UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ORLANDO EDUARDO DA SILVA FERRI

PROGRESSÕES E FUNÇÕES: DA VARIAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DO TIPO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA ÀS TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVAS NO USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

ORLANDO EDUARDO DA SILVA FERRI

PROGRESSÕES E FUNÇÕES: DA VARIAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DO TIPO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA ÀS TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVAS NO USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Matemática".

Orientador: Vitor José Petry, Dr.

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

F388p 2014

Ferri, Orlando Eduardo da Silva
Progressões e funções : da variação e caracterização das funções do tipo exponencial e logarítmica às técnicas de ajuste de curvas no uso de modelagem matemática / Orlando Eduardo da Silva Ferri.-- 2014.
67 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2014
Bibliografia: f. 66-67

1. Funções exponenciais. 2. Logaritmos. 3. Matemática - Estudo e ensino. 4. Séries geométricas. 5. Séries aritméticas. 6. Mínimos quadrados. 7. Modelos matemáticos. 8. Software - Matemática. 9. Matemática - Dissertações. I. Petry, Vitor José. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Título da Dissertação No. 016

"Progressões e funções: da variação e caracterização das funções do tipo exponencial e logarítmica às técnicas de ajuste de curvas no uso de modelagem matemática"

por

Orlando Eduardo da Silva Ferri

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 14h do dia 25 de abril de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Vitor José Petry, Dr.
(Presidente - UFFS/Chapecó-SC)

Prof. Ailton Durigon, Dr.
(IFSC)

Profa. Olga Harumi Saito, Dra.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

Ao meu filho Carlos Eduardo, um anjo que Deus colocou em minha vida durante esta caminhada e que amo com todas as minhas forças, na esperança de perpetuar em sua vida a minha convicção de que o conhecimento é um dos pilares responsáveis pelo crescimento do ser humano.

AGRADECIMENTOS

- A Deus pelo fortalecimento da minha fé e que sempre iluminou o meu caminho até aqui.
- À minha mãe por tudo o que eu sou e por estar viva para presenciar este momento tão importante em minha vida.
- À Cris, minha amada, por toda a paciência e apoio que me deu, principalmente nos momentos mais difíceis e de ausência. Sou muito feliz por ter você e o Cadu ao meu lado.
- Às minhas irmãs Cibele e Adriana que me apoiaram e me deram forças nos momentos difíceis cuidando de nossa querida mãe.
- A todos os meus amigos que me apoiaram direta ou indiretamente. Especialmente Alex, Lívia, Bruno e Maria por toda ajuda e apoio que precisei junto à minha família.
- Aos meus amigos Flávio, Talita e Leandro pelos momentos compartilhados de estudos e companhia durante todas as manhãs de sexta-feira na biblioteca.
- Aos meus alunos da ETEC de Registro que contribuíram muitíssimas vezes, algumas sem saberem, com meus estudos e minha prática docente.
- Ao professor e amigo Haruo, pelo incentivo e contribuição técnica com este trabalho e, às professoras Eunice e Paloma pela força e incentivo que me deram.
- Aos meus mestres da graduação, Keiji, Manoel Pedro, Simone e Márcio que sempre me deram apoio e me incentivaram a estudar cada vez mais.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Vitor José Petry, pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão dessa dissertação.
- Aos professores do PROFMAT/UTFPR pelos ensinamentos.
- Aos colegas da Turma de 2012, pelos momentos em prol do ensino de matemática.
- À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.
- À Sociedade Brasileira de Matemática que na busca da melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica viabilizou a implementação do PROFMAT.

RESUMO

FERRI, Orlando Eduardo da Silva. PROGRESSÕES E FUNÇÕES: DA VARIAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DO TIPO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA ÀS TÉCNICAS DE AJUSTE DE CURVAS NO USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA. 67 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Neste trabalho apresenta-se uma proposta para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas, precedido pelo conceito de Progressões que permite ao professor do ensino médio tratar do conceito de função exponenciais e logarítmica de maneira mais clara e construtivista para o aluno. Propõe-se a construção do conhecimento através de atividades de modelagem matemática desenvolvidas a partir do uso de tabelas construídas em planilhas eletrônicas e em um ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra), explorando as ideias intuitivas de variação e caracterização dessas funções reais a partir das progressões no domínio discreto. Apresenta-se sugestões de atividades interdisciplinares envolvendo estimativas através do ajuste de curvas.

Palavras-chave: Progressões, Função exponencial e logarítmica, Variação, Caracterização, Modelagem Matemática e Ajuste de Curvas.

ABSTRACT

FERRI, Orlando Eduardo da Silva. PROGRESSIONS AND FUNCTIONS: FROM VARIATION AND CHARACTERIZATION OF FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE AND LOGARITHMIC TO TECHNIQUES CURVES FITTING IN MATHEMATICAL MODELING. 67 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This work presents a proposal for teaching exponential and logarithmic functions, preceded by the concept of progressions which allows high school teacher dealing with the concept of exponential and logarithmic function more clear and constructive way for the student. Proposes the construction of knowledge through mathematical modeling developed from the use of built in spreadsheets and dynamic geometry (GeoGebra) environment tables activities, exploring the intuitive ideas of variation and characterization of these real functions from progressions in discrete domain. Presents suggestions for interdisciplinary activities involving estimates by adjusting curves.

Keywords: Progressions, Exponential and Logarithmic Functions, Variation, Characterization, Mathematical Modeling and Curve Fitting.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em seu prefácio, (LIMA et al., 2012) afirma que o professor de matemática, principalmente aquele que atua no ensino médio, no escasso tempo que lhe resta para preparar suas aulas, conta praticamente com uma única fonte: o livro-texto que adota. A proposta de abordar funções exponenciais e logarítmicas precedidas de conceitos e ideias fundamentais referentes ao estudo de progressões aritmética (PA) e geométrica (PG), inverte a sequência didática sugerida na maioria dos livros didáticos do ensino médio. Esta mudança é proposta nos Cadernos do Professor e do Aluno (SÃO PAULO, 2009), adotados na rede pública estadual de São Paulo.

Muitos professores reproduzem com seus alunos o mesmo modelo de aula que tiveram quando eles eram estudantes - fragmentada e desconectada - gerando, infelizmente, um ciclo vicioso que resiste até os dias atuais. De acordo com (AVILA, 1995), “O ensino deve sempre enfatizar as ideias da Matemática e seu papel no desenvolvimento da disciplina”. Neste sentido, houve a preocupação em destacar ideias fundamentais e mostrar as relações existentes entre as progressões e as funções exponenciais e logarítmicas para que no futuro, esses conteúdos possam se interligar fazendo sentido ideias como a variação e a caracterização dessas funções.

Este trabalho aposta em uma forma de tratamento de temas usuais como funções, crescimento e decrescimento exponencial, logaritmos e matemática financeira a partir de ideias fundamentais como progressões, no domínio discreto, como subsídio para o teorema de caracterização das funções do tipo exponencial e logarítmica.

Segundo (MACHADO, 2013, p. 43), “O aluno passa a ver as relações entre tópicos, pois todo mundo transita melhor de um conteúdo para o outro quando lida com o que é fundamental”. É necessário que o professor *“sublinhe”* ideias fundamentais, como por exemplo, estudar funções exponenciais identificando a PG como uma função exponencial em um domínio discreto. Dessa forma, o aluno só tem a ganhar em compreensão e domínio sobre o objeto de estudo apresentado.

Com ideias assim bem *“sublinhadas”* desde cedo, abrem-se portas para a exploração, por parte do professor, de assuntos como o estudo das taxas de variação de uma função exponencial, o que um dia pode servir de base para as primeiras noções sobre cálculo, e do ajuste de curvas, que nada mais é do que a generalização da ideia de linearidade no seu domínio, desenvolvida a partir dos teoremas de caracterização da função do tipo exponencial e logarítmica, na relação entre duas variáveis reais.

Ainda em seu prefácio, (LIMA et al., 2012), afirma que para saber qual o tipo de função que deve ser empregada para resolver um determinado problema, é necessário que o professor conheça os teoremas de caracterização para cada tipo de função. No intuito de aliar teoria e prática motivando o aluno na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la, serão apresentadas atividades através de modelagem matemática obtendo modelos que representem uma aproximação razoável, uma estimativa, com o ajuste de curvas que possibilita ver a partir das ideias dos teoremas de caracterização de funções, uma transição do discreto para o contínuo.

Para (BARBOSA, 2001, p. 6), modelagem matemática "[...] é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade". E (SKOVSMOSE, 2001, p. 69) afirma que este ambiente de aprendizagem é propício para um "cenário de investigação". As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 84) cita a modelagem matemática "[...] como um caminho para se trabalhar matemática na escola" e prossegue afirmando que a modelagem matemática "pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".

O 'professor ideal', segundo (TARDIF, 2012, p. 39), caracteriza-se como "alguém que deve conhecer sua matéria, sua disciplina e seu programa, além de possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à pedagogia e desenvolver um saber prático baseado em sua experiência cotidiana com os alunos.". Para tanto, apresentar-se-á ao longo do trabalho uma série de situações-problemas que foram desenvolvidas junto aos alunos da 1ª/2ª séries do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual de Registro no final de 2013 e início de 2014, de modo que o professor leitor possa optar pela utilização total ou parcial dos exemplos. Esta mudança na sequência didática de conteúdos se fez necessária porque havia uma preocupação em obter melhores resultados se comparado às turmas anteriores.

O desenvolvimento deste trabalho tem como objetivo geral estabelecer uma proposta de abordagem e relações entre progressões e funções exponenciais e logarítmicas que permitam apresentar o teorema de caracterização das mesmas. E uma vez caracterizada a relação entre elas em domínio discreto, estender ao conceito de ajuste linear de curvas no modelo exponencial e logarítmica na tentativa de buscar uma função que modele a relação entre duas variáveis reais.

Para atingir este objetivo geral, foram estabelecidos alguns objetivos específicos, como:

- propor uma mudança na sequência didática entre funções e progressões;
- identificar a ideia de variação da função exponencial;
- identificar nas relações entre PA e PG as funções exponenciais e logarítmicas;
- compreender o teorema de caracterização das funções exponenciais e logarítmicas;
- propor atividades que levem o aluno a observar que a função logarítmica é a inversa da função exponencial;
- abordar através da modelagem matemática os conceitos e técnicas de ajuste linear de curvas em funções linearizáveis buscando uma função que descreva a relação entre duas variáveis reais.

No Capítulo 2, propõe-se a construção do conhecimento dessas funções através das progressões e atividades de modelagem matemática a partir de softwares como o GeoGebra e da utilização de planilhas eletrônicas como subsídio para facilitar a aprendizagem do educando, explorando ideias intuitivas a partir de modelos discretos apresentados.

Nesse sentido, considerando a tranformação em que se obtém a caracterização que leva uma PA em uma PG, sob condições adequadas de seu domínio e imagem, tem-se como transformação inversa, aquela que leva uma PG em uma PA. Desenvolvendo-se ideias de variação e caracterização de funções exponenciais e logarítmicas, verificando que essas caracterizações podem ser usadas para aplicar fatos conhecidos: uma é a inversa da outra.

Na Seção 2.6 do Capítulo 2 é relatada a aplicação proposta ao longo do capítulo, invertendo a sequência didática em uma determinada turma do ensino médio entre o final de 2013 e o início de 2014 proporcionando uma experiência docente muito significativa ao desenvolver a compreensão de conceitos matemáticos importantes como variação e caracterização de funções através de atividades diferenciadas, possíveis com a inversão da sequência didática.

No Capítulo 3 apresenta-se técnicas do ajuste linear de curvas usando o método dos mínimos quadrados na elaboração de modelos, em especial no modelo exponencial e no modelo logarítmico, e sua importância na modelagem matemática a fim de estabelecer estimativas que relacionem duas variáveis. Nos modelos apresentados é possível perceber a aplicação e a utilidade dos teoremas de caracterização das funções chamadas linearizáveis por (COSTA NETO, 2002). Certas funções, mediante transformações convenientes, linearizam-se, tornando simples a solução dos problemas envolvendo ajuste de curvas.

No Capítulo 4 são sugeridas duas atividades de modelagem envolvendo dados e informações em tabelas a partir do uso de planilhas eletrônicas que relacionem variáveis como o mês e o capital de uma poupança, ou ainda, um experimento físico-químico que relacione as leis dos gases perfeitos com o volume de um gás e o tempo em uma reação química.

O Capítulo 5 apresenta as considerações finais em relação aos resultados obtidos com este trabalho.

Por último, no Anexo A são apresentados os links para acesso e/ou download aos exemplos do Capítulo 2 elaborados no software GeoGebra.

2 SEQUÊNCIAS E FUNÇÕES

Uma sequência ordenada de números pode ser identificada por intermédio de uma sentença matemática que relaciona um número natural n a um número real a_n. Essa ideia é fundamental para o estudo das relações de dependência entre um par de grandezas, ou, em outros termos, para o estudo de funções (SÃO PAULO, 2009).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), é preciso garantir uma abordagem à ideia de sequências, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. As progressões aritméticas e geométricas, casos particulares de sequências, são ideias fundamentais que servem, por exemplo, de base para as primeiras noções sobre função afim e exponencial, e até mesmo sobre o cálculo de limites. Ideias essas que foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência e tecnologia, principalmente por permitir ao educando explorar regularidades, dando-lhe autonomia no seu desenvolvimento intelectual e compreensão do mundo à sua volta. O aluno passando a ver as regularidades de sequências e a sua relação com outros tópicos intrínsecos à matemática, passa a transitar melhor de um conteúdo para o outro quando compreende as ideias fundamentais de cada conteúdo.

Neste capítulo, supondo que o educando já tenha em mente as ideias principais relativas a sequências, serão apresentados exemplos de modelos e enunciados relativos à definição das progressões conhecidas do ensino médio, segundo (MORGADO et al., 2001), e suas relações com as variações e caracterizações das funções exponenciais e logarítmicas.

2.1 PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ nas quais cada termo é obtido do anterior por um acréscimo ou decréscimo constante, ou ainda por uma variação nula. Essa constante é chamada de razão e será representada por r. Dessa forma, uma PA de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} - a_n = r$, para todo n natural.

Teorema 2.1. *(Termo Geral de uma PA): Se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r, então $a_n = a_1 + (n-1)r$, para todo n inteiro e positivo.*

Demonstração:

Pela definição de PA, tem-se:

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ a_4 - a_3 &= r \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= r. \end{aligned}$$

Somando-se as $n-1$ igualdades, obtém-se

$$(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = (n-1) \cdot r,$$

o que equivale a

$$a_n - a_1 = (n-1) \cdot r,$$

isto é,

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

□

Note que se começasse a enumeração dos termos por a_0, teria $a_n = a_0 + nr$. As progressões aritméticas são comuns em situações da vida real e sempre aparecem, por exemplo, quando se apresentam grandezas que sofrem variações constante em intervalos de tempos iguais como no cálculo de juros simples ou desvalorização de um bem ao longo do tempo.

Dessa forma, pode-se considerar o exemplo abaixo, proposto por (MORGADO et al., 2001):

Exemplo 2.2. *Se uma grandeza G sofre aumentos mensais iguais a r, seu valor daqui a n meses será* $G_n = G_0 + nr$.

Pode-se observar que a função que associa a cada natural n o valor de G_n é simplesmente a restrição aos naturais da função afim $G(x) = G(0) + rx$, onde o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

A função afim não é o objetivo deste trabalho e, portanto, não serão tratados seus casos particulares e a sua caracterização - para isso, sugerimos (LIMA et al., 2012). A definição da função afim, a saber é: *"Uma função* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *chama-se função afim quando existem dois números reais **a** e **b** tal que* $f(x) = ax + b$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.*"* (DANTE, 2010, p. 112).

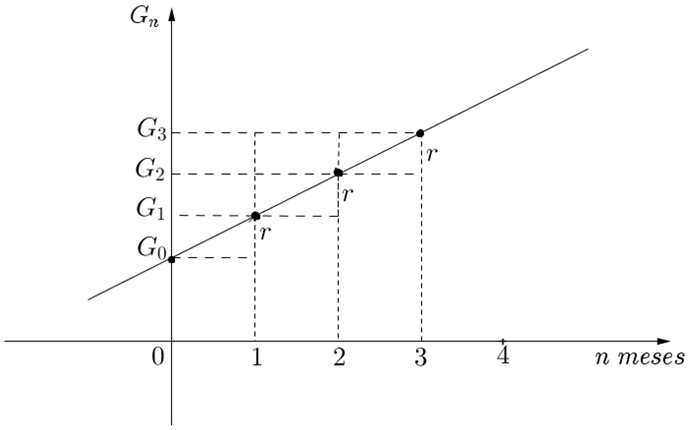


Figura 1: Evolução de uma grandeza ao longo do tempo com aumentos mensais.

