURA 40	– Algoritmo Genético aplicado em Malha fechada	86
FIGURA 41	– Melhor resposta de AG pela <i>toolbox</i>	87
FIGURA 42	– Controle ótimo aplicado em Malha fechada	88
FIGURA 43	– Melhor resposta de Algoritmo Genético aplicado em Malha fechada	88
FIGURA 44	– Controle Subótimo com $\beta > \alpha$	90
FIGURA 45	– Custo do Controle Subotimo com $\beta > \alpha$	90
FIGURA 46	– Controle Subotimo com $\beta < \alpha$	91
FIGURA 47	– Custo do Controle Subotimo com $\beta < \alpha$	92
FIGURA 48	– Aplicação do controle LQR nominal e descasado	93
FIGURA 49	– Resposta do sistema sob aplicação do controle ótimo e subótimo	94
FIGURA 50	– Aplicação do controle H_∞	95
FIGURA 51	– Curvas do modelo incerto	96
FIGURA 52	– Sinal do controle H_∞	96

LISTA DE TABELAS

TABELA 1	– Tipos de osciladores	28
TABELA 2	– Comparação do circuito LC e o sistema massa-mola	32
TABELA 3	– Parâmetros de ajuste de AG	84

LISTA DE SIGLAS

LIT	Linear Invariante no Tempo
SPE	Semiplano Esquerdo
EE	Espaço de Estados
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo
LC	Indutivo-Capacitivo
IA	Inteligência Artificial
AG	Algoritmo Genético
PID	Proporcional Integral Derivativo
ZN	Ziegler-Nichols
SPD	Semiplano Direito
MIMO	Multiple Input - Multiple Output
DBS	Deep Brain Stimulation
EDO	Equação Diferencial Ordinária
BIBO	Bounded Input- Bounded Output
LQR	Regulador Linear Quadrático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 TEMA	13
1.1.1 Delimitação do Tema	15
1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS	16
1.3 OBJETIVOS	17
1.3.1 Objetivo Geral	17
1.3.2 Objetivos Específicos	17
1.4 JUSTIFICATIVA	17
1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	18
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	19
2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	20
2.1 CONCEITOS BÁSICOS DE CONTROLE ÓTIMO	20
2.1.1 Espaço de Estados	21
2.1.1.1 Controlabilidade	22
2.1.1.2 Observabilidade	23
2.1.1.3 Princípio da dualidade	23
2.1.2 Otimização e Critério de Desempenho	24
2.1.3 Cálculo do Ganho Ótimo para Realimentação dos Estados	25
2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE OSCILADORES HARMÔNICOS	27
2.2.1 O Circuito LC	28
2.2.2 O Sistema Massa-Mola	30
2.2.3 Oscilações Harmônicas Amortecidas	33
2.2.3.1 Representação em espaço de estados	36
2.2.3.2 Exemplos ilustrativos	37
2.3 APLICAÇÃO DE CONTROLE ÓTIMO EM OSCILADORES HARMÔNICOS	42
2.4 INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL – ALGORITMO GENÉTICO	50
2.4.1 Exemplos de aplicação de AG na sintonia de controladores PID's	53
2.5 CONTROLE ROBUSTO	54
2.5.1 Conceitos importantes no contexto da Teoria do Controle Robusto	55
2.5.1.1 Incertezas do modelo	55
2.5.1.2 Teorema do Ganho Pequeno	56
2.5.1.3 Controle H_∞	57
3 O TREMOR PARKINSONIANO	61
3.1 A ESTIMULAÇÃO CEREBRAL	61
3.2 INTRODUÇÃO AO COMPORTAMENTO DO TREMOR PARKINSONIANO	62
3.3 COMPORTAMENTO DE UM TREMOR LINEAR SEM TERMO ESTABILIZADOR	65
3.4 COMPORTAMENTO DE UM TREMOR LINEAR COM TERMO ESTABILIZADOR	68
4 AVALIAÇÃO DO CONTROLE ÓTIMO EM DIFERENTES CENÁRIOS	71
4.1 SISTEMA PARKINSONIANO CONTROLÁVEL	71

4.2	RESPOSTA NATURAL DO TREMOR	73
4.2.1	Sistema instável	73
4.2.2	Sistema regular	75
4.2.3	Sistema estável	76
4.3	SISTEMA COM APLICAÇÃO DO CONTROLE ÓTIMO	77
4.3.1	Sistema instável	78
4.3.2	Sistema regular	79
4.3.3	Sistema estável	81
5	OUTRAS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE	83
5.1	ALGORITMO GENÉTICO	83
5.2	CONTROLE DESCASADO DO MODELO	89
5.3	APLICAÇÃO DO CONTROLE H_∞	93
6	CONCLUSÕES	98
	REFERÊNCIAS	100

1 INTRODUÇÃO

1.1 TEMA

Uma doença mental pode ser definida como uma condição de saúde que altera o pensamento de uma pessoa, sentimentos ou comportamentos (ou todos os três) e que provoca angústia e dificuldade de funcionamento (NINDS, 2012).

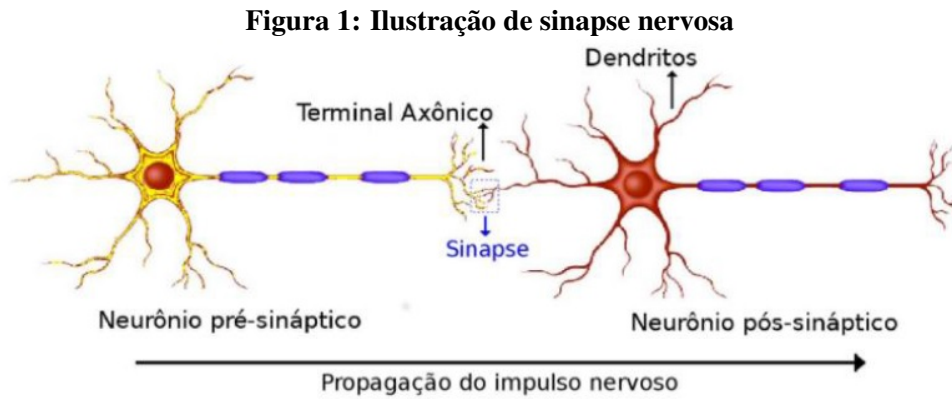
Essas doenças têm sua origem em alterações estruturais, bioquímicas ou elétricas que ocorrem no sistema nervoso central do enfermo (SIULY; ZHANG, 2016). Os neurônios, principais células cerebrais extremamente especializadas, raramente se regeneram na vida adulta. Por isso, quando danificados, essas estruturas dificilmente voltarão a funcionar devidamente. Quando expostos a mutações ou quando estas estão intrínsecas ao DNA do indivíduo, tornam-se progressivas e afetam várias dessas células (RESEARCH, 2017). Quando tal procedimento ocorre, a doença passa a ser classificada como neurodegenerativa.

Grande parte do grupo de doenças neurodegenerativas são genótipos que se manifestam, geralmente, apenas na vida adulta ou na velhice (TOMORROW, 2015). Na prática, as doenças neurodegenerativas representam um grande grupo de distúrbios neurológicos com expressões clínicas e patológicas heterogêneas que afetam subconjuntos específicos de neurônios em sistemas anatômicos funcionais específicos. Elas surgem por razões desconhecidas e progridem de uma maneira implacável (PRZEDBORSKI et al., 2003). Tais patologias, além do cérebro, afetam também o coração e as funções motoras.

A morte neuronal progressiva de células que controlam as atividades musculares voluntárias é entendida como sendo doença neurodegenerativa motora. Várias são as ações por trás do movimento de um músculo, sendo as principais baseadas nas interações neurônio-neurônio e neurônio-células musculares (NINDS, 2012).

Tal comunicação é realizada através de sinapses nervosas, que nada mais são do que impulsos elétricos produzidos por neurotransmissores, os quais são passados do terminal axônico do neurônio pré-sináptico aos dendritos do neurônio pós-sináptico, conforme a Figura

1. Uma vez emitidos, tais impulsos provocarão uma ação em seu receptor final (MACHADO, 2013).



Fonte: (BORGES et al., 2015)

No caso da função motora, por exemplo, o sinal é passado de neurônio a neurônio, do cérebro à medula espinal e tais células nervosas espinais se comunicam com as mesmas células musculares e essas, por sua vez, com as fibras dos músculos. Isso estabelece os movimentos motores (TAKEI et al., 2014).

Dentro desse conceito, destaca-se a doença de Parkinson. Esse mal é uma doença progressiva do sistema nervoso central que atinge, principalmente, o sistema motor e afeta normalmente pessoas com idade superior a 50 anos. Tal patologia é causada particularmente por baixos níveis de dopamina, neurotransmissor indispensável para a atividade normal do cérebro (FRANK; O'REILLY, 2016).

Como consequência disso, o doente apresenta como principais manifestações a rigidez muscular, a instabilidade postural, a diminuição do movimento corporal e o tremor. Apesar de ser conhecida principalmente pelo último sintoma citado, ele não é o primeiro a ser notado nem o mais impactante, pois geralmente só é verificado quando o membro afetado está em repouso (CRUZEIRO, 2016). Esse tremor de repouso é o movimento mais característico desse distúrbio, porém várias outras patologias têm sintomas semelhantes.

Em seu artigo, em 1817, James Parkinson (PARKINSON, 1817) nomeou o tremor característico da doença que leva seu nome como uma “paralisia agitante”. Nele, definiu os sintomas dessa condição como sendo um movimento involuntário trêmulo acompanhado de uma força muscular diminuída ou inativa, uma propensão de curvatura do tronco para frente, aceleração do ritmo da caminhada, mantendo seus sentidos e intelecto ilesos.

Em (TEIVE, 2011), o tremor é descrito como sendo “o distúrbio do movimento mais comum” e definido como “movimento oscilatório rítmico de uma parte do corpo”. Portanto, todo tremor possui uma frequência de vibração intrínseca ao movimento, caracterizada por senóide e, por esta grandeza, são distinguidas suas variedades. Devido a essa propriedade e com o auxílio da teoria de controle, é possível modular essas vibrações.

Tal teoria tem como um de seus princípios modificar a resposta de um sistema, procurando estabilizá-lo. Assim, primeiramente, faz-se o estudo das vibrações, analisa-se o sistema oscilante e propõe-se, com base na frequência, no tipo de sistema e no propósito, formas de estabilizar o modelo apresentado.

1.1.1 Delimitação do Tema

O controle moderno tem suas bases na descrição de sistemas em espaço de estados, na otimização de critérios de desempenho quadráticos e na incorporação da teoria da reconstrução do estado de Kalman-Bucy (SILVA, 2016). Com essas novas áreas de conhecimento, a teoria moderna destaca-se por sua ampla aplicabilidade em problemas envolvendo sistemas com múltiplas variáveis de entrada e saída que variam no tempo (KWAKERNAAK; SIVAN, 1972). Dentre suas muitas áreas de interesse, o controle ótimo será estudado mais a fundo e aplicado ao problema de estabilização do tremor parkinsoniano.

Segundo (OGATA, 2011):

O conceito de otimização de sistemas de controle engloba uma seleção de um índice de desempenho e de um projeto que fornece o sistema de controle ótimo dentro de limites impostos por condições limitantes de ordem física. Tal sistema de controle ótimo difere de um sinal ideal, em que o primeiro é o melhor que se pode conseguir na presença de limitações físicas, enquanto que o segundo pode bem ser um objetivo inalcançável.

O conceito de frequência de vibração do movimento, analisado dentro da teoria de controle ótimo, pode ser relacionado com o modo de ação de um sistema oscilatório. Dentre as características mais importantes dos osciladores, destaca-se a estabilidade da frequência de vibração. Esses sistemas são, de uma forma geral, divididos em osciladores lineares (ou harmônicos) e não lineares e, com isso, possuem uma área de aplicação bastante ampla (CHATTOPADHYAY; RAKSHIT, 2006).

Tremor é um movimento agitado no corpo de uma pessoa, geralmente causado por susto, excitação ou doença. Dentro do último agente citado, o mais conhecido é o mal de Parkinson. O tremor parkinsoniano foi estudado por diversos autores tendo como principal

objeto de interesse sua frequência de vibração. Tanto em (REHAN; HONG, 2013) quanto em (TITCOMBE et al., 2004), os autores consideraram o comportamento do tremor parkinsoniano como sendo igual ao de diversos tipos de osciladores, lineares ou não. Alguns destes osciladores, citados nos artigos acima, serão de grande relevância para esse trabalho.

Em (REHAN; HONG, 2013), foram utilizados dois tipos de osciladores a fim de modelar o tremor e propor um projeto de controle via estimulação cerebral. Com o oscilador linear, seu objetivo era medir o tremor. Para isso, foi utilizado um gerador de impulsos elétricos ligado ao cérebro. Os parâmetros iniciais desse gerador foram comparados aos de um oscilador e o sinal gerado refletido nas mãos e nos dedos foi analisado usando sensores medidores de aceleração e, posteriormente, filtrado. Já no oscilador não linear utilizado, o sinal resultante do tremor foi usado como realimentação do sistema. É, então, implementado, com base no teorema de estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992), um método para sintetizar um controlador para atenuar as vibrações do tremor.

Já em (TITCOMBE et al., 2004), fundamentado em (AUSTIN; TSAI, 1962) e em (AUSTIN et al., 1965), o tremor de Parkinson é descrito com base no oscilador de Van der Pol. Nessa análise, foram considerados os efeitos da emoção e da fadiga no tremor, a relação entre neurônios espinais e musculares, uma realimentação linear e não linear dos receptores musculares, atravessando o tronco cerebral, estrutura essa que conecta a medula espinal às estruturas encefálicas.

O presente trabalho tomará como base os artigos anteriormente citados a fim de relacionar o tremor parkinsoniano ao funcionamento de osciladores. De tal forma, como resultado da análise entre o referencial teórico estruturado e a ação de osciladores para o tremor de Parkinson, pretende-se propor um projeto de controle ótimo para tal tremor.

1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS

A qualidade de vida e como ela é afetada pela saúde, nesse caso, a saúde mental, é um problema ao qual todos estamos sujeitos. Doentes com mal de Parkinson enfrentam dificuldades em tarefas simples do dia-a-dia, como comer, andar e escrever. Para eles, não existe ainda um instrumento que os auxilie nessas atividades. A problemática desse trabalho tem o intuito de abordar essas questões a fim de melhorar a qualidade de vida desses pacientes por meio de aplicações da teoria de controle ótimo.

A teoria de controle ótimo, por ser uma área recente de estudo, possui referencial teórico pouco abrangido na graduação. Isso pode, principalmente na base matemática, trazer

certas dificuldades quando na pesquisa e manipulação de equações desses osciladores.

Outro obstáculo será o modelo matemático a ser utilizado. A modelagem de sistemas biológicos é complexa, uma vez que esses modelos são, em sua maioria, não lineares e envolvem muitas variáveis. Em se tratando da doença de Parkinson, a dificuldade é ainda maior, pois é um tema que requer estudos específicos que fogem à área de graduação em engenharia elétrica e engenharia de controle e automação.

Para adaptar o problema ao nível de estudo ao qual ele está inserido, o modelo estudado será simplificado a partir de premissas que limitam as inúmeras variáveis da doença, cujo tremor é o foco desse trabalho. Como premissa, será utilizado o controle por realimentação de estados, sendo esse um sistema linear invariante no tempo (LIT).

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Projetar um controlador ótimo, cuja finalidade é reduzir os tremores do mal de Parkinson, a fim de melhorar a qualidade de vida do doente.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Aprofundar o estudo da teoria de controle e de osciladores;
- Desenvolver um modelo em espaço de estados para representar o tremor característico da doença de Parkinson;
- Aplicar um regulador linear quadrático ao modelo biológico que descreve o tremor e verificar seu desempenho;
- Utilizar o *software* MatLab[®] para simulação.

1.4 JUSTIFICATIVA

Psicopatias vêm impactando cada vez mais a sociedade, trazendo desconforto e dificuldade para famílias e doentes. Apesar de nem sempre terem seu fenótipo acentuado, os portadores têm suas vidas completamente mudadas, tanto em relação ao convívio em sociedade

quanto consigo próprios. Grande parte dessas pessoas acaba desenvolvendo, em conjunto com a anomalia, quadros de extrema depressão, esquizofrenia e autismo (NINDS, 2012).

Em função da falta de acompanhamento regular em neurologistas e psiquiatras por parte da maioria da população, muitas dessas doenças acabam sendo descobertas muito tardiamente. Como a maior parte dessas disfunções ainda não possuem uma cura descoberta, a ciência tem caminhado para o desenvolvimento de tratamentos com a finalidade de amenizar os sintomas e proporcionar ao paciente uma melhor qualidade de vida (PLUS, 2014). Visando o bem-estar dos doentes, propõe-se a máxima atenuação possível de seu tremor. A mais eficaz metodologia para estabilizar frequências é a teoria de sistemas de controle moderno.

Segundo (BRIAN; MOORE, 1971):

Apesar do desenvolvimento de um agora vasto corpo de conhecimento conhecido como Teoria de Controle Moderno, e apesar de algumas aplicações espetaculares desta teoria à situações práticas, é bem claro que muito desta teoria ainda possui diversas aplicações a encontrar, e muitos dos problemas práticos de controle ainda possuem muita teoria para serem lidados com sucesso.

Como estimulado pelo autor, pretende-se expandir os campos de atuação da teoria de controle moderno, unindo-o à medicina, propondo vantagens e desvantagens dessa tese, com a finalidade de expandir a esfera de pesquisas e atuações nessa área.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Inicialmente se realizará uma pesquisa bibliográfica com o propósito de aprofundar os conhecimentos sobre o mal de Parkinson, uma vez que é o grande tema desse trabalho. Tal ambientação teórica também tem como finalidade encontrar modelos matemáticos previamente propostos que simulem o tremor da doença.

Como principais referências acerca do sistema biológico foram utilizados os artigos científicos de (REHAN; HONG, 2013) e (TITCOMBE et al., 2004). Ambos os trabalhos associaram o tremor de Parkinson a sistemas oscilatórios.

Em seguida, será estudada mais a fundo a teoria do controle moderno, com ênfase em controle ótimo. Visto que esse assunto é pouco contemplado em livros de graduação, uma profunda pesquisa voltada a pesquisas científicas será mais interessante.

A partir destes estudos, será feita a concatenação de ambos temas, desenvolvendo assim uma modelagem matemática ao sistema a ser controlado. Posteriormente, além do estudo

do *software*, serão feitas simulações no MatLab[®] referente ao que foi produzido.

No estágio final do trabalho, será feita a análise dos dados e apuração dos resultados. Isso permitirá verificar a viabilidade e eficiência do trabalho proposto.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho aqui apresentado, terá a seguinte estrutura:

Capítulo 1: Introdução: Apresentação do tema; Delimitação do tema; Objetivos pretendidos; Problemas percebidos e premissas previamente estabelecidas; Justificativa da escolha do tema; Procedimentos metodológicos a serem utilizados para a execução do trabalho.

Capítulo 2: Fundamentação teórica sobre osciladores, controladores e inteligência artificial.

Capítulo 3: Modelagem do sistema biológico referente a doença de Parkinson.

Capítulo 4: Aplicação, simulações e análise da aplicação do controle ótimo no sistema biológico.

Capítulo 5: Aplicação, simulações e análise de outras estratégias de controle para comparação.

Capítulo 6: Conclusões finais sobre o trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

O mal de Parkinson, afeta mental e mecanicamente seu portador, incapacitando-o de realizar simples tarefas cotidianas. A fim de prover uma melhor qualidade de vida ao doente, apresentou-se previamente os objetivos relacionados ao controle do tremor parkinsoniano. Com o intuito de alcançá-los, esse capítulo apresenta, inicialmente, fundamentos da teoria de controle ótimo e, posteriormente, conceitos básicos relacionados aos osciladores harmônicos, os quais auxiliarão a etapa de modelagem matemática do tremor, bem como o desenvolvimento do projeto de controle. Além disso, será abordada a teoria de Algoritmos Genéticos, a qual contribuirá na comparação dos resultados obtidos pela aplicação do controle ótimo. A fim de sustentar o estudo do comportamento do controle ótimo quando não há pleno conhecimento do modelo, será apresentada a teoria de controle robusto, este que é uma alternativa para a aplicação de controle em sistemas incertos.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS DE CONTROLE ÓTIMO

O projeto de controle de um sistema leva em conta três aspectos centrais, a saber, estabilidade, rastreamento e regulação. De uma forma geral, pode-se dizer que (FRANKLIN et al., 2013):

- **Estabilidade:** trata da necessidade de todos os polos da função de transferência do sistema em malha fechada estarem localizados no Semiplano Esquerdo (SPE) do plano s .
- **Rastreamento:** consiste em fazer com que a saída do sistema siga a entrada de referência da melhor maneira possível.
- **Regulação:** visa manter a saída do sistema fixa, com base em uma referência constante, independentemente dos distúrbios presentes.

2.1.1 Espaço de Estados

Devido ao fato de a maioria dos sistemas biológicos contemplarem múltiplas entradas e múltiplas saídas, será utilizada, para a modelagem do tremor parkinsoniano, uma representação por Espaço de Estados (EE). Essa abordagem baseia-se em um modelo com n equações diferenciais de primeira ordem que, quando combinadas, resultam em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem. Com isso, tem-se a simplificação do modelo matemático do sistema, de modo que o aumento do número de variáveis não aumenta a complexidade do problema (OGATA, 2011).

Um sistema a ser controlado a partir da análise por EE utiliza-se de variáveis de estado para compor seu modelo matemático. Para o caso de um sistema LIT com uma entrada e uma saída, esse modelo é definido pelas seguintes equações:

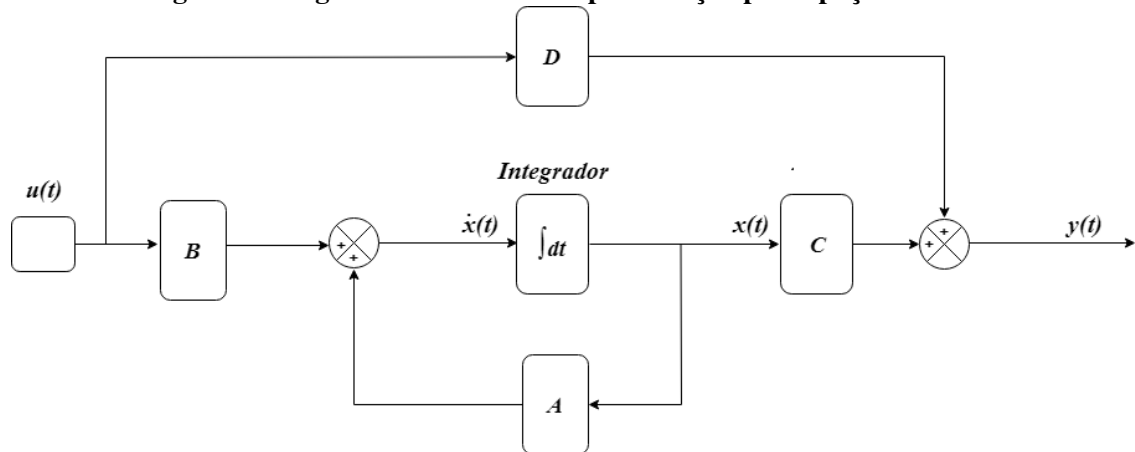
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

em que $u(t) \in \mathbb{R}$ representa a entrada do sistema ou a lei de controle, $y(t) \in \mathbb{R}$ o vetor da saída do sistema e $\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor variáveis de estado. Além disso, temos $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como sendo a matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ a matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ a matriz de saída e $D \in \mathbb{R}$ a matriz de transmissão direta (OGATA, 2011). Nesse caso, têm-se as equações de estado e de saída dadas, respectivamente, por (1) e (2).

Como forma mais efetiva de compreender as equações acima, traz-se o diagrama de blocos desse modelo. Essa representação gráfica tem como elemento principal o bloco integrador, o qual representa as variáveis de estado de primeira ordem (FRANKLIN et al., 2013). Além disso, a construção do diagrama consiste na realimentação de todos os estados do sistema, multiplicando-os pela matriz de estados. A Figura 2 ilustra essa representação.

Figura 2: Diagrama de blocos da representação por espaço de estados



Fonte: Autoria própria

A seguir, apresentam-se os conceitos de controlabilidade, observabilidade e dualidade, para sistemas LIT, todos introduzidos por Kalman no início da década de 60 (KALMAN, 1961). Tais conceitos são de extrema importância ao projeto de sistemas de controle em EE, sendo eles capazes de determinar a existência ou não de uma solução completa para tal projeto. Por exemplo, quando o sistema for não controlável, a solução do problema de controle pode não existir (OGATA, 2011).

2.1.1.1 Controlabilidade

Um sistema é controlável em $t = t_0$ quando existir um $\tau > 0$ finito e uma entrada $u(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, que leve o sistema de um estado inicial qualquer $x(t_0)$ a um estado arbitrário $x(t_0 + \tau)$ (NISE, 2011).

Em (FRANKLIN et al., 2013), temos a controlabilidade como uma função do estado do sistema, não sendo possível de ser analisada diretamente a partir de uma função de transferência. Para sistemas LIT, como é o caso proposto nesse trabalho, considera-se inicialmente o sistema em EE descrito por (1)-(2). A partir disso, define-se a matriz de controlabilidade desse sistema por:

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Assim, o sistema é dito controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade for igual à dimensão do estado. Como no sistema estudado a matriz $\mathcal{C}(A, B)$ é quadrada, esse sistema será controlável quando $\det(\mathcal{C}(A, B)) \neq 0$. Além disso, um sistema parcialmente controlável é tido como estabilizável quando seus modos não controláveis forem

estáveis e seus modos instáveis forem controláveis (OGATA, 2011). Já um sistema não controlável apenas dispõe de um subsistema desconectado da entrada.

2.1.1.2 Observabilidade

Um sistema é observável em $t = t_0$ quando, a partir do conhecimento da saída $y(t)$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, for possível determinar o estado $x(t_0)$, sendo $\tau > 0$ finito (OGATA, 2011). Nesse caso, para sistemas LIT, considera-se inicialmente o sistema sem excitação como sendo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (5)$$

Define-se, então, a matriz de observabilidade desse sistema por:

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sendo assim, o sistema será considerado completamente observável se, e somente se, o posto da matriz de observabilidade for igual à dimensão do estado. Com a mesma justificativa apresentada na Seção 2.1.1.1, a observabilidade do sistema apresentado nesse trabalho pode ser estudada através da análise do determinante da matriz $\mathcal{O}(A, C)$, sendo ele necessariamente diferente de zero.

