

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THIAGO LUIZ BENEVIDES

**MODELO MATEMÁTICO DA GRIPE AVIÁRIA A PARTIR DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

THIAGO LUIZ BENEVIDES

**MODELO MATEMÁTICO DA GRIPE AVIÁRIA A PARTIR DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Curso de Licenciatura em Matemática da Universi-
dade Tecnológica Federal do Paraná para obtenção
do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Nara Bobko, Dra.

CURITIBA

2018

TERMO DE APROVAÇÃO

“Modelagem da Dinâmica da Gripe Aviária via Equações Diferenciais Ordinárias”

por

“Thiago Luiz Benevides”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 13h30 do dia 14 de junho de 2018 na sala N010 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O aluno foi arguido pela Banca de Avaliação de Defesa abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do Trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho APROVADO.

_____ Profa. Dra. Nara Bobko (Presidente - UTFPR/Curitiba)	_____ Prof. Dr. Andres David Baez Sanchez (Avaliador 1 – UTFPR/Curitiba)
_____ Prof. Dr. Mateus Bernardes (Avaliador 2 – UTFPR/Curitiba)	_____ Profa. Ms. Violeta Maria Estephan (Professora Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)
_____ Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha (Coordenadora do Curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)	

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.”

AGRADECIMENTOS

A minha família: mãe Maria de Fátima da Silva, pai João Luiz Pereira Benevides por me ensinarem que o conhecimento e os estudos são os únicos meios de obtermos o que desejamos.

A Profa. Nara Bobko pela sua orientação e paciência em passar seu conhecimento para mim. De certa forma somos um produto de algo tão aleatório que sou imensamente grato de ter nascido neste tempo e nesta época e poder ter a oportunidade de dividir um curto pedaço de tempo com a senhora.

Aos membros da banca examinadora pelos comentários, sugestões e contribuições, que ajudaram a melhorar a qualidade e a redação final do manuscrito.

A Victoria Mazotti Rodrigues da Silva pelo incentivo na reta final, principalmente durante a fase de correção no qual sua ajuda foi crucial e inestimável para o término deste trabalho. Sua amizade para mim é algo inefável.

A Atila Iamarino, biólogo e pesquisador, que no nerdologia 124 sobre pandemias plantou a semente da curiosidade.

A equipe do Scicast por ter despertado em mim o interesse pela biomatemática no episódio 145 e também no episódio 220 sobre zoonoses.

Aos meus amigos e colegas de graduação que me ajudaram a não desanimar e a seguir em frente mesmo com as injustiças sofridas no decorrer deste tempo de graduação.

Agradeço também a todos aqueles que vieram antes de mim e que produziram o conhecimento necessário para viabilizar tal trabalho.

“Se o conhecimento pode criar problemas, não é através da ignorância que podemos solucioná-los.”

Isaac Asimov (1914-1992): bioquímico e escritor

RESUMO

BENEVIDES, Thiago Luiz. **modelo matemático da gripe aviária a partir de equações diferenciais ordinárias**. 45 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Neste trabalho apresentaremos e analisaremos um modelo matemático que visa descrever a dinâmica da gripe aviária. Esta modelagem será realizada via equações diferenciais ordinárias e nosso enfoque será estudar tais equações com respeito à estabilidade dos pontos de equilíbrio. Isto é, estamos interessados em averiguar o comportamento da doença em longo prazo. Por fim, faremos algumas análises numéricas e apresentaremos seus respectivos gráficos.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias; modelagem; epidemiologia; gripe aviária.

ABSTRACT

BENEVIDES, Thiago Luiz. . 45 f. Trabalho de conclusão de curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

BENEVIDES, Thiago Luiz. **Mathematical model of avian flu from ordinary differential equations**. 45 f. Completion of course work - Undergraduate Course in Mathematics, Federal Technological University of Paraná. Curitiba, 2018. In this work, we will present and analyze a mathematical model that aims to describe the dynamics of avian influenza. This modeling will be performed via ordinary differential equations and our focus will be to study such equations with respect to the stability of the equilibrium points. That is, we are interested in ascertaining the long-term behavior of the disease. Finally, we will do some numerical analysis and present their respective graphs.

Keywords: ordinary differential equations; modeling; epidemiology bird flu.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Soluções da EDO (2.5). Em vermelho as soluções de equilíbrio.	6
FIGURA 2.2 – Representação geométrica de um ponto de equilíbrio estável.	6
FIGURA 2.3 – Representação geométrica de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.	7
FIGURA 2.4 – Representação geométrica de um ponto de equilíbrio instável.	8
FIGURA 2.5 – Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores negativos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).	11
FIGURA 2.6 – Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores positivos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).	12
FIGURA 2.7 – Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores reais com sinais opostos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).	12
FIGURA 2.8 – Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores complexos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).	14
FIGURA 2.9 – Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores imaginários puros. A figura mostra o campo de direções (em verde), algumas soluções (em azul) e as direções dos autovetores (em vermelho).	15
FIGURA 3.1 – Modelo SIR	21
FIGURA 4.1 – Representação gráfica do modelo matemático	27
FIGURA 5.1 – Estabilidade no ponto de equilíbrio livre da doença. Parâmetros utilizados: $\mu_a = 0.00004$, $\beta_a = 0.035$, $\mu_h = 0.00004$, $\gamma_h = 0.25$, $\delta_h = 0.1$ e $\alpha_h = 0.002$	38
FIGURA 5.2 – Estabilidade no ponto de equilíbrio endêmico. Parâmetros utilizados: $\mu_a = 0.04$, $\beta_a = 0.035$, $\mu_h = 0.00004$, $\gamma_h = 0.25$, $\delta_h = 0.1$ e $\alpha_h = 0.002$	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	INTRODUÇÃO	1
2	TEORIA BÁSICA DE SISTEMAS DE EDOS	3
2.1	INTRODUÇÃO	3
2.1.1	Sistemas de EDOs	3
2.2	SISTEMAS AUTÔNOMOS	5
2.3	PONTOS DE EQUILÍBRIO	5
2.4	SISTEMAS AUTÔNOMOS LINEARES	8
2.4.1	Estabilidade	10
2.4.1.1	Autovalores reais e distintos com o mesmo sinal	10
2.4.1.2	Autovalores Reais com sinais diferentes	11
2.4.1.3	Autovalores Complexos	13
2.4.1.4	Autovalores Imaginários Puros	14
2.5	SISTEMAS QUASE LINEARES	15
2.6	CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ	19
3	MODELO SIR	21
4	MODELAGEM MATEMÁTICA DA GRIPE AVIÁRIA	25
4.1	APRESENTAÇÃO DO MODELO	25
4.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO	28
4.3	POSITIVIDADE DAS SOLUÇÕES	28
4.4	PONTOS DE EQUILÍBRIO	30
4.5	ESTABILIDADE	33
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	38
6	CONCLUSÃO	40
	Appendix A – ADIMENSIONALIZAÇÃO	41
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

Zoonoses sempre estiveram presentes na história da humanidade moldando nosso estilo de vida, modo de agir e pensar. Como exemplo, podemos citar o vírus *influenza*, conhecido também como vírus da gripe. Seu nome remota da Grécia antiga quando os antigos gregos acreditavam que os surtos desta doença estavam ligados a influência dos astros.

“O homem da antiguidade já relacionava o surgimento de certas doenças e epidemias com a presença ou influência de animais que pressagiam maus agouros. Cobras e sapos são tidos, popularmente, como transmissores de cobreiros ou herpes, corujas e morcegos pressagiam a morte e as superstições ligadas à fauna são muitas e variadas (Ávila, Fernando Dias Zoonoses: hospedeiros e reservatórios (ÁVILA-PIRES, 1989))”

Neste trabalho estudaremos o vírus da gripe aviária, mais especificamente o vírus H5N1. Segundo dados da **WHO** (*World Health Organization*) de 2003 à 2017 foram 860 casos confirmados da doença no mundo e 464 óbitos devido a complicações da doença.

A gripe aviária tem como principais vetores de transmissão aves aquáticas de comportamento migratório, por exemplo o pato, e aves domésticas, por exemplo o frango. O fato de aves migratórias serem vetores de transmissão da doença propicia que o vírus possa ser transportado de forma natural de um país a outro, fazendo assim com que rotas de migração destas aves sejam potenciais áreas de surtos da gripe aviária. Já o fato de aves domésticas serem também vetores de transmissão, faz com que países cuja uma das economias seja a produção destas aves também tornem-se áreas em potencial para surtos da gripe aviária. Este segundo fato pode ser considerado mais grave devido a proximidade que seres humanos terão das aves. Isto porque a transmissão do vírus pode ocorrer de forma direta (mais comum), isto é, quando o ser humano entra em contato direto com uma ave contaminada e em seguida encosta em uma área de mucosas de seu corpo; ou de maneira indireta, quando um ser humano entra em um viveiro destas aves pode inalar o vírus que a ave libera no ar quando agita suas asas, cisca o chão ou cacareja.