2.2 PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Uma progressão geométrica (PG), por definição, é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente. Este quociente constante é representado por q e chamado de razão.

Teorema 2.3. *(Termo Geral de uma PG): Em toda progressão geométrica de razão q, tem-se para todo natural n, que o termo geral a_n é dado por: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.*

Demonstração:

Pela definição de progressão geométrica, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{a_1} &= q; \\
\frac{a_3}{a_2} &= q; \\
\frac{a_4}{a_3} &= q; \\
\vdots & \quad \vdots \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= q.
\end{aligned}$$

Multiplicando-se as $n-1$ igualdades, obtém-se

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = q^{n-1},$$

o que equivale a

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}.$$

Logo,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

□

Aqui, novamente se enumerasse os termos a partir de a_0, teria $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Para ilustrar o Teorema 2.3, considere o exemplo hipotético 2.4 que segue:

Exemplo 2.4. *Os pais do Cadu aplicaram em um investimento de rendimento fixo um valor inicial de R\$* $15.000,00$ *com o objetivo de financiar seus estudos no futuro. Supondo que o investimento oferece um rendimento de 0,5% ao mês, analise a evolução do seu saldo* S_t *nos primeiros t meses, com t = 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 de acordo com a tabela abaixo:*

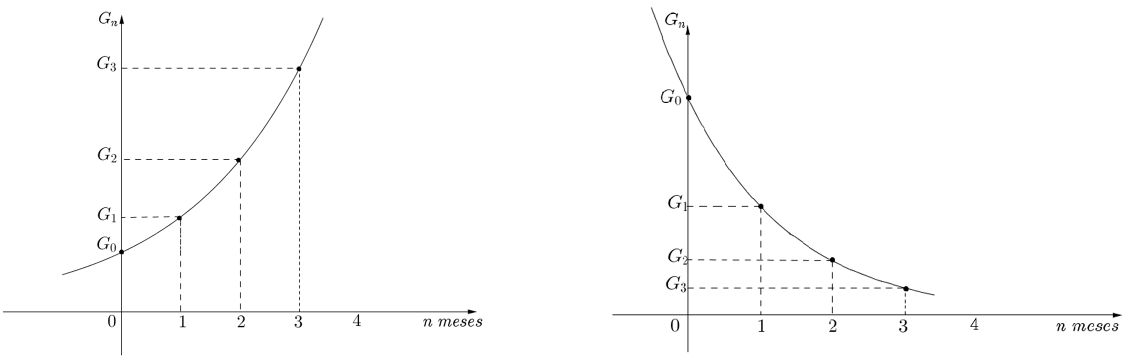
t	S_t	$\frac{S_{t+1}}{S_t}$	$\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$
0	R$ 15.000,00	-	-
1	R$ 15.075,00	1,005	0,005
2	R$ 15.150,38	1,005	0,005
3	R$ 15.226,13	1,005	0,005
4	R$ 15.302,26	1,005	0,005
5	R$ 15.378,77	1,005	0,005
6	R$ 15.455,66	1,005	0,005

Tabela 1: Evolução de um investimento hipotético de taxa fixa.

De acordo com a Tabela 1, o saldo mês a mês pode ser visto na forma de uma sequência dada pelos seis valores consecutivos do saldo S_t do investimento. Considere que os valores foram arredondados com até duas casas após a vírgula. Com efeito, verifica-se que $S_1 = S_0 \cdot 1,005$, $S_2 = S_1 \cdot 1,005$, e assim por diante, até $S_6 = S_5 \cdot 1,005$. Pela definição vista no início da seção, essa sequência é uma PG, e sua razão 1,005 é o quociente (q) da divisão de cada saldo *(termo)*, a partir do segundo pelo seu antecessor, dado pela coluna $\frac{S_{t+1}}{S_t}$. Portanto, a razão q de uma PG é simplesmente o valor de $1+i$, onde i é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seu sucessor representada, pelo valor $i = 0,005$ na coluna $\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$.

Ressalta-se que, sempre que possível, sejam desenvolvidas situações-problemas que proponham a construção do conhecimento referente às progressões geométricas envolvendo a contextualização do conceito de matemática financeira, na tentativa de orientar o educando sobre a necessidade e a importância de se ter uma educação financeira adequada para as tomadas de decisões. No intuito de generalizar o exemplo 2.4, um outro exemplo é proposto em (MORGADO et al., 2001).

Exemplo 2.5. *Se a grandeza G varia com a taxa de crescimento constante igual a i, o valor de G na época n é* $G_n = G_0 \cdot (1+i)^n$. *Observe que a função que associa a cada natural n o valor de* G_n *é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial* $G(x) = G_0 \cdot (1+i)^x$. *A Figura 2 mostra o gráfico da variação de G para* $i > 0$ *e* $i < 0$.



(a) Se $i > 0$ (b) Se $i < 0$

Figura 2: Evolução de uma grandeza ao longo do tempo com taxa de crescimento iguais a i**.**

Pode-se observar que se uma grandeza tem taxa de crescimento igual a i, com $i \neq 0$, cada valor da grandeza é igual a $(1+i)$ vezes o valor anterior, ou seja, $(1+i)$ é a razão da PG apresentada no exemplo 2.5. Portanto, pensando em uma PG como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função do tipo exponencial, desde que $G_0 > 0$.

Nessa linha de raciocínio, observando os dados da Tabela 1 do Exemplo 2.4 e, tomando $S_t = S(t)$, é possível descrever a relação entre o saldo S do investimento em função do tempo t, dada pelo termo geral $S_t = 15000 \cdot (1{,}005)^t$, como:

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{N} \cup \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & 15.000 \cdot (1{,}005)^t. \end{array}$$

Se por um lado a ideia de permitir que o aluno construa o conhecimento relativo ao conceito de função afim ou exponencial por meio da apresentação de um modelo pode parecer paradoxal (pois como o aluno poderá resolver um problema desses se ele ainda não aprendeu o que é função afim e/ou exponencial?), por outro lado a construção desse conhecimento pode se dar mediante a investigação de dados financeiros em uma simples tabela envolvendo uma ideia fundamental da matemática, que são as sequências. Deste modo, fica claro que no momento que o aluno passar de um conteúdo para o outro (de progressões para funções, e não o contrário), ele passará a ver melhor as relações entre os tópicos, pois como já foi comentado, todo mundo transita melhor de um conteúdo para o outro quando lida com o que é fundamental.

2.3 FUNÇÕES E SUAS VARIAÇÕES

O conceito de função é uma das ideias fundamentais da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a importância deste conceito para a Matemática e para outras áreas do conhecimento:

> "O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática"(BRASIL, 2000, p. 121).

Através da construção do conhecimento de função, o desenvolvimento da capacidade de compreensão de fenômenos do aluno é ampliada, uma vez que muitas situações de interdependência estão naturalmente associadas à modelagem que, efetivamente conduzem às explicações dos referidos fenômenos e seus comportamentos. O reconhecimento das funções envolvidas em um determinado fenômeno possibilita uma ação organizada por parte do aluno, enfrentando situações-problema diversas fazendo com que o mesmo proponha intervenções conscientes sobre a realidade que o cerca.

Nesta seção é apresentada a definição da função exponencial, sua variação e seus teoremas de caracterização.

2.3.1 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Em (DANTE, 2010, p. 230), como em muitos outros livros didáticos do ensino médio, os conteúdos de funções são apresentados antes de progressões e, segundo o autor, o estudo da função exponencial é motivada pela seguinte situação-problema: *"Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, calcular quantas bactérias existirão depois de:*
a) 3 horas *b) 10 horas* *c) x horas"*

Em seguida, o autor apresenta a solução para a situação-problema através da definição de PG, ainda que implicitamente, onde o aluno (agora pré-concebido do conhecimento de PG) pode notar que a população de bactérias dada pela sequência P_n de razão $q = 2$ com o primeiro termo $P_0 = 1000$ é resolvida da seguinte forma:

> "a) 3 horas
>
> • Depois de 1 hora, teremos 2000 bactérias ($2 \cdot 1000$).
> • Depois de 2 horas, teremos 4000 bactérias ($4 \cdot 1000$ ou $2^2 \cdot 1000$).
> • Então, depois de 3 horas, teremos 8000 bactérias ($8 \cdot 1000$ ou $2^3 \cdot 1000$).
>
> b) 10 horas
>
> $2^{10} \cdot 1000$ ou 1024000 bactérias.
>
> c) x horas
>
> $2^x \cdot 1000$ bactérias" (DANTE, 2010).

Por fim, o autor cita que o modelo matemático usado para resolver situações como essa é dado pela função de tipo exponencial $f(x) = b \cdot a^x$. Em seguida o autor faz um comentário sobre a solução e a característica deste tipo de função:

> "No caso das bactérias acima, o modelo matemático é dado pela função de tipo exponencial $f(x) = b \cdot 2^x$ em que **b** representa a população de bactérias existentes no início da experiência e **x** é o tempo decorrido.
>
> Neste caso, vimos que, se calcularmos a população das bactérias nos instantes x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, isto é, em intervalos de igual duração **h**, obteremos que cada população é igual à do instante anterior multiplicada pela mesma constante **k**: $f(x_0 + h) = f(x_0) \cdot k$, $f(x_0 + 2h) = f(x_0 + h) \cdot k$, etc. (No item **a** acima, h = 1 hora e k = 2.) Está é a característica fundamental da função exponencial e, mais geralmente, da função tipo exponencial." (DANTE, 2010).

Após revisar propriedades de potenciação, é apresentada a definição da função exponencial: *"Dado um número real **a** ($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se **função exponencial de base a** a uma função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$."* Em seguida, apresenta dois exemplos de funções propondo ao leitor, no caso o aluno, a construção de gráficos concluindo dessa forma que o gráfico é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, como pode-se ver na Figura 3.

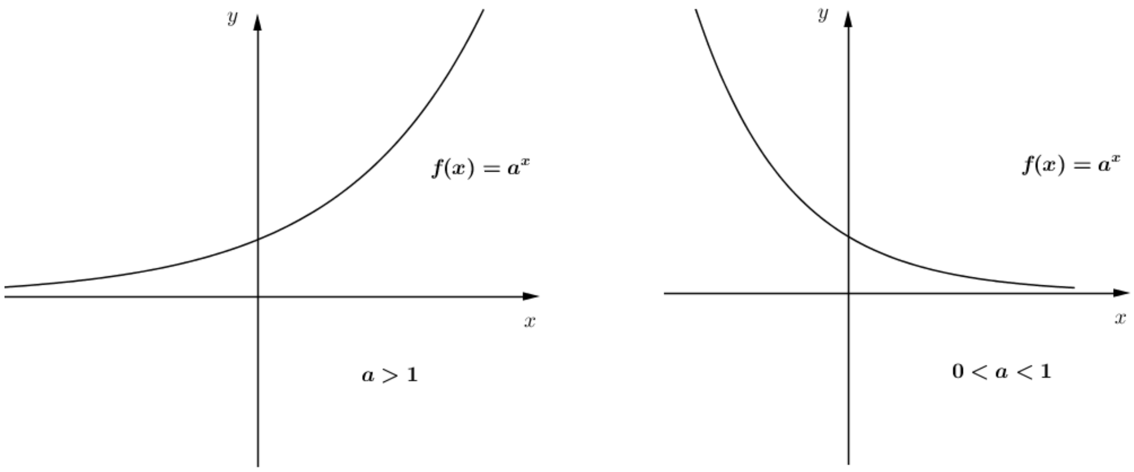


Figura 3: Comparativo dos gráficos da função exponencial de base a.

Examinando com mais cuidado os comentários e o texto apresentado pelo autor, nota-se que em momento algum ele destaca a palavra sequência ou progressão geométrica (ideias fundamentais da matemática) para o leitor. É importante salientar que nessa construção, muito provavelmente o aluno não esteja percebendo a relação entre os tópicos, reflexo da ordem com a qual a obra trata funções e progressões - tratando primeiramente funções no domínio contínuo e só depois pensando em progressões, como uma função restrita para o domínio discreto. Desta forma, cabe ao professor destacar ideias fundamentais e gerar situações que propiciem a relação entre esses tópicos intrínsecos à matemática, cabendo ao aluno o papel de construtor do seu conhecimento.

2.3.2 FUNÇÃO DO TIPO EXPONENCIAL

Em (LIMA et al., 2012), "uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ é de *tipo exponencial* quando se tem $f(x)=b\cdot a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a>1$, f é crescente e, se $0<a<1$, f é decrescente."

Assim, voltando ao modelo do Exemplo 2.4, que $\dfrac{S_{t+1}}{S_t}=1,005$ é a razão da PG dada pela sequência S_t e $\dfrac{S_{t+1}-S_t}{S_t}=0,005$ é a taxa de crescimento constante de cada termo para o seu sucessor. Pelo Exemplo 2.5, é possível notar que esse tipo de sequência representa em domínio discreto uma função do tipo exponencial ($f(x)=b\cdot a^x$). Daí, tem-se que se uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial, então para quaisquer $x,h\in\mathbb{R}$ (onde h é o *incremento* da variável x), os quocientes:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)}=\frac{b\cdot a^{x+h}}{b\cdot a^x}=\frac{a^x\cdot a^h}{a^x}=a^h$$

e

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}=\frac{b\cdot a^{x+h}-b\cdot a^x}{b\cdot a^x}=\frac{ba^x\cdot(a^h-1)}{ba^x}=a^h-1$$

dependem apenas de h, mas não de x. A recíproca do teorema que segue apresenta as condições suficientes e necessárias para que um problema possa ser modelado por uma função do tipo exponencial. O enunciado, bem como a demonstração, foram estabelecidos tomando-se por base os encaminhamentos constantes em (LIMA et al., 2012).

Teorema 2.6. *(Caracterização das funções de tipo exponencial): Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x,h\in\mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b=f(0)$ e $a=\dfrac{f(1)}{f(0)}$, tem-se que $f(x)=b\cdot a^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Demonstração:

Seja $b = f(0)$. Tome $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva, tal que $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$ (se f é crescente, então g é crescente), então, $g(0) = 1$. Supondo a relação $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$, pois a mesma independe de x, por hipótese. Tem-se que se $x = 0$:

$$\varphi(h) = \frac{g(h)}{g(0)} \Longrightarrow \varphi(h) = g(h), \text{ com } h \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Substituindo (1) na relação $\varphi(h) = \dfrac{g(x+h)}{g(x)}$, obtém-se:

$$g(x+h) = \varphi(h) \cdot g(x) = g(h) \cdot g(x).$$

Portanto, segue das propriedades da função exponencial que $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, ou seja, $g(x) = a^x$, $a = g(1)$. Substituindo este resultado em $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$, seque que $a^x = \dfrac{f(x)}{b}$ e $f(x) = b \cdot a^x$.

$\square$

O exemplo 2.7 ilustra o Teorema 2.6. Tal exemplo é inspirado em (LIMA et al., 2012).

Exemplo 2.7. *Considere um adolescente que ingeriu uma dose de 20mg de Isotretinoína, medicamento muito conhecido e usado no tratamento da acne. A bula do Isotretinoína informa que sua meia-vida é de 18 horas em média. Como o jovem não sabia o significado da palavra meia-vida, foi a um dicionário e encontrou a seguinte definição: "Meia-vida: tempo necessário para que uma grandeza atinja metade de seu valor inicial". Sendo assim, responda:*

(a) Após 36 horas da ingestão do Isotretinoína, qual é a quantidade do medicamento ainda presente no organismo do adolescente?

(b) E após 9 horas da ingestão do medicamento?

(c) E após t horas de sua ingestão?

Este exemplo está presente no contexto de quase todo adolescente: ACNE. Ótimo modelo de função do tipo exponencial a ser trabalhada com os alunos. Inicialmente os alunos podem realizar a construção de uma tabela com os dados da quantidade de Isotretinoína no organismo, Q, em miligramas, dado em função do tempo t, em horas.

Para responder a primeira pergunta do exemplo, basta aplicar a definição de meia-vida. Após às primeiras 18 horas, haverá metade de 20mg, isto é, 10mg. Em mais 18 horas, este valor se reduz novamente à metade de de 10mg, ou seja, após 36 horas haverá 5mg de Isotretinoína presente no corpo do adolescente.

Note que a quantidade de Isotretinoína diminui-se de acordo com a variação relativa $\dfrac{Q(t+h)-Q(t)}{Q(t)}$. Funções crescentes (ou decrescentes) com esta propriedade são necessariamente da forma $f(x) = b \cdot a^x$. Para calcular a quantidade Q do medicamento para $t = 9$ horas, pode-se observar que, em cada intervalo de duração de 9 horas, a quantidade do medicamento é multiplicada por uma contante k. Como em 18 horas a droga se reduz à metade, tem-se que $k \cdot k = \dfrac{1}{2}$ e, portanto, $k = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,707$. Assim, segue que $20 \cdot 0,707 = 14,14$mg, aproximadamente.