2.1.1.3 Princípio da dualidade

A relação entre controlabilidade e observabilidade é definida pelo princípio da dualidade de Kalman. Tal princípio traz a facilidade de se testar a observabilidade de um sistema a partir da análise de sua controlabilidade e vice-versa (MONTEIRO, 2006). Assim, se um sistema (A, B, C, D) for controlável, o sistema dual (A^T, C^T, B^T, D) será observável.

2.1.2 Otimização e Critério de Desempenho

Partindo da representação anterior, inicia-se, então, o estudo do controle ótimo propriamente dito. No que diz respeito ao projeto de um controlador ótimo, é de suma importância trazer uma base sólida dos conceitos de tal teoria para então aplicá-los corretamente no sistema desejado.

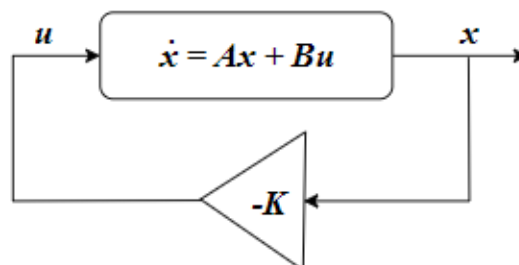
Em 1956, Pontryagin formulou o Princípio do Máximo, estabelecendo, assim, as bases da teoria matemática do controle ótimo. Esse princípio fornece as condições necessárias à otimização do controle (BOSCAIN; PICCOLI, 2005). Em 1957, Bellman elaborou a técnica de resolução de problemas de controle ótimo, denominada programação dinâmica, através de seu Princípio de Otimalidade (BELLMAN, 2010):

Uma política ótima tem a propriedade de que, seja qual for o estado inicial e a decisão inicial, as decisões seguintes constituirão uma política ótima em relação ao estado resultante da primeira decisão.

A partir dos dois princípios anteriormente citados, dá-se as bases para o controle ótimo. Do latim, *optimus*, “o melhor”, o controle ótimo tem como principal objetivo o projeto de um controlador cujo desempenho máximo do sistema dinâmico requer um custo mínimo (GEROMEL; KOROGUI, 2011). Essa situação é descrita por equações diferenciais lineares, representando o sistema, e por uma função quadrática, representando o custo.

Com o intuito de se definir o critério de desempenho a ser otimizado, considere o problema de regulação por realimentação de estados de um sistema LIT, tal como representado no diagrama de blocos da Figura 3.

Figura 3: Problema de regulação por realimentação de estados de um sistema LIT



Fonte: Autoria própria

O método de controle linear quadrático calcula a matriz K de ganho de controle por realimentação de estado, visando a otimização do critério de desempenho, sendo essa sua

principal vantagem em relação ao método de alocação de polos (OGATA, 2011). Desta forma, os objetivos do problema de otimização são, em geral, relacionados ao critério de desempenho determinados pelo projetista. O critério de desempenho quadrático é definido por

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (7)$$

em que Q e R são ambas matrizes hermitianas¹ definidas positivas que representam, respectivamente, a ponderação para a minimização da energia dos estados e da energia do controle (OGATA, 2011). Assim, quanto maior Q , mais rápido o sistema tende ao regime permanente; e quanto maior R , menor a energia de controle dispensada para se chegar ao regime permanente. Na seção seguinte, apresenta-se a dedução matemática do problema de otimização via equação matricial reduzida de Riccati, necessária ao cálculo da matriz K de ganho ótimo.

2.1.3 Cálculo do Ganho Ótimo para Realimentação dos Estados

Sejam (1) e (2) as equações de estado e $u = -kx$ uma lei de controle por realimentação dada pela combinação linear das variáveis de estado. Substituindo essa lei de controle em (1), temos

$$\dot{x} = Ax + B(-kx) = (A - Bk)x, \quad (8)$$

de modo que, para um sistema controlável, existe um ganho K que torna a matriz $A - Bk$ estável, ou seja, com seus autovalores negativos.

Substituindo agora essa mesma lei de controle em (7), temos:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + (-kx)^T R (-kx)) dt \\ J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T k^T R k x) dt \\ J &= \int_0^{\infty} x^T (Q + k^T R k) x dt \end{aligned} \quad (9)$$

Propõe-se então uma matriz P , real, simétrica e definida positiva, tal que:

$$x^T (Q + k^T R k) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x) \quad (10)$$

¹Define-se uma matriz hermitiana como sendo uma matriz $A = [a_{ij}]$ complexa de ordem n tal que $(\bar{A})^T = A$ e \bar{A} é a matriz complexa formada pelos elementos conjugados de A (PULINO, 2012).

Sendo a base para as operações de diferenciação e integração, o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) estabelece uma importante conexão entre esses cálculos e é enunciado da seguinte forma (STEWART, 2013): Suponha uma função contínua $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ sua integral. Além disso, admita uma função G , tal que $G'(x) = f(x)$ para $x \in [a, b]$. Então, (i) F é derivável e $F'(x) = f(x)$ e (ii) $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

Substituindo (10) em (9) e aplicando o TFC, obtém-se

$$J = \int_0^{\infty} \left(-\frac{d}{dt}(x^T Px) \right) dt = -x^T Px \Big|_0^{\infty} = -(x(\infty)^T Px(\infty) - x(0)^T Px(0)). \quad (11)$$

Como consequência do Teorema de Lyapunov², $x(\infty) \rightarrow 0$. Logo,

$$J = x(0)^T Px(0) \quad (12)$$

corresponde ao custo do sistema para uma dada matriz P . Nota-se, então, que, ao se alterar o valores das matrizes K e P , assim como o valor de J , são também alterados.

A fim de se determinar o menor valor do critério de desempenho J , será obtida, primeiramente, a relação entre as matrizes P e K , a partir de (8) e (10).

$$\begin{aligned} x^T(Q + k^T Rk)x &= -(x^T P\dot{x} + \dot{x}^T Px) \\ &= -(x^T P(A - Bk)x + [(A - Bk)x]^T Px) \\ &= -x^T P(A - Bk)x - x^T (A - Bk)^T Px \\ &= -x^T [P(A - Bk) + (A - Bk)^T P]x \\ &= -x^T [PA + A^T P - PBk - k^T B^T P]x \end{aligned} \quad (13)$$

²Em (LYAPUNOV, 1992), o autor enuncia o Teorema da Estabilidade: Considerando a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

seja $\bar{x} \in D$ um ponto de equilíbrio e $V : D \rightarrow R$ de classe C^1 . Assim, \bar{x} é localmente assintoticamente estável, isto é, para x_0 em uma vizinhança de \bar{x} , tem-se que $x \rightarrow \bar{x}$ quando $t \rightarrow \infty$, se

- (i) $V(x)$ é localmente definida positiva em torno de \bar{x} .
- (ii) $\dot{V}(x)$ é localmente semi-definida negativa em torno de \bar{x} .

Assim, para que (13) seja válida para todo x ,

$$Q + k^T R k = -PA - A^T P + PBk + k^T B^T P$$

$$A^T P + PA - k^T B^T P - PBk + k^T R k + Q = 0 \quad (14)$$

Nota-se, que a relação entre as matrizes P e K não assume uma forma explícita do tipo $P = f(k)$. Portanto, para minimizar J através da matriz K , faz-se

$$\frac{\partial J}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(x(0)^T P x(0)) = x(0)^T \frac{\partial P}{\partial k} x(0) = 0. \quad (15)$$

Como a igualdade (15) deverá ser satisfeita para qualquer $x(0)$, tem-se que $\frac{\partial P}{\partial k} = 0$. Por outro lado, derivando (14) em relação a K , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A^T P)}{\partial k} + \frac{\partial(PA)}{\partial k} - \frac{\partial(k^T B^T P)}{\partial k} - \frac{\partial(PBk)}{\partial k} + \frac{\partial(k^T R k)}{\partial k} + \frac{\partial Q}{\partial k} &= 0 \\ A^T \frac{\partial P}{\partial k} + \frac{\partial P}{\partial k} A - \frac{\partial(k^T B^T)}{\partial k} P - k^T B^T \frac{\partial P}{\partial k} - \frac{\partial(Bk)}{\partial k} P - \frac{\partial P}{\partial k} B k + \frac{\partial(k^T R k)}{\partial k} + 0 &= 0 \\ A^T \frac{\partial P}{\partial k} + \frac{\partial P}{\partial k} A - B^T P - k^T B^T \frac{\partial P}{\partial k} - B^T P - \frac{\partial P}{\partial k} B k + (R + R^T)k &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Sendo R uma matriz simétrica e $\frac{\partial P}{\partial k} = 0$, segue-se que

$$\begin{aligned} 2Rk - B^T P - B^T P &= 0 \\ 2Rk - 2B^T P &= 0 \\ Rk &= B^T P \\ k &= R^{-1} B^T P. \end{aligned} \quad (17)$$

O ganho K , expresso em (17), é o ganho ótimo do sistema, ou seja, o ganho de realimentação da lei de controle que propicia o menor custo para o sistema.

2.2 CONCEITOS BÁSICOS DE OSCILADORES HARMÔNICOS

A natureza apresenta fenômenos periódicos, ou seja, condições que se repetem em um certo intervalo de tempo fixo. Tais fenômenos podem ser oscilatórios, caso trabalhem à margem de uma posição de equilíbrio. Esses sistemas oscilatórios se apresentam na natureza

de três maneiras: ondas materiais, eletromagnéticas e mecânicas.

A primeira não será considerada no presente estudo. A segunda corresponde às oscilações utilizadas para representar propriedades tanto elétricas quanto magnéticas que variam no tempo, como intensidade de corrente. Por fim, a terceira é fruto de grandezas mecânicas variantes no tempo, as quais se referenciam por uma posição de equilíbrio (HALLIDAY, 2009).

Este trabalho se atentará às oscilações mecânicas, uma vez que o tremor parkinsoniano pode ser simplificadaamente relacionado a esse fenômeno. Entretanto, para contextualizar e exemplificar o funcionamento dos sistemas osciladores harmônicos, será apresentado um breve estudo sobre as oscilações eletromagnéticas de um circuito indutivo-capacitivo (LC), o qual possui uma analogia com o sistema mecânico massa-mola.

2.2.1 O Circuito LC

Composições de circuitos que operam com capacitores e indutores, gerando, respectivamente, campo elétrico e campo magnético, têm como resultante dos campos as chamadas oscilações eletromagnéticas. Dentro desta perspectiva, desenvolveram-se várias composições de circuitos, cada uma com uma característica particular, uma vez que se fazem necessárias diferentes configurações para diferentes problemas (SCHULER, 2013). Cada circuito oscilador apresentará um sinal variável, de modo que sua montagem determina a frequência de operação e sua forma de onda característica (NEWTON, 2004). A Tabela 1 apresenta alguns exemplos de osciladores e suas características.

Tabela 1: Tipos de osciladores

Oscilador	Forma de onda	Faixa de Frequência
Relaxação com lâmpada neon	Dente de serra e pulsos	0,01Hz a 30 kHz
Relaxação com unijunção	Dente de serra e pulsos	0,01 Hz a 100 kHz
Relaxação com Sidac	Dente de serra e pulsos	0,01 Hz a 1 MHz
Hartley	Senoidal	10 Hz a 50 MHz
Colpitts	Senoidal	100 Hz a 100 MHz
Pierce	Senoidal	1 MHz a 500 MHz
Clapp	Senoidal	30 kHz a 100 MHz
Deslocamento de fase	Senoidal	1Hz a 100 kHz
Controlado à cristal	Senoidal	30 kHz a 200 MHz
Bloqueio	Senoidal	100 kHz a 10 MHz
Multivibrador	Retangular	0,1 Hz a 100 MHz

Fonte: (NEWTON, 2004)

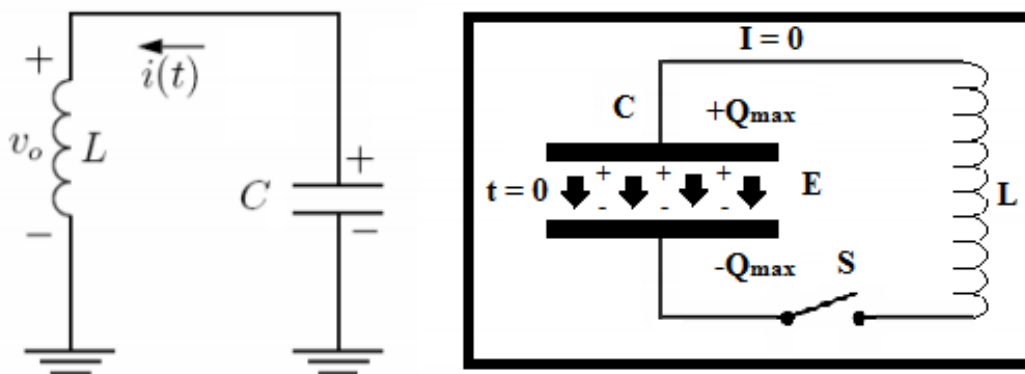
Circuitos osciladores são comumente encontrados em qualquer meio de transmissão e comunicação, como rádio, sonar, radar, entre outros geradores de sinais. Esses componentes eletrônicos são divididos em dois grandes grupos: osciladores de relaxação e osciladores senoidais (MALVINO, 1997).

O primeiro grupo não será estudado, uma vez que os osciladores desse grupo geram sinais triangulares, dente de serra e outros que não são recorrentes para exemplificar e modelar o tremor parkinsoniano. O segundo grupo de osciladores eletromagnéticos fornece formas de onda senoidais e, portanto, atendem melhor as propriedades de um tremor. Particularmente, as equações dinâmicas que descrevem os osciladores deste segundo grupo são análogas às que são obtidas no estudo dos sistemas mecânicos do tipo massa-mola.

Desse modo, para fins de comparação, antes de desenvolver as equações dinâmicas dos osciladores mecânicos (sistemas massa-mola), foco deste trabalho, procede-se ao desenvolvimento das equações dinâmicas dos osciladores eletromagnéticos (circuitos LC).

Um oscilador senoidal eletromagnético LC apresenta configuração simplificada conforme a Figura 4.

Figura 4: Configuração do circuito LC



Fonte: Autoria própria

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff, obtém-se a equação de malha do circuito da Figura 4

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0, \quad (18)$$

em que L é a indutância, C a capacitância e $i(t)$ a corrente variante no tempo. Derivando (18) em relação ao tempo e deixando o termo de maior derivada com coeficiente unitário temos que:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (19)$$

Além disso, sabe-se que, em um circuito LC, dois modelos de energia são identificados, a saber, a energia elétrica U_E do capacitor:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}, \quad (20)$$

e a energia magnética U_B fornecida pelo indutor:

$$U_B = \frac{1}{2} Li^2, \quad (21)$$

sendo então a energia total do circuito dada pela soma de (20) e (21):

$$U = U_E + U_B. \quad (22)$$

Considerando que não há dissipação de energia no circuito (ausência de elementos resistivos), a energia total U se mantém constante, ou seja, sua derivada temporal é nula. Assim, sabendo que $i = \frac{dq}{dt}$, obtém-se:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{1}{C} q \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \frac{dq}{dt} \left(\frac{1}{C} q + L \frac{d^2 q}{dt^2} \right) = 0. \quad (23)$$

Portanto,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0, \quad (24)$$

e a solução de (24) é oscilatória e dada por:

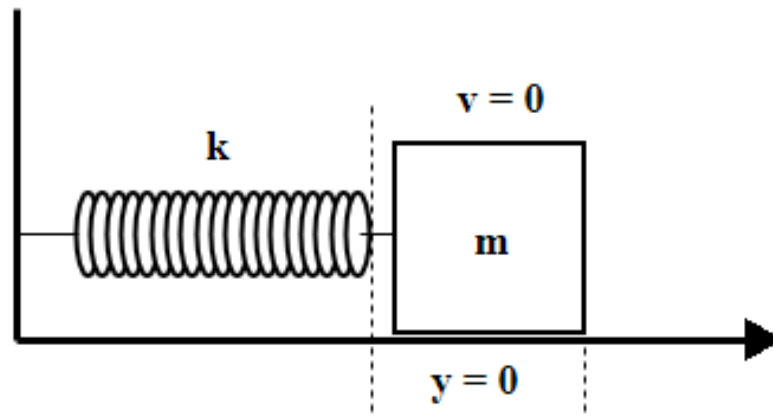
$$q(t) = Q \cos(\omega_0 t + \Phi), \quad (25)$$

em que $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ é a frequência de oscilação, Q é a amplitude da oscilação e Φ é a constante de fase.

2.2.2 O Sistema Massa-Mola

De modo similar ao circuito LC, no que diz respeito à energia, o sistema massa-mola, que possui um bloco de massa m , com velocidade v e sofre um deslocamento y , está limitado pelo amortecimento da mola, função da constante de amortecimento k , representado na Figura 5, também apresenta duas formas de energia.

Figura 5: Sistema massa-mola



Fonte: Autoria própria

A primeira delas é a energia potencial da mola:

$$U_P = \frac{1}{2}ky^2, \quad (26)$$

e a segunda é a energia cinética do bloco de massa m :

$$U_C = \frac{1}{2}mv^2. \quad (27)$$

A energia total é a soma de (26) e (27), isto é:

$$U = U_P + U_C \quad (28)$$

Considerando que não há atrito, não haverá perda de energia no sistema e U será constante. Desta forma, derivando (28) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 \right) = 0, \quad (29)$$

o que permite a obtenção de:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0, \quad (30)$$

uma vez que $v = \frac{dy}{dt}$. Finalmente, a solução de (30) é oscilatória e dada por:

$$y(t) = Y_m \cos(\omega_0 t + \Phi), \quad (31)$$

em que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência de oscilação, Y_m é a amplitude de oscilação e Φ é a constante de fase.

Desta forma, analisando as equações (25) e (31), observa-se que a posição $y(t)$ da mola se relaciona analogamente com a carga $q(t)$ do capacitor. Note que a corrente i se relaciona analogamente com a velocidade v , assim como a indutância L com a massa m e a constante elástica K com a susceptância B , ou seja, com o inverso da capacitância (GARCIA, 1997).

A fim de uma melhor visualização desse estudo comparativo, a Tabela 2 resume as características dos dois sistemas oscilatórios, o circuito LC e o sistema massa-mola.

Tabela 2: Comparação do circuito LC e o sistema massa-mola

Sistema massa-mola		Oscilador LC	
Elemento	Energia	Elemento	Energia
Mola	Potencial $\frac{1}{2} \cdot kx^2$	Capacitor	Elétrica $\frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$
Massa	Cinética $\frac{1}{2} \cdot mv^2$	Indutor	Magnética $\frac{1}{2} \cdot Li^2$
$v = \frac{dx}{dt}$		$i = \frac{dq}{dt}$	
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$		$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	

Fonte: Autoria Própria

Portanto, torna-se evidente a relação entre o comportamento dinâmico de um capacitor em um circuito LC com o de uma mola em um sistema massa-mola, bem como o indutor se comporta como a massa (bloco) (GARCIA, 1997). Conseqüentemente, o estudo do comportamento dinâmico dos osciladores harmônicos poderia ser feito tanto a partir de oscilador eletromagnético quanto do oscilador mecânico, pois há uma relação direta entre esses dois osciladores. Contudo, optou-se nesse trabalho por utilizar o oscilador mecânico, uma vez que ele é mais representativo do tremor parkinsoniano (BORGES; FERRAZ, 2006).

Cabe ressaltar que oscilações harmônicas não são o único tipo de oscilações existentes. De fato, sabe-se que algumas oscilações mecânicas, como um tremor, por exemplo, podem resultar em vibrações irregulares e gerar movimentos caóticos. Muitas teorias e aplicações desenvolvem-se constantemente para atender essa demanda, uma vez que muitos padrões físicos e biológicos, como oscilação de braço e perna, batimentos cardíacos, vibrações das cordas vocais etc, assemelham-se a um sistema caótico. No entanto, nos sistemas dinâmicos complexos, tais como os caóticos, a relação entre as variáveis é extremamente complicada,

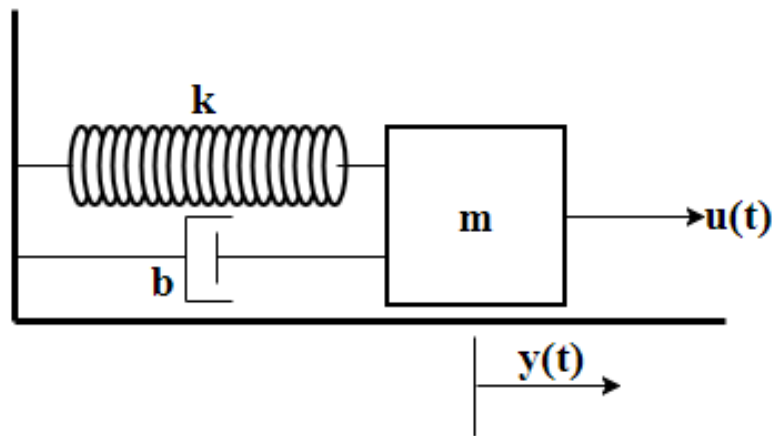
exigindo assim o auxílio da matemática aplicada em conjunto com métodos iterativos avançados (AMÂNCIO; CAMPANHA, 2008).

Desse modo, diversos modelos matemáticos são desenvolvidos para melhor representatividade de sistemas biológicos. Um desses modelos é o oscilador (não linear) de Van der Pol. Entretanto, *a priori*, este não será considerado neste trabalho, uma vez que torna o projeto de controle e a matemática muito obstrusos. Serão então consideradas para o estudo apenas as equações habituais e bem conhecidas da literatura, a fim de proporcionar uma melhor percepção do modelo do tremor parkinsoniano proposto por (REHAN; HONG, 2013).

2.2.3 Oscilações Harmônicas Amortecidas

Como base para o estudo das oscilações harmônicas amortecidas, considere um sistema mecânico simples constituído por uma mola espiral cilíndrica com constante elástica k , um amortecedor com coeficiente de amortecimento b e um corpo de massa m submetido a uma força externa $u(t)$. O deslocamento do corpo é dado pela função $y(t)$. A Figura 6 ilustra este sistema oscilador.

Figura 6: Oscilador harmônico amortecido e forçado.



Fonte: Autoria própria

Para a modelagem desse sistema, consideram-se as seguintes hipóteses:

- (i) Mola com comportamento linear na posição;
- (ii) Amortecedor com comportamento linear na velocidade;
- (iii) Superfícies de contato com atrito nulo.

Com isso, a força restauradora F_R é dada pela Lei de Hooke, isto é:

$$F_R = -ky, \quad (32)$$

e a força amortecedora F_A , proporcional à velocidade v do corpo, é dada por:

$$F_A = -bv, \quad \text{sendo } v = \frac{dy}{dt} = \dot{y}. \quad (33)$$

Assim, de acordo com a segunda lei de Newton,

$$\sum F = ma, \quad (34)$$

em que $a = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$ é a aceleração do corpo e $\sum F$ é a soma de todas as forças que atuam sobre ele. Logo,

$$u - bv - ky = ma, \quad (35)$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + b\dot{y} + ky &= u \\ \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y &= \frac{1}{m}u. \end{aligned} \quad (36)$$

Para simplificar a notação e facilitar o desenvolvimento algébrico a seguir, reescreve-se (36) como:

$$\ddot{y} + \xi\dot{y} + \kappa y = \lambda u, \quad \xi \geq 0, \quad \kappa \geq 0, \quad \lambda \geq 0. \quad (37)$$

O propósito aqui é obter a função $y(t)$ que descreve o deslocamento do corpo ao longo do tempo para o caso particular em que a força externa $u(t)$ é do tipo degrau unitário.

Inicialmente, toma-se a transformada de Laplace de (37), o que resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{y} + \xi\dot{y} + \kappa y] &= \mathcal{L}[\lambda u] \\ \mathcal{L}[\ddot{y}] + \xi \mathcal{L}[\dot{y}] + \kappa \mathcal{L}[y] &= \lambda \mathcal{L}[u] \\ s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + \xi(sY(s) - y(0)) + \kappa Y(s) &= \lambda \frac{1}{s} \\ Y(s)(s^2 + \xi s + \kappa) &= \frac{\lambda}{s} + sy(0) + \dot{y}(0) + \xi y(0) \\ Y(s) &= \frac{y(0)s^2 + (\dot{y}(0) + \xi y(0))s + \lambda}{s(s^2 + \xi s + \kappa)} \end{aligned} \quad (38)$$

Note que (38) pode ser escrito como

$$Y(s) = \frac{y(0)s^2 + (\dot{y}(0) + \xi y(0))s + \lambda}{s(s + \alpha)(s + \beta)}, \quad (39)$$

com $-\alpha$ e $-\beta$ sendo raízes do polinômio $s^2 + \xi s + \kappa$, ou seja, definindo $\Delta = \xi^2 - 4\kappa$,

$$-\alpha = \frac{-\xi + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad -\beta = \frac{-\xi - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (40)$$

Assim, por meio da expansão por frações parciais, tem-se

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \alpha} + \frac{A_3}{s + \beta}, \quad (41)$$

de modo que A_1 , A_2 e A_3 são coeficientes a determinar. Utilizando, então, o Método de Heaviside, tem-se que

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{y(0)s^2 + (\dot{y}(0) + \xi y(0))s + \lambda}{(s + \alpha)(s + \beta)} = \frac{\lambda}{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{\kappa} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \frac{y(0)s^2 + (\dot{y}(0) + \xi y(0))s + \lambda}{s(s + \beta)} = \frac{y(0)\alpha^2 - (\dot{y}(0) + \xi y(0))\alpha + \lambda}{\alpha^2 - \alpha\beta} \\ &= \frac{y(0)\frac{(\xi - \sqrt{\Delta})^2}{4} - (\dot{y}(0) + \xi y(0))\frac{\xi - \sqrt{\Delta}}{2} + \lambda}{\frac{\Delta - \xi\sqrt{\Delta}}{2}} = \frac{2\lambda - 2\kappa y(0) - (\xi - \sqrt{\Delta})\dot{y}(0)}{\Delta - \xi\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \lim_{s \rightarrow -\beta} \frac{y(0)s^2 + (\dot{y}(0) + \xi y(0))s + \lambda}{s(s + \alpha)} = \frac{y(0)\beta^2 - (\dot{y}(0) + \xi y(0))\beta + \lambda}{\beta^2 - \alpha\beta} \\ &= \frac{y(0)\frac{(\xi + \sqrt{\Delta})^2}{4} - (\dot{y}(0) + \xi y(0))\frac{\xi + \sqrt{\Delta}}{2} + \lambda}{\frac{\Delta + \xi\sqrt{\Delta}}{2}} = \frac{2\lambda - 2\kappa y(0) - (\xi + \sqrt{\Delta})\dot{y}(0)}{\Delta + \xi\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad (44)$$

Note que as constantes A_1 , A_2 e A_3 dependem tanto dos parâmetros do sistema quanto de sua condição inicial. Note ainda que as constantes A_2 e A_3 podem ser complexas, caso Δ seja negativo. Nesse caso, elas serão complexas conjugadas.