Com o intuito de estudar e compreender melhor o comportamento desta doença, neste trabalho estudaremos a modelagem da dinâmica da gripe aviária via equações diferenciais ordinárias. Estes estudos podem ser de grande relevância para criar ações de prevenção ou de combate ao vírus e, assim, reduzir os efeitos e danos causados a sociedade.

2 TEORIA BÁSICA DE SISTEMAS DE EDOS

Neste primeiro capítulo abordaremos alguns conceitos básicos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), necessários para o estudo apresentado neste trabalho.

Começaremos definindo um sistema de EDOs de ordem n , e a definição de Problema de Valor Inicial (PVI). Prosseguiremos nosso estudo apresentando a definição de sistemas autônomos, sistemas esses que não dependem da variável “ t ”. Apresentaremos a definição de ponto de equilíbrio, soluções de sistemas de EDOs via autovalores e autovetores, então apresentaremos as definições de estabilidade de sistemas lineares.

Por fim, apresentaremos sistemas quase lineares e o critério de Routh-Hurwitz. Pois como veremos posteriormente o sistema do modelo estudado por nós consiste em um sistema não linear, desta forma precisamos obter um meio para estudar tal sistema. Já o critério de Routh-Hurwitz vai nos ser útil para analisarmos a estabilidade do sistema sem a necessidade de calcularmos as raízes do polinômio característico.

2.1 INTRODUÇÃO

2.1.1 SISTEMAS DE EDOS

Definição 2.1 *Um sistema de equações diferenciais ordinárias é um conjunto de n equações diferenciais da forma*

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde os f_j são funções de valores reais de $n + 1$ de uma variável $(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, em que x_1, x_2, \dots, x_n são funções dependentes da variável “ t ”.

Para simplificar adotaremos a notação vetorial:

$$X'(t) = F(t, X(t)), \quad (2.2)$$

onde,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ e } F(t, X) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix}.$$

Definição 2.2 Um Problema de Valor Inicial (PVI) é um sistema de EDOs de ordem n acompanhado de n condições complementares que determinam, em um mesmo valor da variável independente t_0 , o valor da função incógnita

$$\begin{aligned} X'(t) &= F(t, X(t)) \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Uma solução do PVI é uma função que satisfaz tanto o sistema de EDOs como as condições complementares.

Exemplo 2.1 Considere o seguinte PVI:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2}{t}(x-1) \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Consideremos primeiro $x_0 = 1$ temos que, $x(t) = 1 + ct^2$ é uma solução do PVI para qualquer $c \in \mathbb{R}$. De fato,

$$x'(t) = (1 + ct^2)' = 2ct$$

e

$$\frac{2}{t}(x(t) - 1) = \frac{2}{t}((1 + ct^2) - 1) = 2ct.$$

2.2 SISTEMAS AUTÔNOMOS

Ao longo do trabalho lidaremos com sistemas de EDOs que não dependem da variável independente “ t ”. Isto é, a variável “ t ” não aparece explicitamente no lado direito do sistema de equações diferenciais. Tais sistemas de EDOs são chamados de sistemas autônomos, conforme definição formal apresentada a seguir.

Definição 2.3 *Um sistema de EDOs da forma (2.2) é chamado de sistema autônomo quando a função vetorial F não depende explicitamente da variável independente “ t ”, mas apenas da variável X . Isto é,*

$$X'(t) = F(X(t)). \quad (2.4)$$

Exemplo 2.2 *Considere a EDO*

$$x'(t) = x^2.$$

Como a variável t não aparece explicitamente, esta EDO é autônoma. Por outro lado, a EDO

$$x'(t) = tx^2$$

depende explicitamente de t , logo não é autônoma.

2.3 PONTOS DE EQUILÍBRIO

Um ponto X é chamado de ponto crítico, ou de ponto de equilíbrio, de um sistema autônomo se corresponde a uma solução constante deste sistema de EDOs. Isto é, se $X'(t) = 0$ para todo instante de tempo t .

Definição 2.4 $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto crítico do Sistema Autônomo (2.4) se $F(\bar{X}) = 0$.

Exemplo 2.3 *Considere o seguinte sistema autônomo:*

$$x'(t) = x(1 - x). \quad (2.5)$$

Note que $\bar{x} = 1$ e $\bar{x} = 0$ são pontos críticos desta equação autônoma uma vez que $1(1 - 1) = 0$ e $0(1 - 0) = 0$. Desta forma, se $x(t_0) = 1$, então $x(t) = 1$ para todo $t \geq t_0$. Esta curva estacionária (ponto de equilíbrio) pode ser visualizada na Figura 2.1. Análogo para $x(t_0) = 0$.

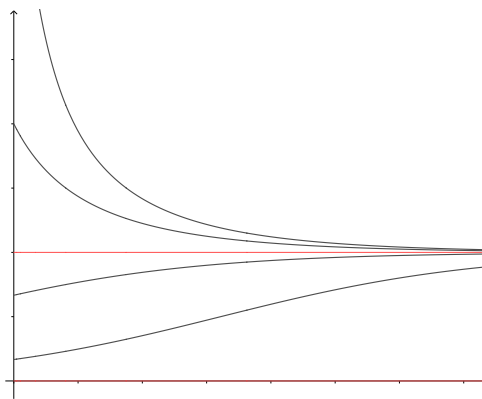


Figure 2.1: Soluções da EDO (2.5). Em vermelho as soluções de equilíbrio.

Conhecidos os pontos de equilíbrio de um sistema autônomo, é pertinente estudar o comportamento das outras soluções que iniciam próximas a eles. Isto é, estamos interessados em averiguar se as soluções que iniciam próximas de um ponto de equilíbrio irão se aproximar deste ponto de equilíbrio, ou não. Neste sentido, podemos classificar os pontos de equilíbrio de acordo com a sua estabilidade, conforme definições apresentadas a seguir.

Definição 2.5 *Seja \bar{X} um ponto de equilíbrio do Sistema Autônomo (2.4). Dizemos que \bar{X} é estável se dado $\varepsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ para o qual qualquer solução ϕ do sistema de EDOs em questão é tal que*

$$\|\phi(t_0) - \bar{X}\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - \bar{X}\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Em outras palavras, um ponto de equilíbrio \bar{X} será estável se todas as soluções que começam próximas de \bar{X} permanecem próximas de \bar{X} independente do tempo t , conforme ilustra a Figura 2.2.

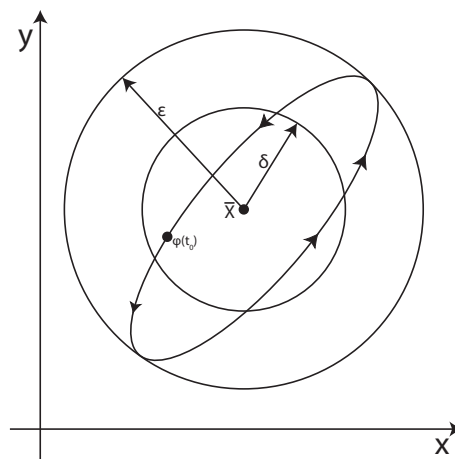


Figure 2.2: Representação geométrica de um ponto de equilíbrio estável.

Definição 2.6 Seja \bar{X} um ponto de equilíbrio do Sistema Autônomo (2.4). Dizemos que \bar{X} é assintoticamente estável se \bar{X} é um ponto de equilíbrio estável e se existe $\gamma > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \bar{X}$$

para toda solução ϕ do sistema de EDOs que satisfaz $\|\phi(t_0) - \bar{X}\| < \gamma$.

Neste caso as soluções que começam suficientemente próximas de \bar{X} não só permanecem próximas como também tendem a \bar{X} quando $t \rightarrow \infty$. A Figura 2.3 é uma representação geométrica da definição de ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Observe que a estabilidade assintótica é mais forte que a estabilidade, pois para ser assintoticamente estável antes é preciso ser estável.

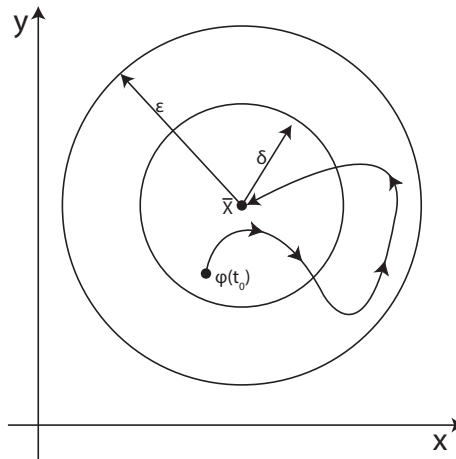


Figure 2.3: Representação geométrica de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Definição 2.7 Seja \bar{X} um ponto de equilíbrio do Sistema Autônomo (2.4). Dizemos que \bar{X} é instável se \bar{X} não é estável.