Para obter-se a quantidade Q de Isotretinoína em um instante t, utilizar-se-á os valores $Q(0) = 20$ e $Q(18) = 10$ para calcular os coeficientes a e b de $f(x) = b \cdot a^x$. Considerando $t = 0$ o momento em que foi ingerido 20mg do Isotretinoína, tem-se que $Q(0) = 20$ e, portanto, $b = 20$. Como $Q(18) = 10$, tem-se que:

$$20 \cdot a^{18} = 10 \quad \Longrightarrow \quad a^{18} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \sqrt[18]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{18}}.$$

Por fim, a quantidade Q de Isotretinoína após t horas da sua ingestão é dada por:

$$Q(t) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}^{\frac{1}{18}}\right)^t \quad \Longrightarrow \quad Q(t) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}}.$$

Respondido o item (c), os alunos podem montar uma tabela em uma planilha eletrônica ou ainda explorar recursos disponíveis no software livre (GEOGEBRA, 2013), como pode-se visualizar na Figura 4, conhecido por seu dinamismo ao desenvolver atividades em geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos aritméticos elementares; oferecendo, portanto, diversas possibilidades para a exploração pedagógica.

O que se vê na maioria dos livros didáticos é que as variações de funções são, em geral, deixadas de lado - predominando a linguagem algébrica, em detrimento do comportamento variacional dessas funções. Fica evidente que a partir do conhecimento de progressões, tabelas de valores em planilhas eletrônicas, gráficos em softwares como o GeoGebra e algumas equações simples, é possível desenvolver as principais relações de variações entre as funções.

É importante ressaltar que não é objetivo deste trabalho o aprofundamento nas instruções para a construção de atividades no GeoGebra. Para os leitores interessados na reprodução e/ou download do Exemplo 2.7, ele está disponível em http://www.geogebratube.org/material/show/id/94467. Convém ressaltar junto aos alunos que os resultados apresentados pelo software, na verdade por qualquer computador, não podem servir como critério de verdade matemática. Softwares como o GeoGebra devem servir como subsídio para se estabelecer conjecturas sobre o modelo que se estuda. Por isso, ainda que seja importante a noção intuitiva, faz-se necessária a comprovação dos resultados embasada em uma argumentação formal.

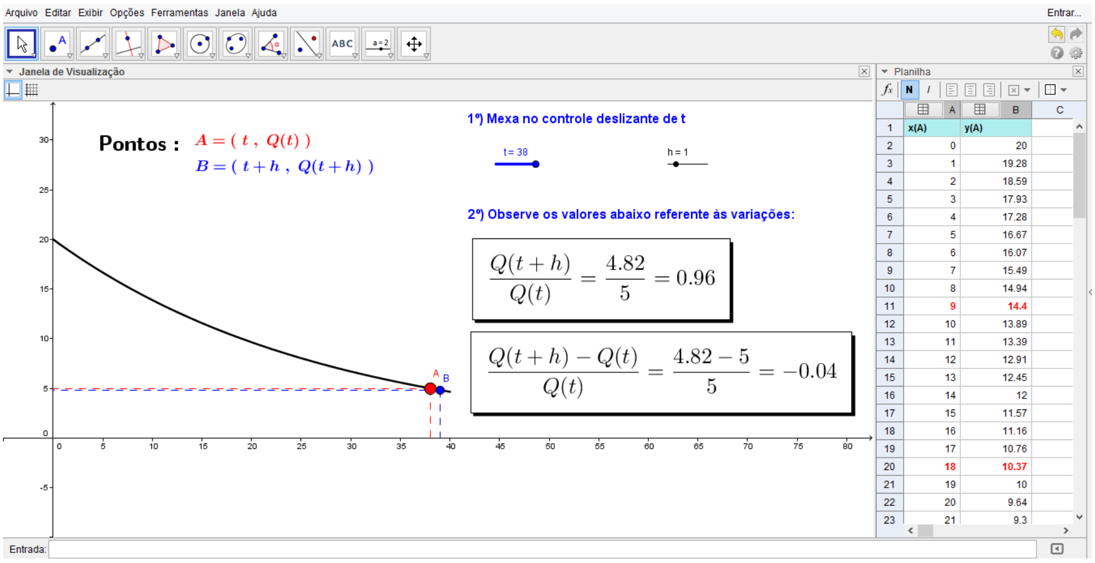


Figura 4: Construção dinâmica que ilustra o comportamento variacional do modelo de tipo exponencial da função Q(t).

2.4 PROGRESSÕES E FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Outro teorema de caracterização da função do tipo exponencial relaciona uma progressão aritmética de razão h (incremento de x) dada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ no seu domínio com uma progressão geométrica de razão a^h na sua imagem. Assim, seja

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \qquad \text{tal que} \qquad f(x) = ba^x.$$

Se (x_n) é uma PA de razão h, isto é, $x_{n+1} = x_n + h$, então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, f(x_3) = ba^{x_3}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots,$$

formam uma PG de razão a^h, pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_n+1} = ba^{x_n+h} = (ba^{x_n}) \cdot a^h = f(x_n) \cdot a^h.$$

Note que o *(n+1)*-ésimo termo da progressão aritmética é dada por $x_{n+1} = x_1 + nh$, segue assim que

$$f(x_{n+1}) = b \cdot a^{x_1+nh} = (b \cdot a^{x_1}) \cdot a^{nh} = f(x_1) \cdot (a^h)^n = f(x_1) \cdot A^n,$$

onde $A = a^h$.

Particularmente, se $x_1 = 0$, então $f(x_1) = b$. Logo, $f(x_{n+1}) = b \cdot A^n$. O raciocínio apresentado acima, é usado para "discretizar" a análise dos modelos que envolvem crescimento e decrescimento exponencial.

O enunciado e a demonstração do teorema de caracterização que segue, podem ser conferidos em (LIMA et al., 2012).

Teorema 2.8. *(Caracterização das funções de tipo exponencial): Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ numa progressão geométrica $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$, onde $y_n = f(x_n)$. Pondo $b = f(0)$ e $a = \dfrac{f(1)}{f(0)}$ tem-se $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Seja $b = f(0)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ a função monótona injetiva, definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{b}$, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se que $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência x, 0, $-x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se que $g(-x) = \dfrac{1}{g(x)}$. Sejam agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. A sequência $0, x, 2x, ..., nx$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu (n+1)-ésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = \dfrac{1}{g(nx)} = \dfrac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do Teorema de Caracterização acima que, pondo $a = g(1) = \dfrac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

O Exemplo 2.9 foi desenvolvido no GeoGebra e é utilizado para ilustrar o Teorema 2.8. Ele está disponível para reprodução e/ou download em http://www.geogebratube.org/material/show/id/94563.

Exemplo 2.9. *Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, monótona injetiva, definida por $f(x) = ba^x$ que transforma progressões aritméticas em progressões geométricas. Sendo os valores do* *domínio uma PA, escolha valores quaisquer para a, b e em seguida escolha um valor qualquer para ser o primeiro termo da PA* (x_0) *e outro valor para ser sua razão* (h).

Suponha que a função escolhida seja $f(x) = 2^x$ (por uma limitação do software GeoGebra, será utilizada a notação x_n ao invés de x), e os elementos escolhidos para a PA de elementos x_0, x_2, ... , x_n, ... foram $x_0 = 0$ e $h = 1$. Movimentando o controle deslizante x_n (ou clicando no botão *"ANIMAR"*) e, observando a tabela da Figura 5, o aluno pode notar que o conjunto formado por $f(x_0)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$, ... formam uma progressão geométrica de razão $a^h = 2$, sendo este o teorema de caracterização da função de tipo exponencial que transforma toda progressão aritmética em uma progressão geométrica. Uma atividade como essa faz com que o aluno compreenda a relação intrínseca que há entre progressões e funções.

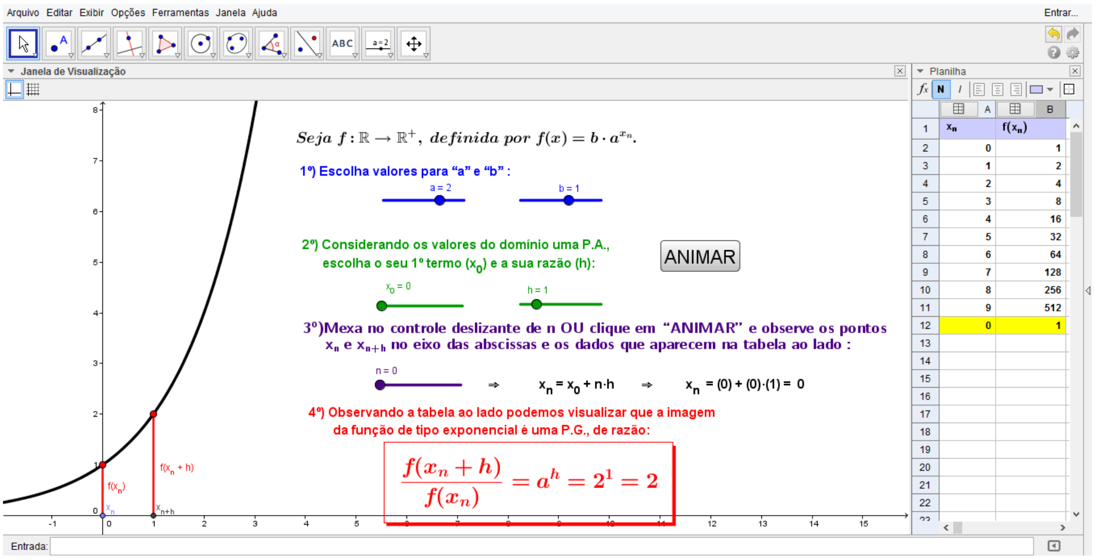


Figura 5: Construção dinâmica que ilustra a discretização do Teorema 2.8.

Como vimos na Seção 2.1, tem-se que a PA é a restrição aos naturais da função afim $a(x) = a(0) + rx$. Portanto, a função do tipo exponencial transforma uma função afim restrita aos naturais no seu domínio em uma progressão geométrica na sua imagem.

Pense bem, não é mais fácil para o aluno enxergar isso, agora que o mesmo já sabe o que são progressões? Seria possível para o professor aprofundar tais conhecimentos com esse aluno se o mesmo tivesse visto funções exponenciais antes de progressões?

2.5 A INVERSA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL: A LOGARÍTMICA

Para todo número real $a \neq 1$, a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, tal que $f(x) = a^x$ é monótona injetiva, pois para todo par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esta função também é sobrejetiva, pois para todo $y \in \mathbb{R}^+$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, portanto, f é bijetiva. Daí, sabe-se que f é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, e além disso

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y),$$

isto é,

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Do fato de f ser bijetiva, segue que a função exponencial de base a possui uma função inversa definida por

$$log_a \ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

que associa a cada número real positivo x ao número real $log_a\, x$, chamando-o de *logaritmo* de x na base a. Por definição de função inversa, segue que:

$$a^{log_a\, x} = x \qquad \text{e} \qquad log_a\, a^x = x.$$

E, portanto, $log_a\, x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para se obter o número x, ou seja,

$$y = log_a\, x \iff a^y = x.$$

A Figura 6 apresenta um comparativo dos gráficos da função logarítmica de base a com suas inversas:

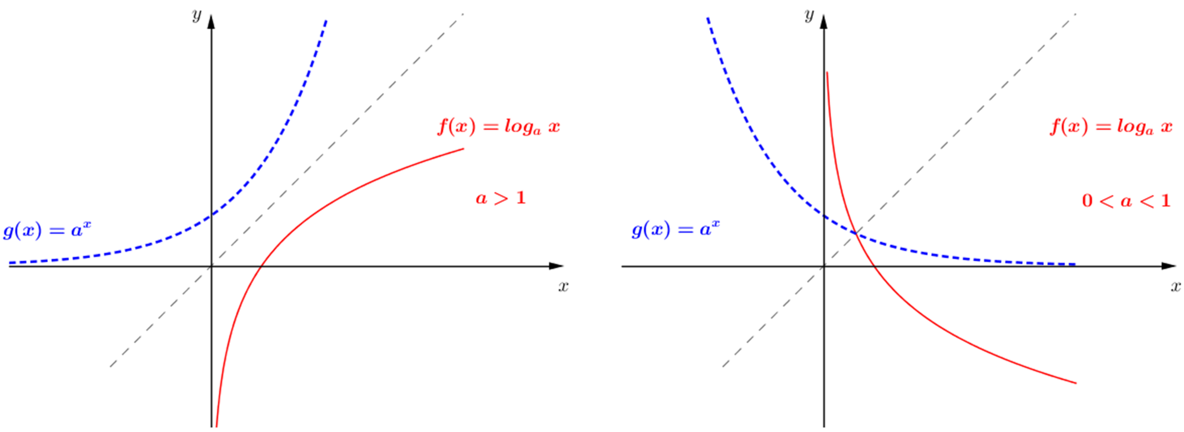


Figura 6: Comparativo dos gráficos da função logarítmica de base a com suas inversas.

Note ainda que da propriedade $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, seque que:

$$log_a\, (x \cdot y) = log_a\, x + log_a\, y$$

para x e y positivos quaisquer. Pois, se $\alpha = log_a x$ e $\beta = log_a y$, então $a^\alpha = x$ e $a^\beta = y$. Logo

$$x \cdot y = a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta},$$

ou seja,

$$log_a\ (x \cdot y) = \alpha + \beta = log_a\ x + log_a\ y,$$

transformando produtos em somas. Esta propriedade foi o que motivou a introdução dos logaritmos, no início do século XVII, como um potente instrumento de cálculo. Atualmente, com o advento de calculadoras e computadores cada vez mais modernos, seu uso perdeu utilidade para esse fim. Entretanto, de acordo com (LIMA, 2013), a função logarítmica continua extremamente importante nas áreas que envolvem a matemática e suas aplicações além, é claro, está ligada a um grande número de fenômenos naturais, onde se tem uma grandeza que varia proporcionalmente à quantidade da mesma no instante dado.

Contudo, voltando a ideia que popularizou o uso dos logaritmos, considere o exemplo que segue:

Exemplo 2.10. *Observe a tabela abaixo contendo uma PA de razão 2 e uma PG de razão 3:*

Linha	*PA*	*PG*	*Linha*	*PA*	*PG*
1	0	1	11	20	59049
2	2	3	12	22	177147
3	4	9	13	24	531441
4	6	27	14	26	1594323
5	8	81	15	28	4782969
6	10	243	16	30	14348907
7	12	729	17	32	43046721
8	14	2187	18	34	129140163
9	16	6561	19	36	387420489
10	18	19683	20	38	1162261467

Tabela 2: PA e PG de razão 2 e 3, respectivamente.

Ao propor a criação e a análise dessa tabela à uma turma de ensino médio, pode-se fazer alguns questionamento aos alunos da seguinte maneira:

"— Multipliquem o termo da PG na linha 7 pelo termo da PG na linha 14. Qual o resultado?".

O resultado é $729 \times 1594323 = 1162261467$. No entanto, o professor deve usar exemplos concretos como este para ilustrar o que está dizendo, permitindo ao aluno desenvolver seu raciocínio lógico sobre os dados numa tabela e como eles se comportam. Novamente chama-se a atenção para o "sublinhar"de ideias, e quando o faz constantemente, o aluno entende melhor o objeto de aprendizagem.

Dessa maneira, continua:

"— Multipliquem o termo da PG na linha 9 pelo termo da PG na linha 11. Qual o resultado?".

O resultado é $6561 \times 59049 = 387420489$. E assim continua. Após alguns cálculos, é possível que um aluno note que ao multiplicar um termo da PG por outro termo da PG é o mesmo que somar o termo da PA ao lado do primeiro com a PA ao lado do segundo, isto é, o resultado da adição cai na mesma linha que o resultado da multiplicação.

Chamam-se estes termos da PA de *logaritmos*. No entanto, neste momento não será preocupação determinar a sua base. Sendo assim, quando soma o logaritmo de 6561, que vale 16, ao logaritmo de 59049, que vale 20, obtém-se 36 que é o logaritmo de 387420489. Muito provavelmente algum aluno logo notará que dividir dois termos da PG é o equivalente a subtrair os logaritmos na PA.

Ressalta-se aqui que após apresentar um exemplo como este, é fundamental o professor contar a história dos logaritmos ou propor aos alunos que pesquisem sobre o assunto, pois foi de maneira parecida com a tabela acima que os logaritmos foram descobertos. De acordo com (MONTEIRO, 2013), *"A humanidade descobriu as tabelas de logaritmos muito antes de descobrir por que funcionavam"*.