Finalmente, aplicando a transformada inversa de Laplace em (41), chega-se a

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 + A_2 e^{-\alpha t} + A_3 e^{-\beta t} = A_1 + A_2 e^{-\frac{\xi}{2}t} e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + A_3 e^{-\frac{\xi}{2}t} e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} \\ &= A_1 + e^{-\frac{\xi}{2}t} \left[A_2 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + A_3 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} \right] \end{aligned} \quad (45)$$

A equação (45) descreve todos os possíveis casos que caracterizam o sinal de saída de um oscilador harmônico. A intensidade do amortecimento das oscilações fica evidenciada pelo parâmetro ξ , de modo que o caso particular $\xi = 0$ representa a situação de oscilações sem amortecimento, isto é,

$$y(t) = A_1 + A_2 e^{\frac{\sqrt{-4\kappa}}{2}t} + A_3 e^{-\frac{\sqrt{-4\kappa}}{2}t} = A_1 + A_2 e^{j\sqrt{\kappa}t} + A_3 e^{-j\sqrt{\kappa}t} \quad (46)$$

No que concerne à situação de oscilações com amortecimento, pode-se identificar três casos distintos: (i) $\Delta < 0$, (ii) $\Delta = 0$ ou (iii) $\Delta > 0$.

(i) Para o primeiro caso, defina $\delta = -\Delta = 4\kappa - \xi^2 > 0$. Assim,

$$y(t) = A_1 + e^{-\frac{\xi}{2}t} \left[A_2 e^{j\frac{\sqrt{\delta}}{2}t} + A_3 e^{-j\frac{\sqrt{\delta}}{2}t} \right] \quad (47)$$

(ii) Para o segundo caso,

$$y(t) = A_1 + e^{-\frac{\xi}{2}t} (A_2 + A_3) \quad (48)$$

(iii) Para o terceiro caso,

$$y(t) = A_1 + e^{-\frac{\xi}{2}t} \left[A_2 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} + A_3 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t} \right] \quad (49)$$

À luz de (47)–(49), pode-se concluir que a intensidade do amortecimento e a frequência das oscilações dependem apenas das características físicas do sistema, enquanto que a amplitude e a fase das oscilações estão relacionadas às condições iniciais do sistema.

2.2.3.1 Representação em espaço de estados

A equação (36) que descreve o comportamento do sistema massa-mola amortecido é uma equação diferencial linear de segunda ordem, invariante no tempo e não homogênea. Um possível modelo em espaço de estados pode ser obtido ao se definir

$$x_1(t) = y(t), \quad (50a)$$

$$x_2(t) = \dot{y}(t), \quad (50b)$$

como variáveis de estado do sistema. Desse modo,

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \quad (51a)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}y(t) - \frac{b}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m}u(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t). \quad (51b)$$

A equação de saída é descrita por (50a), enquanto que a equação de estado é descrita pela composição das equações (51a) e (51b). Sob a forma matricial-vetorial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (52)$$

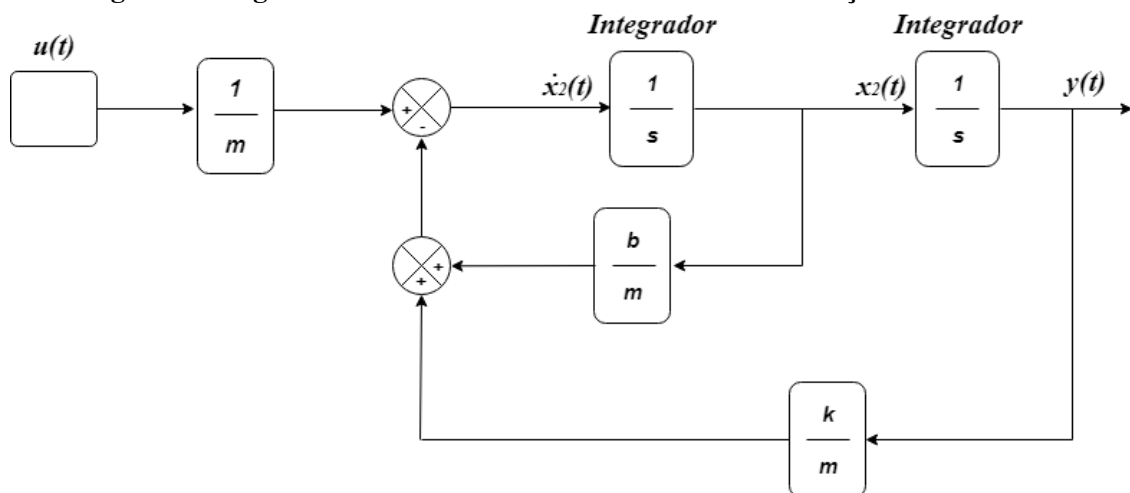
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

As equações (52)-(53) estão na forma padrão (1)-(2), sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = 0.$$

A Figura 7 exibe a representação de (52)-(53) em diagrama de blocos.

Figura 7: Diagrama de blocos de um oscilador harmônico forçado e amortecido



Fonte: Autoria própria

2.2.3.2 Exemplos ilustrativos

A partir de (52)-(53), realizou-se uma série de simulações computacionais utilizando os *softwares* MatLab[®] e Simulink[®] para analisar o comportamento oscilatório do sistema massa-mola amortecido sob a ação de uma força externa do tipo degrau. Para todas as simulações, criou-se um diagrama de blocos conforme a Figura 7, e os seguintes parâmetros foram arbitrados:

$$m = 0,5\text{kg}, \quad k = 1\text{N/cm}, \quad x_1(0) = 1\text{cm}, \quad x_2(0) = 0\text{cm/s} \quad \text{e} \quad u(t) = 10\text{N}.$$

Já para o valor do parâmetro b (constante de amortecimento), foram considerados três valores distintos, a saber, $b = 2Ns/cm$, $b = 0,2Ns/cm$ e $b = 0Ns/cm$.

Para encontrar matematicamente a resposta $y(t)$ para $b = 2Ns/cm$, basta utilizar em (49) os seguintes valores:

$$\xi = \frac{b}{m} = 4, \quad \kappa = \frac{k}{m} = 2, \quad \lambda = \frac{10}{m} = 20, \quad y(0) = x_1(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = x_2(0) = 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{20}{2} + e^{-\frac{4}{2}t} \left[\frac{(-4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20}{4(4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}) - 4 \cdot 2} e^{\frac{\sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}}{2}t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20}{4(4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}) - 4 \cdot 2} e^{-\frac{\sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}}{2}t} \right] \\ &= 10 + e^{-2t} 9 \left[-\frac{(e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t})}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Sabendo que

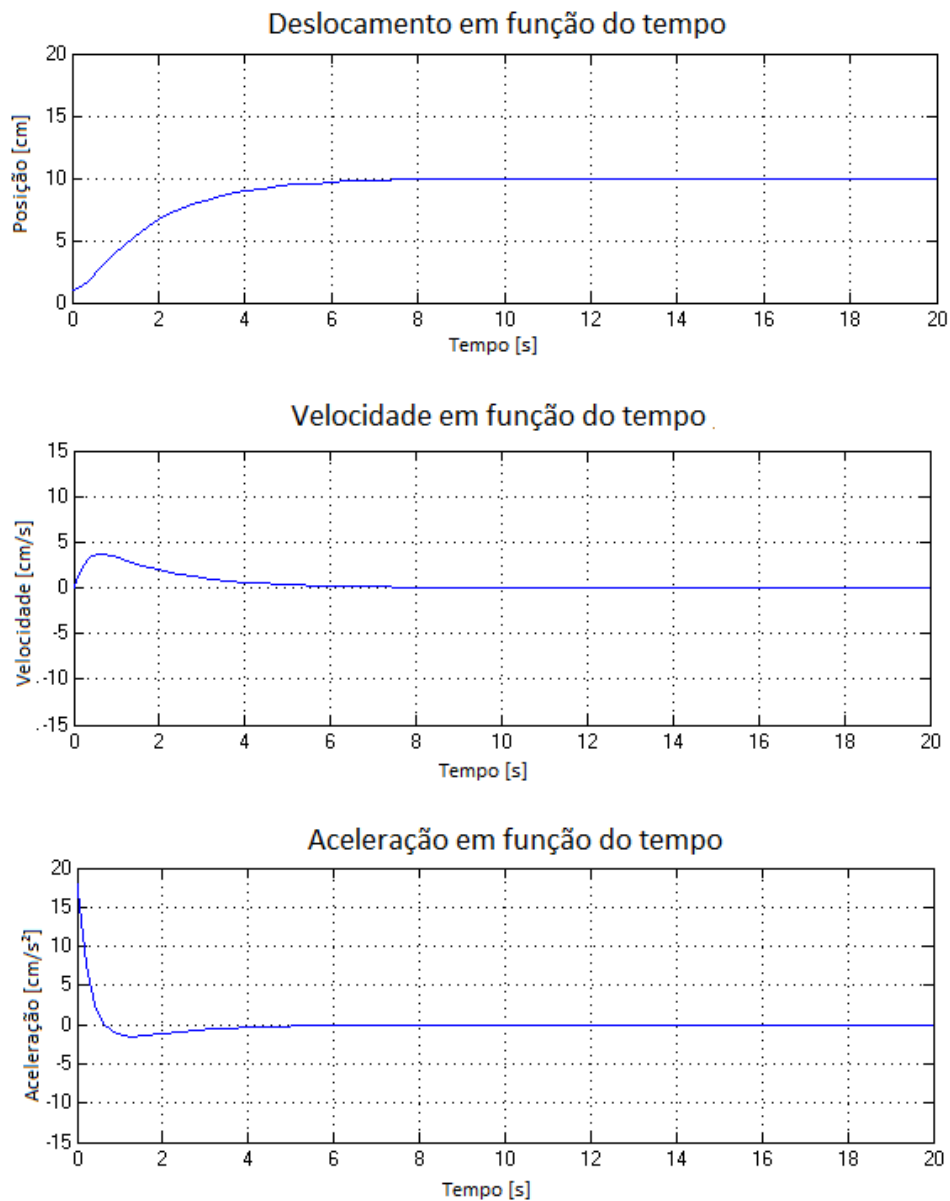
$$\cosh(mt) = \frac{e^{mt} + e^{-mt}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(mt) = \frac{e^{mt} - e^{-mt}}{2},$$

temos que (54) pode ser escrito como

$$y(t) = 10 + e^{-2t} 9[-\cosh(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}t)] \quad (55)$$

O resultado da simulação computacional para $b = 2Ns/cm$ pode ser visto na Figura 8. Nota-se, neste caso, que o comportamento do sistema foi superamortecido.

Figura 8: Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo do sistema harmônico amortecido e forçado para $b = 2 \text{ Ns/cm}$



Fonte: Aatoria própria

De forma análoga, procedendo aos cálculos para o caso em que $b = 0,2 \text{ Ns/cm}$, chega-se a:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{20}{2} + e^{\frac{-0,4}{2}t} \left[\frac{(-0,4 + \sqrt{0,4^2 - 4 \cdot 2}) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20}{0,4(0,4 - \sqrt{0,4^2 - 4 \cdot 2}) - 4 \cdot 2} e^{\frac{\sqrt{0,4^2 - 4 \cdot 2}}{2}t} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-0,4 - \sqrt{0,4^2 - 4 \cdot 2}) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20}{0,4(0,4 + \sqrt{0,4^2 - 4 \cdot 2}) - 4 \cdot 2} e^{-\frac{\sqrt{0,4^2 - 4 \cdot 2}}{2}t} \right] \\
&= 10 + e^{-0,2t} 0,016 \left[\frac{(-564,48)e^{j1,4t} + (-564,48)e^{-j1,4t}}{2} + \frac{(86,4j)e^{j1,4t} + (-86,4j)e^{-j1,4t}}{2} \right] \\
&= 10 + e^{-0,2t} 0,016 [-564,48 \cosh(j1,4t) + 86,4j \sinh(j1,4t)] \quad (56)
\end{aligned}$$

Sabendo que

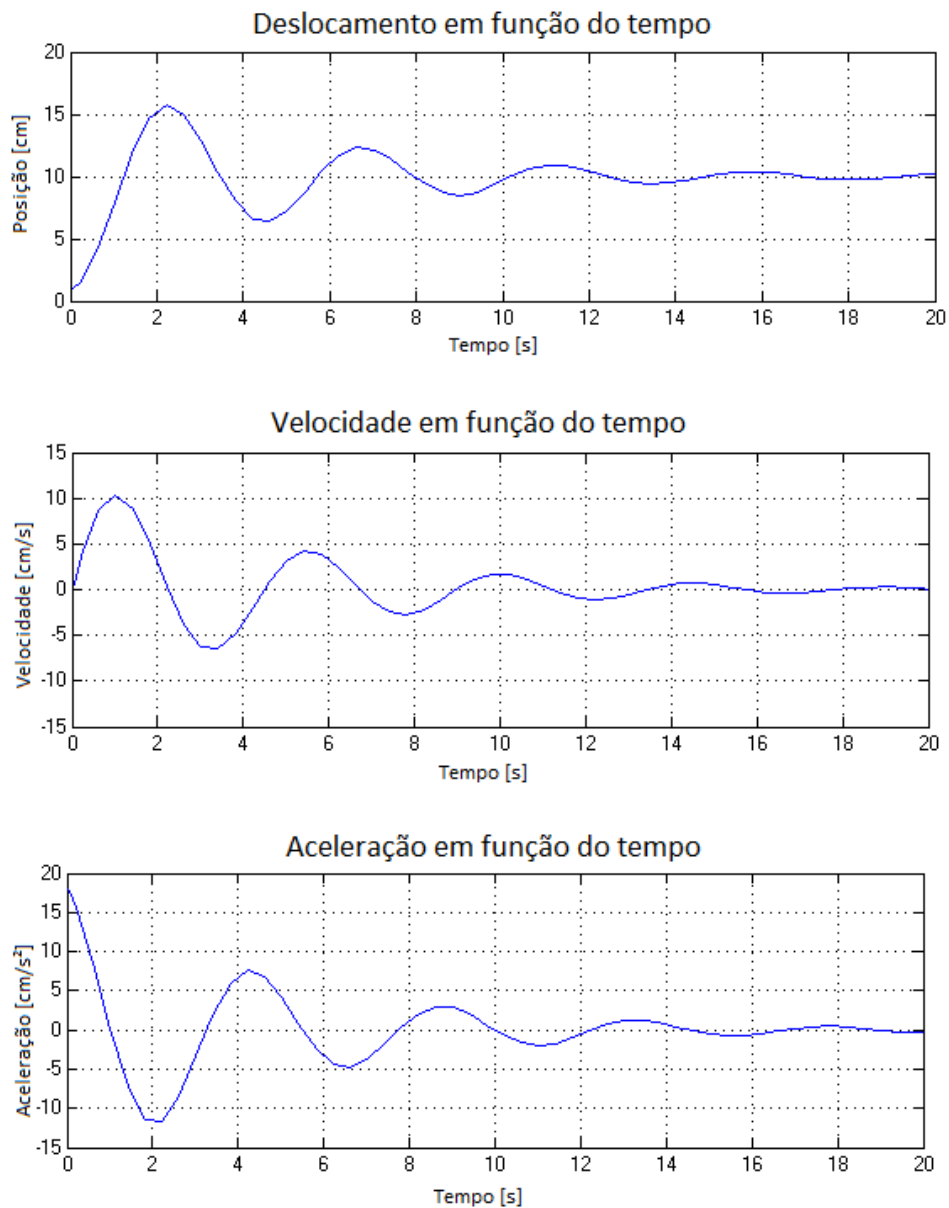
$$\cosh(mt) = \cos(mt) \quad e \quad -j \sinh(mt) = \sen(mt), \quad (57)$$

temos que (56) pode ser escrito como

$$y(t) = 10 + e^{-0,2t} 0,016 [-564,48 \cos(1,4t) - 86,4 \sen(1,4t)] \quad (58)$$

O resultado da simulação computacional para $b = 0,2$ pode ser visto na Figura 9. Nota-se, neste caso, que o comportamento do sistema foi subamortecido.

Figura 9: Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo do sistema harmônico amortecido e forçado para $b = 0,2 \text{ Ns/cm}$



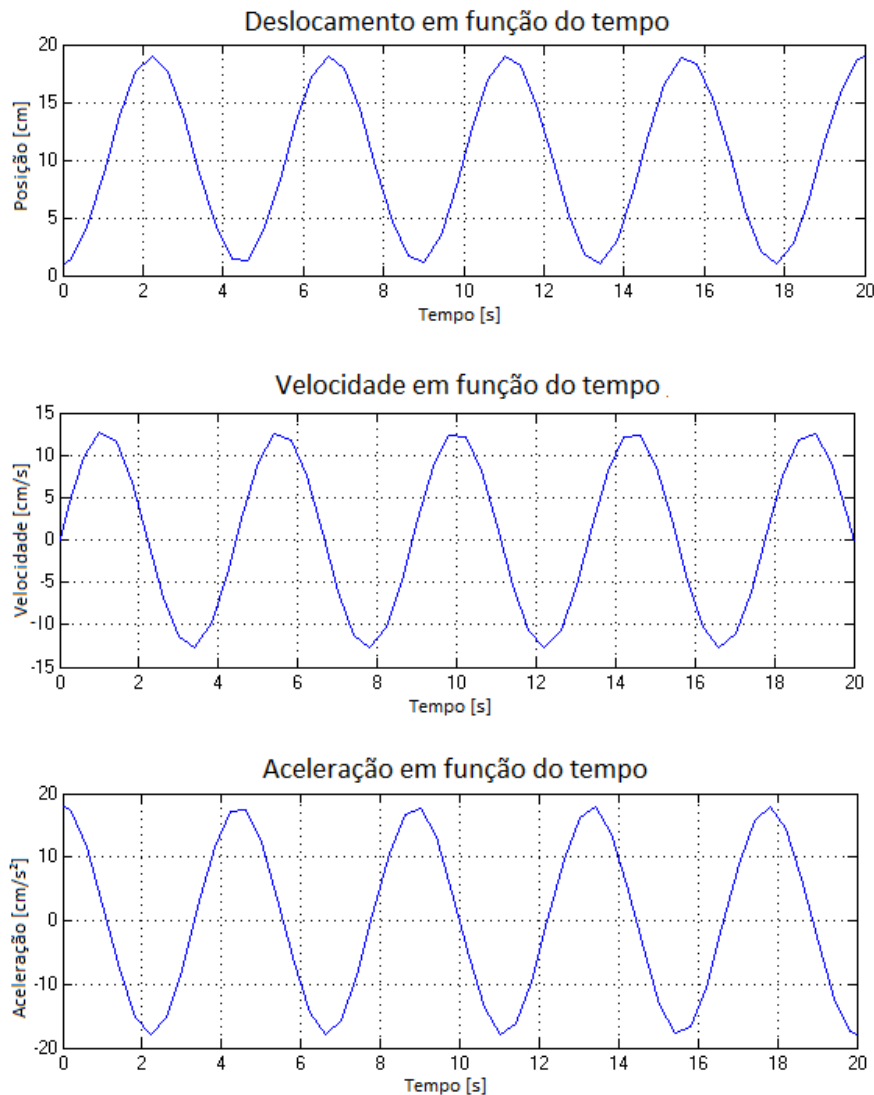
Fonte: Autoria própria

Finalmente, procedendo aos cálculos para o caso em que $b = 0 \text{ Ns/cm}$, chega-se a

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{20}{2} + e^{\frac{0}{2}t} \left[\frac{(0 + \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20}{0 \cdot (0 - \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}) - 4 \cdot 2} e^{\frac{\sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}}{2}t} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(0 - \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 20}{0 \cdot (0 + \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}) - 4 \cdot 2} e^{-\frac{\sqrt{0^2 - 4 \cdot 2}}{2}t} \right] \\
 &= 10 - 9 \cosh(\sqrt{2}jt) = 10 - 9 \cos(\sqrt{2}t) \quad (59)
 \end{aligned}$$

O resultado da simulação computacional para $b = 0$ pode ser visto na Figura 10. Nota-se, neste caso, que o comportamento do sistema não apresentou amortecimento, resultando apenas em oscilações sustentadas ao longo do tempo.

Figura 10: Gráficos de deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo de um oscilador harmônico forçado e sem amortecimento



Fonte: Autoria própria

2.3 APLICAÇÃO DE CONTROLE ÓTIMO EM OSCILADORES HARMÔNICOS

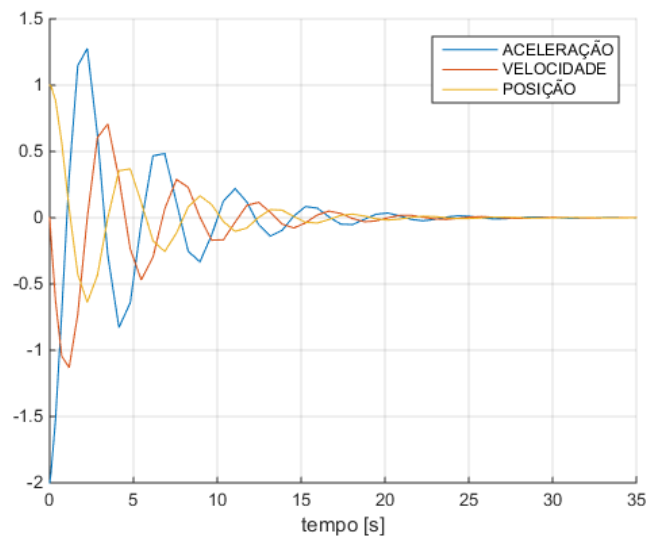
A fim de evidenciar a otimização da resposta de um oscilador pela aplicação do controle ótimo, será empregada a teoria exposta no Capítulo 2 no sistema proposto na Figura 6, considerando $m = 0,5\text{kg}$, $k = 1\text{N/cm}$, $b = 0,2\text{Ns/cm}$, $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$. As simulações foram realizadas com o auxílio dos softwares MatLab[®] e Simulink[®].

A seguir, quatro situações distintas são apresentadas. O objetivo destas simulações é analisar a atuação do controle ótimo e seus benefícios, a partir do estudo das respostas de posição, velocidade e aceleração do bloco.

1ª Situação: Resposta do sistema sem aplicação de controle.

Nesta simulação, obteve-se o gráfico da Figura 11 para a resposta natural do sistema, isto é, para $u(t) = 0$. Analisando os elementos do vetor da amplitude do sinal e considerando o último momento que os picos da senoide ficaram entre 0,01 e -0,01 foi possível identificar o tempo relativo da estabilidade do sinal. Neste caso, sem atuação de controle o sistema estabilizou em 25,6816 segundos. O critério utilizado para calcular o tempo de estabilidade da 1ª simulação, será replicado nos demais estudos.

Figura 11: Gráfico da resposta natural do sistema



Fonte: Autoria própria

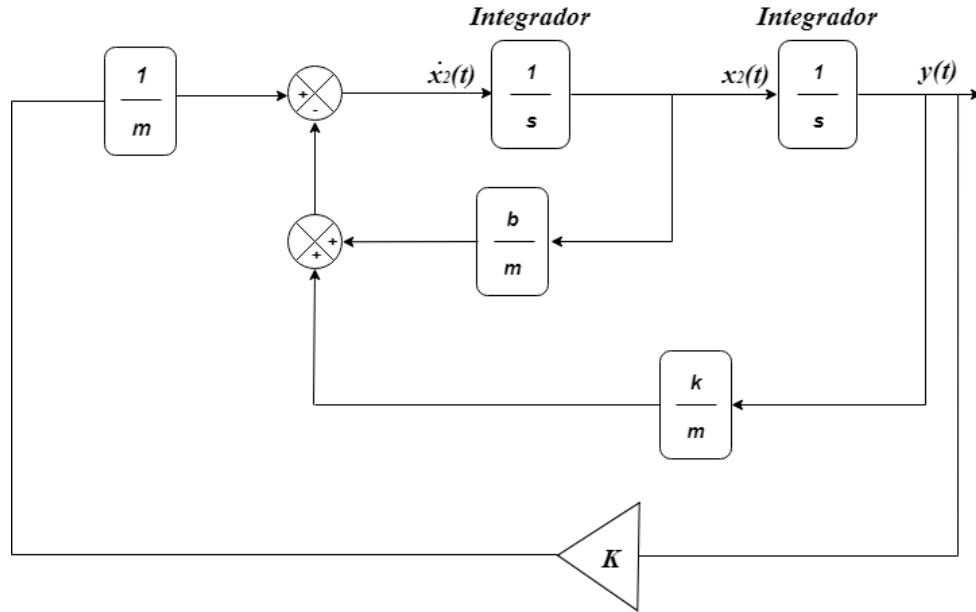
2ª Situação: Resposta do sistema com aplicação de controle ótimo por realimentação de estados.

Acrescentando ao sistema o ramo de realimentação com controle ótimo, obtém-se o diagrama de blocos representado na Figura 12, sendo K a matriz de ganho do controlador.