Um caso de ponto de equilíbrio \bar{X} instável ocorre quando mesmo as soluções que iniciam muito próximas de \bar{X} tendem a se afastar deste ponto a medida que $t \rightarrow \infty$. Este é o caso ilustrado na Figura 2.4. Mas note que, para ser instável, não é necessário que todos os pontos da curva solução ϕ se afastem de \bar{X} . Basta que exista uma sequência crescente de tempos t_i tal que $\phi(t_i)$ com este comportamento.

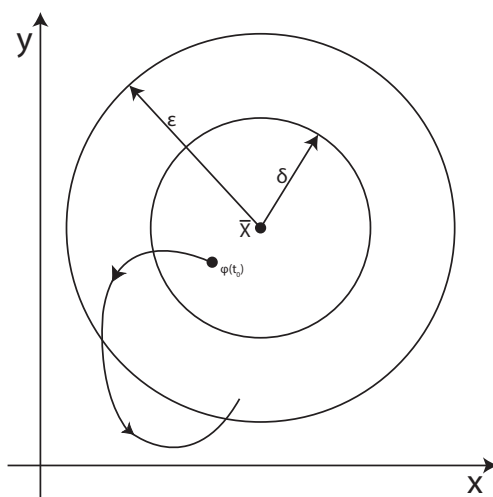


Figure 2.4: Representação geométrica de um ponto de equilíbrio instável.

2.4 SISTEMAS AUTÔNOMOS LINEARES

Consideremos agora um sistema autônomo linear de coeficientes constantes. Isto é, um sistema autônomo de EDOs $X'(t) = F(X)$ tal que a função F é linear com respeito a variável X e com coeficientes constantes. Desta forma temos que F pode ser representado por uma matriz quadrada A de coeficientes constantes, onde a ordem n da matriz A será o número de equações do sistema linear. Um sistema autônomo linear de coeficientes constantes terá então a forma:

$$X' = AX. \quad (2.6)$$

Observe que para este tipo de sistema de EDOs temos que combinações lineares de soluções também serão soluções. De fato, se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções de $X' = AX$, então para quaisquer escalares C_1 e C_2 temos

$$(C_1X_1(t) + C_2X_2(t))' = C_1X_1'(t) + C_2X_2'(t) = C_1AX_1(t) + C_2AX_2(t) = A(C_1X_1(t) + C_2X_2(t)).$$

Observe que acima não estamos preocupados com a condição inicial, mas apenas com a solução geral do sistema de EDOs.

Para o caso $n = 1$ o sistema se reduz a uma única equação:

$$x' = ax,$$

para a qual obtemos facilmente a solução geral

$$x(t) = x(t_0)e^{t-t_0}.$$

É razoável tentarmos generalizar este tipo de solução para $n \neq 1$. Suponhamos então, para o

caso $n = 2$, soluções particulares na forma

$$X(t) = \xi e^{rt},$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^2$ e $r \in \mathbb{R}$. Se a solução tiver esta forma, então substituindo em (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} r\xi e^{rt} &= A\xi e^{rt} \\ \Rightarrow r\xi &= A\xi \\ \Rightarrow (A - rI)\xi &= 0, \end{aligned}$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2. Observe que esta última equação é o mesmo que determinar os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes A . Ou seja, ξ deve ser autovetor de A associado ao autovalor r . Isto nos leva a considerar a solução geral na forma

$$X(t) = C_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$$

onde $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são autovetores de A linearmente independentes associados aos autovalores r_1 e r_2 , respectivamente. Esta ideia pode ser generalizada para dimensões maiores (n qualquer).

Vale notar que o exposto acima apenas fornece uma ideia de onde surge a solução geral de um sistema de EDOs linear autônomo, não sendo uma demonstração formal. A teoria em detalhes pode ser encontrada em (BOYCE; DIPRIMA, 1985)

Exemplo 2.4 *Considere o sistema*

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X(t).$$

O sistema tem como autovetores $\xi^{(1)} = (1 \ 1)^T$, $\xi^{(2)} = (-1 \ 1)$ associados aos autovalores $r_1 = 4$ e $r_2 = 2$, respectivamente. Então temos que a solução geral será

$$X(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Exemplo 2.5 *Considere o sistema*

$$X'(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X(t).$$

O sistema tem como autovetores $\xi^{(1)} = (-1 \ 1)^T$, $\xi^{(2)} = (1 \ 1)$ associados aos autovalores

$r_1 = -4$ e $r_2 = -2$, respectivamente. Então temos que a solução geral será

$$X(t) = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

2.4.1 ESTABILIDADE

Na seção anterior vimos como encontrar a solução geral de sistemas lineares autônomos (coeficientes constantes). Conhecendo a solução, podemos analisar o comportamento das soluções em longo prazo, bem como averiguar sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio deste tipo de sistema. Note que para um sistema autônomo linear o ponto $\bar{X} = 0$ sempre será um ponto de equilíbrio, uma vez que $A \cdot 0 = 0$. Além disso, se a matriz A for invertível (isto é $\det(A) \neq 0$), teremos que $\bar{X} = 0$ é o único ponto de equilíbrio.

Analisemos as soluções do Exemplo 2.4. Conforme t tende ao infinito (longo prazo), as soluções se afastam (exponencialmente) do ponto de equilíbrio $\bar{X} = 0$. Observe que isto só ocorre pois os autovalores de A são ambos positivos. Por outro lado, no Exemplo 2.5 as soluções se aproximam (exponencialmente) de $\bar{X} = 0$, conforme t aumenta. Neste caso os autovalores de A são ambos negativos. Isto nos sugere que podemos analisar o comportamento das soluções destes sistemas apenas observando os autovalores da matriz A .

Observe que aqui estamos interessados na análise qualitativa das EDOs¹ cujo objetivo é analisar o comportamento das soluções destas equações sem propriamente explicitar suas soluções. Apesar de isto parecer desnecessário neste caso, uma vez que conhecemos uma forma de obter as soluções analíticas, veremos que será muito útil para analisar sistemas de EDOs mais complexos, onde a solução analítica não é facilmente obtida.

Analisemos então a influência dos autovalores com relação a solução geral do Sistema (2.6), no caso $n = 2$. O caso geral pode ser obtido via funções de Lyapunov. Não apresentaremos aqui este caso, mas pode ser encontrada no livro (BOYCE; DIPRIMA, 1985).

2.4.1.1 AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS COM O MESMO SINAL

Neste caso temos que as soluções da equação (2.2) são da forma:

$$X(t) = C_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}, \quad (2.7)$$

¹A teoria qualitativa das equações diferenciais foi proposta pelo matemático Henri Poincaré (1854-1912)

onde r_1 e r_2 são ambos positivos ou ambos negativos. Vamos supor que primeiro que $r_1 < r_2 < 0$. Segue de (2.7) que $x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, independente dos valores de C_1 e C_2 , em outras palavras, todas as soluções se aproximam do ponto crítico na origem quando $t \rightarrow \infty$. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\xi^{(1)}$, então $C_2 = 0$. Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo t e tende à origem quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, se o ponto inicial pertence à reta na direção de $\xi^{(2)}$, então a solução tende à origem ao longo dessa reta.

Exemplo 2.6 Considere o seguinte sistema

$$X' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} X.$$

Os autovalores são $r_1 = -1$ e $r_2 = -\frac{1}{4}$, enquanto os autovetores associados são $\xi^{(1)} = (1 \ 0)^T$ e $\xi^{(2)} = (4 \ -3)^T$, respectivamente. A Figura 2.5 ilustra este caso.

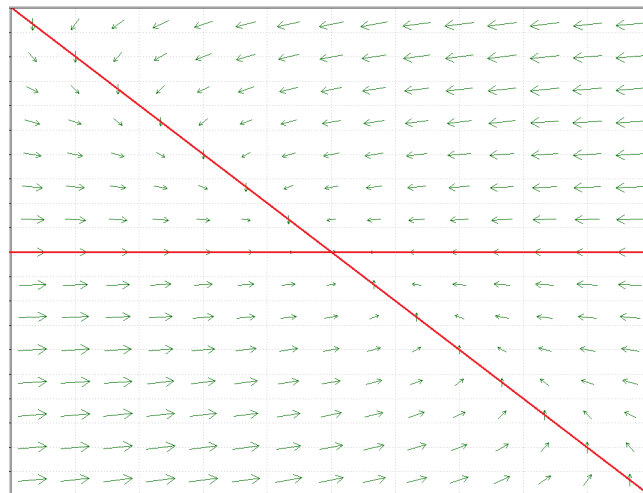


Figure 2.5: Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores negativos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).