Note que a pergunta que deve ficar na cabeça do aluno é: *"Por que isso dá certo sempre?"*. Bem, antes de responder a essa pergunta, deve-se responder primeiro às outras duas perguntas: *"A soma de dois termos de uma PA é sempre um termo da PA?"* e *"O produto de dois termos de uma PG é sempre um termo da PG?"*.

Para isso, considere um caso particular em que o primeiro termo da PA e o primeiro termo de uma PG são $a_1 = 0$ e $g_1 = 1$, respectivamente. A análise que será feita é uma particularização, porém essa situação pode ser generalizada para os demais casos, mesmo que implique em mais cálculos, que eventualmente não serão contidos neste texto.

Sendo assim, considere um termo qualquer de uma PA cujo primeiro termo é 0:

$$a_n = (n-1) \cdot r.$$

Em seguida, soma-se dois termos quaisquer dessa PA, por exemplo, os termos a_s e a_t tem-se:

$$\begin{aligned} a_s + a_t &= (s-1)\cdot r + (t-1)\cdot r \\ &= (s-1+t-1)\cdot r \\ &= [(s+t-1)-1]\cdot r \\ &= a_{(s+t-1)}. \end{aligned}$$

Portanto, a soma dos termos a_s e a_t dessa PA resulta no termo $a_{(s+t-1)}$ dessa mesma PA.

Da mesma maneira, tem-se que o produto de dois termos dessa PG resulta em um termo da própria PG. Com efeito, tem-se que multiplicando o termo g_s pelo termo g_t dessa PG, obtém-se:

$$\begin{aligned} g_s \cdot g_t &= q^{s-1}\cdot q^{t-1} \\ &= q^{s-1+t-1} \\ &= q^{(s+t-1)-1} \\ &= g_{(s+t-1)}. \end{aligned}$$

Logo, o produto acima fica ao lado e na mesma linha de $a_{(s+t-1)}$ que é a soma dos dois termos da PA. Daí, pelo Teorema 2.8, tem-se que a fórmula que resume os números da Tabela 2 é:

$$g_n = \alpha^{a_n},$$

para alguma base α, a qual ainda não se conhece, explicando também porque do produto de dois termos da PG pode ser calculado através da adição de dois termos da PA:

$$g_s \cdot g_t = \alpha^{a_s}\cdot\alpha^{a_t} = \alpha^{a_s+a_t} = \alpha^{a_{(s+t-1)}} = g_{(s+t-1)}.$$

Escolhendo qualquer linha da tabela, além é claro da primeira linha, calcula-se α de várias maneiras, por exemplo, tomando a linha 6 da Tabela 2, tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha^{10} &= 243 \\ \alpha^{10} &= 3^5 \\ (\alpha^{10})^{1/10} &= (3^5)^{1/10} \\ \alpha &= 3^{1/2} \\ \alpha &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Assim, pode-se chamar os termos da PA de logaritmo, porque eles são logaritmos, haja visto que a função logaritmica é a inversa da função exponencial e, portanto, os termos da PA na Tabela 2 são logaritmos de base $\sqrt{3}$ dos termos da PG, ou seja,

$$log_{\sqrt{3}}(g_n) = (a_n).$$

Como o termo g_n da PG é igual a alguma base α elevada ao termo a_n da PA, tem-se que para este modelo, em que a PA começa em 0 e a PG com 1, para que possa ter $\alpha^0 = 1$. Generalizando o caso particular, tem-se:

$$\alpha^{a_n} = g_n \quad \Longrightarrow \quad \alpha = (g_n)^{\frac{1}{a_n}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = (q^{n-1})^{\frac{1}{(n-1)\cdot r}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = q^{\frac{1}{r}} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \sqrt[r]{q},$$

com $a_1 = 0$ e $g_1 = 1$. No exemplo da Tabela 2 a razão r da PA é 2 e a razão da PG é 3. Logo, segue o resultado $\alpha = \sqrt{3}$.

Uma atividade idêntica como essa foi proposta por (MONTEIRO, 2013) e, além do professor apresentar a tabela pronta, ele também pode dar uma tabela em branco e pedir para que os alunos inventem uma PA e uma PG de razões quaisquer e fazer as devidas intervenções de modo que o aluno possa obter as conclusões acima ao longo da atividade. Note ainda que assim como as funções do tipo exponencial transformam progressões aritméticas em progressões geométricas (vide Teorema 2.8), a recíproca também é válida para as funções logarítmicas - podendo o educando concluir que uma PG de termos positivos transforma-se em uma PA. Assim, se (g_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, então (a_n) definida por $(a_n) = log_\alpha(g_n)$, qualquer que seja a base α, é uma progressão aritmética.

Com efeito, tem-se

$$(a_{n+1}) - (a_n) = log_\alpha(g_{n+1}) - log_\alpha(g_n) = log_\alpha\left(\frac{g_{n+1}}{g_n}\right) = log_\alpha\left(\frac{g_0 \cdot q^{n+1}}{g_0 \cdot q^n}\right) = log_\alpha(q) = k,$$

tal que k é uma constante e, portanto, a_n é uma progressão aritmética.

Essa atividade descreve exatamente o teorema de caracterização das funções logarítmicas, disponível em (LIMA et al., 2012).

Teorema 2.11. *(Caracterização das funções logarítmicas): Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$, com $a \neq 1$, tal que $f(x) = log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.*

Demonstração:

Seja f crescente (o outro caso é análogo). Tem-se $f(1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Inicialmente será provado o teorema supondo que $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$ e depois será mostrado que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Do fato de f ser crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se que $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a), \\ &= f(a) + f(a) + \ldots + f(a), \\ &= 1 + 1 + \ldots + 1 = m. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 = f(1) &= f(a^m \cdot a^{-m}), \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}), \\ &= m + f(a^{-m}) \end{aligned}$$

e $f(a^{-m}) = -m$.

Se $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $r \cdot n = m$ e, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{r \cdot n}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$$

e tem-se $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$.

Agora, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então, para r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim, todo número racional r, menor que x, é também menor que $f(a^x)$ e todo número racional s maior que x é também maior que $f(a^x)$. Dessa forma, $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(y) = log_a y$ para todo $y > 0$. Considere agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, tal que $g(xy) = g(x) + g(y)$, sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$ e, como $1 < 2$, deve-se ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente e transforma somas em produtos e, cumpre $f(2) = 1$. Logo, tem-se $f(x) = log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{\frac{g(x)}{b}} = (2^{\frac{1}{b}})^{g(x)} = a^{g(x)}, \quad \text{com} \quad a = 2^{\frac{1}{b}}.$$

Tomando log_a em ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ segue que $g(x) = log_a x$.

$\square$

2.5.1 LOGARITMOS NATURAIS E O NÚMERO DE EULER: UM PROBLEMA DE JUROS CONTÍNUOS

A definição do número irracional e é $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Em particular, dando a $n = 1,2,3,\ldots$ valores naturais, tem-se

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Fica como sugestão ao leitor a sua análise em (LIMA, 2013, p. 105) e em (GUIDORIZZI, 2008, p. 133). Um valor aproximado de e, com 12 algarismos decimais exatos, é:

$$e = 2,718281828459.$$

Quando se depara com logaritmos, com frequência se usa o logaritmo de base 10, conhecido como logaritmo decimal - a própria calculadora científica tem a tecla log ou log_{10} que é muito usada para obter valores, utilizando-se da propriedade conhecida como mudança de base dos logaritmos. Os logaritmos naturais são logaritmos representados pela base e, representados por $ln\,(x)$ ou $log_e\,(x)$. Assim, a função logarítmica natural é a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ln\,(x) \end{array}$$

que associa a cada número real positivo x o número real y, chamado logaritmo de x na base e, tal que $x = e^y$. Este número y é o valor da função logarítmica natural em x, que é denotada por $ln\,(x)$ ou como vimos acima, $log_e\,x$. Logo, $f(x) = ln\,(x)$ se, e somente se $x = e^y$. A Figura 7 mostra o gráfico da função logarítmica natural e a sua inversa.

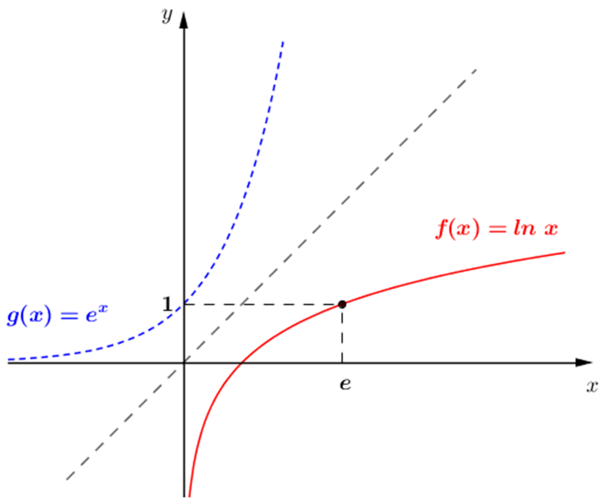


Figura 7: Gráfico da função logarítmica natural definida por $f(x) = ln\,(x)$ e sua inversa.

Agora, suponha que um capital C_0, empregado a uma taxa de $i\%$ ao ano, rende no fim de um ano, juros no valor de $\dfrac{C_0 \cdot i}{100}$. Fazendo $\alpha = \dfrac{i}{100}$ e passado um ano, o capital torna-se igual a $C_0 + C_0 \cdot \alpha$, ou seja, $C_0(1+\alpha)$. Passados dois anos, o novo capital $C_1 = C_0 \cdot (1+\alpha)$, empregado à mesma taxa, tornar-se-á igual a $C_1 \cdot (1+\alpha) = C_0(1+\alpha)^2$. E o processo se repete passados três anos, quatro anos, cinco anos, etc. até que, após m anos, terá um montante

$$C_m = C_0 \cdot (1+\alpha)^m.$$

Estabelecido isso, tem que se for retirado após uma fração $\dfrac{1}{n}$ de ano, o capital C_0, empregado à mesma taxa, deverá render $\dfrac{C_0 \cdot \alpha}{n}$ de juros, de modo que, decorrida a fração $\dfrac{1}{n}$ de ano, o capital C_0 passará a

$$C_{\frac{1}{n}} = C_0 + \frac{C_0 \cdot \alpha}{n}.$$

Segue que este novo capital $C_{\frac{1}{n}}$ após mais um $\dfrac{1}{n}$ de ano de aplicação, passará à $C_{\frac{1}{n}} \cdot \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)$, ou seja, $C_0 \cdot \left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^2$. Novamente, se prosseguir, dividindo o ano em n partes iguais e, depois de decorridos cada um desses períodos de $\dfrac{1}{n}$ de ano, capitalizar o novo capital, reinvestindo sucessivamente à mesma taxa, quando chegar o fim do ano, isto é, após n períodos, possuirá

$$C_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Um aplicador exigente deve querer que os juros sejam capitalizados o máximo de vezes possível, ou seja, capitalizados a cada instante. Assim, o montante ao final de um ano é

$$\lim_{n\to\infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = C_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Fazendo $\dfrac{\alpha}{n} = \dfrac{1}{x}$, obtém-se $\alpha x = n$ e, como "$n \to \infty$" é equivalente a "$x \to \infty$", segue que

$$C_0 \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\alpha x} = C_0 \cdot e^{\alpha}.$$

Este tipo de capitalização, em que os juros são capitalizados continuamente, é o que se chama de juros contínuos. *"Assim, por exemplo, o capital de* $R\$1,00$*, empregado a juros contínuos de* 100% *ao ano, no final de um ano será transformado em e reais. Este fato pode ser usado para explicar a um agiota o significado do número e."* (LIMA, 2013).

Se a taxa de juros referida a anos, então um capital C_0 empregado a essa taxa será transformado, após t anos em

$$C_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha t}{n}\right)^n = C_0 \cdot e^{\alpha t}.$$

Escrevendo o montante $C(t)$ em função de t, tem-se $C(t) = C_0 \cdot e^{\alpha t}$. É evidente que a expressão $C(t) = C_0 \cdot e^{\alpha t}$ pode também ser escrita na forma $C(t) = C_0 \cdot a^t$, com $a = e^{\alpha}$. Em vários campos da matemática, matemáticos e cientistas preferem as funções do tipo exponencial sob a forma $f(x) = b \cdot e^{\alpha x}$, de base e, exatamente porque o coeficiente α está intimamente ligado à taxa de crescimento de f. Veja um exemplo aplicado:

Exemplo 2.12. *Empregando-se um capital inicial C_0 a juros contínuos de 10% ao ano, em quanto tempo este capital será dobrado?*

Como a taxa de juros é de 10%, tem-se que $\alpha = \dfrac{10}{100} = 0,1$. Para determinar a solução, deve-se encontrar o número t de anos de modo que

$$C_0 \cdot e^{0,1t} = 2 \cdot C_0 \Rightarrow e^{0,1t} = 2.$$

Apicando-se o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, segue:

$$ln\,(e^{0,1\cdot t}) = ln\,(2) \Rightarrow 0,1 \cdot t = ln\,(2) \Rightarrow t = \frac{ln\,(2)}{0,1}.$$

Como $ln\,(2) \cong 0,693$, tem-se

$$t \cong \frac{0,693}{0,1} \cong 6,93.$$

Assim, por exemplo, o tempo necessário para dobrar um capital de R\$ $10,00$ é de $6,93$ anos, ou seja, aproximadamente sete anos, conforme representado na Figura 8.

Diante do exposto, é possível notar que este tempo não depende da quantia dada como capital inicial (C_0), isto é, definida uma taxa de juros, levará o mesmo período de tempo para se dobrar um capital inicial grande ou um pequeno.

Para representar perdas contínuas, envolvendo um negócio com um prejuízo de $k\%$ ao ano, tomando $\alpha = \dfrac{k}{100}$, como antes, tem-se pelo mesmo raciocínio do problema de juros contínuos que

$$C_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{n}\right)^n = C_0 \cdot e^{-\alpha t}.$$

Logo, C_0 estará reduzido à metade num tempo t tal que:

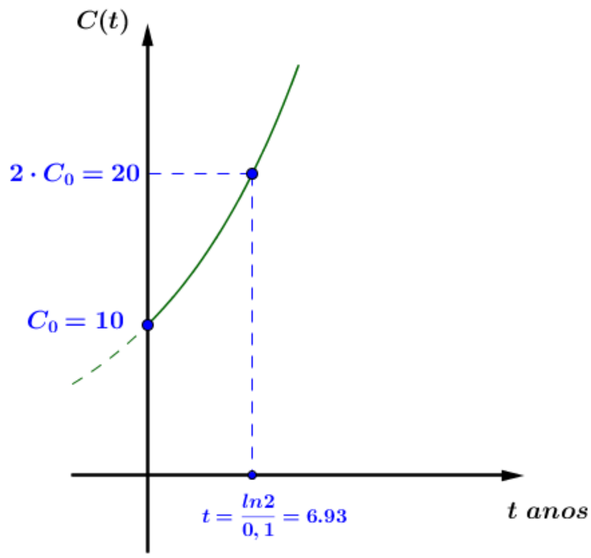


Figura 8: Representação gráfica do Capital dobrado em relação ao tempo.

$$
\begin{aligned}
C_0 \cdot e^{-\alpha t} &= \tfrac{1}{2} \cdot C_0, \\
e^{-\alpha t} &= \tfrac{1}{2}, \\
ln\left(e^{-\alpha t}\right) &= ln\left(\tfrac{1}{2}\right), \\
-\alpha t &= ln\left(2^{-1}\right), \\
t &= \frac{ln\,(2)}{\alpha} \text{ anos.}
\end{aligned}
$$

2.6 APLICAÇÃO DA PROPOSTA EM SALA DE AULA

No último bimestre do ano de 2013 estavam previstos no Plano de Trabalho Docente da 1ª série do ensino médio da Escola Técnica Estadual de Registro (ETEC), os conteúdos relativos às funções exponenciais e logarítmicas após terem sido desenvolvidas as outras funções polinomiais e a função modular. Na sequência previa-se a abordagem das progressões aritméticas e geométricas - que são casos particulares de funções. Numa ação discutida com outra professora de matemática da escola, propôs-se uma experiência: a mudança na sequência didática trabalhando com a turma os conteúdos referentes às progressões e em seguida funções exponenciais e logarítmicas.

Esta mudança foi motivada pela preocupação com os resultados insatisfatórios obtidos em turmas anteriores, consideravelmente elevados. Se a experiência fosse bem sucedida, seria discutida a possibilidade das progressões serem tratadas antes das funções polinomiais conhecidas, já no primeiro bimestre - como é proposto nos Cadernos do Professor e do Aluno adotados na rede pública estadual administrada pela Seretaria Estadual de Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP), a qual a ETEC de Registro não pertence. A ETEC é administrada pelo Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza(CEETEPS), autarquia vinculada à Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI).