Para obter a resposta do sistema, será necessário calcular o K ótimo, isto é, o ganho de realimentação necessário para obter o menor custo J , definido em (7), para o sistema. Como visto, o K ótimo é dado por (17), sendo P obtido a partir da equação algébrica de Riccati, ou seja,

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (60)$$

Figura 12: Diagrama de blocos - Realimentação por controle ótimo



Fonte: Autoria própria

Assim, substituindo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad R = [1]$$

em (60), tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0,4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2P_0 & -2P_2 \\ P_1 - 0,4P_0 & P_0 - 0,4P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2P_0 & P_1 - 0,4P_0 \\ -2P_2 & P_0 - 0,4P_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4P_0^2 & 4P_2P_0 \\ 4P_2P_0 & 4P_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4P_0^2 - 4P_0 + 1 & -4P_0P_2 - 2P_2 + P_1 - 0,4P_0 \\ 4P_0P_2 - 2P_2 + P_1 - 0,4P_0 & -4P_2^2 - 0,8P_2 + 2P_0 + 1 \end{bmatrix} = 0, \quad (61)$$

o que corresponde ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} -4P_0^2 - 4P_0 + 1 = 0 \\ -4P_0P_2 - 2P_2 + P_1 - 0,4P_0 = 0 \\ 4P_0P_2 - 2P_2 + P_1 - 0,4P_0 = 0 \\ -4P_2^2 - 0,8P_2 + 2P_0 + 1 = 0 \end{cases} \quad (62)$$

Resolvendo-o, têm-se:

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = 0,207107$$

$$P_1 = \frac{1}{5}(-1 \pm \sqrt{2 + 50\sqrt{2}})$$

$$P'_1 = 1,50541$$

$$P''_1 = -1,90541$$

$$P_2 = \frac{1}{10}(-1 \pm \sqrt{1 + 25\sqrt{2}})$$

$$P'_2 = 0,502954$$

$$P''_2 = -0,702951$$

Portanto,

$$P' = \begin{bmatrix} 1,50541 & 0,207107 \\ 0,207107 & 0,502954 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P'' = \begin{bmatrix} -1,90541 & 0,207107 \\ 0,207107 & -0,702951 \end{bmatrix}$$

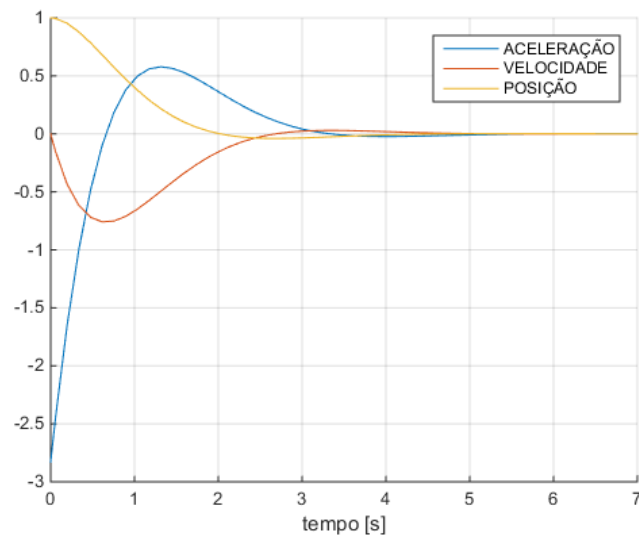
são soluções de (60). Sendo assim, por definição, adota-se a matriz P definida positiva, isto é, P' e, em posse dessa solução, é possível calcular o K ótimo para o sistema proposto. Desta maneira, utilizando (17), encontra-se

$$K = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,50541 & 0,207107 \\ 0,207107 & 0,502954 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,414214 & 1,00591 \end{bmatrix} \quad (63)$$

Aplica-se, então, o controle por realimentação de estados, conforme o diagrama da Figura 12, o que resulta na resposta dada pela Figura 13.

Comparando esta resposta com a do sistema natural, observa-se uma grande diferença tanto no tempo de estabilidade quanto na amplitude e na frequência das oscilações. Note que a oscilação da resposta de posição, de velocidade e de aceleração convergem para zero em aproximadamente 5,9355 segundos.

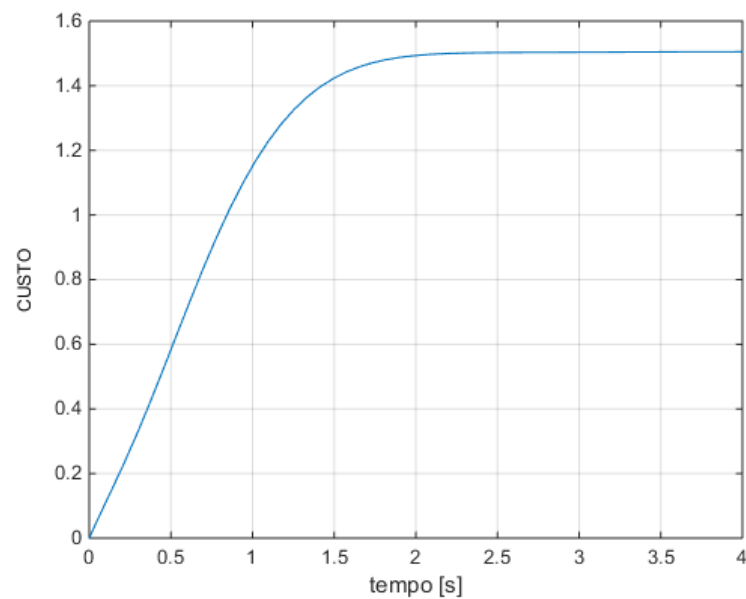
Figura 13: Gráfico da resposta do sistema com controle ótimo



Fonte: Autoria própria

Por fim, cabe ressaltar que a análise gráfica não é suficiente para comprovar que a resposta do sistema à aplicação do controle ótimo é significativamente melhor que a resposta à aplicação de um controle qualquer. É possível estabelecer essa constatação através do cálculo do custo J , custo dado pela Figura 14. Comparando o valor de J , é possível identificar qual sistema apresenta o melhor desempenho.

Figura 14: Gráfico do critério de desempenho da resposta do sistema com controle ótimo



Fonte: Autoria própria

No caso desta simulação, o J ótimo pode ser calculado analiticamente por meio de (12), ou seja, $J = x(0)^T P x(0)$. Para tal, é necessário o cálculo de $x(0)$, sendo este possível de calcular partindo da definição dada em (50a) e (50b), ou seja, $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = \dot{y}(t)$. Deste modo, relacionando os estados, temos que:

$$x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Assim,

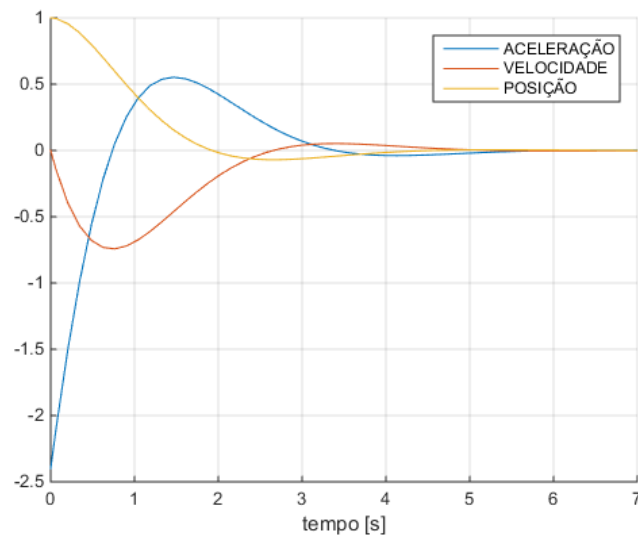
$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,50541 & 0,207107 \\ 0,207107 & 0,502954 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,50541. \quad (65)$$

Vale a pena frisar que, para qualquer realimentação com K diferente do ótimo, haverá sempre um pior desempenho do sistema, ou seja, J será sempre maior que o J ótimo. Para ilustrar essa afirmativa, apresenta-se a seguir duas situações em que o controlador não é ajustado com o ganho ótimo.

3ª Situação: Resposta do sistema com aplicação de controle por realimentação de estados, considerando $K = [0,2 \ 0,8]$.

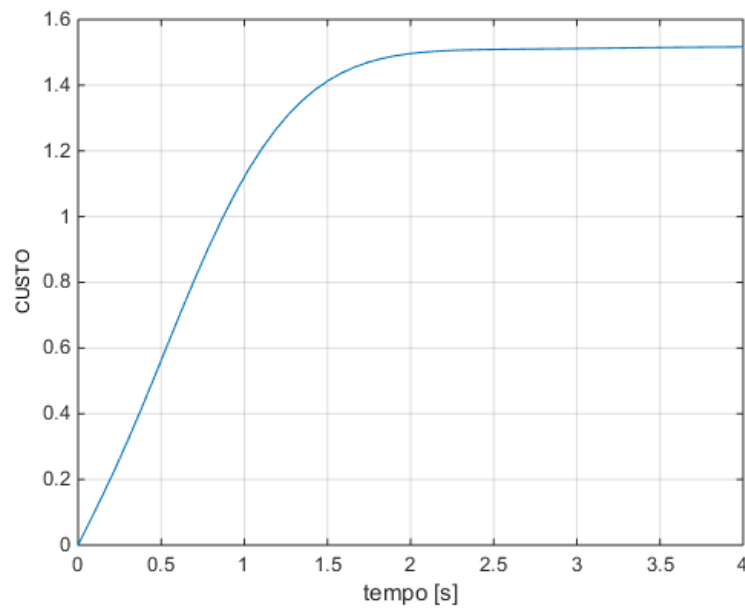
Aplicando este controlador ao sistema, obtêm-se a resposta dada pela Figura 15. Note que o valor atribuído a K está relativamente próximo ao do ganho ótimo e, portanto, as respostas de posição, de velocidade e de aceleração se assemelham muito. Assim como o tempo de estabilidade dos sinais, que neste caso foi de 5,9454 segundos. Pela visualização gráfica, é difícil perceber a diferença entre as respostas do sistema nas situações 2 e 3. Portanto, será necessário calcular o custo do sistema J , dado na Figura 16, a fim de certificar a melhor resposta do controle ótimo.

Figura 15: Gráfico da resposta do sistema com realimentação $K = [0,2 \ 0,8]$



Fonte: Autoria própria

Figura 16: Gráfico do critério de desempenho da resposta do sistema com realimentação $K = [0,2 \ 0,8]$



Fonte: Autoria própria

Sabendo que o K proposto não é o ótimo, faz-se necessário calcular J pela definição dada em (9). Para tanto, utiliza-se integração numérica, promovido pelo *software* MatLab[®], o qual retornou o seguinte valor de J :

$$J = 1,5165.$$

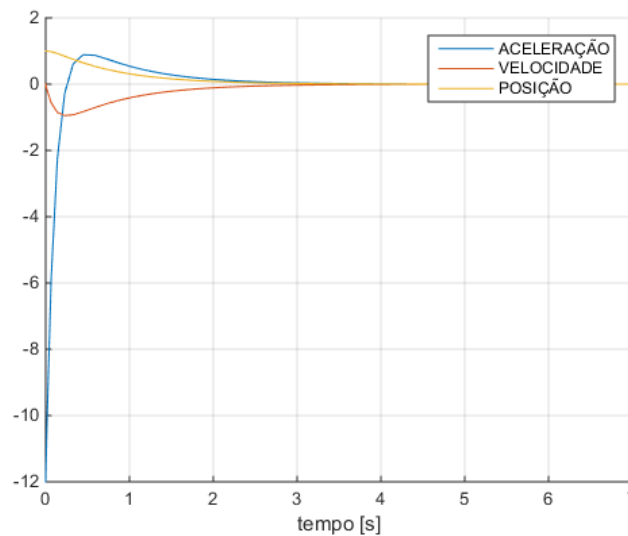
Portanto, comparando o desempenho obtido na situação 3 ($J = 1,5165$) com o desempenho obtido na situação 2 ($J = 1,50541$), é confirmado a superioridade da aplicação do controle ótimo, uma vez que o controle demanda um menor custo.

4ª Situação: Resposta do sistema com aplicação de controle por realimentação de estados, considerando $K = [5 \ 5]$.

Neste caso, obtém-se a resposta do sistema dada pela Figura (17). Pelo gráfico, identifica-se um tempo de estabilidade melhor do que o obtido com a aplicação de controle ótimo, o que, erroneamente, pode ser entendido como uma melhor resposta de controle.

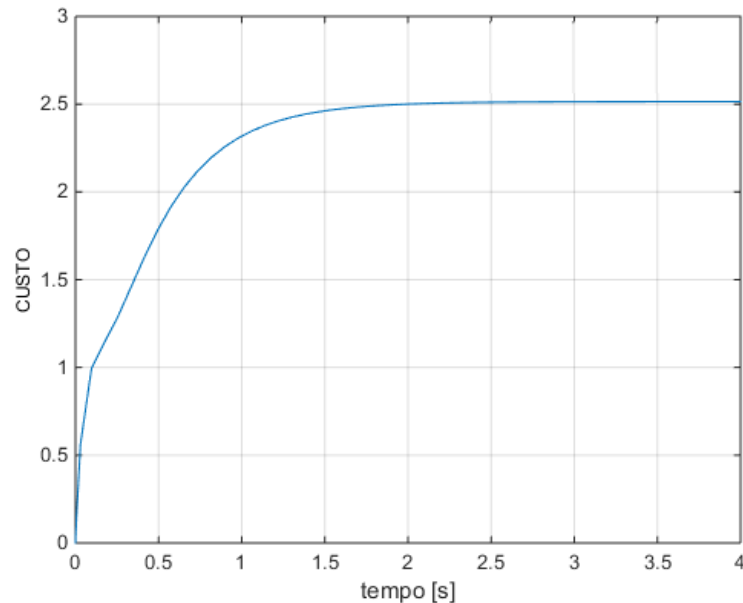
No entanto, ao verificar a aceleração no instante zero, nota-se uma elevada superioridade à aceleração inicial decorrente do K ótimo, o que já induz dúvida sobre a qualidade da resposta do controle aplicado na 4ª situação. Entretanto, essa dúvida será esclarecida ao se calcular o custo J dado pelo gráfico da Figura 18.

Figura 17: Gráfico da resposta do sistema com realimentação $K = [5 \ 5]$



Fonte: Autoria própria

Figura 18: Gráfico do critério de desempenho da resposta do sistema com realimentação $K = [5 \ 5]$



Fonte: Autoria própria

Para tal, utiliza-se a definição dada em (7), solucionando-a por integração numérica. Assim, tem-se que o custo é dado por:

$$J = 2,5145. \quad (66)$$

Desta forma, evidencia-se que mesmo que um controle leve à estabilidade em um tempo menor, neste caso em 3,9452 segundos, o seu desempenho J é pior do que com controle ótimo.

Finalmente, a partir da análise das situações propostas nesta seção, fica evidente que para qualquer realimentação com K diferente do ótimo, haverá um pior desempenho J , uma vez que o problema de controle é multiobjetivo, sendo inexorável obter um pior critério de desempenho ao impor um K que leve à estabilidade em um tempo e comportamento dos padrões diferente do que proposto pelo controle ótimo.

2.4 INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL – ALGORITMO GENÉTICO

Na década de 40, surgiram os primeiros estudos sobre Inteligência Artificial (IA). Durante a Segunda Guerra Mundial, mostrou-se a necessidade de desenvolver uma tecnologia voltada para análise balística, quebra de códigos e cálculos para projetar uma bomba atômica. Com isso, se deu o início dos primeiros grandes projetos de construção de computadores

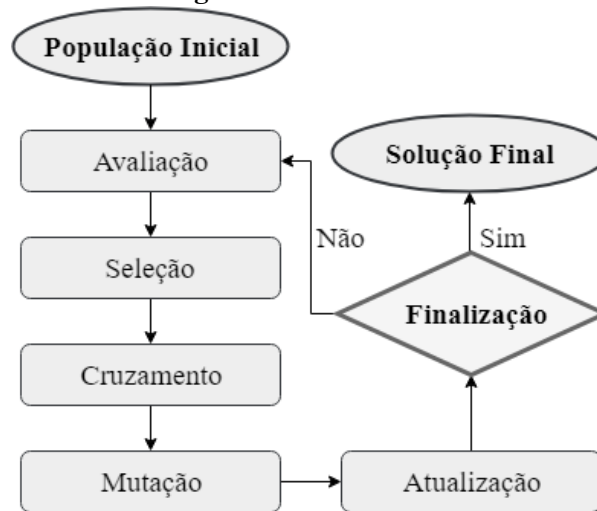
utilizados para fazer cálculos, os chamados cômputos. Foi então em 1956, quando John McCarthy se reuniu com vários pesquisadores de renome em uma conferência proferida ao Dartmouth College, na Universidade de New Hampshire, que surge o termo “Inteligência Artificial”. Denominado por Minsky, McCarthy, Newell e Simon de IA, a expressão foi utilizada para designar um tipo de inteligência construída pelo homem para dotar a máquina de comportamentos inteligentes.

Teoricamente, a palavra inteligência vem do latim *inter* “entre” e *legere* “escolher”, inteligência significa aquilo que nos permite escolher entre uma coisa e outra. Inteligência é a habilidade de realizar de forma eficiente uma determinada tarefa. Também com origem neolatina, *artificiale* tem seu significado como “algo não natural”, ou seja, produzido pelo ser humano. Portanto, tem-se a Inteligência Artificial como um tipo de inteligência produzida pelo ser humano para dotar as máquinas de algum tipo de habilidade semelhante à humana.

Segundo Russell e Norvig (RUSSELL; NORVIG, 2003), atualmente, a IA ocupa uma enorme variedade de subcampos. Essa tecnologia tem o poder de dominar desde áreas mais simples, como aprendizado e percepção, até tarefas mais complexas e específicas como o jogo de xadrez, demonstrações de teoremas matemáticos, criação de poesias e diagnósticos de doenças. Algoritmo Genético (AG) é uma das principais áreas estudadas dentro da Inteligência Artificial. Essa ciência foi baseada na teoria evolutiva de Charles Darwin, a qual define que o indivíduo com maiores chances de sobrevivência é o mais bem adaptado. Em 1975, John Holland propôs o AG como sendo um método utilizado pelos Algoritmos Evolutivos, que inclui o estudo dos Algoritmos Genéticos, estratégia de evolução, programação evolutiva, sistemas classificatórios e encontrar soluções aproximadas em problemas de otimização e busca.

Tem-se como os principais conceitos de AG cromossomos, genes e população. O primeiro é definido como uma cadeia de bits que representa uma solução possível para um problema. O segundo é tido como a representação de cada parâmetro de acordo com o alfabeto utilizado. Já o último é entendido como o conjunto de pontos (indivíduos) no chamado espaço de busca. A Figura 19 ilustra o ciclo do Algoritmo Genético através de um fluxograma:

Figura 19: Ciclo do AG



Fonte: Autoria Pr pria

As etapas que caracterizam o AG s o definidas por: popula o inicial, avalia o, sele o, cruzamento, muta o e converg ncia. Tem-se por popula o inicial o conjunto de todas as solu es “cromossomos” a serem armazenadas. Cada cromossomo deste conjunto   considerado uma solu o poss vel. Cada uma das poss veis solu es   avaliada pelo seu valor de aptid o para o problema.

A avalia o da aptid o das solu es (indiv duos da popula o)   feita atrav s da an lise de uma fun o chamada *fitness* que estabelece cada candidato em potencial   solu o que satisfaz o problema proposto. A sele o   realizada atrav s de um m todo, como o da roleta, que   respons vel pelo algoritmo de escolha dos indiv duos para a reprodu o. A probabilidade de uma dada solu o ser escolhida   proporcional   sua aptid o.

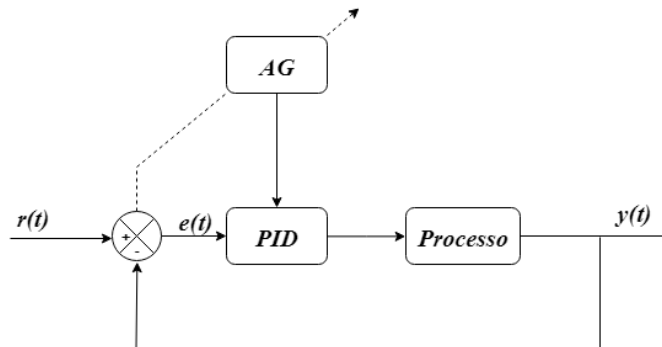
A fase de cruzamento ocorre atrav s da recombina o de pares de cromossomos que geram descendentes com genes herdados de seus pais. A muta o resulta na altera o das caracter sticas dos indiv duos resultantes do processo de reprodu o, acrescentando, variedade   popula o. A atualiza o ocorre quando os indiv duos criados na gera o atual s o inseridos na pr xima popula o e os indiv duos pertencentes   popula o atual podem ser removidos. A fase de finaliza o ocorre quando s o verificadas se as condi es de encerramento da evolu o foram atingidas, retornando para a etapa de avalia o em caso negativo e encerrando a execu o em caso positivo.

2.4.1 Exemplos de aplicação de AG na sintonia de controladores PID's

Os AG's são normalmente aplicados em problemas complexos de otimização com muitos parâmetros ou com características que precisam ser combinadas. Além disso, são utilizados em simulação de modelos biológicos, no que diz respeito a comportamento e evolução e, em problemas em que haja variação na solução esperada em função do tempo (GOLDSCHMIDT; PASSOS, 2005).

O controlador Proporcional Integral Derivativo (PID) é o mais popular e vastamente utilizado em aplicações industriais, este controlador é composto por três parcelas: a proporcional (P) ao erro; a que busca prever o erro futuro (D); e a que atua de forma a eliminar o erro em regime permanente (I). Os AG's são muito úteis na determinação das constantes do controlador PID, já que os métodos tradicionais baseiam-se em certas regras definidas em respostas transitórias, como Ziegler-Nichols (ZN) (SACCHI, 2010). Para a sintonia ótima por AG de um controlador PID, o sistema deve ser realizado de acordo com a Figura 20:

Figura 20: Sintonia do Controlador PID através do AG



Fonte: Adaptado (PAIVA, 2010)

No trabalho realizado por Sacchi (SACCHI, 2010), foi feita a geração de um AG para sintonizar parâmetros de um sistema PID aplicado ao controle de um manipulador robótico em forma de paralelogramo e posteriormente comparado ao método de ZN. Para esta aplicação, o AG demonstrou grande eficácia em comparação ao método tradicional, visto que não foi preciso fazer “lances” iniciais para depois ajustar de forma fina. Com isso, poupou-se tempo e demonstrou-se a rapidez e precisão de AG.

Em (PAIVA, 2010), Paiva propôs um método de sintonia em controladores PID com AG que se mostrou uma ferramenta de grande utilidade na sintonia dos parâmetros do PID. Os resultados que foram obtidos no trabalho citado mostraram que o AG teve resultados idênticos ou até mesmo melhores comparados com outras técnicas de otimização. No entanto, no que

diz respeito ao tempo computacional, não se pode afirmar que AG é a melhor opção. Essa tecnologia depende do número de gerações e do tamanho da população, ou seja, um tempo computacional longo pode afetar o desempenho da malha do processo.

(GRANDINETTI, 2003) foi outro autor que aplicou AG para a escolha automática dos parâmetros do controlador PID. Em seu artigo, utilizou-se um modelo de motor de corrente contínua em que o AG apresentou um ótimo resultado na obtenção dos parâmetros do controlador, juntamente com a minimização dos erros. Após a conclusão de seu trabalho, Grandinetti afirmou que o AG é um método muito eficiente para o ajuste dos parâmetros de um controlador, em comparação com outros métodos clássicos.

Com base nos resultados destes três trabalhos estudados, optou-se por aplicar AG para a obtenção da matriz P , a qual é a solução da equação algébrica de Riccati, e com isso, calcular ganho K e o custo J , para então comparar os resultados obtidos com os métodos utilizados neste trabalho. Esta aplicação será desenvolvida no Capítulo 5.

2.5 CONTROLE ROBUSTO

Os modelos dos sistemas de controle, em geral, apresentam um erro no processo de modelagem da planta. Frequentemente, a planta pode ser não linear e pode conter parâmetros incertos. Por consequência, muitos pesquisadores identificaram que o Controle Ótimo se torna instável a medida que se adiciona um maior realismo ao modelo da planta (ZHOU et al., 1996).

Assim, como a planta real difere do modelo usado no projeto, surge a questão quanto ao controlador projetado por meio do modelo ser capaz de funcionar satisfatoriamente na planta real. A planta real, por questões temporais e de variação de padrão, como temperatura, pode sofrer mudanças, essas como o envelhecimento dos componentes, perturbações e outros (ZHOU et al., 1996).

Para garantir esse funcionamento satisfatório, surgiu a Teoria do Controle Robusto em 1980. Fundamentalmente, a Teoria de Controle Robusto presume que exista incerteza entre a planta real e seu modelo matemático e inclui essa incerteza no processo de projetar o controlador. A capacidade que o sistema tem de ser efetivo na aplicação é denominada Robustez (DORF; BISHOP, 2001).

Ressalta-se que a teoria de Controle Robusto requer considerações baseadas na análise de resposta em frequência e na análise no domínio do tempo (DORF; BISHOP, 2001).

Como incerteza, define-se a diferença entre o modelo da planta e a planta em sistema incerto. Essa incerteza pode apresentar-se de modo estruturado ou não estruturado. Quando apresentada em modelo estruturado, a estrutura do modelo é conhecida, inclusive a sua ordem. Entretanto, alguns parâmetros são incertos (DORF; BISHOP, 2001).

Em outras palavras, há variações de parâmetros na dinâmica da planta como, por exemplo, variações na posição dos pólos e zeros da função transferência. A incerteza pode surgir da imprevisão da medida, de erro de identificação e da variação temporal dos parâmetros.

A incerteza que se apresenta de forma não estruturada é resultado da falta de modelagem da dinâmica da planta para altas frequências ou desconhecimento de sua dinâmica de ordem mais elevada. Outro exemplo é a linearização. Se a planta real for não linear e o modelo for linear, a diferença atua como incerteza não estruturada (MORARI; ZAFIRIOU, 1989).

2.5.1 Conceitos importantes no contexto da Teoria do Controle Robusto

A fim de edificar a estrutura base para a aplicação do controle robusto, desenvolvida no capítulo 5, nas subseções subsequentes é apresentado conceitos essenciais para o emprego dessa teoria.

2.5.1.1 Incertezas do modelo

A estabilidade de um sistema, independente das incertezas deve ser mantida (DORF; BISHOP, 2001). Neste contexto, será exposto apenas a incerteza não estruturada, uma vez que a incerteza estruturada exprime maior complexidade.

A incerteza não estruturada pode ser modelada de maneiras diferentes, como a incerteza aditiva e a incerteza multiplicativa (DORF; BISHOP, 2001).

Considerando um sistema teórico $G(s)$ e um sistema real $\tilde{G}(s)$ (DORF; BISHOP, 2001):

$$\tilde{G}(s) = G(s) + \Delta_a(s) \quad (67)$$

A incerteza aditiva é obtida por:

$$\Delta_a(s) = \tilde{G}(s) - G(s) \quad (68)$$

O modelo de incerteza da equação (68) é utilizado para definir erros em dinâmica de alta frequência que, devido a moderação ou insipiência do modelo, são desprezados (DORF; BISHOP, 2001).

Tratando-se do sistema com incerteza multiplicativa, utilizado para definir erros decorrentes da dinâmica do atuador ou do sensor, tem-se que o $\tilde{G}(s)$ é estabelecido por (DORF; BISHOP, 2001):

$$\tilde{G}(s) = (1 + \Delta_m(s))G(s) \quad (69)$$

Desta forma, o erro da modelagem $\Delta_m(s)$ é obtido por:

$$\Delta_m(s) = \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)} \quad (70)$$

Como o modelo de incerteza aditivo configura o erro absoluto, o modelo de incerteza multiplicativa é frequentemente mais utilizado, uma vez que ele constitui o erro relativo (DORF; BISHOP, 2001).

2.5.1.2 Teorema do Ganho Pequeno

Considera-se que o sistema é estabilizado robustamente quando o sistema com realimentação, ou seja, malha fechada, mantém-se estável quando considerado uma planta real $\tilde{G}(s)$ (DORF; BISHOP, 2001).