Se r_1 e r_2 são ambos positivos ($0 < r_1 < r_2$) então as trajetórias terão um padrão similar ao anterior, mas o sentido do movimento será o oposto: as trajetórias se afastam do ponto crítico, como ilustrado na Figura 2.6.

2.4.1.2 AUTOVALORES REAIS COM SINAIS DIFERENTES

Consideremos $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção $\xi^{(1)}$, então $C_2 = 0$. Em consequência, a solução permanece nessa

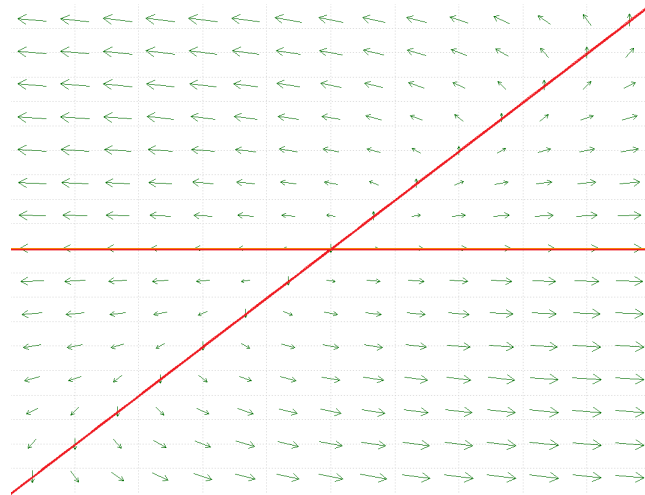


Figure 2.6: Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores positivos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).

reta para todo t e, como $r_1 > 0$, $\|x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Agora se a solução começa em um ponto inicial pertence à reta na direção $\xi^{(2)}$, a situação é análoga, exceto que $\|x\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, já que $r_2 < 0$.

Exemplo 2.7 Considere o seguinte sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X.$$

Temos que os autovalores deste sistema são $r_1 = -1$ e $r_2 = 1$ e os autovetores associados são $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$ e $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$ respectivamente (Figura 2.7).

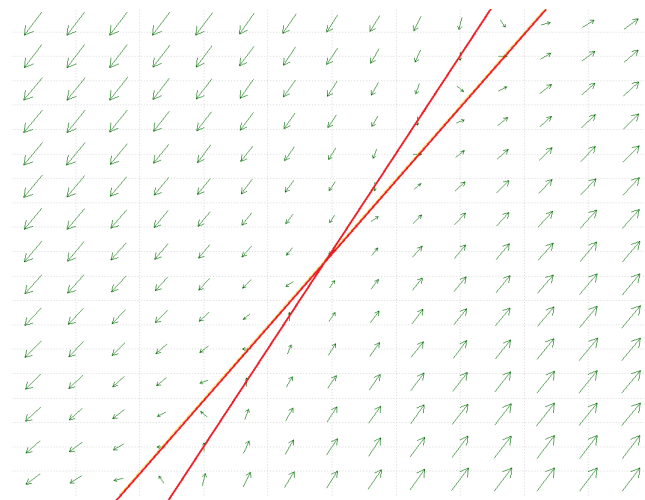


Figure 2.7: Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores reais com sinais opostos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).

2.4.1.3 AUTOVALORES COMPLEXOS

Suponha que os autovalores sejam $\lambda \pm i\mu$, onde λ e μ são reais, $\lambda \neq 0$ e $\mu > 0$. Neste caso temos Neste caso o sistema pode ser escrito na forma

$$X' = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix} X, \quad (2.8)$$

ou na forma escalar

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2. \quad (2.9)$$

Vamos introduzir coordenadas polares r , θ dados por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \text{tg}(\theta) = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{e} \quad x_1 \neq 0.$$

Diferenciando essas equações, obtemos

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (\sec^2(\theta))\theta' = \frac{(x_1x_2' - x_2x_1')}{x_1^2}. \quad (2.10)$$

Substituindo as equações (2.9) na primeira das equações (2.10), veremos que

$$r' = \lambda r,$$

e portanto,

$$r = Ce^{\lambda t}, \quad (2.11)$$

onde C é uma constante. Analogamente, substituindo as equações (2.9) na segunda das equações de (2.10) e usando o fato de que

$$\sec^2(\theta) = \frac{r^2}{x_1^2},$$

temos então

$$\theta' = -\mu. \quad (2.12)$$

Logo

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \quad (2.13)$$

onde θ_0 é o valor de θ quando $t = 0$. As equações (2.11) e (2.13) são equações paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (2.8). Como $\mu > 0$, segue da (2.13) que diminui

quando t aumenta, de modo que o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Quando $t \rightarrow \infty$, vemos da (2.11) que $r \rightarrow 0$ se $\lambda < 0$ e $r \rightarrow \infty$ se $\lambda > 0$. Então, as trajetórias são espirais, que tendem ou se afastam da origem dependendo do sinal de λ .

Exemplo 2.8 Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} X.$$

Os autovalores são $r_1 = -1 - i$ e $r_2 = -1 + i$ e os autovetores associados são $\xi^{(1)} = (2 - i \ 1)^T$ e $\xi^{(2)} = (2 + i \ 1)^T$ respectivamente.

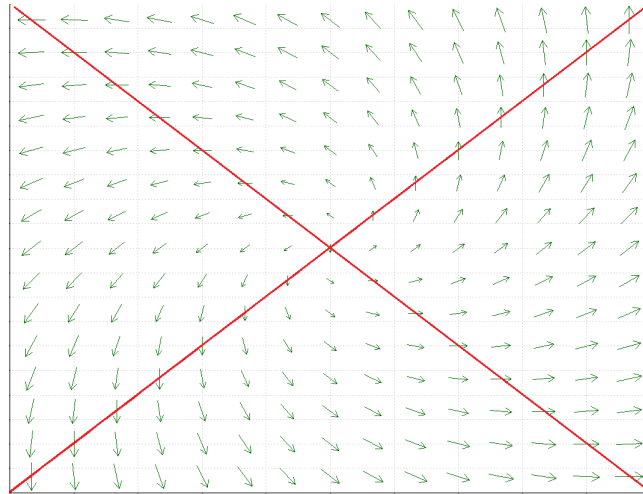


Figure 2.8: Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores complexos. A figura mostra o campo de direções (em verde) e as direções dos autovetores (em vermelho).

2.4.1.4 AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS

Neste caso, $\lambda = 0$ e o sistema (2.8) se reduz a

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix} X \quad (2.14)$$

com autovalores da forma $\pm i\mu$. Usando o mesmo argumento que no caso anterior, encontramos

$$r' = 0, \quad \theta' = \mu$$

e portanto,

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0$$

onde c e θ_0 são constantes. Logo, as trajetórias são elipses centradas na origem, percorridas no sentido horário se $\mu > 0$ e no sentido anti-horário se $\mu < 0$. Um círculo completo em torno da origem é feito em um intervalo de tempo de comprimento $\frac{2\pi}{\mu}$, de modo que todas as soluções são periódicas com período $\frac{2\pi}{\mu}$. Neste caso o ponto crítico é chamado de centro.

Exemplo 2.9 Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X \quad (2.15)$$

Temos que os autovalores do sistema (2.15) $r_1 = -i$ e $r_2 = i$ e os autovetores associados são $\xi^{(1)} = (2 - i \ 1)^T$ e $\xi^{(2)} = (2 + i \ 1)^T$ respectivamente, podendo ser visto na Figura 2.9.

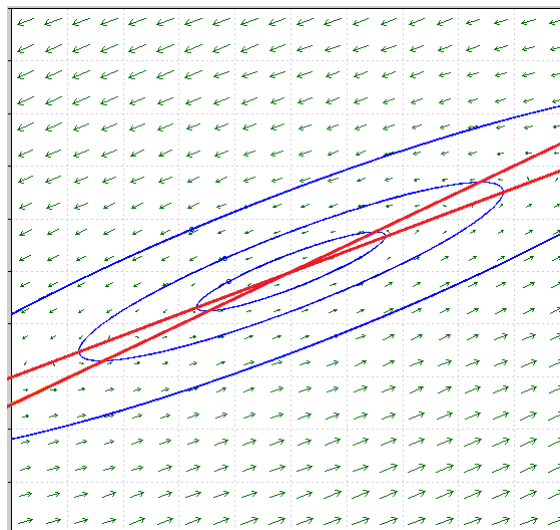


Figure 2.9: Soluções do Sistema (2.6) ($n = 2$) no caso de autovalores imaginários puros. A figura mostra o campo de direções (em verde), algumas soluções (em azul) e as direções dos autovetores (em vermelho).