Sendo assim, o desenvolvimento apresentado durante o bimestre, priorizou dois aspectos: a abordagem comum das PAs e das PGs e a determinação dos termos gerais a partir das regularidades observadas nas sequências, em detrimento do uso das conhecidas fórmulas que, em geral, os alunos decoram mecanicamente.

Em relação ao primeiro aspecto foram apresentadas questões do Caderno do Aluno, como as que seguem:

Exemplo 2.13. *Observe a sequência de figuras, na Figura 9, e responda às questões propostas.*

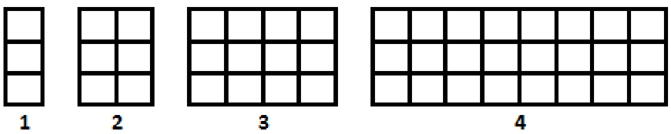


Figura 9: Ilustração do Exemplo 2.13.

a) *Quantos quadradinhos comporão a 5ª figura dessa sequência? E a 6ª figura?*

b) *Associe a essa sequência uma outra que indique o número de quadradinhos de cada figura. Essa sequência é uma PG? Justifique.*

c) *Construa uma fórmula que possa ser utilizada para determinar um termo qualquer dessa sequência. Para auxiliá-lo nessa tarefa, a tabela a sequir organiza os dados, a fim de que as regularidades sejam mais facilmente observadas, elemento necessário à construção da fórmula:*

Posição de um termo na sequência	Cálculo	Quantidade de quadrinhos
1	3	3
2	$3 \cdot 2 = 3 \cdot 2^1$	6
3		
4		
...		
n		

Tabela 3: Observando as regularidades através dos dados organizados.

Exemplo 2.14. *Nesta figura, Figura 10, cada quadradinho é formado por quatro palitos de comprimentos iguais.*

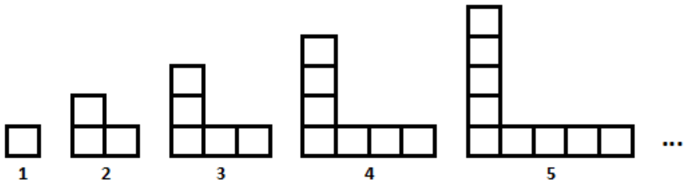


Figura 10: Ilustração do Exemplo 2.14.

a) *A sequência formada pelas quantidades de palitos necessários para a construção das figuras forma uma PA? Justifique sua resposta.*

b) *Quantos palitos serão necessários para a construção da 6ª figura? E da 7ª?*

c) *Quantos palitos serão necessários para construir a 78ª figura?*

d) *Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de palitos da figura que ocupa a posição **n** nessa sequência.*

Em ambos os exemplos apresentados, a partir de uma discussão com os alunos, foram identificadas dentre as sequências estudadas aquelas que atendem a cada definição abordada em sala de aula. Houve percepção, por parte dos alunos, das diferenças entre as duas sequências e o seu comportamento variacional.

Em relação ao segundo aspecto, chamou atenção o fato que, em geral, muitos alunos utilizam-se das fórmulas dos termos gerais das PA e da PG na resolução de problemas. Não há motivo para evitar essa prática, no entanto, houve a preocupação em propor exemplos como o que segue, onde o uso da fórmula não conduz diretamente ao resultado procurado.

Exemplo 2.15. *Determinada sequência numérica respeita a seguinte condição: a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma e igual a 6. Se o primeiro termos dessa sequência é* -8*:*

a) *Quais são os cinco primeiros termos?*

b) *Qual é o* a_9*?*

c) *Qual é o 15º termo?*

d) *Qual é o 20º termo?*

e) *Quanto é a diferença entre a_{12} e a_5?*

f) *Qual é a expressão de seu termo geral, isto é, qual é a fórmula matemática que relaciona um termo qualquer (a_n) à posição do termo (n)?*

Exemplo 2.16. *O primeiro termo de uma sequência numérica é 0,02. Para obter os termos seguintes, basta multiplicar o termo imediatamente anterior por 5. Dessa forma, qual é:*

a) *o 2º termo?*

b) *o a_3?*

c) *o a_4?*

d) *o resultado da divisão entre a_6 e a_4?*

e) *o termo geral da sequência, isto é, qual é a fórmula matemática que relaciona um termo qualquer (a_n) à posição do termo (n)?*

Durante esses exemplos houve a necessidade da troca de ideias em grupos na resolução e criação das situações-problemas, e identificação, no contexto dos alunos, de conceitos de progressões que podem ser claramente aplicados no dia-a-dia.

Na seguência foi trabalhada a construção de significados da soma dos elementos de uma progressão e aplicação da soma de elementos de uma PA ou de uma PG em alguns casos típicos da matemática financeira. Os alunos participaram ativamente das atividades. Diversos exemplos como o Exemplo 2.4 que possui uma taxa constante aplicado a juros compostos foram bem aceitos e geraram muitas discussões sobre formas de investimento. Nesta discussão falou-se também da caderneta de poupança, que tem taxas variáveis mês a mês, suscitando uma oportunidade de se desenvolver futuramente o ajuste de curvas exponencial.

O limite da soma dos infinitos termos de uma PG infinita com razão q real entre -1 e 1, com $q \neq 0$, foi desenvolvido através de problemas algébricos e geométricos, sendo abordado, intuitivamente, duas noções importantes da matemática: a *continuidade* e o *infinito* - causando estranheza e algumas dificuldades de compreensão. No entanto, apesar de não ser pretensão de que esses conceitos sejam perfeitamente compreendidos nessa etapa escolar, serviu para estimular a curiosidade e o interesse pela matemática. Foi fundamental no desenvolvimento dos exercícios o uso da calculadora. Ao final do bimestre os alunos haviam aprendido a classificar uma sequência em PA ou PG, obter a expressão do termo geral e calcular a soma dos seus termos.

Retornando às atividades no ano letivo de 2014, com a agora 2ª série do ensino médio, foram retomados os conceitos de progressões à vista dos conceitos relativos à função exponencial. Foram desenvolvidos conceitos referentes à função exponencial, tomando-se o cuidado em relacioná-la a todo o momento com o termo geral da PG.

Também foram aplicadas e desenvolvidas questões no laboratório de informática da escola à respeito da atividade *"Variação da Função Exponencial"* já existente no Portal do Projeto *"Conteúdos Digitais para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística no Ensino Médio* da Universidade Federal Fluminense (UFF/CDME, 2013), que é fruto do projeto de pesquisa de (REZENDE, 2003), quando abriu-se a discussão em grupos para assuntos como a variação e os teoremas de caracterização, além de suas aplicações em contextos diversos.

A partir de experiências anteriores, havia um receio de que os alunos revelassem dificuldade em compreender os Teoremas 2.6 e 2.8. No entanto, os exemplos do Portal *"Conteúdos Digitais"* e os Exemplos 2.7 e 2.9 vistos anteriormente, não pareciam tão difíceis de serem compreendidos pelos alunos quando enxergavam relação entre progressões e funções, centrando o trabalho na busca por regularidades e na observação do comportamento variacional das funções, transitando do discreto para o contínuo proporcionando um ganho de aprendizagem significativo.

Por fim, foi introduzido o conceito de logaritmos através do Exemplo 2.10 para conceituar o Teorema 2.11 que transforma produtos em adições. Partindo de alguns alunos intuições sobre as relações entre propriedades já conhecidas como: a função exponencial é a inversa da logarítmica e vice-versa.

Apesar das dificuldades que surgiram, as atividades desenvolvidas entre o final de 2013 e o início de 2014 proporcionaram uma experiência docente muito significativa ao desenvolver-se a compreensão de conceitos matemáticos importantes através de atividades diferenciadas, possíveis com a inversão da sequência didática.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA E O AJUSTE DE CURVAS

Para (BASSANEZI, 2011), a maior dificuldade para a adoção do processo de modelagem por professores de matemática é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional, que obedece uma sequência de pré-requisitos visando muitas das vezes o cumprimento do programa da disciplina estabelecido no currículo escolar. O autor destaca também que

> "A disposição dos dados em um sistema cartesiano e um bom ajuste dos seu valores, facilitará a visualização do fenômeno em estudo, propiciando tentativas de propostas de problemas, conjecturas ou leis de formação. A formulação de modelos matemáticos é simplesmente uma consequência deste processo. A situação colocada desta forma pode dar a falsa impressão que aprender modelagem matemática é como aprender o conteúdo de uma disciplina cristalizada. Entretanto, o aprendizado de modelagem não se restringe ao aprendizado de técnicas padronizadas ou procedimentos sequenciais tal como um *protocolo cirúrgico*. Da mesma forma que só se pode aprender a jogar futebol, jogando, só se aprende modelagem, modelando!"(BASSANEZI, 2011, p. 43)

Assim, neste capítulo discute e apresenta as técnicas do ajuste linear de curvas na elaboração de modelos. Em especial, os modelos exponenciais e logarítmicos, onde é possível perceber a relação com os teoremas 2.8 e 2.11, que as torna linearizáveis.

O ajuste de curvas ou regressão é um recurso usado para se expressar alguma tendência da relação entre duas grandezas através de uma lei de função, isto é, expressa-se alguma tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável independente x, dado um conjunto de pontos - obtidos através de uma tabela de dados. Em outras palavras, regressão é um métodos que fornece uma relação funcional quando se tem uma relação estatística.

Ainda, segundo (BASSANEZI, 2011):

> "Em termos de modelagem matemática de fenômenos caracterizados por um processo dinâmico, a formulação do modelo pode muitas vezes preceder à análise dos dados experimentais. Nestes casos, o método de ajuste de curvas é fundamental para a validação dos modelos estabelecidos a priori.[...]
>
> Em geral, o modelo depende de parâmetros e sua validação exige a estimação destes parâmetros, de modo que a curva (solução do modelo) ajustada represente, o mais próximo possível, o fenômeno estudado."(BASSANEZI, 2011, p.56)

Em algumas situações, conhece-se uma tabela de pontos (x_i, y_i), onde cada y_i é obtido experimentalmente e, deseja-se obter uma expressão analítica de uma dada curva $y = f(x)$ que melhor se ajuste a este conjunto de pontos (SOUZA, 2003). Por exemplo, sabe-se que o número y de um determinado capital, aplicado em uma poupança, após um determinado número x de meses, cresce exponencialmente com o aumento de x na forma $y = b \cdot e^{\alpha x}$, à luz das ideias desenvolvidas na Seção 2.5.1. O problema consiste em determinar os valores mais apropriados dos parâmetros b e α desta exponencial. O método dos mínimos quadrados é um dos métodos mais usados para o ajuste de curvas e a estimação de parâmetros (BASSANEZI, 2011).

3.1 MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS E O AJUSTE LINEAR

Supondo que se queira encontrar um modelo matemático para o conjunto de pontos $P = \{(x_i, y_i)/i \in \mathbb{N}\}$, (LEITHOLD, 1994, p. 992) descreve que é preciso indicar uma determinada reta que ajuste-se a este conjunto de pontos medindo as distâncias verticais entre os n pontos e a reta

$$y = ax + b, \tag{2}$$

como se pode visualizar na Figura 11.

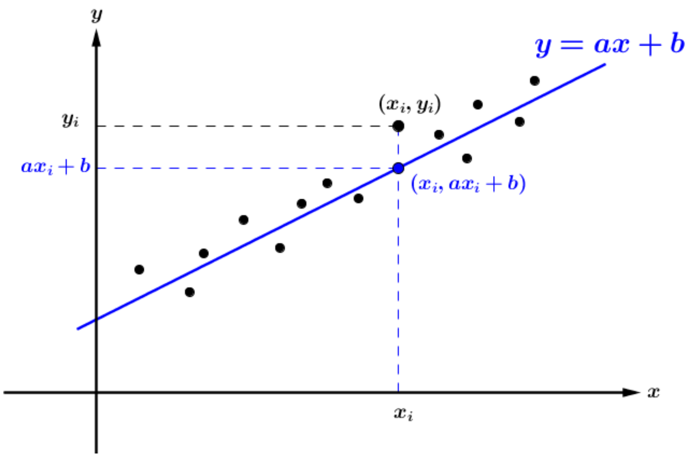


Figura 11: Gráfico ilustrativo do método dos mínimos quadrados.

O ponto (x_i, y_i) é o i-ésimo ponto e, correspondendo a ele, existe na reta o ponto $(x_i, ax_i + b)$ que é o valor que y assumirá se o modelo representar corretamente a realidade. O desvio (ou erro) entre o i-ésimo ponto e a reta é definido como d_i, onde

$$d_i = y_i - (ax_i + b).$$

A soma dos quadrados dos devios é

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2 \quad \geq \quad 0,$$

sendo igual a zero se, e somente se, cada um dos d_i for zero, isto é, quando todos os n pontos estão sobre a reta. Tomando como a reta de melhor ajuste aquela para a qual $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ é um mínimo absoluto, isto é, de uma certa maneira seja a mais próxima possível de todos os n pontos. À essa reta chama-se de *ajuste linear* ou *reta de regressão* de y em x e o processo para encontrá-la é chamado de *método dos mínimos quadrados*, ou ainda em algumas obras, como *método dos quadrados mínimos*.

Os parâmetros a e b que minimizam a expressão $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$ serão aqueles que anulam as derivadas parciais dessa expressão. Ou seja, deve-se ter

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = 0.$$

Com efeito, tem-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 & = & 0 & \Longleftrightarrow & -2\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n}[y_i-ax_i-b)] & = & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial b} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 & = & 0 & \Longleftrightarrow & -2\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot[y_i-ax_i-b)] & = & 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2\cdot\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i - \sum_{i=1}^{n}b\right] & = & 0 & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i & = & a\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i & + & nb \\ -2\cdot\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n}x_i\right] & = & 0 & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & = & a\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & + & b\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i \end{cases}$$

o que fornece o seguinte sistema de duas equações e duas incógnitas, sendo elas o parâmetro a e b:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}y_i & = & a\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i & + & nb \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i & = & a\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & + & b\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i \end{cases} \tag{5}$$

Resolvendo a primeira equação para b, tem-se

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i - a\sum_{i=1}^{n}x_i\right) \tag{7}$$

e, substituindo b na segunda equação do Sistema (5) por este valor, obtém-se

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{8}$$

Ao fazer um ajuste linear para relacionar duas variáveis, não se sabe ao certo se a reta do tipo $y = ax + b$ encontrada é de fato o melhor modelo de ajuste. O estudo que tem como objeto a verificação da existência e do grau de relação chama-se *correlação*. A *correlação linear* mede a relação existente em um conjunto de pontos (x_i, y_i) dados, em torno de uma reta $y = ax + b$ ajustada. O *coeficiente de correlação de Pearson* r é um dos instrumentos usados para medir uma correlação linear, e é dado por:

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}. \tag{9}$$

Essa expressão é obtida pela razão da covariância das variáveis x e y pelo produto dos seus desvios-padrão, ficando como sugestão ao leitor a sua análise em (COSTA NETO, 2002). O intervalo de variação de r é entre -1 e $+1$, isto é:

$$-1 \leq r \leq +1,$$

o que indica o grau de condensação dos n pontos em torno da reta ajustada. Por exemplo, a correlação será tanto mais forte quanto mais próximo r estiver de ± 1 e, será tanto mais fraca o quanto próxima estiver de zero. De acordo com (BASSANEZI, 2011), o sinal de r indica o sinal do coeficiente angular da reta ajustada. E segundo (CRESPO, 2002), tem-se que:

i) Se $r = +1$, então a correlação entre as variáveis é perfeita e positiva. Portanto, a reta ajustada é crescente;

ii) Se $r = -1$, então a correlação entre as variáveis é perfeita e negativa. Portanto, a reta ajustada é decrescente;

iii) Se $r = 0$, então não há correlação entre as variáveis;

iv) Se $0,6 \leq |r| < 1$, então existe uma correlação significativa entre as variáveis;

v) Se $0,3 \leq |r| < 0,6$, então existe uma correlação fraca entre as variáveis;

vi) Se $0 < |r| < 0,3$, então existe uma correlação insignificante entre as variáveis.

O Exemplo 3.1 ilustra como é feito o ajuste linear de curvas.

Exemplo 3.1. *Considere uma situação fictícia em que uma empresa de cosméticos oferece produtos opcionais para os seus clientes e está estudando como varia a adesão dos clientes a determinada cesta de produtos, acrescentando ou tirando produtos em função do preço cobrado, obteve a Tabela 4.*

Preço em R$ (x)	Número de adesões (y)
10	50
15	51
20	48
25	43
30	42
35	45
40	39
45	38
50	40
55	34
60	32
70	30
90	25

Tabela 4: Dados de uma situação fictícia em que o número de adesões à cesta de produtos é dado em função do preço em R$.