As condições de estabilidade, em sua maioria, podem ser determinadas a partir de adaptações do critério de estabilidade de Nyquist³ (DORF; BISHOP, 2001). Entretanto, esse critério não será aprofundado para o estudo do Controle Robusto no tremor parkinsoniano, optando-se assim pela utilização do Teorema do Ganho Pequeno, este que é procedente do critério de estabilidade de Nyquist.

Considerando o diagrama da Figura 21 e sendo $\Delta(s)$ e $M(s)$ funções de transferência próprios e estáveis respectivamente, então o sistema realimentado conservar-se-á estável se o

³O critério de estabilidade de Nyquist propõem que (DORF; BISHOP, 2001):

"Um sistema realimentado é estável se, e somente se, o contorno Γ_L , no plano $L(s)$ não circunscrever o ponto (-1,0) quando o número de pólos de $L(s)$ no semiplano s da direita for zero".

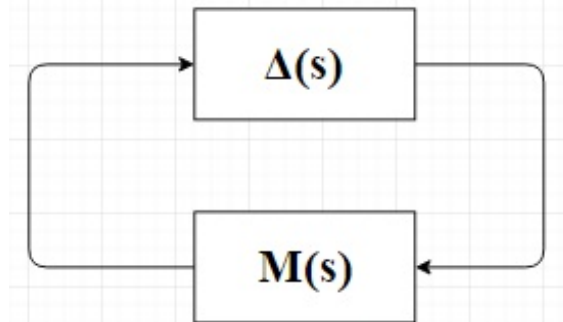
Nada obstante, quando o número de pólos de $L(s)$ no semiplano s da direita for diferente de zero, o critério de Nysquist é enunciado da seguinte maneira:

"Um sistema com realimentação é estável se e somente se o contorno Γ_L , no plano $L(s)$ não circunscrever no sentido anti-horário do ponto (-1,0) e se o numero de zeros for igual ao número de pólos de $L(s)$ com parte real positiva".

produto de $\Delta(s)$ e $M(s)$ em módulo é menor que um. Portanto (ZHOU et al., 1996):

$$\|\Delta(s)M(s)\| < 1 \quad (71)$$

Figura 21: Diagrama de realimentação - $\Delta(s)M(s)$



Fonte: Autoria Própria

Fundamentalmente, a estabilidade em malha fechada, pelo teorema do ganho pequeno será observado se o ganho da malha for pequeno. Para validar o teorema do ganho pequeno o critério de estabilidade de Nyquist é fundamental, uma vez que é uma premissa que a função de transferência em malha aberta esteja inscrita em uma circunferência de raio unitário (OGATA, 2011).

Dentro do critério também se pressupõem que o sistema em malha aberta se apresenta de forma estável, assim como em malha fechada, uma vez que não possui polos no semiplano direito (SPD) (DORF; BISHOP, 2001).

O teorema de ganho pequeno assegura também a estabilidade interna, ou seja, todos os sinais internos permanecem restringidos para entradas limitadas e todas as possíveis funções de transferência em malha fechada são estáveis (OGATA, 2011).

2.5.1.3 Controle H_∞

O projeto de sistemas de controle multivariável, *Multiple Input - Multiple Output* (MIMO), é uma das principais incitações em controle, pois trata-se de um problema complexo em que a função de transferência é representada por uma matriz (ZHOU et al., 1996).

Recursos utilizados no controle clássico como lugar das raízes, diagrama de Bode, entre outros, apresentam grandes obstáculos quando aplicados a sistemas multivariáveis. Para reduzir a dificuldade com a presença das matrizes de função de transferência, técnicas no espaço de estado, no domínio temporal, são usados para contornar as dificuldades e auxiliar no projeto

e estudo de sistemas MIMO (ZHOU et al., 1996).

Enquanto maioria dos pesquisadores estudavam métodos de controle ótimo, estudiosos como A.G.J MacFarlane e H.H. Rosenbrock buscavam expandir métodos e ferramentas do controle clássicos para o controle multivariável e na maioria das técnicas obtiveram sucesso. Entretanto, apenas nos anos 80 surgiu o primeiro pesquisador, G. Zames, com o intuito de estudar um método de otimização no domínio da frequência para projetor de sistema de controle robusto (ZAMES, 2002).

Essa metodologia desenvolvida por Zames, ficou conhecida como H_∞ (ZAMES, 2002). A técnica de H_∞ refere-se ao espaço de funções de transferência próprias e estáveis, em que $G(s)$ pertence a H_∞ . Em controle H_∞ , o interesse básico está na obtenção de uma função de transferência, otimizando o espaço de funções. A comparação das funções é feita de acordo com a sua norma H_∞ (ZHOU et al., 1996).

A norma H_∞ mede a magnitude de uma função de transferência. Supondo que uma $G(s)$ seja própria e estável, então a norma H_∞ de $G(s)$ é definida por (ZAMES, 2002):

$$\|G\|_\infty < \tilde{G}(G(j\omega)) \quad (72)$$

Desta forma, o objetivo do controle H_∞ é minimizar a norma H_∞ , minimizando assim o pico no diagrama de magnitude de Bode, ou no caso de um sistema MIMO, no diagrama do valor singular, desta forma aumentando o limite da estabilidade robusta do sistema (ZAMES, 2002).

Os valores singulares são obtidos por (ZAMES, 2002):

$$\tau_i(\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)^*G(j\omega))} \quad (73)$$

em que λ_i corresponde ao autovalor de n -ésima grandeza e $G(j\omega)$ é o conjugado transposto de G .

Sabendo que o sistema em espaço de estados é dado por:

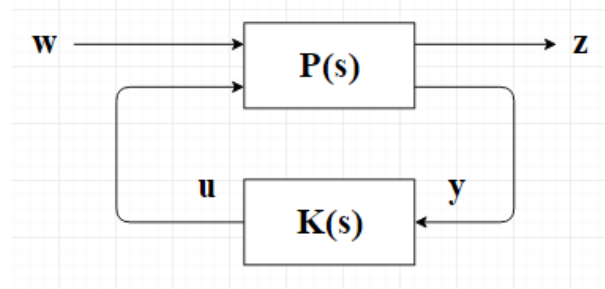
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (74)$$

então a notação matriz-bloco é disposta da seguinte forma (ZHOU et al., 1996):

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (75)$$

Considerando o sistema da Figura 22, tem-se que a solução do controle H_∞ apresentará equações de Riccati muito complexas (ZHOU et al., 1996), não sendo o objetivo dessa seção. Desta forma, não será exposto a resolução das equações.

Figura 22: Diagrama duas portas - Controle H_∞



Fonte: Autoria Própria

O sistema da figura da Figura 22 é um diagrama de duas portas e possibilita a representação de vários sistemas. O sistema possui duas entradas e duas saídas, sendo as entradas classificadas como entrada de controle u e entrada exógena w , sendo ambas, genericamente, vetores. As entradas w não podem ser manipuladas pelo controle e são representativas de perturbações externas, como ruído de sensores (ZHOU et al., 1996).

As saídas também são divididas em dois tipos, sendo o primeiro tipo sinais que são medidos e realimentados (y) e o segundo tipo sinais regulados (z) (ZHOU et al., 1996). Desta forma, o diagrama de duas portas pode ser descrito pela representação na forma de espaço de estados, dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (76)$$

ou representado pela matriz-bloco (ZHOU et al., 1996):

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (77)$$

Desta forma, com os conceitos expostos nesta seção e com o auxílio do *software* MatLab[®], será analisado no Capítulo 5 o comportamento do tremor parkinsoniano submetido ao controle H_∞ .

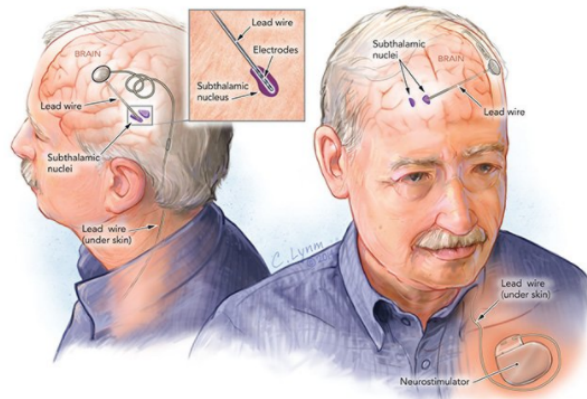
3 O TREMOR PARKINSONIANO

Este capítulo se baseia no artigo de Rehan e Hong (REHAN; HONG, 2013) sobre estimulação cerebral para o controle do tremor parkinsoniano. A metodologia utilizada para tal será tratada mais afundo nas próximas seções do trabalho.

3.1 A ESTIMULAÇÃO CEREBRAL

Conhecida por sua sigla em inglês DBS (*Deep Brain Stimulation*), a estimulação cerebral é hoje um dos principais tratamentos de distúrbios de movimento, tais como tremor essencial, distonia e doença de Parkinson (OSTREM; STARR, 2008). O procedimento consiste essencialmente na implantação cirúrgica de eletrodos no cérebro. Esses eletrodos emitem ondas nas regiões cerebrais afetadas pela doença (WOJTECKI et al., 2011). Para o mal de Parkinson, a cirurgia é realizada de tal maneira a introduzir os eletrodos no núcleo subtálamo do diencéfalo, região central do encéfalo (BENABID; DELONG, 2014). Como sugere a Figura 23, eles estão ligados a um neurotransmissor programável subcutâneo através de um fio que passa por uma pequena abertura feita no crânio.

Figura 23: Implantação de eletrodos no cérebro para controle da doença de Parkinson



Fonte: (BENABID; DELONG, 2014)

Pelo fio, em direção ao cérebro, passa uma corrente elétrica chamada terapêutica (BENABID; DELONG, 2014). Esta varia conforme o paciente e seus parâmetros dependerão, principalmente, da amplitude, da frequência e da largura de pulso do sinal emitido pelo gerador de estímulos (REHAN; HONG, 2013). Neste trabalho, para fins de simulação do tremor parkinsoniano, os parâmetros necessários ao DBS serão determinados com base na literatura.

Apesar de ser um tratamento excelente aos sintomas da doença de Parkinson, o DBS não faz o controle total da doença. Esta terapia é capaz de controlar apenas uma área do corpo do doente (REHAN; HONG, 2013). Um dos principais motivos para que isso ocorra é a taxa de variação com que os parâmetros do neurotransmissor são submetidos, uma vez que os mesmos são modificados conforme a evolução deste distúrbio do movimento (BENABID; DELONG, 2014).

Apoiada em estudos cinemáticos, a pesquisa base a este trabalho traz a modelagem LIT do tremor. O modelo linear possibilita o controle por malha aberta, mantendo os parâmetros do oscilador estáveis. Por sua vez, o controle retroativo, o qual proporciona uma contínua realimentação do estado do tremor e a variação dos parâmetros do gerador de estímulo, permite a obtenção de melhores resultados.

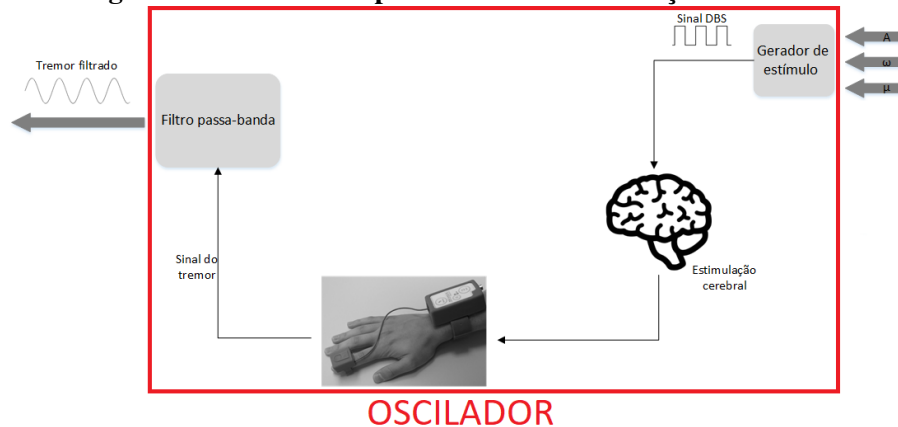
(REHAN; HONG, 2013) embasaram seu estudo na teoria de Lyapunov. Esta garante a estabilização do tremor a partir de um valor para a amplitude do sinal de estimulação determinado por realimentação. Partindo-se das informações contidas nesta seção, será então utilizado o DBS como facilitador da modelagem do sistema biológico para futuro controle do mesmo.

3.2 INTRODUÇÃO AO COMPORTAMENTO DO TREMOR PARKINSONIANO

Um modelo linear de ordem superior foi desenvolvido a fim de expressar a atividade cerebral em resposta a ativações neurais (AQIL et al., 2012). A utilização de um oscilador para a representação do cérebro e da dinâmica muscular envolvida na doença de Parkinson torna visível a simplicidade do controle do tremor através da disponibilidade das ferramentas necessárias a investigação do comportamento do tremor. Nesse sentido, o modelo matemático de um oscilador pode ser utilizado para descrever a dinâmica do DBS e do processo de medição do tremor, como ilustrado na Figura 24.

A terapia DBS utilizada na pesquisa de (REHAN; HONG, 2013) se diferencia da definida por Mahlon R. DeLong (KORSCHUNM, 2014) por utilizar um sensor acoplado no dedo do paciente. Com o nome comercial de Kinesia, esse sensor tem a finalidade de medir

Figura 24: Modelo completo do DBS e da medição do tremor



Fonte: Autoria Própria

a aceleração da mão do paciente. Assim, o sinal de aceleração, filtrado e isolado de ruídos, corresponde ao sinal de saída do modelo matemático que descreve a aplicação do DBS para controle do tremor. Nesse modelo, o sinal de entrada corresponde aos parâmetros necessários à produção do sinal de estímulo cerebral, ou seja, amplitude, frequência e largura de pulso da onda de estimulação.

Sendo o oscilador ilustrado na Figura 24 variante no tempo, o tremor filtrado é visto como um sinal senoidal caracterizado, principalmente, por sua amplitude e frequência. A fim de simplificar a dinâmica do tremor, (REHAN; HONG, 2013) propõe as seguintes equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - \omega_T^2 x_2(t) + (u(t) - A_n), \\
 \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - \beta x_2(t), \\
 y(t) &= \sigma x_1(t),
 \end{aligned} \tag{78}$$

em que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são os estados do oscilador, $y(t)$ representa a saída, ou seja, o tremor, σ e ω_T são parâmetros invariantes no tempo que representam a força da amplitude e a frequência de oscilação do tremor, respectivamente, $u(t)$ é o sinal de controle para a amplitude do sinal de estímulo e A_n é a amplitude de estimulação nominal. Além disso, os outros parâmetros do sinal de estímulo, como frequência angular ω e largura de pulso μ , são pré-fixados na terapia de DBS e, portanto, não aparecem no modelo. Por fim, o termo α é utilizado para melhor representar o tremor parkinsoniano, e o termo estabilizante β é importante para o projeto de controle do tremor. A influência de β ficará mais clara a partir do desenvolvimento matemático apresentado nas Seções 3.3 e 3.4.

Assume-se um valor nominal de A_n para o qual o tremor associado a uma desordem cerebral desaparece. Sabe-se, pelas informações contidas nessa pesquisa e em seus artigos tomados como base, que o controle do tremor parkinsoniano é realizado através da terapia de DBS para uma certa gama de parâmetros de estimulação. Assim, a representação dinâmica do tremor necessita da incorporação de estados adicionais pelo modelo em (78) para, assim, descrever uma função senoidal da direção do movimento (REHAN; HONG, 2013).

O modelo apresentado em (78) baseia-se na abordagem de modelagem difusa utilizando a informação de entrada-saída, ou seja, a ideia de parâmetros de estimulação e características de tremor. A principal característica dessa abordagem é que ela não requer o conhecimento de todo o funcionamento biológico do tremor nem do mecanismo de DBS. Pela escolha de valores apropriados de σ e ω_T , é possível a obtenção do tremor de qualquer frequência e amplitude como saída, sendo ele fortemente dependente de mudanças comportamentais no cérebro (REHAN; HONG, 2013).

Pode-se obter os valores exatos e as mudanças nos parâmetros sob diferentes aspectos dinâmicos do cérebro submetidos a diferentes condições de estímulo através de estudos computacionais. No entanto, mesmo sem tais estudos, é possível afirmar que uma das principais vantagens do modelo de tremor baseado em osciladores lineares é a sua utilização na concepção de um controlador de retroalimentação para estabilização de oscilações de tremor, sendo desnecessário o cálculo dos valores exatos dos parâmetros do modelo σ e ω_T (REHAN; HONG, 2013). Apesar disso, ao incorporar os limites conhecidos nos parâmetros σ e ω_T , uma metodologia de controle de realimentação pode ser desenvolvida.

A fim de simplificar a notação de entrada, define-se $v(t) = u(t) - A_n$. Sendo eles constantes, temos a representação do tremor por EE a partir do modelo em (78):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \alpha & -\omega_T^2 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned} \tag{79}$$

em que $x \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$.

Parte-se, então, ao cálculo da equação diferencial ordinária (EDO) que representará o tremor parkinsoniano como um todo. Com as matrizes A , B , C e D definidas em (79), calcula-se

a função de transferência do sistema. Assim,

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \\
 &= [\sigma \ 0] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & -\omega_T^2 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s^2 + (\beta - \alpha)s + \omega_T^2 - \alpha\beta} [\sigma \ 0] \begin{bmatrix} s + \beta & -\omega_T^2 \\ 1 & s - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\sigma(s + \beta)}{s^2 + (\beta - \alpha)s + \omega_T^2 - \alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{80}$$

Com o propósito de ir do domínio da frequência ao domínio do tempo, aplica-se a transformada inversa de Laplace em (80). Por se tratar de um problema de funções de transferência, supõem-se condições iniciais nulas. Desse modo,

$$\ddot{y} + (\beta - \alpha)\dot{y} + (\omega_T^2 - \alpha\beta)y = \sigma\dot{u} + \sigma\beta u. \tag{81}$$

Note que a EDO que representa o sistema massa-mola, referenciado no Capítulo 2, é dada por:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u,$$

sendo então possível perceber uma semelhança entre a dinâmica destes dois sistemas, o oscilador harmônico e o oscilador que descreve o tremor.

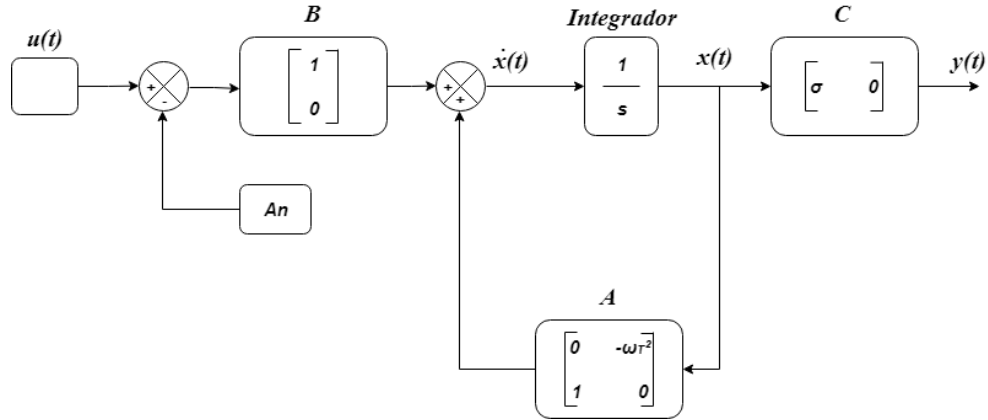
3.3 COMPORTAMENTO DE UM TREMOR LINEAR SEM TERMO ESTABILIZADOR

Por simplicidade, o tremor dinâmico pode ser descrito para uma única entrada, que pode ser um dos parâmetros de estímulo, por exemplo, a amplitude. Neste caso, o modelo mais simples de um oscilador linear de segunda ordem para um tremor na forma de EE é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_T^2 x_2 + (u(t) - A_n), \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ y = \sigma x_1 \end{cases} \tag{82}$$

Para este modelo, tem-se o seguinte diagrama de blocos representado na Figura 25.

Figura 25: Diagrama de blocos do modelo de um tremor linear sem termo estabilizador



Fonte: Autoria Própria

Definindo $v(t) = u(t) - A_n$ para simplificar a notação de entrada e sendo eles constantes, temos:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_T^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (83)$$

$$y = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} x \quad (84)$$

Para calcular a resposta $y(t)$ matematicamente, faz-se:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BV(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BV(s) \end{aligned} \quad (85)$$

Como $Y(s) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} X(s)$, tem-se

$$Y(s) = \sigma(sI - A)^{-1}x(0) + \sigma(sI - A)^{-1}BV(s), \quad (86)$$

sendo

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & \omega_T^2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \omega_T^2} \begin{bmatrix} s & -\omega_T^2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Logo,

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_T^2} \begin{bmatrix} s & -\omega_T^2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega_T^2} \begin{bmatrix} s & -\omega_T^2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V(s)$$

$$= \frac{\sigma x_1(0)s}{s^2 + \omega_T^2} - \frac{\sigma \omega_T^2 x_2(0)}{s^2 + \omega_T^2} + \frac{\sigma s V(s)}{s^2 + \omega_T^2}$$

Supondo $V(s) = \frac{A_o - A_n}{s}$,

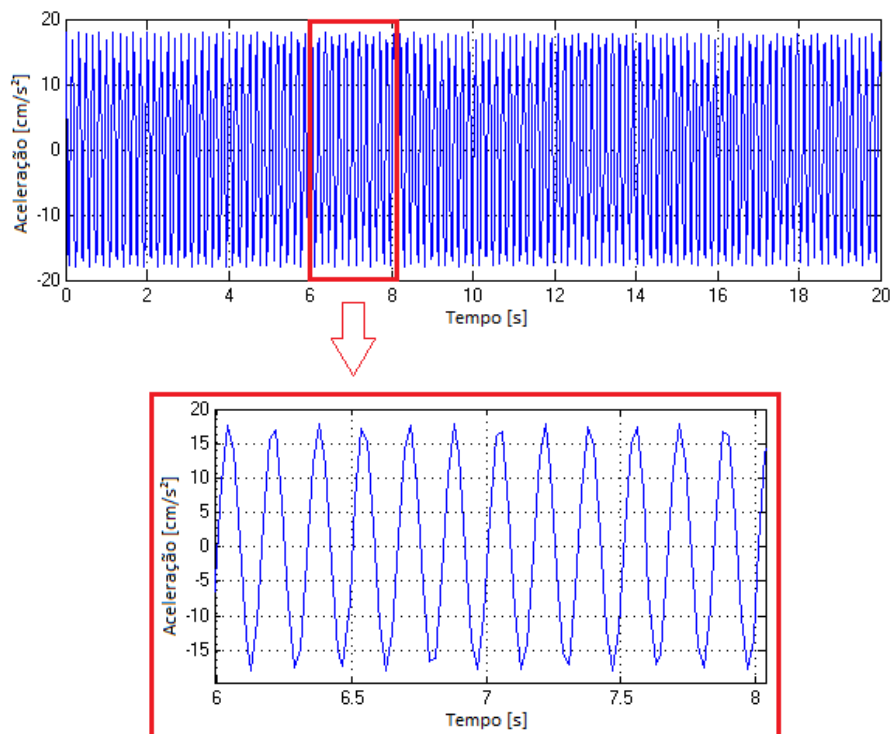
$$Y(s) = \frac{\sigma x_1(0)s}{s^2 + \omega_T^2} - \frac{\sigma \omega_T^2 x_2(0)}{s^2 + \omega_T^2} + \sigma \frac{A_o - A_n}{s^2 + \omega_T^2}$$

Aplicando a Transformada inversa de Laplace temos,

$$y(t) = \sigma \left[x_1 \cos(\omega_T t) + \left(\frac{1}{\omega_T} (A_o - A_n) - x_2(0) \omega_T \right) \text{sen}(\omega_T t) \right] \quad (87)$$

A Figura 26 apresenta a resposta $y(t)$ graficamente para $x_1(0) = \frac{18}{15}$, $x_2(0) = 0$, $\sigma = 15$, $\omega_T^2 = 1400$, $A_o = 0$ e $A_n = 4,2$:

Figura 26: Gráfico da aceleração em função do tempo de um tremor linear sem termo estabilizador



Fonte: Autoria Própria

Observa-se que o gráfico da aceleração do tremor em função do tempo é um sinal senoidal, porém apresenta uma modulação e não converge para um valor constante. O gráfico da velocidade e posição em função do tempo apresentam as mesmas características da Figura 26.

3.4 COMPORTAMENTO DE UM TREMOR LINEAR COM TERMO ESTABILIZADOR

O modelo de tremor linear baseado em oscilador pode ser estendido incorporando um termo estabilizador, para obter um modelo de tremor que explica melhor o movimento real observado. Assim, um modelo de tremor de segunda ordem linear baseado em osciladores pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_T^2 x_2 + (u(t) - A_n), \\ \dot{x}_2 = x_1 - \beta x_2, \\ y = \sigma x_1 \end{cases} \quad (88)$$

Para este modelo com o termo estabilizador, tem-se o seguinte diagrama de blocos representado na Figura 25, previamente representada.