2.5 SISTEMAS QUASE LINEARES

Na seção anterior concentramos nossos esforços em estudar a estabilidade do ponto de equilíbrio $\bar{X} = 0$ para sistemas autônomos lineares (coeficientes constantes). Todavia, o sistema de EDOs que estudaremos para modelar a dinâmica da gripe aviária não é linear e nem temos soluções explícitas para tal modelo.

Desta forma, para investigar o comportamento das trajetórias deste sistema não linear em uma vizinhança de um ponto crítico \bar{X} vamos aproximá-lo por um sistema linear apropriado, cujo comportamento das soluções são semelhantes ao do sistema original. Vejamos nesta seção

que isto de fato pode ser feito.

Consideremos o sistema não-linear

$$X' = A(X) + G(X). \quad (2.16)$$

Para nosso estudo é conveniente escolhermos o ponto crítico como sendo na origem. Isso não envolve perda de generalidade, pois se $X \neq 0$, sempre pode-se fazer a substituição $Y = X - \bar{X}$ na eq (2.16). Suponhamos então que \bar{X} é um ponto crítico isolado do Sistema (2.16). Isto significa que existe alguma bola em torno da origem no interior da qual não existem pontos críticos. Além disso vamos supor que $\det A \neq 0$, de modo que $X = 0$ também é ponto crítico isolado do sistema linear $X' = AX$. Para que o Sistema Não Linear (2.16) seja próximo ao Sistema Linear $X' = AX$, temos então, que supor que $G(X)$ seja "pequeno" nas proximidades de $\bar{X} = 0$. Em outras palavras, precisamos que $\|G(X)\|$ seja pequeno em comparação com $\|X\|$, próximo a origem. Este tipo de sistema de EDOs será chamado de quase linear, conforme definição a seguir.

Definição 2.8 *Um sistema de equações diferenciais*

$$X' = A(X) + G(X)$$

é chamado de sistema quase linear, na vizinhança do ponto crítico $\bar{X} = 0$, se as componentes de $G(x)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e $G(X)$ satisfaz

$$\frac{\|G(X)\|}{\|X\|} \rightarrow 0, \quad \text{quando} \quad \|X\| \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Exemplo 2.10 *Considere o sistema não linear*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y + 2xy \\ \frac{dy}{dt} &= -4x - y + x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Podemos reescrevê-lo na forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Note que $(x,y)^T = (0,0)^T$ é um ponto crítico do sistema dado e $\det(A) \neq 0$. Além disso, os outros pontos críticos deste sistema são: $(-1,0)$, $(-\frac{1}{3}, -1)$, $(-\frac{2}{3}, -2)$. Logo $\bar{x} = (0,0)$ é ponto crítico isolado.

Vamos verificar agora a condição (2.17). Temos

$$\frac{\|G(X)\|}{\|X\|} = \frac{\sqrt{(2xy)^2 + (x^2 + y^2)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{\frac{(2xy)^2}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \|X\| \rightarrow 0.$$

Então, temos que este sistema de EDOs é um sistema quase linear na vizinhança do ponto crítico $(0,0)$.

Existe uma outra forma de garantir que um sistema autônomo $X' = F(X)$ seja quase linear sem precisar exigir a condição (2.17), como assegura o resultado abaixo.

Teorema 2.1 *Um sistema de EDOs autônomo $X' = F(X)$ será quase linear em uma vizinhança U de um ponto crítico \bar{X} sempre que as componentes de F tenham derivadas parciais contínuas até ordem dois.*

Demonstração 1 *Faremos aqui a demonstração para o caso bidimensional. O caso geral é análogo. Seja $F(X) = (f_1(x,y), f_2(x,y))^T$. Como f_1 e f_2 são de classe C^1 , usando a expansão de Taylor em torno do ponto $\bar{X} = (\bar{x}, \bar{y})$ temos que, para $(x,y) \in U$,*

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= f_1(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + \zeta_1(x,y) \quad e \\ f_2(x,y) &= f_2(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + \zeta_2(x,y) \end{aligned}$$

onde, para $i = 1, 2$, tem-se

$$\frac{\zeta_i(x,y)}{\sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } (x,y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}). \quad (2.19)$$

Como $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = f_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x - \bar{x})$ e $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y - \bar{y})$, podemos reescrever o sistema $X' = F(X)$ na forma

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - \bar{x}) \\ (y - \bar{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \zeta_1(x,y) \\ \zeta_2(x,y) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Note que (2.19) garante que a condição (2.17) será satisfeita.

Vale ressaltar que:

1. Tendo as condições do Teorema 2.1 atendidas, não é necessário usarmos a definição para mostrar que um sistema é quase linear;

2. O sistema linear que melhor aproxima o sistema não-linear, em uma vizinhança do ponto crítico \bar{X} , é dada pela parte linear do sistema (2.20). E com isso, nos fornece um método simples de determinar o sistema linear correspondente a um sistema não-linear, na vizinhança de um ponto crítico \bar{X} :

$$\tilde{X}' = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix}}_{Df(\bar{X})} \tilde{X}$$

com $\tilde{X} = X - \bar{X}$. A matriz $Df(\bar{X})$ é chamada de matriz **Jacobiana** do sistema $X' = F(X)$ calculada em \bar{X} .

Exemplo 2.11 Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1+x)\text{sen}(y) \\ \frac{dy}{dt} &= 1-x-\text{cos}(y). \end{aligned}$$

Os pontos críticos deste sistema serão os pontos (x,y) tais que

$$\begin{cases} (1+x)\text{sen}(y) = 0 \\ 1-x-\text{cos}(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(y) + x\text{sen}(y) = 0 \\ 1-\text{cos}(y) = x. \end{cases} \quad (2.21)$$

Substituindo a segunda equação (2.21) na primeira de (2.21) temos,

$$\begin{aligned} \text{sen}(y) + (1-\text{cos}(y))\text{sen}(y) &= 0 \\ \Rightarrow \text{sen}(y) + \text{sen}(y) - \text{cos}(y)\text{sen}(y) &= 0 \\ \Rightarrow 2\text{sen}(y) - \text{cos}(y)\text{sen}(y) &= 0 \\ \Rightarrow \text{sen}(y)(2-\text{cos}(y)) &= 0 \\ \Rightarrow \text{sen}(y) = 0 \quad e \quad \text{cos}(y) = 2 \\ \Rightarrow \text{sen}(y) = 0 \\ \Rightarrow y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Temos então

$$y = k\pi \Rightarrow x = 1 - \text{cos}(k\pi) \Rightarrow x = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é par,} \\ 2, & \text{se } k \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Logo os pontos críticos são:

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 2m\pi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\P_2 &= (0, (2m+1)\pi), \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= (1+x)\text{sen}(y) \text{ e} \\f_2(x, y) &= 1-x-\text{cos}(y)\end{aligned}$$

são diferenciáveis, assim como suas derivadas parciais de primeira ordem. Portanto este sistema é quase linear e a matriz Jacobiana será

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \text{sen}(y) & (1+x)\text{cos}(y) \\ -1 & \text{sen}(y) \end{bmatrix}.$$

Deste modo, o sistema linear correspondente a cada tipo de ponto crítico será, respectivamente:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - 2m\pi \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 2 \\ y - (2m+1)\pi \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

2.6 CRITÉRIO DE ROUTH-HURWITZ

Vimos nas seções anteriores que os autovalores da matriz de um sistema de EDOs autônomo linear (ou da matriz associada a um sistema quase linear) é de grande relevância para a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema. Todavia, calcular as raízes de um polinômio (para encontrar os autovalores) pode ser bastante complicado. Considerando que para a análise de estabilidade precisamos apenas saber os sinais dos autovalores (ou da parte real dos mesmos), poderemos utilizar o critério de Routh-Hurwitz. Este critério nos fornece condições (necessárias e suficientes) para garantir que a parte real de todos os autovalores são negativas (e assim garantir que o ponto de equilíbrio é estável).

Considere o polinômio característico de grau n na forma

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Estamos interessados no caso $a_n \neq 0$ pois, caso contrário já saberemos uma das raízes deste polinômio ($\lambda = 0$) e assim podemos reduzir nosso problema a um polinômio de ordem $n - 1$.

Para o caso $n = 3$ (que será de nosso interesse na análise do modelo que estudaremos neste trabalho), o critério de Routh-Hurwitz exige que

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0 \text{ e } a_1 * a_2 - a_3 > 0.$$

O caso geral (n qualquer), bem como outras informações sobre este critério podem ser encontradas em (MURRAY, 2002).

3 MODELO SIR

O modelo SIR foi proposto em 1927 por Kernack e Mckendrick em 1927, e descreve a dinâmica da população dividida em três classes distintas, como apresentado na Figura 3.1.