Neste exemplo, determinar-se-á o grau de correlação através do coeficiente de correlação de Pearson e determinar uma reta ajustada que explique a relação entre x e y para que se possa estimar uma tendência a partir dela.

Primeiramente, organiza-se os dados como na Tabela 5 para calcular os somatórios necessários para determinar os parâmetros a e b, e em seguida calcula-se o coeficiente de correlação de Pearson dado pela expressão (9).

Com efeito, tem-se $n = 13$ e, substituindo os dados da Tabela 5 em (9) obtém-se:

$$r = \frac{13 \cdot 19545 - 545 \cdot 517}{\sqrt{[13 \cdot 29225 - (545)^2] \cdot [13 \cdot 21313 - (517)^2]}} = \frac{-27680}{28473,8828} \cong -0,9721, \qquad (10)$$

ou seja, a correlação negativa é significativa.

Preço em R$ (x)	Nº de adesões (y)	$x \cdot y$	x^2	y^2
10	50	500	100	2500
15	51	765	225	2601
20	48	960	400	2304
25	43	1075	625	1849
30	42	1260	900	1764
35	45	1575	1225	2025
40	39	1560	1600	1521
45	38	1710	2025	1444
50	40	2000	2500	1600
55	34	1870	3025	1156
60	32	1920	3600	1024
70	30	2100	4900	900
90	25	2250	8100	625
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 545$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = 517$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 19545$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 29225$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 21313$

Tabela 5: Variação do número de adesões em relação ao preço e dados auxiliares.

Agora, substituindo os valores da Tabela 5 em (8) e (7), obtém-se:

$$a = \frac{13 \cdot 19545 - 545 \cdot 517}{13 \cdot 29225 - (545)^2} = \frac{-27680}{82900} \cong -0,33 \tag{11}$$

e

$$b = \frac{1}{13} \cdot [517 - (-0,33) \cdot 545] = \frac{696,85}{13} \cong 53,6. \tag{12}$$

Logo, de (11) e (12) seque que a reta ajustada é

$$y = -0,33 \cdot x + 53,6.$$

A partir da função acima encontrada pode-se estimar que para um preço de R$ 100,00 espera-se uma adesão de aproximadamente 21 pessoas, já para um preço de R$ 120,00 espera-se uma adesão de 14 pessoas, e assim por diante.

3.2 AJUSTE DE CURVAS: FUNÇÕES LINEARIZÁVEIS

O modelo de ajuste linear visto na Seção 3.1 é útil em muitas situações reais. Certas funções, mediante transformações convenientes, devem ser linearizadas antes de aplicar o *Método dos Mínimos Quadrados*, a fim de obter o sistema de equações lineares para se determinar os parâmetros, o que torna simples a solução do problema do ajuste de curvas. O procedimento varia, dependendo do tipo de função. Nesta seção será ilustrado o procedimento de linearização para as funções exponencial e logarítmica.

3.2.1 AJUSTE LINEAR NO MODELO EXPONENCIAL

Se admitir que a função de regressão seja uma função do tipo exponencial definida por

$$y = b \cdot e^{ax}, \text{ com } b > 0, \tag{13}$$

e aplicando logaritmos naturais em ambos os lados da igualdade, obtém-se:

$$ln\,(y) = ln\,(b \cdot e^{ax}),$$

e pelo Teorema 2.11, sabe-se que a função logarítmica transforma produtos em somas. Assim, segue:

$$ln\,(y) = ln\,(b) + ln\,(e^{ax}) \quad \Longrightarrow \quad ln\,(y) = ax + ln\,(b).$$

Considerando $Y = ln\,(y)$, $\alpha = a$ e $\beta = ln\,(b)$, passa-se a ter o problema de estimar os parâmetros da reta

$$Y = \alpha \cdot x + \beta, \tag{14}$$

o qual se sabe resolver pelo ajuste linear de curvas. Para tanto, basta trabalhar com os valores de $x_i \cdot Y_i$ numa tabela com dados, como na Tabela 5, de modo que $Y_i = ln\,(y_i)$. Observe ainda, que se $\alpha > 0$, a exponencial é crescente e se $\alpha < 0$, é decrescente.

Como pode ver, essa tranformação da função do tipo exponencial nada mais é do que a generalização da ideia de linearidade no seu domínio, desenvolvida à luz do Teorema de Caracterização 2.8, na relação entre duas variáveis reais. Será visto na Seção 4.1 uma aplicação deste tipo de modelo de ajuste na evolução mensal de um capital em uma conta poupança.

3.2.2 AJUSTE LINEAR NO MODELO LOGARÍTMICO

Agora, admitindo-se que a função de regressão seja uma função logarítmica na forma

$$y = a \cdot ln\,(x) + b, \tag{15}$$

onde a e b são parâmetros do ajuste. Linearizando (15), pondo $X = ln\,(x)$, $\alpha = a$ e $\beta = b$, passa-se a ter o problema de estimar os parâmetros da reta:

$$y = \alpha \cdot X + \beta. \tag{16}$$

Assim, como foi visto na Seção 3.2.1, será trabalhado com os valores de $X_i \cdot y_i$ numa tabela com os dados, de modo que $X_i = ln\,(x_i)$. Para tanto, será visto uma aplicação interessante de um experimento interdisciplinar na Seção 4.2, relacionando o volume de um gás com o tempo de reação.

4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO

Definidos os procedimentos para a linearização da função do tipo exponencial e logarítmica no capítulo anterior, este capítulo apresentará duas atividades de modelagem matemática com condições favoráveis para que os alunos do ensino médio se sintam interessados e motivados pelas suas aplicações, permitindo aliar a teoria e a prática, motivando-os à procura do entendimento da realidade que os cerca e na busca de meios para agir sobre ela (estimativa) e transformá-la.

A primeira atividade é um problema com base em um extrato de uma aplicação em conta poupança, que ao contrário do Exemplo 2.4, não possui uma taxa fixa - mas sim, variável. Já a segunda atividade propõe um experimento que estuda a Lei dos Gases configurando uma ótima oportunidade de interdisciplinaridade entre os componentes curriculares de matemática, química e física - no melhor estilo "contando"e "medindo" proposto por (BASSANEZI, 2011) para se começar a modelar.

4.1 ATIVIDADE 1: A CADERNETA DE POUPANÇA

Alguns livros didáticos abordam o conceito de juros compostos relacionando-o com a caderneta de poupança à uma taxa fixa. Um absurdo, haja visto que no mundo real isso não acontece. Voltando ao Exemplo 2.4. Supondo que os pais de Cadu aplicaram $R\$15.000,00$ não mais em um investimento de rendimento fixo, mas sim em uma caderneta de poupança, onde as taxas variam de um mês para o outro. Após um ano, os pais de Cadu analisaram na Tabela 6 a evolução do capital (y_i) de acordo com o mês (x_i), com $x_i \in \mathbb{N}$ e $0 \leq i \leq 12$, tal que $i \in \mathbb{N}$, aplicado inicialmente na caderneta de poupança.

Quando o assunto é finanças, o bom é se organizar por meio de uma planilha. Essa planilha pode ser feita com lápis e papel ou ainda usando os mecanismos que a tecnologia dispõe, por isso sugerimos que o leitor utilize uma planilha eletrônica para criar tabelas e gráficos - como por exemplo, o software gratuito *LibreOffice.org Calc* (LIBREOFFICE, 2013) - para o desenvolvimento dessa atividade. Para tanto, se usarmos os dados da Tabela 7 à luz dos conhecimentos apresentados nas Seções 3.1 e 3.2 referentes ao ajuste linear no modelo exponencial, segue:

i) Coeficiente de correlação de Pearson r:

Como foi feita a mudança de variável $Y_i = ln\,(y_i)$, tem-se que

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right]}}.$$

Portanto, para $n = 13$, tem-se

$$r = \frac{13 \cdot (756,493) - 78 \cdot (125,7814)}{\sqrt{[13 \cdot (650) - (78)^2] \cdot [13 \cdot (1217,015) - (125,7814)^2]}} \cong 0,9964\,,$$

ou seja, a correlação é positiva e muito forte.

Mês (x_i)	Capital (y_i)	$\frac{y_{i+1} - y_i}{y_i}$
0	R$ 15.000,00	
1	R$ 15.113,52	0,0076
2	R$ 15.294,64	0,0120
3	R$ 15.465,60	0,0112
4	R$ 15.661,88	0,0127
5	R$ 15.835,68	0,0111
6	R$ 15.854,91	0,0012
7	R$ 16.023,01	0,0106
8	R$ 16.237,24	0,0134
9	R$ 16.524,28	0,0177
10	R$ 16.542,81	0,0011
11	R$ 16.708,09	0,0100
12	R$ 16.875,03	0,0100

Tabela 6: Rendimento da caderneta de poupança e variação do capital mês a mês.

ii) Cálculo dos parâmetros α e β e a determinação da equação da reta auxiliar:

Como

$$\alpha = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

segue

$$\alpha = \frac{13 \cdot (756,493) - (78) \cdot (125,7814)}{13 \cdot (650) - (78)^2} \quad \cong \quad 0,009915$$

Mês (x_i)	Capital (y_i)	$Y_i = ln\,(y_i)$	$x_i \cdot Y_i$	x_i^2	Y_i^2
0	R$ 15.000,00	9,615805	0	0	92,46372
1	R$ 15.113,52	9,623345	9,623345	1	92,60877
2	R$ 15.294,64	9,635257	19,27051	4	92,83819
3	R$ 15.465,60	9,646374	28,93912	9	93,05252
4	R$ 15.661,88	9,658985	38,63594	16	93,29599
5	R$ 15.835,68	9,670021	48,35011	25	93,50931
6	R$ 15.854,91	9,671235	58,02741	36	93,53278
7	R$ 16.023,01	9,681781	67,77247	49	93,73689
8	R$ 16.237,24	9,695062	77,5605	64	93,99423
9	R$ 16.524,28	9,712586	87,41327	81	94,33432
10	R$ 16.542,81	9,713707	97,13707	100	94,35611
11	R$ 16.708,09	9,723649	106,9601	121	94,54934
12	R$ 16.875,03	9,73359	116,8031	144	94,74278
$\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{78}$		$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathbf{125,7814}$	$\sum_{i=1}^{n} x_iY_i = \mathbf{756,493}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathbf{650}$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \mathbf{1217,015}$

Tabela 7: Rendimento da caderneta de poupança e dados auxiliares.

e

$$\beta = \frac{1}{13} \cdot [(125,7814) - (0,009915) \cdot (78)] \quad \cong \quad 9,616.$$

Logo, a equação (14) da reta auxiliar ajustada é

$$Y = 0,009915 \cdot x + 9,616, \tag{17}$$

como se pode visualizar na Figura 12:

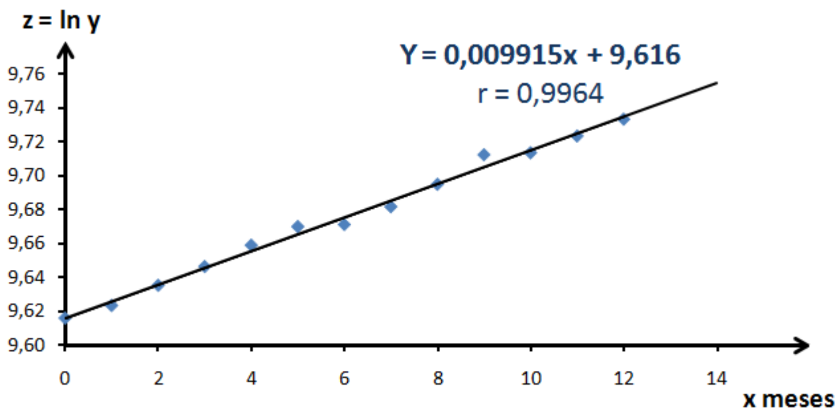


Figura 12: Reta auxiliar: $Y = ln\,(y)$.

iii) Determinar a função do tipo exponencial ajustada:

A partir da equação (17) substituindo $Y = ln\,(y)$ e, tomando-a como antilogaritmo em ambos os lados da igualdade na base e, segue:

$$e^{ln\,(y)} = e^{0,009915 \cdot x + 9,616} \Longrightarrow y = e^{9,616} \cdot e^{0,009915 \cdot x}$$

determinando dessa forma a equação (13) do ajuste da curva do tipo exponencial apresentada na Figura 13:

$$y = 15.002,92 \cdot e^{0,009915 \cdot x}. \tag{18}$$

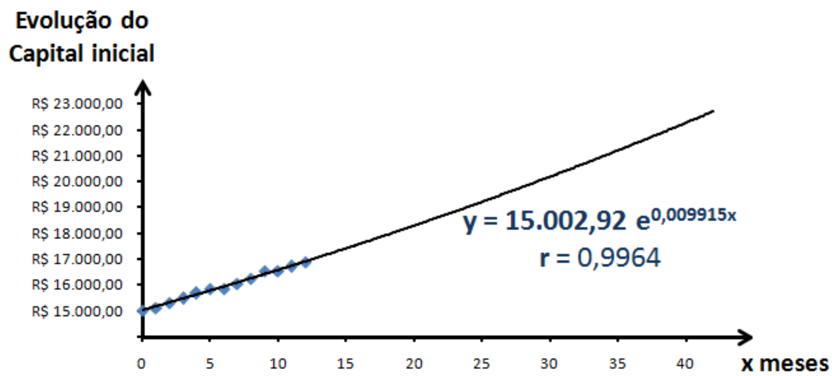


Figura 13: Equação do ajuste exponencial $y = 15.002,92 \cdot e^{0,009915 \cdot x}$ **para uma aplicação financeira.**

Concluída essa etapa, pode-se estimar qual o valor do capital aplicado inicialmente após um ano e meio usando a equação (18):

$$y = 15.002,92 \cdot e^{0,009915 \cdot 18} \quad \Longrightarrow \quad y \cong 17.934,38,$$

isto é, após 18 meses o capital passou de $R\$15.000,00$ para $R\$17.934,38$ aproximadamente.

Sabe-se da Seção 2.5.1 que o parâmetro α está intimamente ligado à taxa de crescimento da função exponencial ajustada, ou seja, é possível escrevê-la da seguinte forma:

$$y = 15.002,92 \cdot (1 + 0,009915)^x,$$

o que significa que a taxa média de juros, no período de um ano, foi de $0,9915\%$ ao mês.

4.2 ATIVIDADE 2: A LEI DOS GASES E O AJUSTE DE CURVAS: UM EXPERIMENTO INTERDISCIPLINAR

De acordo com (PENTEADO; TORRES, 2005), a quantidade de um gás em vez de ser expressa pela massa *m*, costuma ser caracterizada pelo número de *mols n*, que constitui a grandeza fundamental de quantidade de matéria no Sistema Internacional (SI). Para melhor entendermos o significado dessa grandeza é necessário conceituar *mol* e *massa molar*.

A quantidade de *1 mol* de uma substância corresponde à quantidade de matéria representada por $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas dessa substância. A sua massa, em gramas, constitui-se em *massa Molar (M)*. O número de mols n de um gás pode ser relacionado com a massa m e com a massa molar M através de uma regra de três simples e direta:

$$\begin{array}{lcl} 1\,mol & \longrightarrow & massa\,molar\,M \\ n\,mols & \longrightarrow & massa\,m \end{array}$$

o que nos dá:

$$n = \frac{m}{M}.$$

A relação entre os valores das variáveis de estado de um gás perfeito e sua quantidade representada em *n mols*, é estabelecida pela *Equação de Clapeyron* por ter sido estabelecida pela primeira vez pelo físico francês Paul-Émile Clapeyron (1799-1864), também conhecida como *equação de estado de um gás perfeito ou ideal* (PENTEADO; TORRES, 2005, p. 40):

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \text{ou} \quad p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T. \tag{19}$$

Onde:

p: pressão (atm);
V: volume (l);
n: número de *mols* dos gás;
R: Constante universal dos gases perfeitos $\left(R = 0,082 \cdot \frac{atm \cdot l}{mol \cdot K}\right)$;
T: tempereratura absoluta.

Sabe-se que a densidade d relaciona a massa m de um corpo com o volume V por ele ocupado. Quanto maior a densidade de um corpo, maior será a quantidade de matéria existente em uma unidade de volume do mesmo. Entretanto, nos gases o cálculo desta grandeza não é tão simples como é nos sólidos e líquidos (onde apenas se divide a massa pelo volume: $d = \frac{m}{V}$), visto que um gás ocupa o volume do seu recipiente, podendo uma mesma quantidade ocupar diversos espaços. Isso acontece porque os gases se comportam de forma desordenada em virtude do grau de liberdade que possuem, ocupando totalmente o volume do recipiente a ele oferecido.