Definindo novamente $v(t) = u(t) - A_n$ para simplificar a notação de entrada e sendo eles constantes, temos:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_T^2 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v \quad (89)$$

$$y = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} x \quad (90)$$

Para calcular a resposta $y(t)$ matematicamente,

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BV(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BV(s) \end{aligned} \quad (91)$$

Como $Y(s) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} X(s)$, tem-se

$$Y(s) = \sigma(sI - A)^{-1}x(0) + \sigma(sI - A)^{-1}BV(s), \quad (92)$$

sendo

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & \omega_T^2 \\ -1 & s + \beta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} \begin{bmatrix} s + \beta & -\omega_T^2 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

Logo,

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} \begin{bmatrix} s + \beta & -\omega_T^2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \sigma & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} \begin{bmatrix} s + \beta & -\omega_T^2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} V(s)$$

o que fornece

$$Y(s) = \frac{\sigma x_1(0)(s + \beta)}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} - \frac{\sigma \omega_T^2 x_2(0)}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} + \frac{\sigma(s + \beta)V(s)}{s^2 + \omega_T^2} \quad (93)$$

Supondo $V(s) = \frac{A_o - A_n}{s}$,

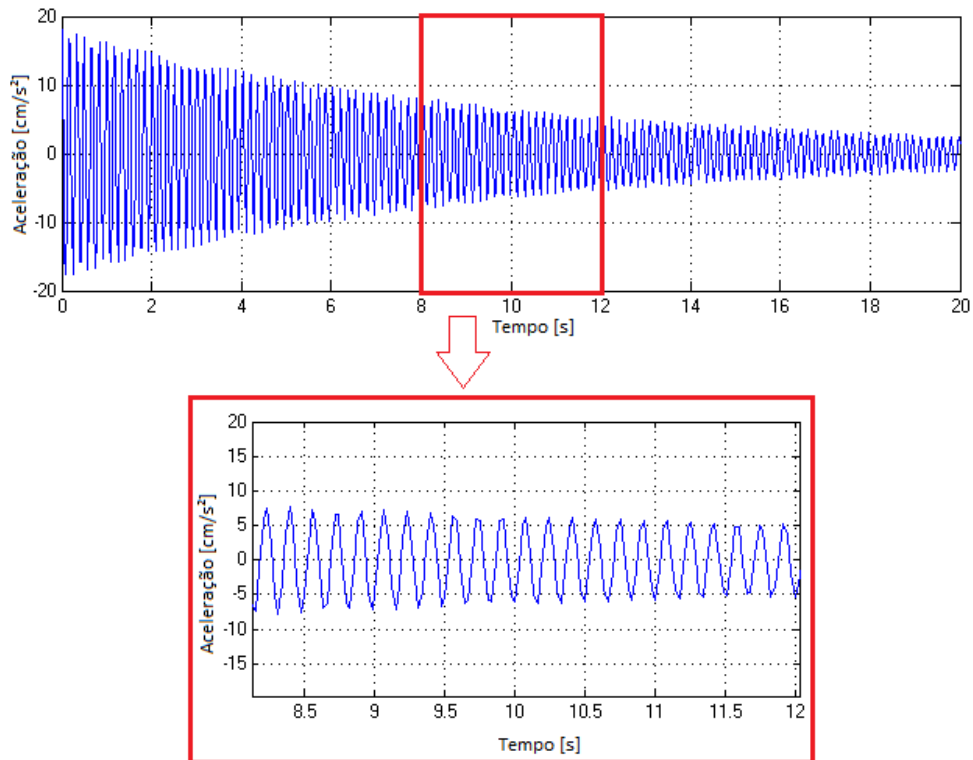
$$Y(s) = \frac{\sigma x_1(0)(s + \beta)}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} - \frac{\sigma \omega_T^2 x_2(0)}{s^2 + s\beta + \omega_T^2} + \sigma(A_o - A_n) \frac{s + \beta}{s^2 + \omega_T^2} \quad (94)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace pelo *software* MatLab[®], obtém-se

$$y(t) = \sigma x_1(0) \left[\frac{e^{-\frac{\beta t}{2}} (\beta \sinh(\frac{1}{2}t \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2}) + \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2} \cosh(\frac{1}{2}t \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2}))}{\sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2}} \right] \\ - \sigma x_2(0) \left[\frac{2\omega_T^2 e^{-\frac{\beta t}{2}} (\beta \sinh(\frac{1}{2}t \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2}))}{\sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2}} \right] \\ + \sigma(A_o - A_n) \left[\left(\frac{e^{-\frac{\beta t}{2}} (2\omega_T^2 - \beta^2) \sinh(\frac{1}{2}t \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2})}{\omega_T^2 \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2}} \right) + \left(\frac{\beta (1 - e^{-\frac{\beta t}{2}}) \cosh(\frac{1}{2}t \sqrt{\beta^2 - 4\omega_T^2})}{\omega_T^2} \right) \right]$$

A Figura 27 apresenta a resposta $y(t)$ graficamente para $\beta = 0,2$:

Figura 27: Gráfico da aceleração em função do tempo de um tremor linear com termo estabilizador



Fonte: Aatoria Própria

Nota-se que o gráfico da aceleração do tremor em função do tempo é um sinal senoidal que converge para o zero e apresenta uma modulação. O termo de estabilização é análogo ao termo de amortecimento no sistema massa mola, pois ambos os modelos apresentam comportamentos similares. O gráfico da velocidade e posição em função do tempo apresentam as mesmas características da Figura 27.

4 AVALIAÇÃO DO CONTROLE ÓTIMO EM DIFERENTES CENÁRIOS

Tem-se como foco desse capítulo a apresentação dos resultados a partir da modelagem do tremor parkinsoniano discutido no Capítulo 3. As análises seguintes trarão simulações referentes ao tremor em diferentes cenários relacionados aos termos estabilizador β e caracterizador do tremor α e situações de resposta natural e sob o efeito do controle linear quadrático.

Inicialmente, apresentam-se conceitos a fim de atestar o sistema proposto como controlável. Em seguida, para efeito de comparação e melhor compreensão do sistema, variam-se os parâmetros de amplitude (A), força de amplitude (σ) e frequência de oscilação (ω_T) do tremor. Para as demais simulações, estes três parâmetros serão fixados e o foco da análise passa a ser os resultados obtidos para diferentes políticas de controle. Por fim, será aplicado o controle linear quadrático aos diferentes cenários propostos. Com os parâmetros fixados, foram feitas análises quanto a relação dos termos estabilizador e caracterizador do tremor entre si, visando sempre o tempo de estabilização do sistema e o custo para tal.

4.1 SISTEMA PARKISONIANO CONTROLÁVEL

O projeto de um controlador ótimo é concebido quando um sistema é controlável. Sendo assim, preliminarmente, deve-se atestar se o sistema proposto para o tremor parkinsoniano no estudo de (REHAN; HONG, 2013) é de fato controlável.

O cenário escolhido para ser aqui representado traz o sistema completo, ou seja, com ambos termos estabilizador e caracterizador do tremor diferentes de zero, representado em (78). Com esse modelo extraem-se as matrizes representadas em (79) e constrói-se a matriz de controlabilidade previamente apresentada em (3).

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha & -\omega_T^2 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observa-se que $\det(\mathcal{C}(A,B))$ é sempre igual a 1, independentemente dos valores de α e de β . Portanto, como previamente apresentado na Seção 2.1.1.1, o sistema é sempre completamente controlável.

A fim de se evidenciar a interferência de α e de β na estabilidade do modelo proposto, calculam-se os autovalores da matriz A . A resposta do sistema será *Bounded Input- Bounded Output* (BIBO) estável (para uma entrada limitada, haverá uma saída limitada) se, e somente se, nenhum autovalor de A possuir parte real positiva. Assim,

$$\begin{aligned} \det(|\lambda I - A|) &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & -\omega_T^2 \\ 1 & -\beta \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & \omega_T^2 \\ -1 & \lambda + \beta \end{bmatrix} \right| \\ &= (\lambda - \alpha)(\lambda + \beta) + \omega_T^2 \\ &= \lambda^2 + (\beta - \alpha)\lambda + \omega_T^2 - \alpha\beta = 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Portanto,

$$\lambda = \frac{-(\beta - \alpha) \pm \sqrt{(\beta - \alpha)^2 - 4(\omega_T^2 - \alpha\beta)}}{2} = \frac{-(\beta - \alpha) \pm \sqrt{(\beta + \alpha)^2 - 4\omega_T^2}}{2} \quad (96)$$

Sabendo que a grandeza $\omega_T^2 \gg (\beta + \alpha)^2$, a estabilidade estará ligada a relação:

$$-(\beta - \alpha) \leq 0 \quad \text{e} \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad (97)$$

Analisando a parte real (97), observam-se quatro situações possíveis referentes à estabilidade do sistema, sendo elas:

- Quando β for nulo, o sistema sempre será instável, uma vez que a parte real será sempre positiva. Desta forma, justifica-se atribuir a β o conceito de termo estabilizador.
- Quando α for nulo, o sistema é sempre estável, visto que a parte real será sempre negativa.
- Quando $\beta > \alpha$, o sistema será estável.
- Quando $\beta < \alpha$, sistema será instável.

Portanto, a aplicação de controle ótimo é válida e rica para o modelo em questão, uma vez que, independente da relação de seus parâmetros, o sistema é controlável. Visto a

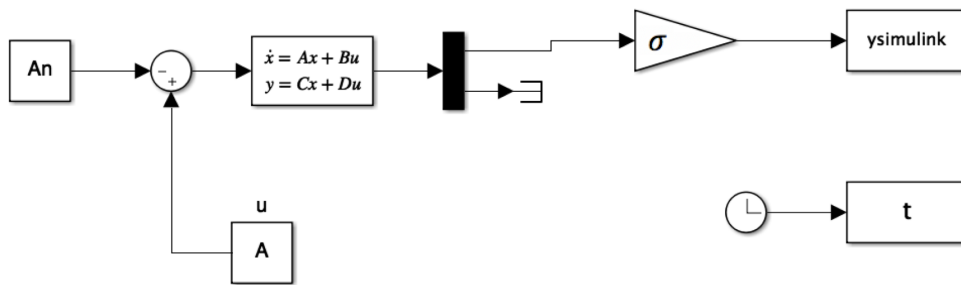
possibilidade de variar os parâmetros, poderão ser criados diversos cenários em busca de uma melhor representação do tremor parkinsoniano.

4.2 RESPOSTA NATURAL DO TREMOR

Primeiramente, intencionou-se a obtenção das formas de ondas do tremor quando em seu estado natural, ou seja, sem qualquer forma de controle aplicada a ele. A razão para tal, é a validação para a real necessidade de um controlador do sistema.

O sistema em (78) foi então representado pelo diagrama de blocos construído no *software* Simulink[®] como ilustra o diagrama de blocos da Figura 28:

Figura 28: Sistema completo do tremor parkinsoniano em malha aberta representado em diagrama de blocos



Fonte: Autoria Própria

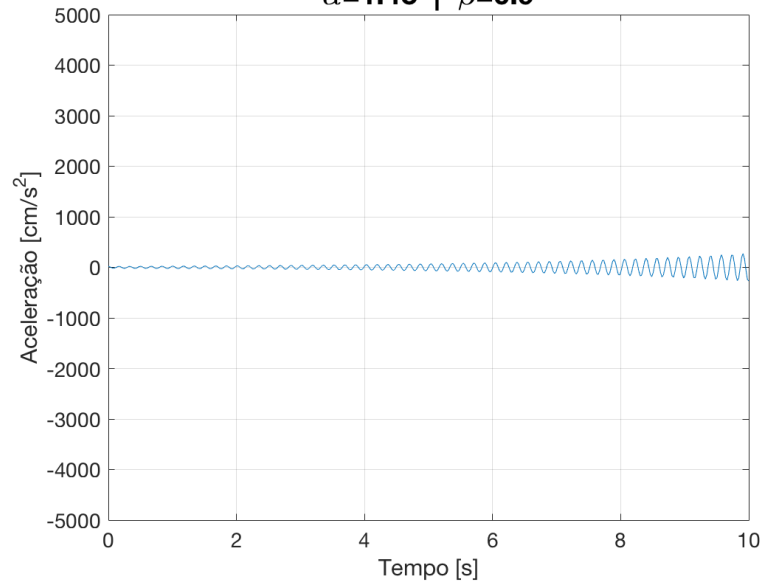
Para todas as simulações os parâmetros de A_n , σ e ω_T^2 foram mantidos em 4, 2, 22 e 1400, respectivamente.

4.2.1 Sistema instável

De acordo com (97), tem-se o sistema como controlável e BIBO estável. A fim de se evidenciar a interferência de α e β na estabilidade do modelo proposto, faz-se, primeiramente, α maior que β , sendo ambos sempre maiores ou iguais a zero. Para esse caso, o sistema será sempre instável, como pode ser percebido no gráfico da Figura 29:

Figura 29: Resposta natural do tremor com $\alpha > \beta$

$$\alpha=1.45 \mid \beta=0.9$$

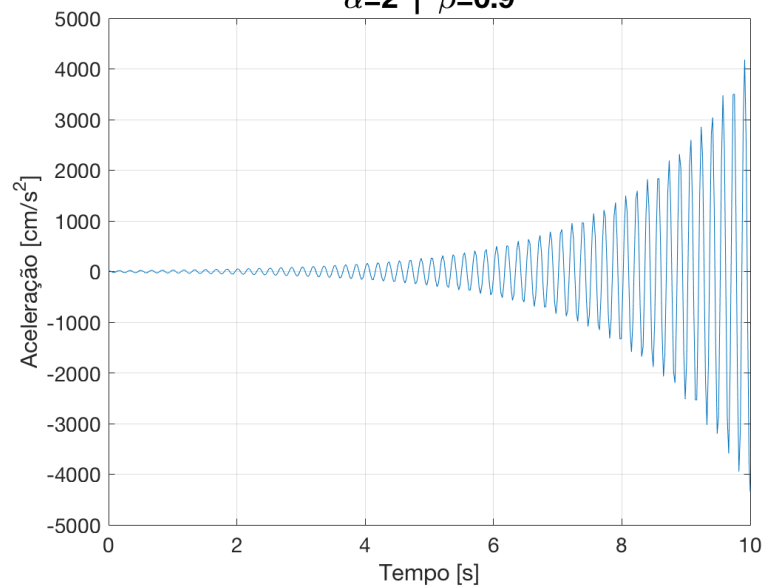


Fonte: Autoria Própria

Para o sistema acima considerado, observa-se um aumento da amplitude do tremor em relação ao tempo. Isso indica uma instabilidade do sistema. Além disso, tem-se que, quanto maior a diferença de valores entre α e β , mais instável se torna o sistema, como representado no gráfico da Figura 30:

Figura 30: Resposta natural do tremor com $\alpha \gg \beta$

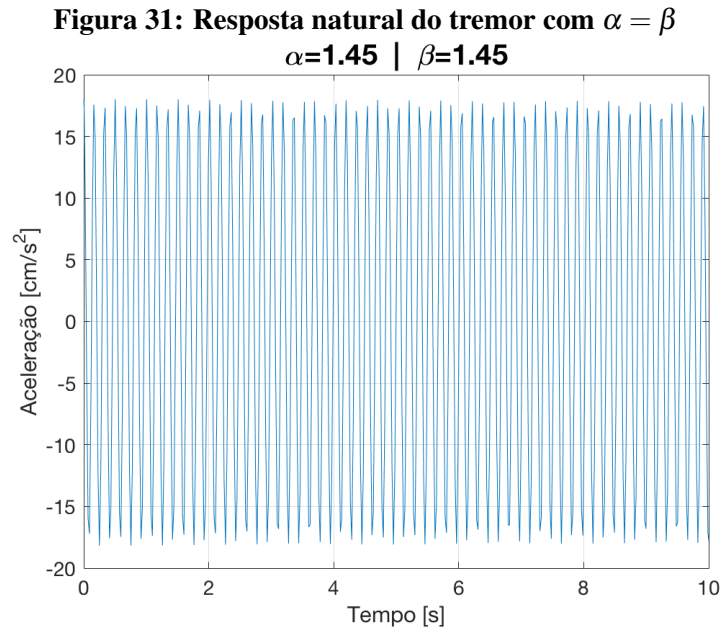
$$\alpha=2 \mid \beta=0.9$$



Fonte: Autoria Própria

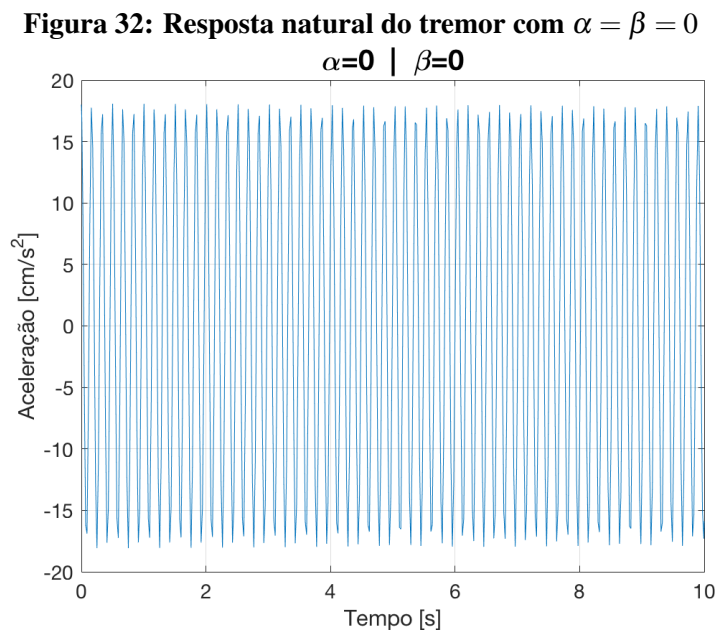
4.2.2 Sistema regular

Já quando os termos estabilizador e caracterizador do tremor possuem o mesmo valor, tem-se o sistema apresentado um comportamento regular - Figura 31:



Fonte: Autoria Própria

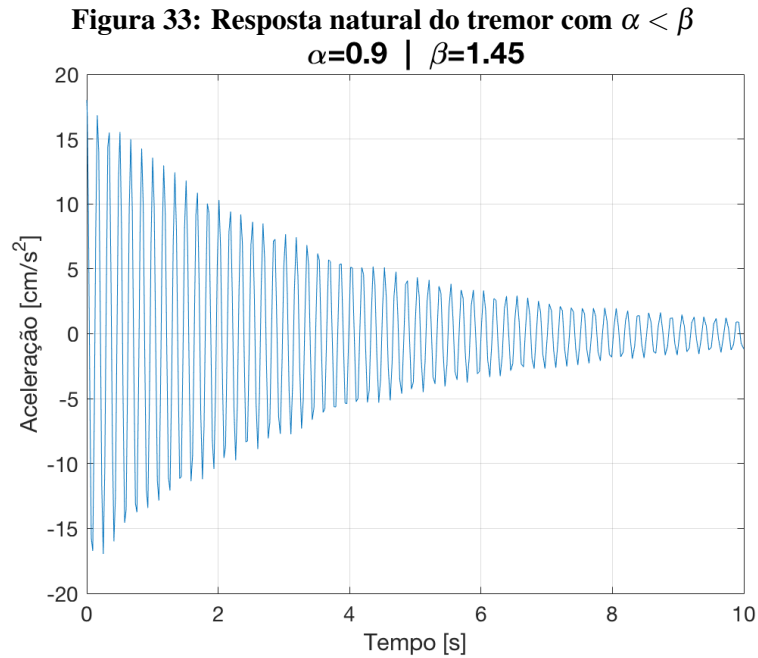
O mesmo comportamento ocorre quando ambos termos são nulos, como se percebe na Figura 32:



Fonte: Autoria Própria

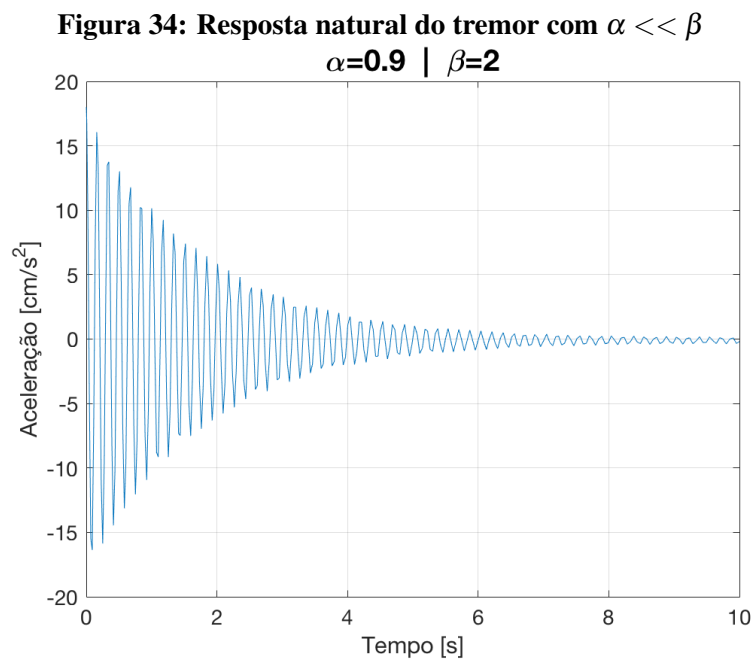
4.2.3 Sistema estável

Para $\alpha < \beta$, esse sistema sempre será estável, como observado na Figura 33:



Fonte: Autoria Própria

Percebe-se que quanto maior a diferença de valores entre α e β , mais rápido o sistema se estabilizará:



Fonte: Autoria Própria

Entretanto, isso não invalida a aplicação de um sistema de controle para essa situação. Com a utilização de métodos de controle linear quadrático, o tremor em questão será estabilizado mais rapidamente, quando fixados os termos α e β , com um custo mínimo.

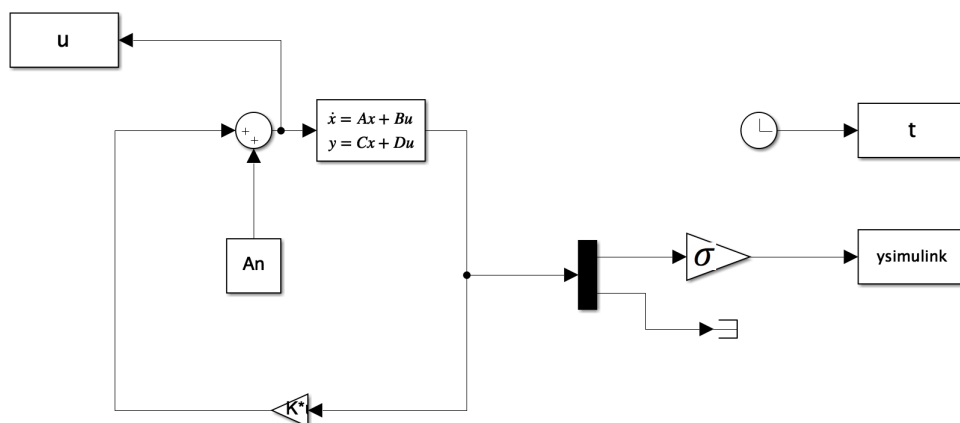
4.3 SISTEMA COM APLICAÇÃO DO CONTROLE ÓTIMO

Tem-se como objetivo dessa seção a aplicação do controle linear quadrático a fim de estabilizar ou melhorar o tempo de estabilização do sistema proposto nesse capítulo juntamente com os casos de resposta natural evidenciados na Seção 4.2.

Entre as diferentes teorias de controle, é considerada ótima aquela que traz o menor custo para a estabilização do controle juntamente com o menor tempo de estabilização (GEROMEL; KOROGUI, 2011). Nessa seção, bem como na próxima, serão apresentados os custos relacionados a aplicação de cada uma das formas de controle a serem discutidas, com a finalidade de autenticar a utilização desse método de controle de sistemas.

Para a aplicação da teoria de controle linear quadrático ao sistema proposto do tremor parkinsoniano em (78), foi utilizado o diagrama de blocos com realimentação de estados da Figura 35, onde K é a matriz de ganho do controlador. Como já apresentado, essa é uma das grandes vantagens desse método de controle.

Figura 35: Diagrama de blocos do sistema completo do tremor parkinsoniano em malha fechada com aplicação do controle ótimo



Fonte: Autoria Própria

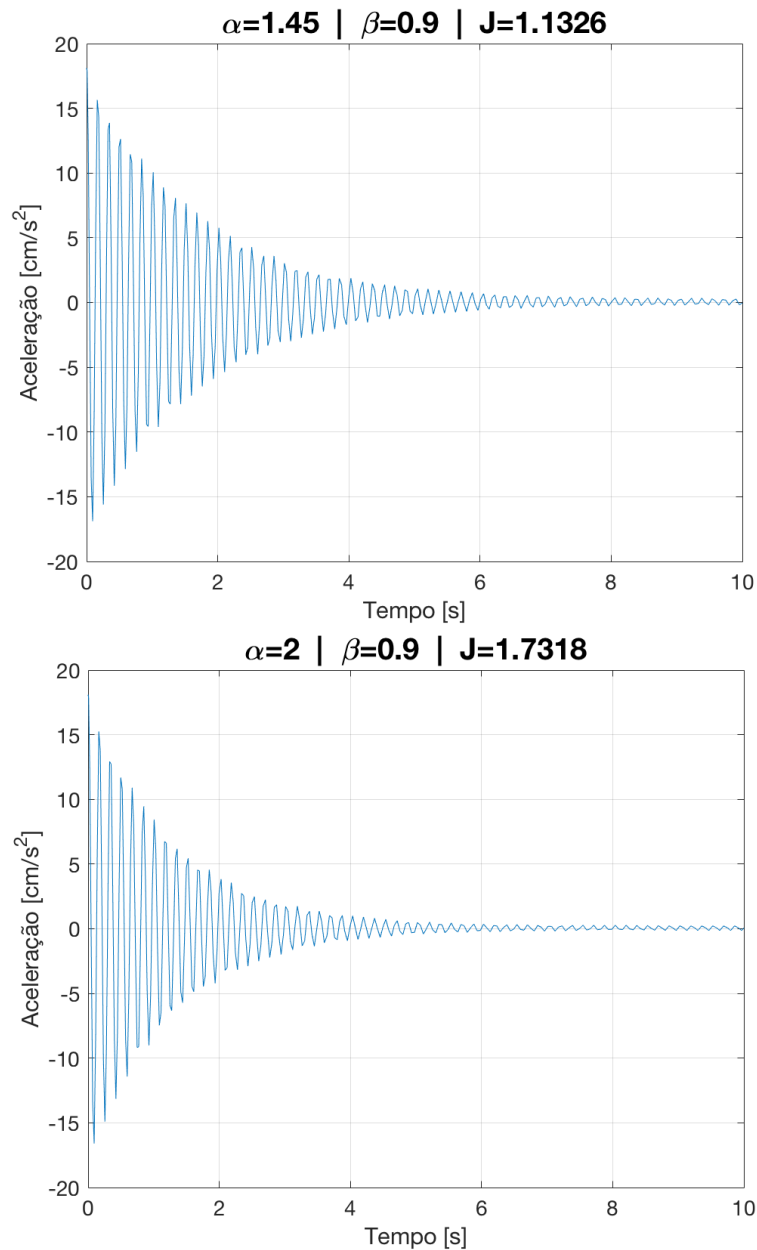
Como demonstrado na Seção 2.3, é necessário ter conhecimento do ganho de realimentação necessário à obtenção do custo mínimo J para obter a resposta do sistema, ou seja, o cálculo de K ótimo. O cálculo de J para os casos abaixo se dá por (12), sendo então imprescindível o conhecimento dos estados do oscilador. Salienta-se aqui que o sistema será

estabilizado com a realimentação de diferentes matrizes K , porém o desempenho do sistema sempre será inferior e seu custo, maior.