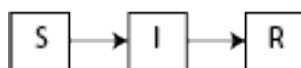


Figure 3.1: Modelo SIR

A primeira classe é a dos indivíduos Suscetíveis (**S**), isto é, são todos os indivíduos de uma determinada espécie aptos a contraírem a doença e que ainda não foram contaminados. A segunda classe é a dos indivíduos Infectados (**I**) e a última classe é a dos indivíduos Removidos (**R**), isto é, são todos indivíduos que ou foram curados ou entraram em óbito, as setas representam as taxas de mudança de uma classe para outra. Estas taxas de mudança podem ser descritas da seguinte forma:

- $\frac{dS}{dt}$: Taxa de mudança de suscetíveis
- $\frac{dI}{dt}$: Taxa de mudança de infectados
- $\frac{dR}{dt}$: Taxa de mudança de removidos

Considerando então, uma população constante, isto é, desprezando os nascimentos e os fenômenos migratórios, temos:

$$N = S + I + R = cte,$$

onde N representa o total da população. Este modelo matemático baseia-se em duas hipóteses adicionais:

- A razão de variação da população suscetível é proporcional ao número de encontros ente as populações suscetíveis

- A razão de variação da população removida é proporcional à população infectada
- A razão de variação da população removida é proporcional à população infectada.

Agora se usarmos essas hipóteses acerca das taxas de transição, temos que:

- Taxa de mudança de S= - Taxa de infecção.
- Taxa de mudança de I= Taxa de infecção- taxa de remoção
- Taxa de mudança de R= Taxa de infecção - taxa de remoção

Assumindo agora que a taxa de infecção é igual à βSI , onde S representa a classe de suscetíveis e I a de infectados, também assumiremos que β é constante, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (3.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\beta SI - \gamma I \quad (3.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (3.3)$$

Deste modo podemos observar duas coisa:

1. Isolando R , obtemos $R = N - S - I$ e, portanto, obtemos uma equação em função de S e de I , já que N é constante, por hipótese, deste modo precisamos analisar somente as seguintes equações 3.3 e 3.3
2. Como $N = S + I + R = cte$, então temos:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

Então ao se aprofundar no estudo do modelo SIR, podemos nos questionar sobre dois fatos

1. Em que condições surgem novas epidemias?
2. Por que uma epidemia aparentemente desaparece antes de toda população morrer?

Para respondermos a primeira pergunta¹, tomaremos as seguintes hipóteses. Primeira: as doenças são transmitidas somente por vírus ou bactérias. Segunda: ignoraremos a dinâmica no hospedeiro.

Temos que a epidemia aumentará somente se o número de indivíduos infectados aumenta, isto é, se a taxa de mudança de infectados $\frac{dI}{dt}$ for maior que zero. Temos o seguinte.

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I \\ &= (\beta - \gamma)I > 0 \Leftrightarrow \beta S > \gamma \\ &\Rightarrow \frac{\beta S}{\gamma} > 1.\end{aligned}$$

Desta forma se $\frac{\beta S}{\gamma} > 1$ então a doença evolui para epidemia e βS representa a taxa de infectados causadores de novas doenças e $\frac{1}{\gamma}$ representa o tempo médio no qual um indivíduo é infectado.

Chamemos $\frac{\beta S}{\gamma} = R_0$, então se $R_0 > 1$ então a doença evolui para epidemia. Agora se $S \Leftrightarrow N$ então não existe epidemia.

$$\begin{aligned}R_0 &< 1 \\ \frac{\beta S}{\gamma} &< 1\end{aligned}$$

por hipótese $S = N$, então

$$\begin{aligned}\frac{\beta N}{\gamma} &< 1 \\ N &> \frac{\gamma}{\beta}\end{aligned}$$

Desta forma temos que surtos ou doenças descritos pelo modelo SIR necessita de uma população com um certo número de indivíduos.

Para responder a pergunta dois 2. Temos como condição inicial que no início da epidemia temos $S \cong N$, isto significa que $I \cong 0$. Também temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dS} &= \frac{\frac{dI}{dt}}{\frac{dS}{dt}} \\ &= \frac{\beta SI - \gamma I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\gamma}{\beta S}\end{aligned}$$

então,

$$dI = \left[-1 + \frac{\gamma}{\beta S} \right] dS,$$

integrando ambos os lados temos:

$$I = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + C$$

onde C é a constante de integração. Então usando a condição inicial, temos:

$$0 = -N + \frac{\gamma}{\beta} \ln N + C \quad (3.4)$$

isolando a constante de integração, temos o seguinte

$$C = N - \frac{\gamma}{\beta} \ln N \quad (3.5)$$

Substituindo a Equação (3.5) na Equação (3.4), temos o seguinte resultado

$$I = -S + \frac{\gamma}{\beta} \ln S + N - \frac{\gamma}{\beta} \ln N. \quad (3.6)$$

Então, para sabermos em níveis de S teremos novamente $I = 0$ basta resolver o Sistema 3.6. Porém atende-se ao seguinte fato: $S = N$ é a solução do Sistema 3.6, sendo assim temos $S \rightarrow 0 \Rightarrow 3.6 \Rightarrow -\infty$.

Portanto, existe um $S > 0$ que é a solução do Sistema 3.6, isto é, a outra solução é necessariamente positiva. Logo, uma epidemia acaba antes de todos os indivíduos suscetíveis se infectam.

Concluimos que:

- Uma epidemia ocorre, segundo o Modelo SIR, somente se existir uma quantidade mínima de indivíduos, ou seja, em populações pequenas não há epidemias
- As epidemias desaparecem e ainda resta uma certa quantidade de indivíduos, isto é, a epidemia acaba antes de toda a população morrer.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA DA GRIPE AVIÁRIA

Neste capítulo abordaremos um modelo da gripe aviária (H5N1) proposto por (DEROUICH; BOUTAYEB, 2008). Começaremos introduzindo as variáveis a serem consideradas no sistema, assim como a dinâmica de infecção da gripe entre aves e humanos. Então faremos a adimensionalização deste sistema, isto tornará o sistema mais simples eliminando algumas variáveis e tornando as variáveis que restarem adimensionais. Vale ressaltar que, ao adimensionalizar um sistema nós não alteramos sua estabilidade.

Como estamos lidando com um sistema populacional, temos que garantir que o sistema estudado tem sentido biológico ao longo do tempo t e para isto testaremos a positividade do sistema, isto é, temos que de certa forma garantir que as soluções deste sistema nunca serão negativas, já que a concentração populacional nunca torna-se negativa. Feito isso passaremos então para o cálculo dos pontos de equilíbrio do sistema, isto de um ponto de vista biológico significa encontrar os pontos onde a doença entra em equilíbrio, isto é, nestes pontos não há acréscimo nem de acréscimo de pessoas infectadas.

Por fim, analisaremos a estabilidade do sistema, isto biologicamente significa entender o comportamento das soluções ao longo do tempo. Em termos de saúde pública pode significar saber se a doença poderá causar um surto epidêmico ou não. Mais amplamente permite traçar planos de prevenção contra a doença ou combate da doença.

4.1 APRESENTAÇÃO DO MODELO

Nesta seção abordaremos o modelo matemático proposto por (DEROUICH; BOUTAYEB, 2008). Este modelo separa a população de humanos em Humanos Suscetíveis (S_h); Humanos Infectados (I_h); Humanos Recuperados ou Removidos (R_h) enquanto que a população de aves é dividida em Aves Suscetíveis (S_a); Aves Infectadas (I_a).

- Humanos Suscetíveis (S_h): Classe dos humanos que estão aptos a contraírem o vírus da gripe aviária. O modelo matemático não faz distinção entre sexo, idade, classe social

ou região. Sendo assim qualquer ser humano que não esteja infectado será considerado suscetível com a mesma probabilidade de contrair o vírus.

- Humanos Infectados (\mathbf{I}_h): Classe humanos que de alguma forma entraram em contato com aves infectadas e contraíram o vírus da gripe aviária. Outra coisa que devemos salientar que seres humanos infectados não são considerados vetores de transmissão pelo modelo, sendo assim humanos infectados não podem infectar outros humanos.
- Humanos Recuperados ou Removidos (\mathbf{R}_h): Classe humanos recuperados e humanos removidos. Entendemos como humanos removidos aqueles que entraram em óbito em decorrência da doença e humanos recuperados aqueles que conseguiram obter a cura.
- Aves Suscetíveis (\mathbf{S}_a): São todas as aves que não estão infectadas, sendo assim estão aptas a contraírem o vírus da gripe
- Aves Infectadas (\mathbf{I}_a): São todas as aves que estão infectadas com o vírus da gripe aviária, sendo assim estas aves passam a ser vetores de transmissão.

Denotaremos por N_a e N_h toda a população de aves e humanos, respectivamente. Isto é, $N_a = S_a + I_a$ e $N_h = S_h + I_h + R_h$.