Pela Equação de Clapeyron, tem-se que $V = \dfrac{m \cdot R \cdot T}{Mp}$, substituindo em $d = \dfrac{m}{V}$, obtém-se:

$$d = \frac{m}{\frac{m \cdot R \cdot T}{Mp}} = \frac{M \cdot p}{R \cdot T}. \tag{20}$$

A unidade de densidade dos gases costuma ser g/L.

A atividade foi inspirada em experimento desenvolvido em (SILVA et al., 1990, p. 50) e foi elaborada em conjunto com o Prof. Dr. Rogério Haruo Watanabe, professor de química da Escola Técnica Estadual de Registro/SP, com o intuito de ser desenvolvida futuramente na disciplina de Projeto Técnico-Científico ou através de oficinas com os alunos no Ensino Médio proporcionando uma interdisciplinaridade entre os componentes curriculares de química, física e matemática da instituição. O experimento não se constitui em uma pesquisa científica tendo, portanto, apenas fins didático-pedagógicos.

OBJETIVO DO EXPERIMENTO

O objetivo dessa atividade através deste experimento é determinar a massa molar de um gás liberado na reação de um comprimido efervescente com água. Comprimidos efervescentes, assim como os antiácidos, são à base de bicarbonato de sódio $(NaHCO_3)$. Nessa reação, pode gerar confusão se o gás liberado é Dióxido de Carbono (CO_2) ou Oxigênio (O_2).

Sendo assim, o experimento proposto pode ser realizado para o esclarecimento dessa dúvida. A Figura 14 ilustra o sistema a ser utilizado. Neste experimento, o gás liberado ocupará o lugar da água dentro da proveta, com isso, tem-se o valor do volume ocupado pela água e pelo gás - sendo este último o que mais interessa do ponto de vista físico-químico. Como a única pressão no sistema será a pressão atmosférica que é exercida na água, pode-se calcular a massa molar do gás pela Equação de Clayperon (19). Neste experimento vale ressaltar que a massa do comprimido utilizado deve ser conhecida.

Concluída a análise do ponto de vista físico-químico, é analisada a cinética da sua reação, isto é, quer-se analisar a velocidade da reação química que é realizada no experimento, obtendo-se dessa forma uma tabela de dados que relaciona o tempo em um primeiro momento, com o decrescimento do volume de água e, em um segundo momento, com o crescimento do volume do gás dentro da proveta.

Com os conhecimentos desenvolvidos no capítulo anterior, será verificado entre os modelos de ajuste exponencial e logarítmico quais deles é o mais adequado para representar a relação entre as variáveis volume e tempo, através do coeficiente de correlação de Pearson r. Primeiramente, serão analisados o volume da água na proveta(V_a) em relação ao tempo (t) e em seguida, o volume do gás na proveta (V_g), que empurra a água para baixo, com a evolução do tempo (t).

MATERIAIS UTILIZADOS

Abaixo estão os materiais utilizados no experimento e que estão presentes na Figura 14, de acordo com a numeração:

- copo Béquer 1000 ml (1);
- frasco Kitassato 250 ml (2);

- proveta Graduada em 500 ml e não-graduada em 160 ml (volume total de 660 ml) (3);
- suporte Universal (4);
- garra de Fixação (5);
- mangueira (6);
- rolha (7);
- cronômetro;
- película plástica;
- balança semi-analítica;
- comprimido efervescente de bicarbonato de sódio $(NaHCO_3)$;
- água (H_2O);

PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL REALIZADO

1. Com o auxílio da balança semi-analítica, pesou-se a massa do comprimido efeverscente.
2. No copo béquer, aplicou-se um volume de água correspondente a metade de sua capacidade.
3. Completou-se o volume da proveta com água, com ajuda de uma película plástica em sua extremidade, com objetivo de evitar a perda de água, introduzindo-a virada de ponta-cabeça dentro do copo béquer, com cuidado para que não entrassem bolhas de ar em seu interior.
4. Acoplou-se a proveta na garra de fixação junto ao suporte universal.
5. Aplicou-se uma das extremidades da mangueira na saída lateral do frasco kitassato, introduzindo a outra extremidade dentro da proveta - com cuidado para que não haja a entrada de ar em seu interior.
6. Aplicou-se 50 ml de água dentro do frasco kitassato, introduzindo no mesmo um comprimido efeverscente.
7. Em seguida, acoplou-se a rolha na extremidade do frasco kitassato, obtendo assim o esquema final dos materiais conforme a Figura 14.

8. Com o auxílio de um cronômetro, registrou-se o tempo da reação anotando todos os resultados obtidos, organizando-os em uma tabela.

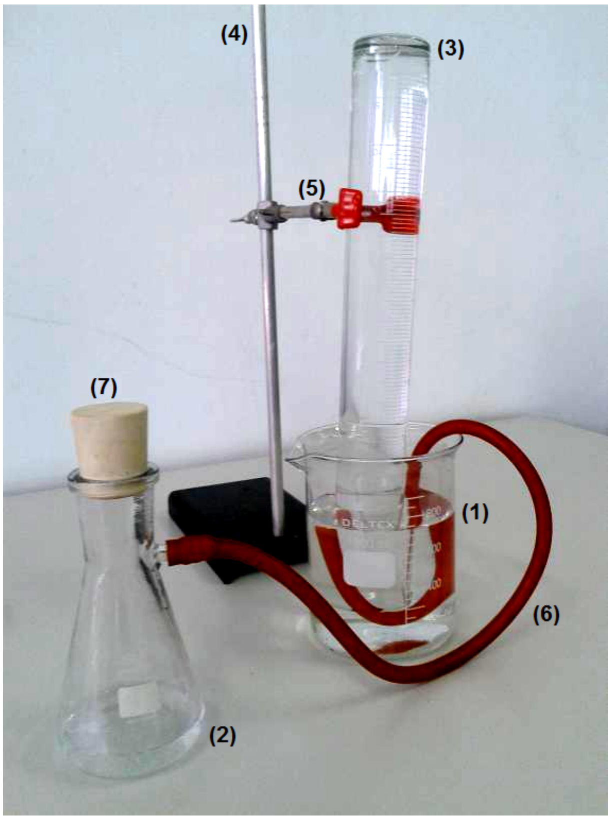


Figura 14: Esquema final dos materiais no experimento.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A temperatura do laboratório no momento do experimento era de $29,2\,^{\circ}$C, convertendo para a escala Kelvin (unidade utilizada em nossa equação), tem-se $T = 273,15 + 29,2 = 302,35\,^{\circ}$K. A pressão considerada era de $1\,atm$. Verificou-se através da balança semi-analítica que a massa de comprimido efeverscente era $3,98\,g$, a massa do kitassato com $50\,ml$ de água era $286,89\,g$. Somando-se as duas massas, tem-se que a massa inicial era de $290,87\,g$. Contudo, a massa contida no kitassato ao interrompermos a reação era de $290,18\,g$. Portanto, a massa do gás que estava presente no kitassato e migrou para a proveta era de $m = 0,69\,g$.

O volume inicial de água na proveta estava em $660\,ml$ e após toda a reação o volume mudou para $280\,ml$. Sendo assim o gás que migrou do kitassato para a proveta continha um volume de $V = 380\,ml$. Após termos todos os dados disponíveis, devem ser substituídos na Equação de Clapeyron (19) para que se possa determinar a massa molar M. Assim,

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Longrightarrow \qquad 1\,atm \cdot 0,380\,l = \frac{0,69}{M}\,g \cdot \left(R = 0,082 \cdot \frac{atm \cdot l}{mol \cdot K}\right) \cdot 302,35K,$$

que após algumas manipulações, obtém-se:

$$M = 45,01\, g/mol.$$

Portanto, com o experimento realizado conseguimos determinar o volume e a massa molar ocupado pelo gás presente na amostra do comprimido efervescente.

A aplicação do bicarbonato de sódio contido no comprimido efervescente na água resulta na equação:

$$NaHCO_3 + H_2O \quad \longrightarrow \quad NaOH + CO_2 + H_2O.$$

Mais detalhes sobre essa reação podem ser encontrados em (SALDANHA, 2009, p. 4).

Provavelmente o gás formado foi o dióxido de carbono (CO_2) que possui massa molar $44\, g/mol$, haja visto que a massa molar da água (H_2O) é de apenas $18,02\, g/mol$. Como a massa molar encontrada aproxima-se da massa molar do CO_2, concluí-se que esta diferença de massa molar se deve à prováveis erros e perdas de gases durante a análise. Os constituintes do comprimido efervescente são carbonato de sódio (Na_2CO3), bicarbonato de sódio $(NaHCO_3)$, ácido acetilsalicílico $(C_9H_8O_4)$ e ácido cítrico $(C_6H_8O_7)$ que, em contato com a água, promovem a liberação de gás carbônico (efervescência).

Inicialmente, é possível notar que a quantidade de gás liberado é alta e faz com que a reação seja rápida aumentando muito rápido o volume do gás na proveta (V_g) empurrando a água para fora, mas com o tempo a quantidade de gás liberado diminui, desacelerando o crescimento do volume do gás - lembrando um gráfico de comportamento logarítmico - o que nos faz presumir que a relação entre o Volume do gás na proveta (V_g) e o tempo (t) se ajustam melhor a um modelo logarítmico. Por outro lado, como inicialmente a quantidade de gás liberada é alta fazendo com que a reação seja rápida, tem-se que o volume da água decai muito rápido e após algum tempo, decai mais devagar - lembrando um gráfico de comportamento exponencial - o que nos faz presumir que a relação entre o Volume da água na proveta (V_a) e o tempo (t) se ajustem melhor a um modelo exponencial.

Comprimidos com maiores valores de massa é claro que vão liberar maior quantidade de gás. Neste procedimento foi utilizado um comprimido inteiro, no entanto, vale lembrar que quanto maior for a quantidade da amostra de comprimido efervescente, maior será a quantidade de gás liberado, uma vez que a água está em contato com maior quantidade de material de partida. À medida que o comprimido vai tendo menor massa, tem-se que menor quantidade de gás é liberada.

Para ter a certeza que se trata de um modelo exponencial e logarítmico, respectivamente, durante a realização do experimento os valores de volume, tanto da água como do gás, foram anotados em determinados intervalos de tempo com o auxílio de um cronômetro para permitir a estimativa de um modelo do ajuste de curvas, conforme a Tabela 8 que pode ser vista mais adiante.

CINÉTICA DO EXPERIMENTO E O AJUSTE DE CURVAS

Registrado o tempo da reação, organizou-se os resultados obtidos na Tabela 8:

Tempo em segundos (t)	Volume de água na proveta em ml (V_a)	Volume do gás liberado na proveta em ml (V_g)
0	660	0
10	570	90
20	475	185
30	395	265
40	345	315
50	310	350
60	290	370
70	280	380

Tabela 8: Dados anotados durante o experimento.

Linearizando as funções do tipo exponencial e logarítmica, à luz dos procedimentos apresentados nas Seções 3.2.1 e 3.2.2, organizar-se-á uma tabela para calcular os somatórios necessários para determinar o grau de correlação através do coeficiente de Pearson r para cada situação.

Primeiro será analisada a relação do V_a e o tempo t da reação química para se verificar qual dos modelos (exponencial ou logaritmo) ajusta-se melhor a ela. Em seguida será feito o mesmo, será analisada a relação entre o V_g e o tempo t da reação.

A) CORRELAÇÃO ENTRE O VOLUME DA ÁGUA NA PROVETA E O TEMPO DE REAÇÃO:

É preciso analisar qual o melhor modelo de ajuste para a correlação do volume da água na proveta (V_a) e o tempo de reação t. Antes, é necessário atentar-se para o fato de que a primeira linha da tabela no modelo logarítmico não pode considerar $x_1 = 0$, pois não é possível $ln\,(0)$, já que não existe um número real k positivo, tal que $e^k = 0$. No entanto, deve-se escolher um valor tão próximo de 0 quanto se queira. Logo, para os cálculos da Tabela 10 será considerado para a primeira linha o valor $x_1 = 1$ para o qual se obtém$ln\,(1) = 0$ e esse sim existe.

Sendo assim, será preocupação neste segundo momento organizar duas tabelas, uma tabela para o modelo exponencial e a outra para o modelo logarítmico, para calcular os somatórios necessários para determinar o grau de correlação do coeficiente de Pearson r nos dois casos. Observe ainda que ambas as tabelas possuem $n = 8$ termos. Daí, será determinado quais dos dois modelos se ajustam melhor.

i) Tabela adequada com somatórios para o ajuste exponencial:

$\mathbf{t(x_i)}$	$\mathbf{V_a(y_i)}$	$\mathbf{Y_i = ln\,(y_i)}$	$\mathbf{x_i \cdot Y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{Y_i^2}$
0	660	6,49224	0	0	42,14918
10	570	6,345636	63,45636	100	40,2671
20	475	6,163315	123,2663	400	37,98645
30	395	5,978886	179,3666	900	35,74707
40	345	5,843544	233,7418	1600	34,14701
50	310	5,736572	286,8286	2500	32,90826
60	290	5,669881	340,1929	3600	32,14755
70	280	5,63479	394,4353	4900	31,75085
$\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{280}$		$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathbf{47,86486}$	$\sum_{i=1}^{n} x_iY_i = \mathbf{1621,288}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathbf{14000}$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \mathbf{287,1035}$

Tabela 9: $V_a \times t$: Tabela adequada com os somatórios para o ajuste exponencial.

Como visto anteriormente, fazendo a mudança de variável $Y_i = ln\,(y_i)$ na equação (9), tem-se que

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_iY_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right]}}. \tag{21}$$

ii) Tabela adequada com somatórios para o ajuste logarítmico:

$\mathbf{t(x_i)}$	$\mathbf{X_i = ln(x_i)}$	$\mathbf{V_g(y_i)}$	$\mathbf{X_i \cdot y_i}$	$\mathbf{X_i^2}$	$\mathbf{y_i^2}$
1	0	660	0	0	435600
10	2,3026	570	1312,4735	5,3019	324900
20	2,9957	475	1422,9728	8,9744	225625
30	3,4012	395	1343,4730	11,5681	156025
40	3,6889	345	1272,6634	13,6078	119025
50	3,9120	310	1212,7271	15,3039	96100
60	4,0943	290	1187,3599	16,7637	84100
70	4,2485	280	1189,5787	18,0497	78400
	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbf{24,6433}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \mathbf{3325}$	$\sum_{i=1}^{n} X_iy_i = \mathbf{8941,2484}$	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathbf{89,5696}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \mathbf{1519775}$

Tabela 10: $V_a \times t$: Tabela adequada com os somatórios para o ajuste logarítmico.

Fazendo a mudança de variável $X_i = ln\,(x_i)$ na equação (9), tem-se que

$$r = \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]\cdot\left[n\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}. \tag{22}$$

iii) Cálculo dos coeficientes de Pearson r:

Substituindo os valores das Tabelas 9 e 10 em (21) e (22), respectivamente, obtém-se como resultados aproximados os valores dos coeficientes para cada modelo na Tabela 11:

Coeficiente de Pearson r	
Modelo exponencial	Modelo logarítmico
-0,9797	-0,9483

Tabela 11: Comparação entre o grau de correlação entre V_a e t em cada modelo.

Logo, pode-se concluir que o maior grau de correlação entre o volume da água (V_a) e o tempo (t), em valor absoluto, ocorre no modelo exponencial. Portanto, a função que descreve melhor a relação entre V_a e t é a função do tipo exponencial.

Definindo os parâmetros dessa função, tem-se:

iii) Cálculo dos parâmetros α e β:

Considerando as equações (8) e (7) tem-se, respectivamente:

$$\alpha = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{23}$$

e

$$\beta = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\right). \tag{24}$$

Substituindo os valores da Tabela 9 nas equações (23) e (24), segue que:

$$\alpha = \frac{8\cdot(1621,288) - (280)\cdot(47,86486)}{8\cdot(14000) - (280)^2} \quad \cong \quad -0,0129$$

e

$$\beta = \frac{1}{8}\cdot[(47,86486) - (-0,01285)\cdot(280)] \quad \cong \quad 6,4330.$$

Logo, a equação (14) da reta auxiliar ajustada é

$$Y = -0,0129 \cdot x + 6,4330. \tag{25}$$

iv) Determinar a função do tipo exponencial ajustada:

A partir da equação (25) substituindo $Y = ln\,(y)$ e, tomando-a como antilogaritmo em ambos os lados da igualdade na base e, segue:

$$e^{ln\,(y)} = e^{-0,0129 \cdot x + 6,4330} \Longrightarrow y = e^{6,4330} \cdot e^{-0,0129 \cdot x}$$

determinando dessa forma a equação (13) do ajuste da curva do tipo exponencial:

$$y = 622,0373 \cdot e^{-0,0129 \cdot x},$$

ou ainda,

$$V_a = 622,0373 \cdot e^{-0,0129 \cdot t}, \tag{26}$$

que está apresentada na Figura 15 gerada em uma planilha eletrônica, bem como os cálculos feitos na Tabela 9.