4.3.1 Sistema instável

Como visto na Seção 4.2.1 o sistema (78) tem comportamento instável quando em seu estado natural. Com a aplicação de uma lei de controle, o sistema apresenta um custo baixo, independente da diferença entre α e β como demonstram os gráficos da Figura 36:

Figura 36: Resposta do sinal do tremor $\alpha > \beta$ com a aplicação do controle



Fonte: Autoria Própria

Para as situações acima apresentadas em que α é sempre maior que β tem-se as matrizes ótimas abaixo apresentadas respectivamente:

$$K = \begin{bmatrix} 1,6918 & -1,5220 \end{bmatrix}$$

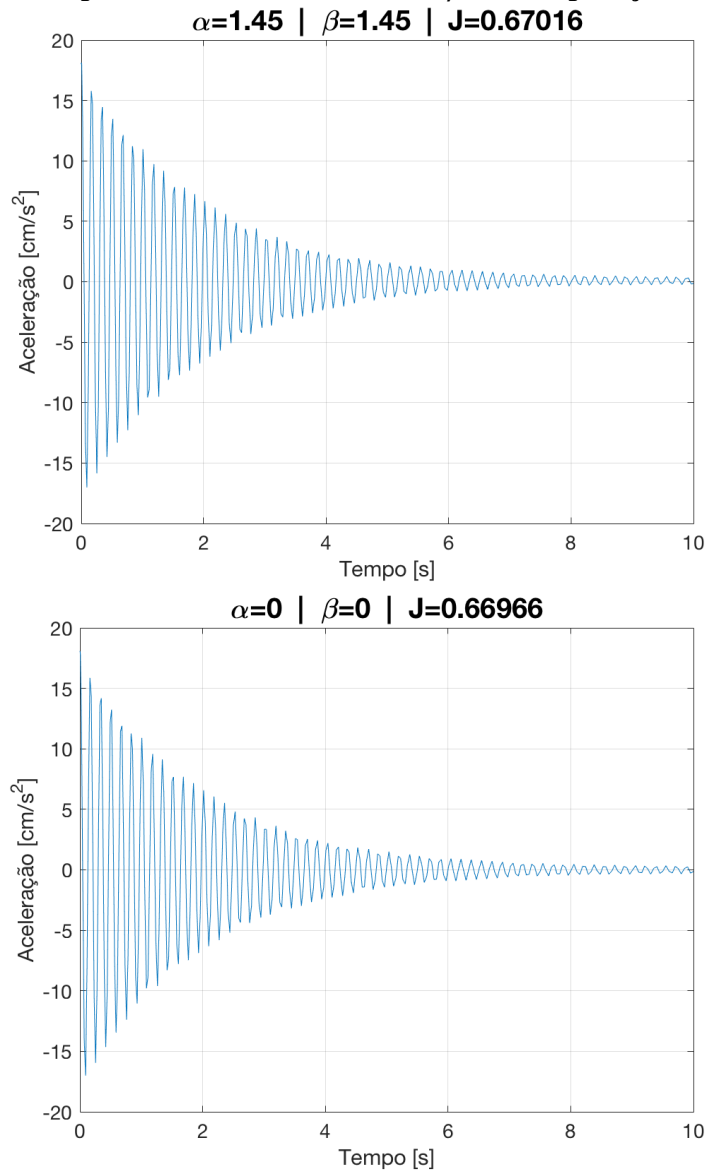
$$K = \begin{bmatrix} 2,5870 & -2,3277 \end{bmatrix}$$

Nota-se que em ambos os casos, o controle do sistema que era previamente instável, como apresentado na Seção 4.2.1, se deu de forma rápida, sendo ele de 9,0189 segundos para o primeiro cenário e de 6,5930 segundos quando o termo caracterizador do tremor (α) se mostra bem superior ao termo estabilizador (β). Além disso, os dois casos anteriormente descritos apresentam custos de $J = 1,1326$ e $J = 1,7318$, respectivamente.

4.3.2 Sistema regular

Para o quadro caracterizado pelo seu comportamento regular, percebe-se um custo de estabilização muito menor do que o necessário ao cenário instável. Ademais, tem-se os tempos de estabilização de ambos os casos muito próximos, com 9,0705 segundos para a primeira situação e 9,1084 segundos para a segunda. Esses resultados podem ser constatados na Figura 37 abaixo:

Figura 37: Resposta do sinal do tremor $\alpha = \beta$ com a aplicação do controle



Fonte: Autoria Própria

As conclusões discutidas acima se devem às matrizes ótimas aplicadas à realimentação do sistema com os termos não nulos e nulos. São elas, respectivamente:

$$K = \begin{bmatrix} 1,0011 & -1,4505 \end{bmatrix}$$

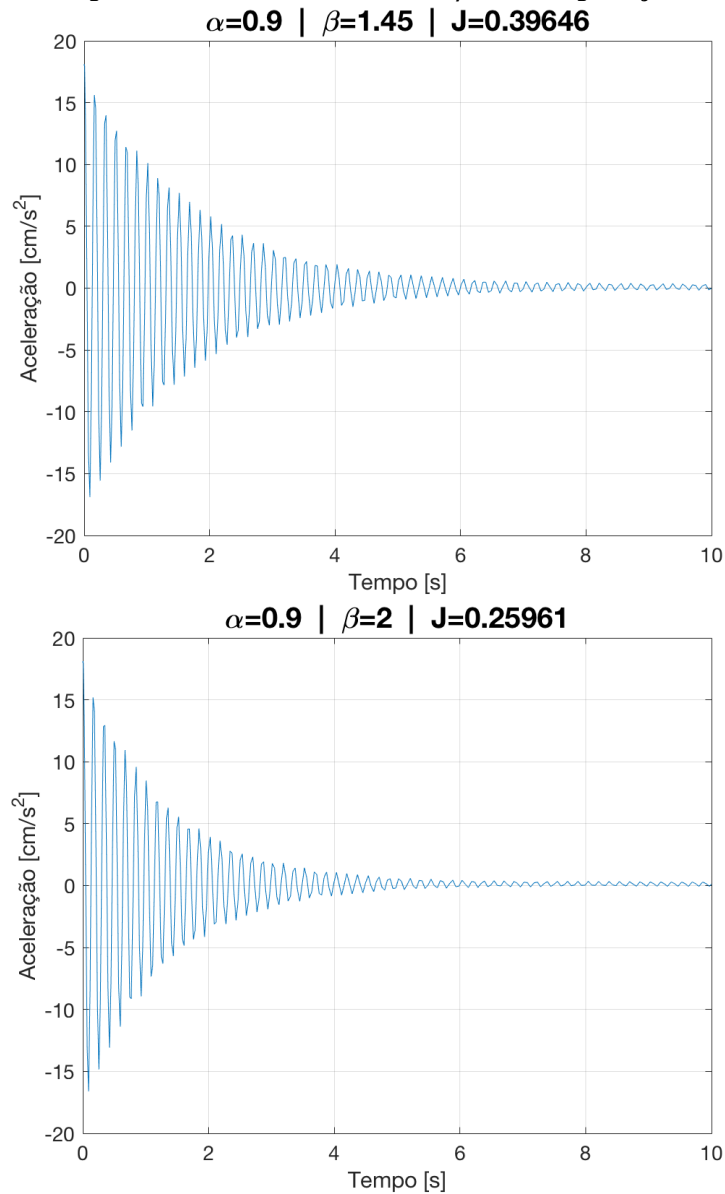
$$K = \begin{bmatrix} 1,0004 & -0,0004 \end{bmatrix}$$

Além disso, pode-se perceber também que independente dos valores de α e β , o custo de estabilização J permanece praticamente o mesmo, sendo ele calculado em 0,6702 para o sistema em que os termos α e β são iguais a 1,45 e em 0,6697 para o sistema com os termos nulos.

4.3.3 Sistema estável

Para o cenário cuja curva de resposta natural apresentou um comportamento estável, tem-se os menores custos de estabilização, como constatado na Figura 38:

Figura 38: Resposta do sinal do tremor $\alpha < \beta$ com a aplicação do controle



Fonte: Autoria Própria

Em ambas situações, o sistema que já era estável, apresenta um tempo de estabilização do tremor ainda menor. No cenário em que α e β são mais próximos, com uma matriz ótima aplicada a realimentação do sistema de:

$$K = \begin{bmatrix} 0,5922 & -0,8576 \end{bmatrix}$$

tal tempo medido foi de 9,0215 segundos. Já o cenário seguinte apresentou um ganho igual a:

$$K = \begin{bmatrix} 0,3878 & -0,7738 \end{bmatrix}$$

e um tempo de estabilização de 6,5954 segundos.

A seguir serão apresentadas formas alternativas de controle, como o Modelo Descasado e o Controle Robusto, para o mesmo sistema em (78) previamente discutido. Com isso, pretende-se ressaltar os benefícios do controlador linear quadrático tanto para sistemas estáveis quanto para sistemas instáveis. Além disso, serão utilizados conhecimentos de AG para a obtenção da matriz P para posterior cálculo da matriz ótima K e do custo do controle.

5 OUTRAS ESTRATÉGIAS DE CONTROLE

A finalidade desse capítulo é trazer ao problema atual outras estratégias de controle e, a partir disso, gerar discussões sobre os diferentes métodos e seus resultados. As simulações aqui realizadas trarão aplicações de controle robusto, controle descasado do modelo e aplicações de algoritmo genético. Com os dois primeiros, tem-se a intenção de apresentar argumentos favoráveis à utilização do controle ótimo previamente analisado no Capítulo 4. Já com a utilização de algoritmos genéticos, é visada uma forma incrementada de obtenção da matriz P . Isso, porém, não necessariamente trará um custo efetivamente melhor ao sistema de controle. Tais análises serão discutidos nas seções seguintes.

5.1 ALGORITMO GENÉTICO

Para um determinado problema, um AG precisa ter os seguintes componentes (MICHALEWICZ, 1994):

- Uma representação genética para a solução potencial do problema;
- A criação de uma população inicial da solução potencial;
- Uma função de avaliação que avalia a solução em termos de seu *fitness*;
- Operadores genéticos que alteram a composição dos cromossomos gerados após o cruzamento;
- Valores para os vários parâmetros que os Algoritmos Genéticos usam, tais como: tamanho da população, probabilidade de aplicação dos operadores genéticos etc.

A função *fitness* é tida como o conceito mais importante no desenvolvimento de sistemas com AG, sendo ela específica para cada tipo de aplicação. Além disso, tem como propósito representar o comportamento dos cromossomos, os quais representam os parâmetros do controlador.

Para a utilização do método de AG, foi utilizado o modelo dado em (78). Assim como no Capítulo 4, os parâmetros de A_n , σ e ω_T^2 foram mantidos em 4, 2, 22 e 1400 e os termos α e β com os valores fixados em 1,45 e 0,9, respectivamente.

Para obtenção das restrições do AG, foi necessário o cálculo simbólico de (60), a fim de obter as quatro equações referentes à P , como apontado em (62). No entanto, é possível notar a igualdade entre os valores da diagonal secundária de uma matriz P . A partir disso, tem-se três equações com três incógnitas, sendo a diagonal principal da matriz P , por definição, sempre positiva.

Com essas restrições foi criada a função *fitness*, em que tem como objetivo obter os valores da matriz P , conforme a matriz abaixo:

$$P = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) \\ x(2) & x(3) \end{bmatrix} \quad (98)$$

Para seguir com a aplicação de AG no *software* Matlab[®], foi necessário a utilização da *toolbox Optimization App*. Nela, é necessária primeiramente a seleção do *solver* “*ga - Genetic Algorithm*”. Em seguida, é feito o ajuste dos parâmetros da *toolbox* segundo a Tabela 3:

Tabela 3: Parâmetros de ajuste de AG

Tamanho da População "Population size"	200
Avaliação "Fitness scaling"	Top
Cruzamento "Crossover"	Heuristic
Mutação "Mutation"	Gaussian
Geração "Generation"	300

Fonte: Autoria própria

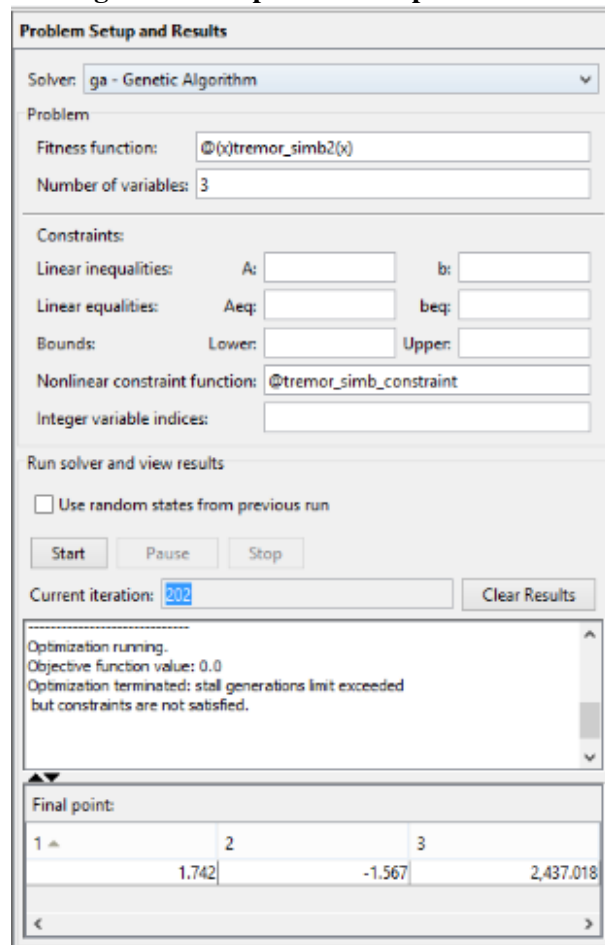
O parâmetro *Fitness scaling* foi setado para *Top*. Esse método escala para as próximas gerações os indivíduos principais, mais aptos, igualmente, podendo ser uma fração da população

ou um valor específico de indivíduos. *Crossover* foi setado para *Heuristic*, que significa que este operador usa os valores de adequação de dois cromossomos pais para determinar a direção da pesquisa. *Mutation* foi setado para *Gaussian*, isto é, substitui o gene por um número aleatório de uma distribuição gaussiana.

A partir dos dados setados, para cada teste feito, o número máximo de iterações retornadas, com um tempo de processamento de 23 minutos, foi 202. Foram feitos testes com o propósito de encontrar um possível comparativo com o controle ótimo. Durante todo o processo, foi notável o inconveniente tempo de processamento. Tal fato ocorre devido à aleatoriedade do processo. Apesar de sua consequência desfavorável, essa aleatoriedade aumenta a capacidade com que o algoritmo encontra a melhor resposta. Em razão disso, uma vez que os cruzamentos e as mutações são aleatórias, existe a chance de respostas melhores serem geradas em uma das iterações.

Com a aplicação de AG, um dos testes pode ser visualizado pela Figura 39:

Figura 39: Resposta de AG pela toolbox



Fonte: Aatoria Própria

Note que o algoritmo para por *Stall Generations*, isso significa que não há mais ganhos entre as gerações. Com esses valores da matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} 1,7420 & -1,5670 \\ -1,5670 & 2437,018 \end{bmatrix}$$

temos o seguinte valor de K_{AG} :

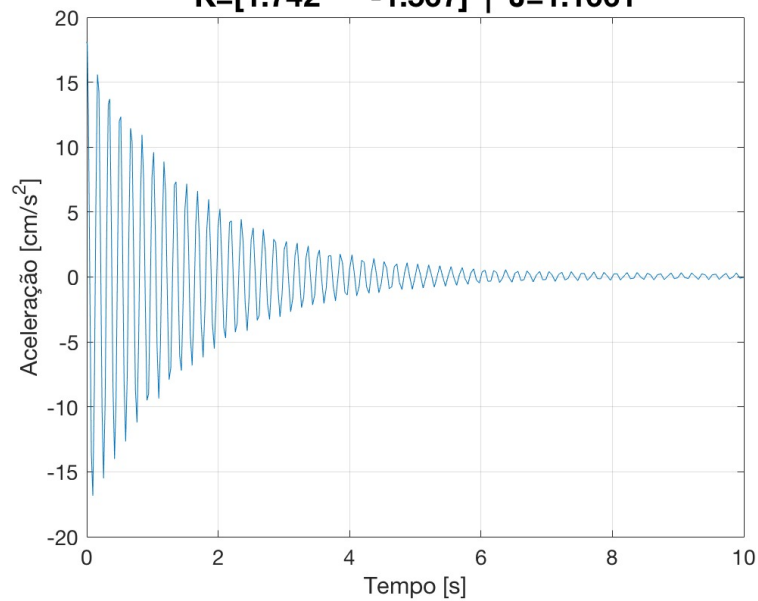
$$K_{AG} = \begin{bmatrix} 1,7420 & -1,5670 \end{bmatrix}$$

e um custo de $J = 1,1661$.

A Figura 40 representa este teste feito por AG:

Figura 40: Algoritmo Genético aplicado em Malha fechada

$$\mathbf{K} = [1.742 \quad -1.567] \mid \mathbf{J} = 1.1661$$



Fonte: Autoria Própria

Comparando este mesmo cenário com a aplicação do controle ótimo tem-se:

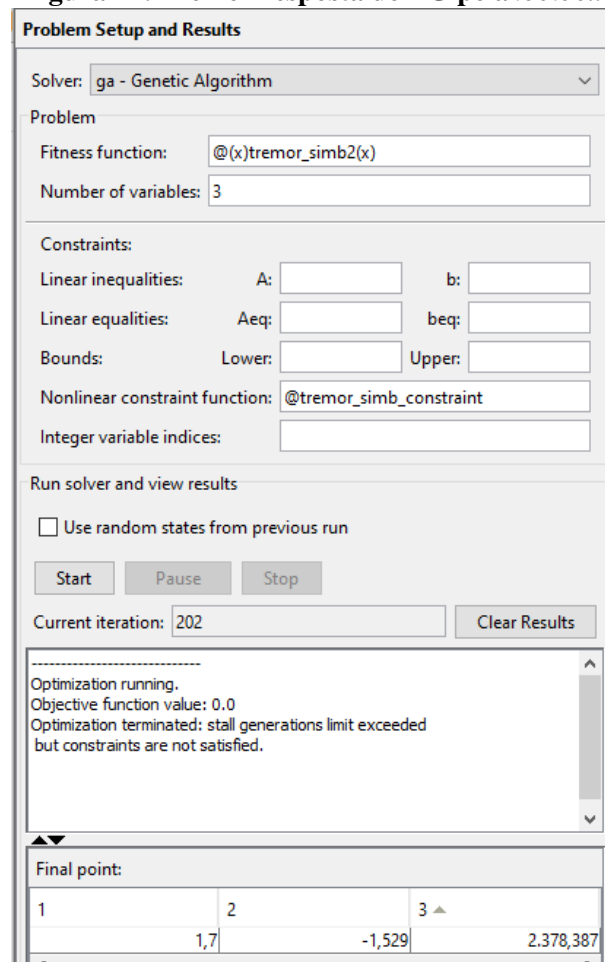
$$K = \begin{bmatrix} 1,6918 & -1,5220 \end{bmatrix}$$

e um custo de $J = 1,1326$.

Note que mesmo não tendo a melhor resposta, o AG demonstrou um valor de custo J muito próximo ao do controle ótimo.

Para a melhor resposta encontrada com a aplicação do AG, com os mesmos parâmetros citados na Tabela 3, temos a Figura 41:

Figura 41: Melhor resposta de AG pela *toolbox*



Fonte: Autoria Própria

E com esses valores da matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} 1,7 & -1,5290 \\ -1,5290 & 2438,387 \end{bmatrix}$$

temos o seguinte valor de K_{AG} :

$$K_{AG} = \begin{bmatrix} 1,7 & -1,5290 \end{bmatrix}$$

e um custo de $J = 1,138$.

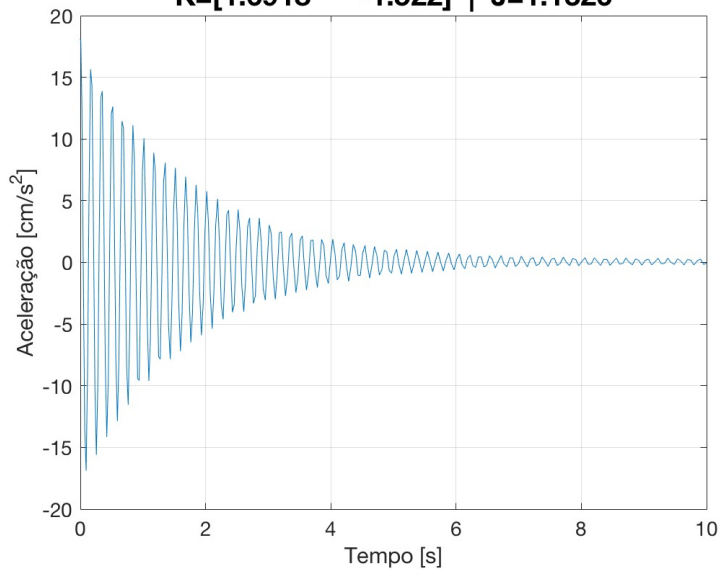
Note que o custo J leva em conta as variações do sinal de controle, e não somente as variações de amplitude do tremor, de modo que uma preocupação relativa ao uso do controlador

faz parte do projeto. Isso é importante tanto para a questão de limitação da tensão elétrica que alimenta os eletrodos quanto para a questão da melhoria de vida útil da bateria do gerador de estímulos.

Constata-se que os valores do custo para ambas aplicações são muito próximos. As Figuras 42 e 43 representam este cenário com o controle ótimo e a melhor resposta com o emprego de AG, respectivamente:

Figura 42: Controle ótimo aplicado em Malha fechada

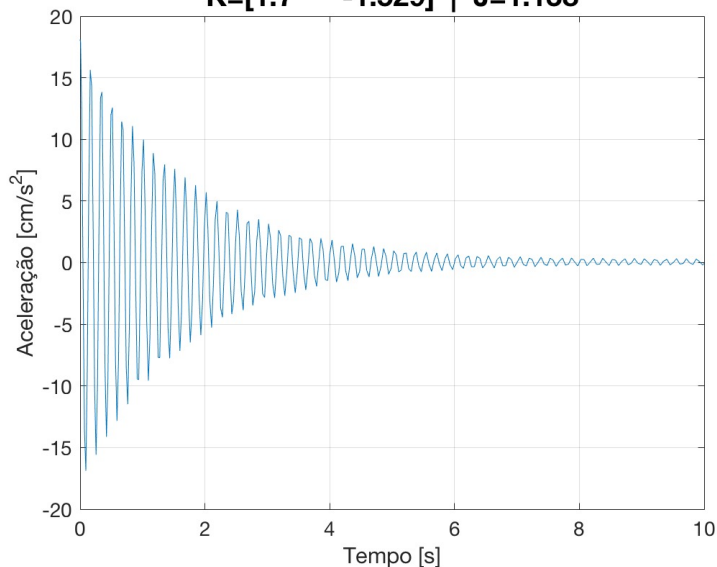
$$\mathbf{K}=[1.6918 \quad -1.522] \mid \mathbf{J}=1.1326$$



Fonte: Autoria Própria

Figura 43: Melhor resposta de Algoritmo Genético aplicado em Malha fechada

$$\mathbf{K}=[1.7 \quad -1.529] \mid \mathbf{J}=1.138$$



Fonte: Autoria Própria

Devido a aproximação entre ambas matrizes K acima calculadas, o tempo de estabilização também possui grande proximidade. Comprova-se, então, a eficácia do AG em sua resposta.

5.2 CONTROLE DESCASADO DO MODELO

A aplicação do controle descasado, ou seja, a imposição de um ganho não otimizado para a modelagem sob os parâmetros pré-determinados, acarreta em soluções com menor rendimento na otimalidade. Entretanto, em um sistema real, a aplicação de um controle subótimo é extremamente considerável, uma vez que os parâmetros de um sistema estão constantemente sujeitos a distúrbios externos (DORF; BISHOP, 2001).

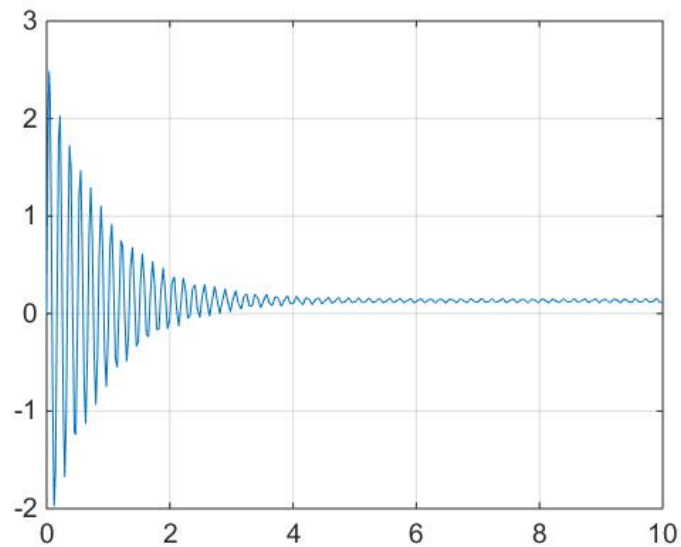
Consequentemente, a realimentação necessária para a obtenção do controle otimizado também se torna variante. O problema de descasamento é intensificado quando se aborda estudos biológicos, dado que as equações que descrevem esses casos têm natureza dinâmica e escala temporal não delineada (PIQUEIRA; NAHAS, 2011).

Neste trabalho, tem-se como foco o tremor parkinsoniano apresentado como um modelo contendo termo estabilizador e termo característico do tremor, através dos parâmetros de um controlador simplificado. A fim de evidenciar a consequência de controlar esse sistema complexo, aplicou-se o ganho K ótimo do controle da Seção 4.3.2 com os parâmetros α e β iguais a zero, no cenário apresentado na Seção 4.3.3, em que tem-se o termo estabilizador notadamente maior que o termo característico do tremor ($\alpha=0.9$ e $\beta=2$).