Agora explicaremos a dinâmica do vírus da gripe aviária segundo o modelo. Consideremos que no tempo (τ_0) todos os humanos que nascem ou migram a uma taxa π_h começam como humanos suscetíveis. Ao longo do tempo estes humanos podem morrer a uma taxa (μ_h) ou entrarem em contato com aves infectadas a uma taxa $\frac{\beta_h I_a}{N_a}$ tornando-se então humanos infectados. Já como humanos infectados estes podem morrer a uma taxa de morte natural μ_h mais uma taxa de morte relatada pela doença δ_h , ou podem se recuperar a uma taxa γ_h tornando-se assim humanos recuperados. Os humanos recuperados podem morrer a uma taxa de morte natural μ_h ou voltarem a ser humanos suscetíveis a uma taxa δ_h .

Para as aves temos que as aves suscetíveis podem morrer a uma taxa de morte natural μ_a ou terem um contato efetivo com aves contaminadas a uma taxa $\frac{\beta_a I_a}{N_a}$ tornando-se aves contaminadas. Para as aves contaminadas o modelo estudado considera apenas a morte sem chance de recuperação, sendo que a morte é dada à uma taxa de μ_a . Esta explicação pode ser vista no esquema que 4.1 que representa a dinâmica do vírus da gripe aviária.

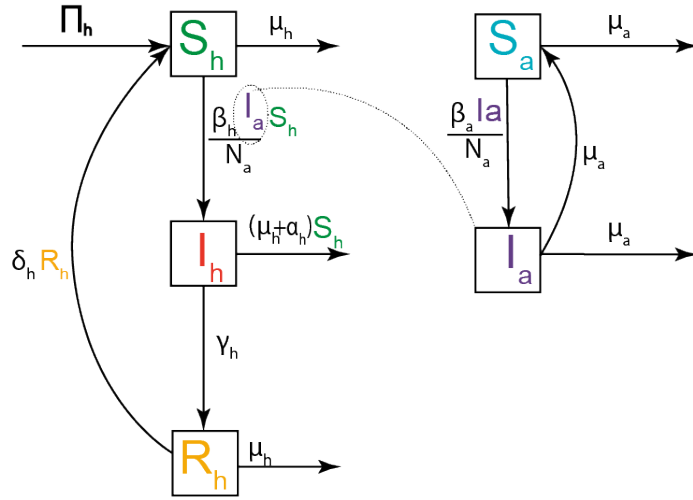


Figure 4.1: Representação gráfica do modelo matemático

Sendo que o diagrama representado na Figura 4.1 pode ser representado no seguinte sistema (4.1).

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_h}{dt} &= \Pi_h - \left(\mu_h - \frac{\beta_h I_a}{N_a} \right) S_h + \delta R_h \\
 \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_h I_a}{N_a} S_h - (\mu_h + \gamma + \delta_h) I_h \\
 \frac{dR_h}{dt} &= \gamma I_h - (\mu_h + \delta_h) R_h \\
 \frac{dS_a}{dt} &= \mu_a N_a - \left(\mu_a + \frac{\beta_a I_a}{N_a} \right) S_a \\
 \frac{dI_a}{dt} &= \frac{\beta_a}{N_a} I_a (N_a - I_a) - \mu_a I_a.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Os parâmetros do sistema 4.1 estão descritas na Tabela 4.1.

Nome dos parâmetros	Notação utilizada
Nascimento e migração constantes entre humanos	Π_h
Taxa de contato efetivo entre humanos e aves	β_h
Taxa de contato efetivo entre aves e aves	β_a
Taxa de morte natural dos humanos	μ_h
Taxa de morte natural das aves	μ_a
Taxa de morte humana pela doença relatada	δ_h
Taxa de recuperação humana	γ_h
Tempo de duração da doença em um humano	$\frac{1}{\mu_h + \gamma_h}$

Table 4.1: Tabela de parâmetros e suas respectivas notações

Observe que estamos considerando N_a constante, uma vez que

$$N'_a = S'_a + I'_a = \mu_a N_a - \left(\mu_a + \frac{\beta_a I_a}{N_a} \right) S_a - \frac{\beta_a}{N_a} I_a (N_a - I_a) + \mu_a I_a = 0.$$

4.2 ADIMENSIONALIZAÇÃO

Antes de estudar o modelo (4.1) com respeito a estabilidade das soluções, realizaremos a adimensionalização do mesmo. Optamos por realizar esta mudança de variáveis diferentemente da forma apresentada no artigo (DEROUICH; BOUTAYEB, 2008). Pois como estamos trabalhando com duas espécies diferentes (humanos e aves) e isso implica em dimensões que podem ser desproporcionais, então para evitar erros decorrentes da dimensão das variáveis, vamos tornar o sistema adimensional.

Porém, vale ressaltar que ao adimensionalizarmos o sistema os pontos de equilíbrio do sistema adimensional são equivalentes ao sistema que não está adimensionalizado.

Então, para adimensionalizar o Sistema (4.1) as variáveis escolhidas para serem alteradas neste trabalho foram as seguintes.

$$s_h = \frac{S_h}{\pi_h} \frac{1}{\mu_h}; \quad i_h = \frac{I_h}{\pi_h} \frac{1}{\mu_h}; \quad \frac{R_h}{\pi_h} \quad s_a = \frac{S_a}{N_a}; \quad i_a = \frac{I_a}{N_a}$$

O processo de adimensionalização está completo no Apêndice A

$$\begin{aligned} \frac{ds_h}{d\tau} &= 1 - s_h - i_a s_h + r_h \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 - \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h \\ \frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 - \frac{\delta_h}{\mu_h} \right) r_h \\ \frac{di_a}{d\tau} &= \frac{\beta_h}{\mu_h} i_a \left(1 - \frac{\mu_a}{\beta_a} - \frac{\mu_h}{\beta_h} i_a \right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3 POSITIVIDADE DAS SOLUÇÕES

Vamos agora analisar a positividade das soluções pois, deste modo, garantimos que tanto o sistema adimensionalizado quanto o sistema do artigo (DEROUICH; BOUTAYEB, 2008), possuem sentido biológico, ou seja, em nenhum momento do tempo as soluções tornam-se negativas.

Para exemplificar o melhor, imagine que em algum instante de tempo τ a concentração

da população de suscetíveis se tornar menor que zero, isto é,

$$s_h < 0.$$

Desta forma o sistema perde seu sentido biológico já que não existe populações com valores negativos.

Teorema 4.1 *Seja $\Phi : [\tau_0, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}^4$ uma solução do Sistema (4.2). Se $\Phi(\tau_0) \in \mathbf{R}_+^4$, então $\Phi(\tau) \in \mathbf{R}_+^4$, para todo $\tau \in [\tau_0, \infty]$*

Demonstração 2 *Para demonstrar este resultado usaremos o Teorema da Alfândega¹. Desta forma basta averiguar o comportamento das soluções do Sistema (4.2) na fronteira de \mathbf{R}_+^4 .*

- Para $s_h = 0, i_h > 0, r_h > 0, i_a > 0$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{ds_h}{d\tau} &= 1 - s_h - i_a s_h + r_h \\ \frac{ds_h}{d\tau} &= 1 - 0 - i_a 0 + r_h \\ \frac{ds_h}{d\tau} &= 1 + r_h > 0 \end{aligned}$$

temos que $\frac{ds_h}{d\tau}$ cresce localmente.

- Para $s_h > 0, i_h = 0, r_h > 0, i_a > 0$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) 0 \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - 0 \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h > 0 \end{aligned}$$

Então temos que $\frac{di_h}{d\tau}$ cresce localmente.

¹O enunciado bem como a demonstração deste Teorema pode ser encontrada em (LIMA, 1983)

- Para $s_h > 0$, $i_h > 0$, $r_h = 0$, $i_a > 0$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) r_h \\ \frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) 0 \\ \frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - 0 \\ \frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h > 0\end{aligned}$$

temos que $\frac{dr_h}{d\tau}$ cresce localmente então.

- Para $s_h > 0$, $i_h > 0$, $r_h > 0$, $i_a = 0$ temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{di_a}{d\tau} &= \frac{\beta_a}{\mu_h} i_a \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a} - \frac{\mu_h}{\beta_h} i_a\right) \\ \frac{di_a}{d\tau} &= \frac{\beta_a}{\mu_h} 0 \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a} - \frac{\mu_h}{\beta_h} 0\right) \\ \frac{di_a}{d\tau} &= 0\end{aligned}$$

então temos que $\frac{di_a}{d\tau}$ é constante em 0.

Então mostramos que as soluções não saem do octante positivo, concluindo assim a prova do teorema.