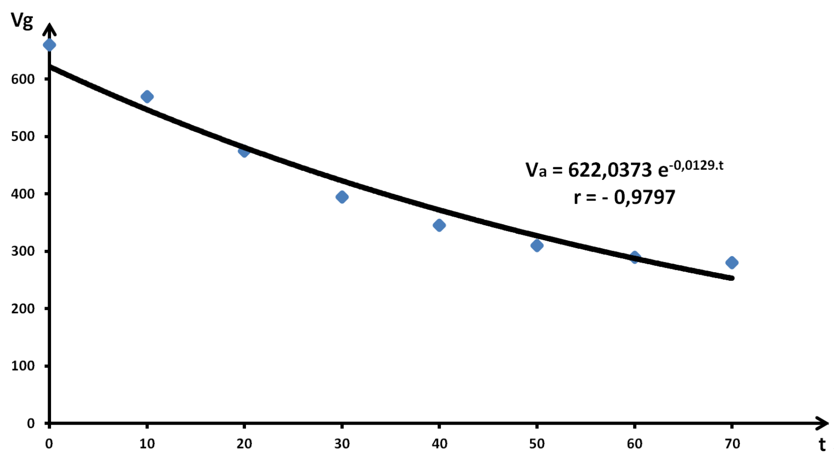


Figura 15: Equação do ajuste exponencial $V_a = 622,0373 \cdot e^{-0,0129 \cdot t}$**.**

Assim, é possível estimar qual o volume da água na proveta após 2 minutos, ou seja, 120 segundos usando a equação (26), por exemplo:

$$V_a = 622,0373 \cdot e^{-0,0129 \cdot 120} \quad \Longrightarrow \quad V_a \cong 133,3\,ml,$$

isto é, após 120 segundos o volume da água dentro da proveta passou de $660\,ml$ para $133,3\,ml$, aproximadamente.

B) CORRELAÇÃO ENTRE O VOLUME DO GÁS NA PROVETA E O TEMPO DE REAÇÃO:

Antes de organizar as tabelas para serem verificadas as correlações para cada tipo de ajuste, seja ele exponencial ou logarítmico, deve-se atentar para o fato de que a primeira linha da tabela no modelo lagarítmico não pode se considerar $x_1 = 0$, pois não é possível $ln(0) = 0$. Assim, é possível escolher um valor tão próximo de 0 quanto se queira. Logo, para os cálculos da Tabela 13 será considerado para a primeira linha o valor $x_1 = 1$ para o qual se obtém $ln(1) = 0$ e, portanto, $y_1 = 0$. Da mesma forma, para a Tabela 12 no modelo exponencial será considerado para a primeira linha $x_1 = 0$ e $y_1 = 1$ para que se tenha $Y_1 = ln(y_1)$, ou seja, $Y_1 = 0$ e assim não haver uma perda significativa de domínio, já que a maior efervescência acontece no começo da reação.

Feito isso, será preocupação neste segundo momento organizar duas tabelas, uma para o modelo exponencial (Tabela 12) e a outra para o modelo logarítmico (Tabela 13), para calcular os somatórios necessários para determinar o grau de correlação do coeficiente de Pearson r. Observe ainda que ambas as tabelas possuem $n = 8$ termos. Daí, será determinado quais dos dois modelos se ajustam melhor.

i) Tabela adequada para o ajuste exponencial:

Considere a Tabela 12.

$\mathbf{t(x_i)}$	$\mathbf{V_g(y_i)}$	$\mathbf{Y_i = ln(y_i)}$	$\mathbf{x_i \cdot Y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{Y_i^2}$
0	1	0	0	0	0
10	90	4,4998	44,9981	100,0000	20,2483
20	185	5,2204	104,4071	400,0000	27,2521
30	265	5,5797	167,3919	900,0000	31,1334
40	315	5,7526	230,1029	1600,0000	33,0921
50	350	5,8579	292,8967	2500,0000	34,3154
60	370	5,9135	354,8102	3600,0000	34,9695
70	380	5,9402	415,8120	4900,0000	35,2856
$\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbf{280}$		$\sum_{i=1}^{n} Y_i = \mathbf{38,7641}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i = \mathbf{1610,4188}$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \mathbf{14000}$	$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \mathbf{216,2964}$

Tabela 12: $V_g \times t$: Tabela adequada com os somatórios para o ajuste exponencial.

ii) Tabela adequada para o ajuste logarítmico:

Considere a Tabela 13.

$\mathbf{t(x_i)}$	$\mathbf{X_i = ln(x_i)}$	$\mathbf{V_g(y_i)}$	$\mathbf{X_i \cdot y_i}$	$\mathbf{X_i^2}$	$\mathbf{y_i^2}$
1	0	0	0	0	0
10	2,3026	90	207,2327	5,3019	8100
20	2,9957	185	554,2105	8,9744	34225
30	3,4012	265	901,3173	11,5681	70225
40	3,6889	315	1161,9970	13,6078	99225
50	3,9120	350	1369,2081	15,3039	122500
60	4,0943	370	1514,9075	16,7637	136900
70	4,2485	380	1614,4282	18,0497	144400
	$\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbf{24,6433}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i = \mathbf{1955}$	$\sum_{i=1}^{n} X_i y_i = \mathbf{7323,3012}$	$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathbf{89,5696}$	$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \mathbf{615575}$

Tabela 13: $V_g \times t$: Tabela adequada com os somatórios para o ajuste logarítmico.

iii) Cálculo dos coeficientes de Pearson r:

Substituindo os valores das Tabelas 12 e 13 em (21) e (22), respectivamente, obtém-se como resultados aproximados os valores dos coeficientes para cada modelo na Tabela 14:

Coeficiente de Pearson r	
Modelo exponencial	Modelo logarítmico
0,7337	0,9483

Tabela 14: Comparação entre o grau de correlação entre V_g e t em cada modelo.

Logo, pode-se concluir que o maior grau de correlação entre o volume do gás (V_g) e o tempo (t) ocorre no modelo logarítmico, como previa-se na Seção 4.2 em *"Resultados e Discussões"*. Portanto, serão determinados os parâmetros necessários para encontrar a equação (15) no ajuste logarítmico na forma:

$$y = a \cdot ln\,(x) + b,$$

através da equação (16) da reta ajustada

$$y = \alpha \cdot X + \beta,$$

com $X = ln\,(x)$, $a = \alpha$ e $b = \beta$.

iv) Determinando os parâmetros α e β:

Considerando as equações (8) e (7) tem-se, respectivamente:

$$\alpha = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{27}$$

e

$$\beta = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} X_i\right). \tag{28}$$

E, substituindo os valores da Tabela 13 nas equações (27) e (28), obtém-se aproximadamente:

$$\alpha = 95,261 \quad \text{e} \quad \beta = -49,0678.$$

Logo, $y = 95,261 \cdot X - 49,0678$ e, fazendo a substituição $X = ln(x)$, segue:

$$y = 95,261 \cdot ln(x) - 49,0678,$$

obtendo dessa forma o modelo logarítmico que relaciona o volume do gás em relação ao tempo e que pode ser visualizado na Figura 16:

$$V_g = 95,261 \cdot ln(t) - 49,0678. \tag{29}$$

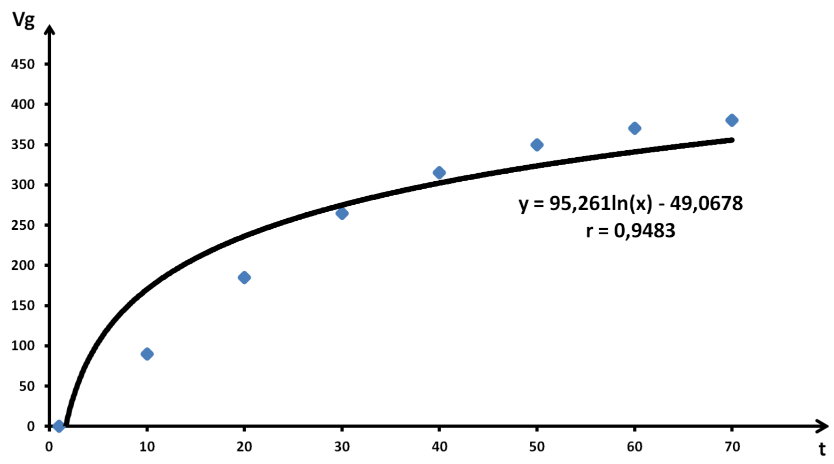


Figura 16: Equação do ajuste logarítmico: $V_g = 95,261 \cdot ln(t) - 49,0678$**.**

A partir deste resultado é possível fazer estimativas para calcular o volume do gás na proveta V_g em função do tempo t. Isto é, pode-se por exemplo, supor que o comprimido não tenha se esgotado após 2 minutos e dessa forma querer calcular o volume do gás na proveta após 120 segundos, usando agora a equação (29), obtendo aproximadamente,

$$V_g = 95,261 \cdot ln\,(120) - 49,0678 \quad \Longrightarrow \quad V_g \cong 406,9935 \text{ ml.}$$

Por fim, pode-se verificar para os resultados obtidos nesse experimento com fins didático-pedagógicos, que o modelo que correlaciona o volume da água na proveta (V_a) com o tempo t de reação é uma função exponencial ao passo que o modelo que correlaciona o volume do gás na proveta (V_g) com o tempo t de reação é uma função logarítmica e, levando em consideração os prováveis erros e perdas de gases durante a análise, como o gás empurra a água para fora da proveta, pode-se afirmar que há uma relação inversa entre esses volumes.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A educação acontece de fato em sala de aula, na relação entre professor e aluno. Para o aluno aprender, a didática e o conhecimento do professor também é importante. Ensinar não é tarefa fácil. Exige um comprometimento do educando e postura por parte do educador, e um saber fazer bem fundamentado.

Este trabalho não teve como objetivo ir na contramão do que é ensinado em sala de aula, enfim, do que se faz no país. No entanto, ensinar e aprender matemática necessita de uma reflexão sobre aquilo que se ensina para buscar a consciência sobre o que se faz. Caso contrário, será ensinada uma matemática fragmentada e sem sentido para os alunos.

Na Seção 2.6 do Capítulo 2, foi possível acompanhar os resultados obtidos e considerados satisfatórios levando em consideração os objetivos pré-estabelecidos no início deste trabalho. A inversão da sequência didática proporcionou uma reflexão na busca de soluções para as dificuldades encontradas em situações do cotidiano de um professor de matemática no exercício de sua docência. Muitos se questionam sobre o papel da matemática na formação dos alunos. Qual professor que nunca ouviu aquela velha pergunta: *"Pra que serve isso que estou aprendendo?"*.

De acordo com (RIBAS; SILVEIRA, 2004), uma resposta para essa questão pode ser a modelagem matemática. Os Capítulos 3 e 4 concentraram-se na modelagem matemática através do ajuste de curvas, por considerar que o professor de matemática necessita utilizar situações concretas para extrair, de maneira espontânea e natural, conceitos importantes e muito úteis como variáveis e funções, justificando-se dessa maneira a necessidade de conteúdos como o ajuste de curvas no ensino médio.

Estas atividades ainda não foram aplicadas com os alunos da Escola Técnica Estadual de Registro, por estarem em fase de elaboração e melhoria. O intuito é aplicá-las na disciplina Projeto Técnico-Científico que atualmente não faz parte da grade curricular do Ensino Médio. Na grade curricular do Ensino Médio das Escolas Técnicas Estaduais do Estado de São Paulo há uma rotatividade das chamadas disciplinas-projeto, mas há ainda a possibilidade de serem realizadas aos sábados através de oficinas programadas para o segundo semestre de 2014.

Entretanto, essas situações ao serem discutidas com os alunos, despertam a curiosidade em compreender os dados obtidos por eles e organizados em tabelas. Modelos de previsões são úteis em diversas áreas do conhecimento incluindo economia, engenharias, ciências da natureza, etc. Podem ser desenvolvidos em projetos, desencadeando dessa maneira interações, a fim de atingir determinados objetivos em relação à aprendizagem de conhecimentos e à socialização entre eles, despertando nos alunos o gosto pela matemática, o interesse pela pesquisa e a investigação de problemas no cotidiano.

Mostrou-se ainda situações em que são desenvolvidas a modelagem através do ajuste de curvas, seja no modelo exponencial ou logarítmico, aparecendo conceitos de variação e caracterização dessas funções. É preciso enxergar os alunos como atores da educação e não como sujeitos passivos da atividade docente (TARDIF, 2012).

Dessa forma, apresentou-se sugestões de atividades que acredita que sejam válidas no processo de ensino-aprendizagem proporcionando a interdisciplinaridade com as disciplinas de física e química - e de tal forma que a matemática como um todo lhe pareça mais fácil, mais útil e mais interessante através da modelagem matemática. No entanto, é imprescindível que essas atividades que envolvam uma interdisciplinaridade sejam desenvolvidas em conjunto com os outros professores dessas disciplinas e adequadas à realidade da escola para que se obtenha resultados satisfatórios.

Assim como afirmou-se na seção 2.6, só as atividades desenvolvidas entre 2013 e 2014 proporcionaram uma experiência docente muito significativa ao serem desenvolvidos conceitos matemáticos importantes através de atividades diferenciadas, possíveis com a inversão da sequência didática.

Espera-se que este texto sirva como reflexão em relação ao ensino de progressões e funções, contribuindo para o enriquecimento do trabalho dos professores em sala de aula e incentivo do uso de modelagem matemática através do ajuste de curvas para se estimar grandezas reais.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. **Objetivos do Ensino da Matemática**. 1995. Revista do Professor de Matemática - RPM, n. 27, p. 01–09.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o debate teórico**. Caxambu: ANPED, 2001. 24ª Reunião Anual da ANPED. Disponível em: <http://24reuniao.anped.org.br/T1974438136242.doc>. Acesso em: 21 de março de 2013.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais + (ensino médio): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 02 de novembro de 2013.

BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 02 de março de 2014.

COSTA NETO, P. L. de O. **Estatística**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2002.

CRESPO, A. A. **Estatística Fácil**. 17ª. ed. São Paulo/SP: Saraiva, 2002.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

GEOGEBRA: Site. 2013. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 20 de novembro de 2013.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo - Vol. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica 2**. 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

LIBREOFFICE: Site. 2013. Disponível em: <http://www.libreoffice.org>. Acesso em: 22 de novembro de 2013.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. (Coleção do Professor de Matemática, CPM01).

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio - Vol. 1**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

MACHADO, N. J. **Ideias Fundamentais: abaixo o conforto!** 2013. Entrevista concedida à Cláudia Tozetto, Revista Cálculo, n. 29, p. 40–45.

MONTEIRO, M. S. **A coisa sem sentido tem sentido há séculos**. 2013. Entrevista concedida à Dubes Sônego e Márcio Simões, Revista Cálculo, n. 33, p. 42–53.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e Matemática Financeira**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. (Coleção do Professor de Matemática, CPM8, v. 1).

PENTEADO, P. C. M.; TORRES, C. M. A. **Física - ciência e tecnologia**. 1ª. ed. [S.l.]: Moderna, 2005.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado) — USP, São Paulo, 2003.

RIBAS, J. L. D.; SILVEIRA, J. C. **Discussões sobre modelagem matemática e o ensino-aprendizagem**. 2004. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/index.php>. Acesso em: 20 de março de 2013.

SALDANHA, C. **Equilíbrio químico do íon bicarbonato: Efeito da concentração**. Ponto Ciência, 2009. Disponível em: <http://pontociencia.org.br/gerarpdf/index.php?experiencia=301>. Acesso em: 20 de março de 2013.

SILVA, R. R. da; BOCCHIN, N.; ROCHA FILHO, R. C. **Introdução à química experimental**. 1ª. ed. São Paulo/SP: McGraw-Hill, 1990.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: A questão da Democracia**. 1ª. ed. Campinas/SP: Papirus, 2001.

SÃO PAULO. **Caderno do Professor/Aluno: matemática, ensino médio - 1ª série, v. 1 ao 4 / Secretaria da Educação**. São Paulo: SEE/SP, 2009.

SOUZA, M. J. F. **Ajuste de Curvas pelo Método dos Quadrados Mínimos**. Ouro Preto/MG: DECOM/UFOP, 2003. Disponível em: <http://www.decom.ufop.br/prof/marcone/Disciplinas/MetodosNumericoseEstatisticos/QuadradosMinimos.pdf>. Acesso em: 01 de março de 2014.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 14ª. ed. Petrópolis/RJ: Vozes, 2012.

UFF/CDME: Site. 2013. Disponível em: <http://www.uff.br/cdme/>. Acesso em: 20 de novembro de 2013.