Para tal, utilizou-se a lei de realimentação da malha encontrada na busca do controlador ótimo do modelo. A aplicação da lei de controle referida é previamente apresentada na Figura 35. O valor do vetor K encontrado foi:

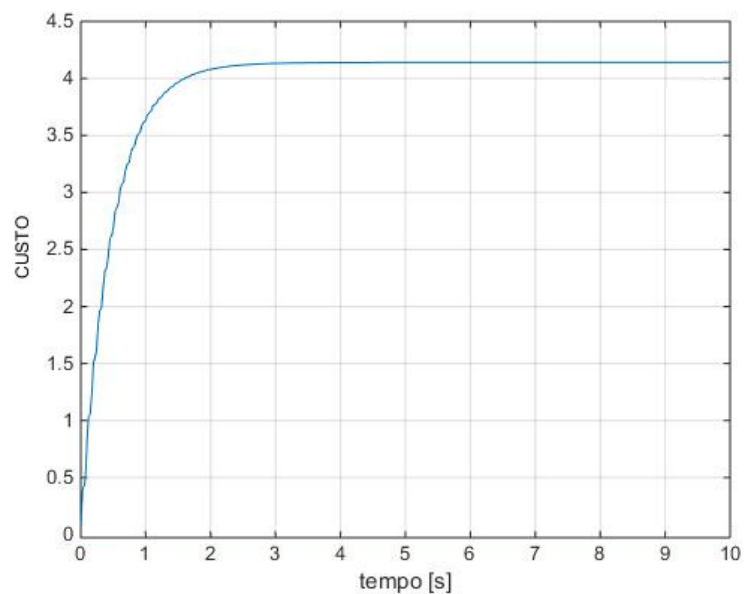
$$K = \begin{bmatrix} 1,0004 & 0,0004 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Com a realimentação já definida, simulou-se a resposta do sistema, a qual está exposta na Figura 44 abaixo:

Figura 44: Controle Subótimo com $\beta > \alpha$ 

Fonte: Autorial Própria

Apesar de apresentar um tempo de estabilidade menor do que com a aplicação do controle ótimo, este parâmetro não rege qual controle é mais eficaz, uma vez que se trata de um problema multiobjetivo. A análise de eficácia de teorias de controle deve ser baseada em seu custo de aplicação (J), uma vez que essa variável faz o balanço entre tempo de otimização e esforço. Essa análise é apresentada na Figura 45 abaixo:

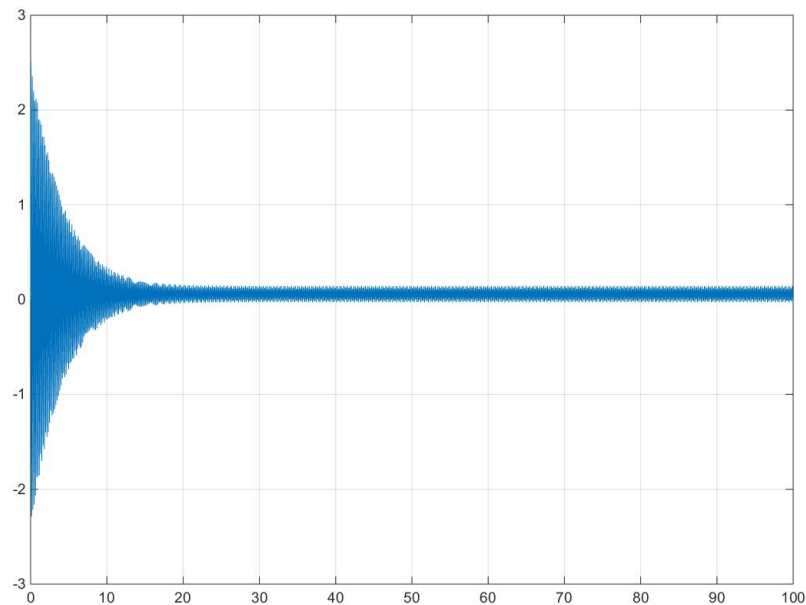
Figura 45: Custo do Controle Subotimo com $\beta > \alpha$ 

Fonte: Autorial Própria

Nota-se que o custo decorrente da aplicação concebida foi muito maior do que obtido pela aplicação do controle linear quadrático ($J_{otimo} = 0,25961$ e $J_{subotimo} = 4,1864$). Percebe-se que, em um cenário em que tem-se um termo estabilizador bem maior que o termo característico, a aplicação do controle sub otimizado não apresenta expectativa de uma resposta eficiente.

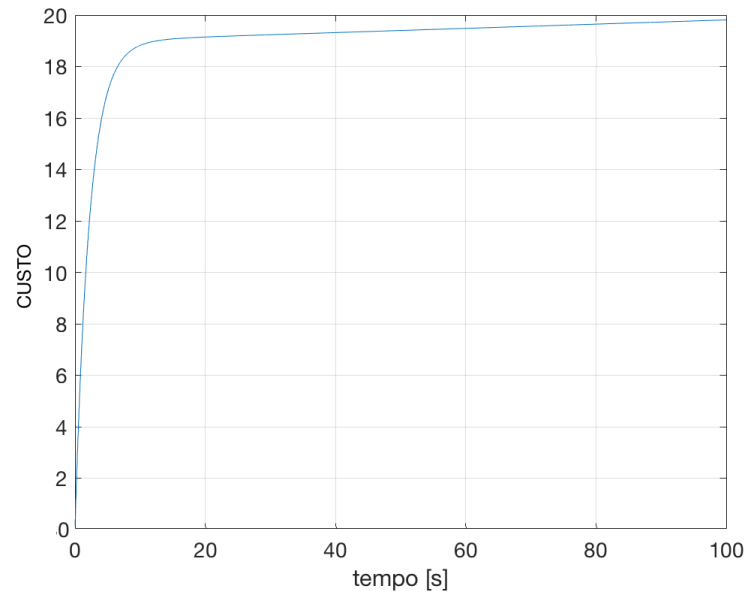
Um novo experimento considerando o mesmo cenário, mas alterando os parâmetros de β e α para, respectivamente, 0,9 e 1,45, foi realizado. Nele, observa-se a inviabilidade da aplicação da matriz de controlabilidade (K) do cenário com parâmetros nulos no sistema proposto, como é visto na Figura 46.

Figura 46: Controle Subotimo com $\beta < \alpha$



Fonte: Aatoria Própria

Desta forma, sendo impossível controlar o sistema, o custo do controle tenderá ao infinito, como pode ser constatado na Figura 47:

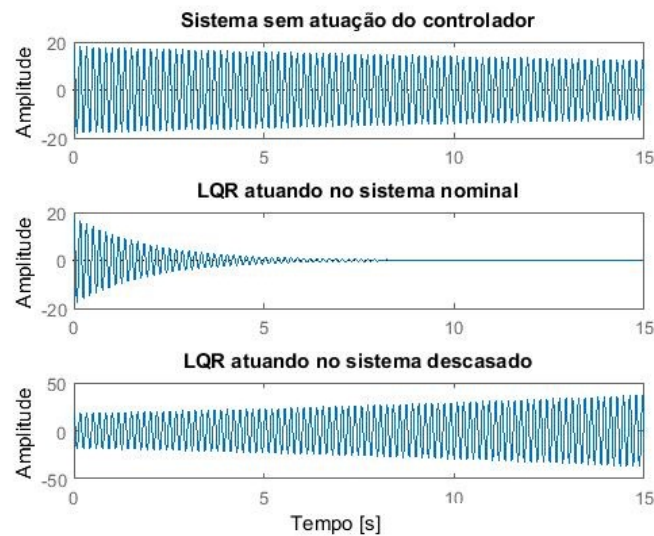
Figura 47: Custo do Controle Subótimo com $\beta < \alpha$ 

Fonte: Autoria Própria

Assim, conclui-se que a aplicação do controle subótimo é inválida em um cenário que apresenta um termo caracterizador do tremor mais significativo do que o termo estabilizador. Essa afirmação é confirmada à luz da próxima simulação.

Para averiguar essa preposição, alterou-se o valor de β para 0,95 e o valor de α para 0,9. Então, simulou-se o sistema controlado sob essas condições, assim como a atuação do controlador desse sistema em um que dispõem de um valor de α igual a 2, ou seja, um modelo descasado do controle. Dessa forma, o controle LQR nas situações propostas apresentou as respostas da Figura 48.

Figura 48: Aplicação do controle LQR nominal e descasado



Fonte: Autoria Própria

Sendo assim, evidencia-se que o controle LQR aplicado a um sistema descasado, pode tornar o sistema antes estável em um sistema instável. Desta forma, salienta-se a importância de conhecer bem o sistema em que o controle ótimo será aplicado. Logo, confirma-se a principal limitação da aplicação do controle ótimo, neste caso, a ineficiência em sistemas com incertezas.

5.3 APLICAÇÃO DO CONTROLE H_∞

Para este estudo será considerado um cenário onde β é igual a 0,95 e o α do modelo é igual a 0,9. Para a aplicação do controle H_∞ , adiciona-se incerteza ao termo estabilizador, sendo assim admite-se que esse parâmetro varie entre 0,1 (α_{minimo}) e 1.8 (α_{maximo}).

Para o estudo inicial da aplicação do controle H_∞ utiliza-se a função *hinfsyn* da *toolbox* de controle robusto disponível no MatLab[®]. A utilização dessa ferramenta exige a definição de alguns parâmetros, como, por exemplo, o desvio γ da função, sendo, no caso proposto, igual à 0,9, além das matrizes que compõem o estudo. Desta forma, para a construção da matriz-bloco dada em (77), são consideradas as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1400 \\ 1 & -0,95 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} e D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

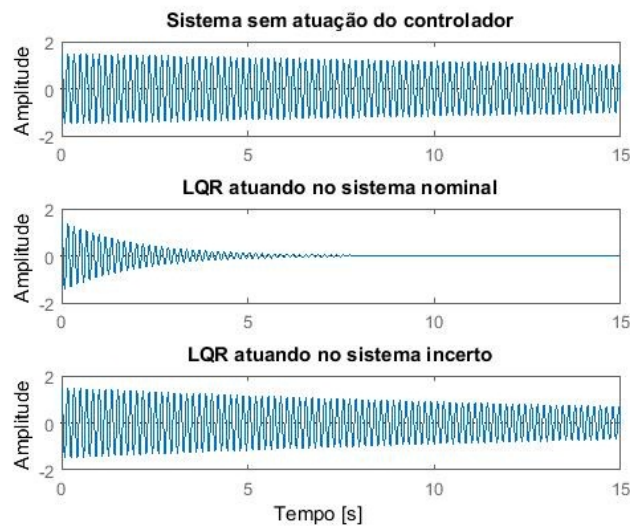
O que resulta na seguinte matriz-bloco:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \alpha & -1400 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -0,95 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Como exposto nessa Seção, diversas vezes o modelo real diverge do modelo analítico, sendo assim o controle LQR pode se tornar ineficiente. Para evidenciar essa condição, foi considerado o sistema com a incerteza máxima no termo característico do tremor, ou seja $\alpha = 1,8$.

Sendo assim, o controle LQR projetado para um $\alpha = 0,9$ atuou conforme indicado na Figura 49:

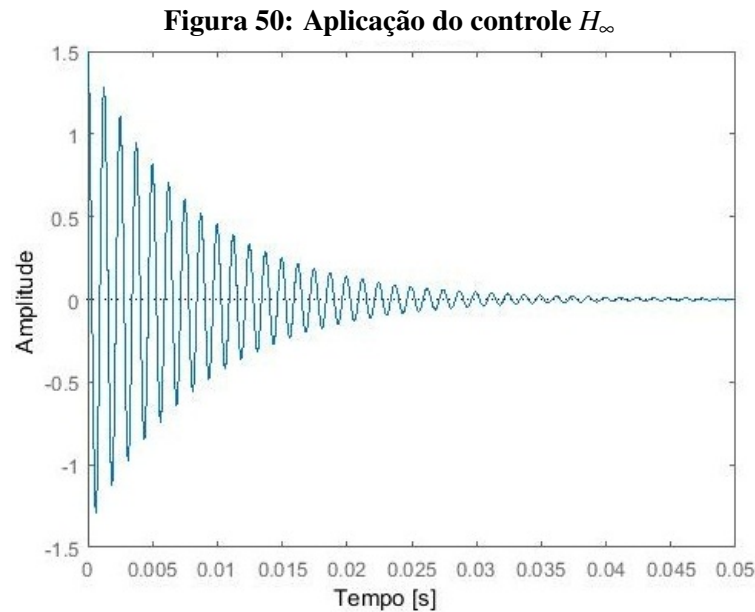
Figura 49: Resposta do sistema sob aplicação do controle ótimo e subótimo



Fonte: Autoria Própria

Logo, demonstra-se que o controle ótimo aplicado a um modelo incerto, não age de forma eficaz no manejo do sistema. No caso proposto, nota-se que o controle LQR descalado do sistema nominal não possui diferença significativa em relação a resposta natural do sistema. Sendo assim, caso um sistema não seja bem conhecido e definido, o controle linear quadrático é insatisfatório.

Para atender a demanda de controle de modelos incertos a aplicação do controle robusto apresenta maior competência. O controlador atuará nos diversos valores que o parâmetro detentor da incerteza apresentará. Então, aplicando o controle H_∞ no sistema proposto, temos o modelo sob controle, conforme a Figura 50.



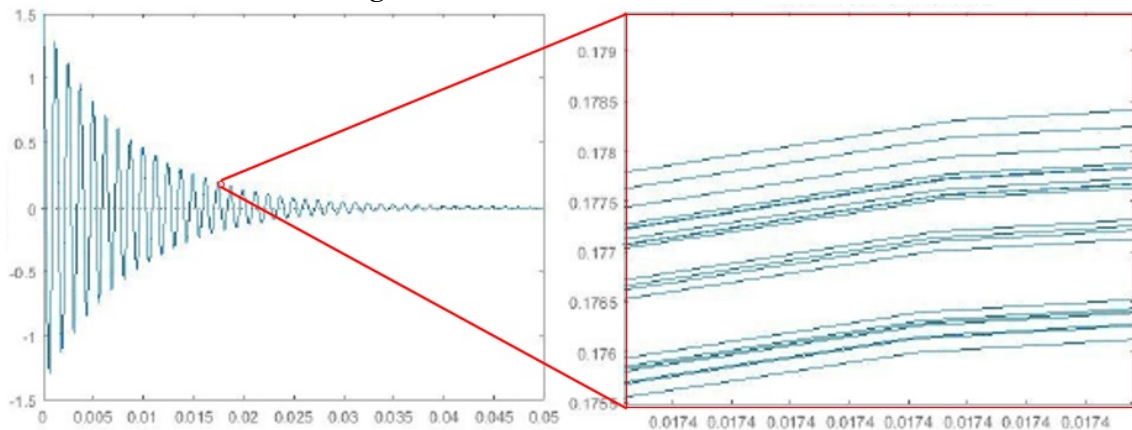
Fonte: Autoria Própria

Sendo o custo energético despendido do controlador, para a estabilidade do sistema, igual a:

$$J = 494,0964.$$

Destacando uma parte da curva do sinal, como é visualizado na Figura 51, é possível verificar que o sinal exposto na Figura 50 compreende várias curvas extremamente próximas umas das outras. Cada curva é consequência da variação do valor do termo estabilizador entre os seus limites de incerteza.

Figura 51: Curvas do modelo incerto

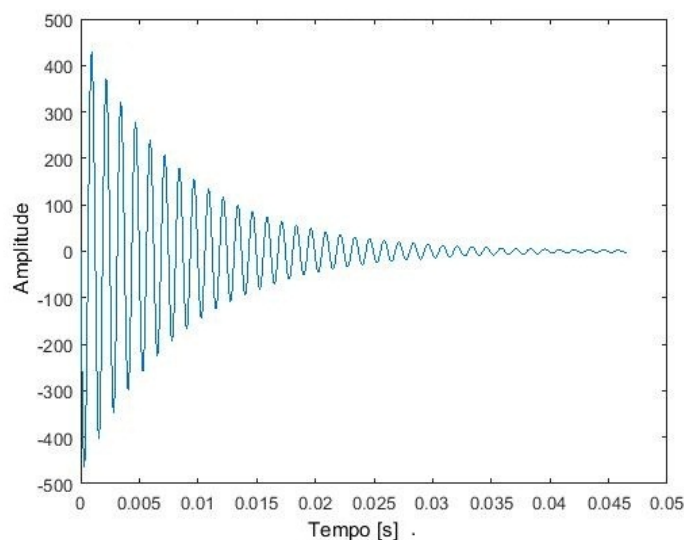


Fonte: Autoria Própria

Portanto, fica evidência que o controle H_∞ , feito através da *toolbox*, atua de forma eficiente dentro do limite proposto para a incerteza do parâmetro. A eficiência do controle é notória, uma vez que ao se observar a figura 50, distingue-se que o controle H_∞ estabiliza rapidamente o tremor parkinsoniano. Entretanto, ao analisar o custo J do controle, nota-se um valor energético bastante elevado na atuação do controlador.

Em vista disso, na aplicação do tratamento DBS, o controle H_∞ é impraticável sem que haja uma limitação da amplitude do sinal de controle no projeto do controlador. A função *hinfsyn*, tal como foi utilizada, não proporcionou essa limitação. Essa afirmação é atestada ao analisar o sinal de controle exposto na Figura 52.

Figura 52: Sinal do controle H_∞



Fonte: Autoria Própria

Como visto, o sinal de controle apresenta picos bruscos, o que medicinalmente torna a aplicação inviável. Sendo assim, conclui-se que a aplicação do Controle Robusto, da forma proposta e manejada, não é praticável através do controle obtido pela *toolbox*. Portanto, é necessário aderir a tratativas de controle que limitem o sinal do controlador, assim como uma melhor investigação do funcionamento da *toolbox* utilizada.

6 CONCLUSÕES

A ânsia por proporcionar melhores condições de vida aos doentes foi a motivação deste trabalho. A partir disso, foram realizados estudos tanto na área médica quanto na de engenharia, a fim de unir ambas competências e utilizá-las em experimentos inovadores. A criação do modelo do tremor se deu baseado em um paciente com a doença de Parkinson submetido à terapia de DBS. Com a finalidade de simplificar a compreensão do modelo, foram feitos tratamentos referentes aos aspectos biológicos. Foi proposto um modelo de oscilador linear como forma de representação do tremor parkinsoniano sob a ótica das teorias de controles aqui aplicadas e seu comportamento foi exposto através de simulações computacionais para diferentes parâmetros.

A partir do modelo criado, foi proposto um controlador linear realimentado pelos estados do oscilador a fim de determinar a amplitude do sinal de estímulo cerebral e controlar a aceleração do tremor. Uma vez que o tratamento de DBS é realizado normalmente em malha aberta, foram realizadas simulações com o modelo projetado nesse cenário. Em seguida, seu desempenho foi comparado em malha fechada com um controle linear quadrático. Com as análises realizadas, percebe-se a superioridade da utilização de métodos de controle ótimo quando comparados ao sistema com sua resposta natural.

A fim de validar a otimização do controle proposta pela teoria de controle linear quadrático, utilizou-se também de estudos na área de IA. A aplicação de AG trouxe resultados muito satisfatórios, mesmo com o inconveniente tempo de processamento. Porém, este tempo de processamento é relativo, pois depende do processamento de cada máquina onde o algoritmo esta sendo rodado.

Vantagens do controle ótimo em malha fechada ficam evidentes durante as simulações em que o sistema é bem conhecido. Porém, quando considera-se possíveis restrições biológicas e variações desconhecidas nos parâmetros, identifica-se a limitação da sua implementação. Levando isso em consideração, propõem-se um estudo do controle robusto, uma vez que esse tipo de controlador consegue atuar de forma eficiente em sistemas incertos.

Entretanto, os estudos desenvolvidos identificaram a invalidade do seu uso sem a limitação do sinal do controle. Portanto, para atuação de um controle eficaz serão necessários estudos mais aprofundados considerando variáveis biológicas, as incerteza do modelo e os artifícios computacionais com o objetivo de permitir de fato a construção de um dispositivo médico a ser utilizado por pacientes com a doença de Parkinson.

REFERÊNCIAS

- AMÂNCIO, A. R.; CAMPANHA, J. R. **Oscilador eletromagnético caótico**. 2008. 158 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2008.
- AQIL, M.; HONG, K.; JEONG, M.; GE, S. Detection of event-related hemodynamic response to neuroactivation by dynamic modeling of brain activity. **Neuroimage**, 2012.
- AUSTIN, G.; HAYWARD, W.; TSAI, C.; KUYKENDALL, A. Parkinsonian tremor: some aspects of an experimental model and its solution. **Confinia Neurologia**, v. 26, n. 35, p. 389–403, 1965.
- AUSTIN, G.; TSAI, C. A physiological basis and development of a model for parkinsonian tremor. **Confinia Neurologia**, v. 22, n. 35, p. 248–258, 1962.
- BELLMAN, R. Dynamic programming. **Princeton University Press**, 2010.
- BENABID, A. L.; DELONG, M. R. **Deep brain stimulation for Parkinson’s disease**. Lasker Foundation, 2014. Disponível em: <: <http://www.laskerfoundation.org/awards/show/deep-brain-stimulation-for-parkinsons-disease/>>.
- BORGES, R.; IAROSZ, K.; BATISTA, A.; CALDAS, I.; BORGES, F.; LAMEU, E. Sincronização de disparos em redes neuronais com plasticidade sináptica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 2, p. 111–222, 2015.
- BORGES, V.; FERRAZ, H. B. Tremors. **NEUROCIENC**, p. 43–47, 2006.
- BOSCAIN, U.; PICCOLI, B. An introduction to optimal control. **Research Gate**, 2005.
- BRIAN, A.; MOORE, J. B. **Linear optimal control**. Prentice Hall, 1971.
- CHATTOPADHYAY, D.; RAKSHIT, P. C. **Electronics: Fundamentals and applications**. 7 ed.. ed. New Age Internacional Ltda, 2006. 224-228 p.
- CRUZEIRO, A. **Doença de Parkinson**. 2016. Disponível em: <: <http://clinicadralealexandrecruzeiro.webnode.com.br/doenca-de-parkinson/>>.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **SISTEMA DE CONTROLE MODERNO**. 2001.
- FRANK, M. J.; O’REILLY, R. C. A mechanistic account of striatal dopamine function in human cognition: Psychopharmacological studies with cabergoline and haloperidol. **Behavioral Neuroscience**, v. 120, n. 3, 2016.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. **Sistemas de Controle para Engenharia**. 6 ed.. ed. Bookman, 2013.
- GARCIA, C. **Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos**. 1 ed.. ed. Editora da Universidade de São Paulo, 1997.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. **Controle Ótimo de Sistemas Dinâmicos**. Editora Edgard Blucher Ltda, 2011.

GOLDSCHMIDT, R.; PASSOS, E. **DATA MINING: UM GUIA PRÁTICO**. 2005.

GRANDINETTI, F. J. Ajuste dos parâmetros de um controlador proporcional, integral e derivativo através de algoritmos genéticos. 2003.

HALLIDAY, D. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 8 ed.. ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2009.

KALMAN, R. E. Contributions to the theory of optimal control. **Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana**, v. 5, p. 102–119, 1961.

KORSCHUNM, H. **Mahlon DeLong receives Lasker award for pioneering research in Parkinson's disease**. Emory, 2014. Disponível em: <http://news.emory.edu/stories/2014/09/delong_lasker/campus.html>.

KWAKERNAAK, H.; SIVAN, R. **Linear optimal control systems**. Wiley Interscience, 1972. 7-8 p.

LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. **Internacional Journal of Control**, v. 55, n. 3, p. 531–773, 1992.

MACHADO, A. **Neuroanatomia funcional**. 3 ed.. ed. Atheneu, 2013. 1-6 p.

MALVINO, A. P. **Eletrônica: volume 2**. 4 ed.. ed. Pearson Edication do Brasil Ltda, 1997. 559 p.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 1994.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. Editora Livraria da Física, 2006.

MORARI, M.; ZAFIRIOU, E. **ROBUST PROCESS CONTROL**. 1989.

NEWTON, C. B. **Osciladores - O que é preciso saber ? (ART 499)**. Instituto Newton C Braga, 2004. Disponível em: <<http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/eletronica/52-artigos-diversos/3664-art499>>.

NINDS. **Motor neuron diseases fact sheet**. National Institute of Neurological Disorders and Stroke, 2012. Disponível em: <<https://www.ninds.nih.gov/disorders/patient-caregiver-education/fact-sheets/motor-neuron-diseases-fact-sheet>>.

NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6 ed.. ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 2011.

OGATA, K. **Modern control engineering (5th Edition)**. Pearson, 2011.

OSTREM, J. L.; STARR, P. A. Treatment of dystonia with deep brain stimulation. **Neurotherapeutics**, 2008.

PAIVA, L. Aplicação de algoritmo genético para sintonia de controladores. 2010.

PARKINSON, J. An essay on the shaking palsy. **The Journal of Neuropsychiatry and Clinical Neurosciences**, v. 14, n. 2, p. 223, 1817.

- PIQUEIRA, J. R. C.; NAHAS, T. R. O sonho de bernouilli. **Estud. av. [online] vol. 25**, p. 289–301, 2011.
- PLUS, M. **Degenerative nerve diseases**. 2014. Disponível em: <<https://medlineplus.gov/degenerativenervediseases.html>>.
- PRZEDBORSKI, S.; VILA, M.; JACKSON-LEWIS, V. Series introduction: Neurodegeneraation: What is it and where are we? **The Journal of Clinical Investigation**, v. 111, n. 1, p. 1–8, 2003.
- PULINO, P. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2012. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/pulino/ALESA/Texto/cap02.pdf>>.
- REHAN, M.; HONG, K. S. Modeling and automatic feedback control of tremor: Adaptive estimation of deep brain stimulation. **Plos One**, v. 8, n. 4, 2013.
- RESEARCH, E. J. P. N. D. **What is neurodegenerative disease?** 2017. Disponível em: <<http://www.neurodegenerationresearch.eu/about/what/>>.
- RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. **Artificial Intelligence: A Modern Approach**. 2003.
- SACCHI, F. Sintonia de um sistema pid via algoritmos genéticos aplicado ao controle de um manipulador robótico em forma de paralelogramo. 2010.
- SCHULER, C. **Eletrônica II**. 7 ed.. ed. AMGH Editora, 2013. 346 p.
- SILVA, A. S. E. **Fundamentos de controle clássico**. 2016. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.
- SIULY, S.; ZHANG, Y. Medical big data: Neurological diseases diagnosis through medical data analysis. **Data Science**, v. 1, n. 2, p. 1–3, 2016.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7 ed.. ed. Cengage Learning Edições Ltda., 2013.
- TAKEI, H.; BHATTACHARJEE, M. B.; ADESINA, A. M. Pathology of motor neuron disorders. **Mescape**, p. 1–2, 2014.
- TEIVE, H. A. G. Como diagnosticar e tratar tremores. **Grupo Editorial Moreira Jr.**, v. 68, n. 10, p. 1–6, 2011.
- TITCOMBE, M. S.; EDWARDS, R.; BEUTER, A. Mathematical modelling of parkinsonian tremor. **Nonlinear Studies**, v. 11, n. 3, p. 363–384, 2004.
- TOMORROW, D. W. T. **Neurological disorders**: Types, research treatment. 2015. Disponível em: <<https://www.disabled-world.com/health/neurology/subcat>>.
- WOJTECKI, L.; ELBEN, S.; TIMMERMANN, L.; RECK, C.; MAAROUF, M.; JÖRGENS, S.; PLONER, M.; SÜDMEYER, M.; GROISS, S. J.; STURM, V.; NIEDEGGEN, M.; SCHNITZLER, A. Modulation of human time processing by subthalamic deep brain stimulation. **Plos One**, 2011.
- ZAMES, G. Analyzing control system robustness. **IEEE Potentials**, p. 16–19, 2002.
- ZHOU, K.; DAYLE, J. C.; GLOVER, K. **ROBUST AND OPTIMAL CONTROL**. 1996.