4.4 PONTOS DE EQUILÍBRIO

Agora vamos calcular seus pontos de equilíbrio. Para tal precisamos calcular os pontos que satisfazem

$$\begin{aligned}1 - s_h - i_a s_h + r_h &= 0 \\ \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) i_h &= 0 \\ \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) r_h &= 0 \\ \frac{\beta_a}{\mu_h} i_a \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a} - \frac{\mu_h}{\beta_h} i_a\right) &= 0\end{aligned}$$

Do ponto de vista biológico, calcular os pontos de equilíbrio significam que a doença não irá regredir nem progredir ao longo do tempo τ , caso a doença se inicie em um destes pontos.

Apresentaremos os pontos de equilíbrio em função da taxa de infectados causadores de novas doenças (contato efetivo, β_a) pelo tempo médio no qual uma ave infectada vive (μ_a).

Teorema 4.2 *O Sistema (4.2) admite um ou dois pontos de equilíbrio:*

- Se $\frac{\beta_a}{\mu_a} \leq 1$ temos um único ponto de equilíbrio $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ chamado de ponto de equilíbrio livre de doença;
- Se $\frac{\beta_a}{\mu_a} > 1$ então o sistema admite dois pontos de equilíbrio sendo o primeiro o ponto de equilíbrio livre de doença e o segundo ponto chamado de ponto de equilíbrio endêmico $E_2 = (\bar{s}_h, \bar{i}_h, \bar{r}_h, \bar{s}_a, \bar{i}_a)$

onde,

$$\begin{aligned}\bar{s}_h &= s_h \left[1 - i_a + \frac{\gamma_h \delta_h}{(\mu_h + \delta_h)(\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)} \right]^{-1} \\ \bar{i}_h &= \frac{\delta_h i_a s_h}{\mu_h + \gamma_h + \alpha_h} \\ \bar{r}_h &= \frac{\gamma_h i_h}{\mu_h + \delta_h} \\ \bar{s}_a &= \frac{\beta_h}{\mu_h} \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a} \right).\end{aligned}$$

Demonstração 3 *Na última equação temos que*

$$\frac{\beta_a}{\mu_h} i_a \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a} - \frac{\mu_h}{\beta_h} i_a \right) = 0$$

isso implica que $i_a = 0$ ou $i_a = \frac{\beta_h}{\mu_h} \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a} \right)$. Se $i_a = 0$ então na segunda equação do Sistema (4.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h &= 0 \\ \frac{\delta_h}{\mu_h} 0 s_h - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h &= 0 \\ \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h &= 0\end{aligned}$$

logo temos que $i_h = 0$, substituindo na terceira equação de (4.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) r_h &= 0 \\ \frac{\gamma_h}{\mu_h} 0 - \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) r_h &= 0 \\ \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) r_h &= 0\end{aligned}$$

logo $r_h = 0$, por fim substituindo na primeira equação (4.2) temos

$$\begin{aligned}1 - s_h - i_a s_h + r_h &= 0 \\ 1 - s_h - 0s_h + 0 &= 0 \\ 1 - s_h &= 0 \\ s_h &= 0.\end{aligned}$$

Então de fato, temos que o ponto de equilíbrio neste caso é o trivial $E_1 = (1, 0, 0, 0)$. Isto de um ponto de vista biológico diz que as aves estão morrendo mais rápido do que propagando a doença, logo o vírus se auto-erradicará ao longo do tempo sem intervenção humana, então este é o melhor dos casos, pois não a risco de surtos epidêmicos.

Agora vamos ao outro caso em que $\bar{i}_a = \frac{\beta_h}{\mu_h} \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a}\right)$. Substituindo na segunda equação do Sistema (4.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) i_h &= 0 \\ \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) i_h &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h \\ \bar{i}_h &= \frac{\delta_h i_a s_h}{\mu_h + \gamma_h + \alpha_h}.\end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação do Sistema (4.2) temos

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h + \left(\frac{\mu_h + \delta_h}{\mu_h}\right) r_h &= 0 \\ \left(\frac{\mu_h + \delta_h}{\mu_h}\right) r_h &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h \\ \bar{r}_h &= \frac{\gamma_h i_h}{\mu_h + \delta_h}.\end{aligned}$$

Por fim, substituindo na primeira equação do Sistema (4.2)

$$\begin{aligned}
 1 - s_h - i_a s_h + r_h &= 0 \\
 1 - s_h - i_a s_h + \frac{\gamma_h}{\mu_h + \delta_h} i_h &= 0 \\
 1 - s_h - i_a s_h + \frac{\gamma_h}{\mu_h + \delta_h} \frac{\delta_h i_a s_h}{\mu_h + \gamma_h + \alpha_h} &= 0 \\
 s_h \left[1 - i_a + \frac{\gamma_h \delta_h}{(\mu_h + \delta_h)(\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)} \right] &= 1 \\
 \bar{s}_h = s_h \left[1 - i_a + \frac{\gamma_h \delta_h}{(\mu_h + \delta_h)(\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)} \right] &= -1
 \end{aligned}$$

então de fato temos que se $\bar{i}_a = \frac{\beta_h}{\mu_h} \left(1 - \frac{\beta_a}{\mu_a}\right)$, então o ponto de equilíbrio é $E_2 = (\bar{s}_h, \bar{i}_h, \bar{r}_h, \bar{i}_a)$. Isto biologicamente nos diz que as aves estão transmitindo o vírus mais rápido do que morrendo, então neste caso a um risco de surto ou de pandemias futuras.

4.5 ESTABILIDADE

Nesta seção analisaremos a estabilidade do Sistema (4.2) nos pontos E_1 e E_2 . De um ponto de vista biológico analisar a estabilidade ajuda a entender a e evolução da doença ao longo do tempo. Por exemplo, se os pontos de equilíbrio forem assintoticamente estável temos que as soluções tendem a um dos pontos de equilíbrio ao longo do tempo, independente da concentração da população inicial.

Vimos no Capítulo 3 que, para o modelo SIR, a doença se erradicará somente se a taxa de infectados causadores de novas doenças e o tempo médio na qual o indivíduo infectado for menor que 1. Veremos neste capítulo que, de acordo com a modelagem proposta para a dinâmica da gripe aviária, a doença se erradicará se $\frac{\beta_a}{\mu_a} < 1$.

Pelo fato do Sistema (4.2) trata-se de um sistema que não é linear usaremos a matriz jacobiana do sistema nos pontos de equilíbrio E_1 e E_2 , desta forma conseguiremos aproximar o sistema que não é linear por um sistema linear e desta forma poderemos prosseguir a análise via autovalores e autovetores.

Sendo assim seja a matriz jacobiana do Sistema (4.2).

$$\begin{bmatrix} -1 - i_a & 0 & 1 & -s_h \\ \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a & -\left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) & 0 & \frac{\delta_h}{\mu_h} s_h \\ 0 & \frac{\gamma_h}{\mu_h} & -\left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\beta_a}{\mu_h} - \frac{\mu_a}{\mu_h} - \frac{\beta_a}{\beta_h}\right) - \frac{\beta_a}{\beta_h i_a} (1 - i_a) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Agora analisaremos no ponto $E_1 = (1, 0, 0, 0)$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) & 0 & \frac{\delta_h}{\mu_h} \\ 0 & \frac{\gamma_h}{\mu_h} & -\left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_a}{\mu_h} \left(1 - \frac{\mu_a}{\beta_a}\right) \end{bmatrix}$$

calculando o polinômio característico temos

$$p(\lambda) = (-1 - \lambda) \left(-\frac{\mu_h + \gamma_h + \lambda}{\mu_h} - \lambda \right) \left(-\frac{\mu_h + \delta_h}{\mu_h} - \lambda \right) \left(\frac{\mu_a}{\mu_h} \left(\frac{\beta_a}{\mu_a} - 1 \right) - \lambda \right). \quad (4.4)$$

As raízes deste polinômio de ordem quatro são as seguintes $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = -\frac{\mu_h + \gamma_h + \alpha_h}{\mu_h}$; $\lambda_3 = -\frac{\mu_h + \delta_h}{\mu_h}$ e $\lambda_4 = -\frac{\mu_a}{\mu_h} \left(\frac{\beta_a}{\mu_a} - 1 \right)$ para garantirmos que a estabilidade seja localmente assintoticamente estável precisamos que a parte real dos autovalores, $Re(\lambda) < 0$, note que para as três primeiras raízes λ_1, λ_2 e λ_3 são negativas basta observar a equação (4.4). Porém para λ_4 não é tão obvio, então usaremos a primeira proposição do teorema 4.2 nos diz que para E_1 temos $\frac{\beta_a}{\mu_a} < 1$, desta forma temos que

$$\frac{\mu_a}{\mu_h} \left(\frac{\beta_a}{\mu_a} - 1 \right) < 0,$$

logo $\lambda_4 < 0$, sendo assim temos que os quatro autovalores tem a parte real negativa logo E_1 é assintoticamente local estável.

Com a estabilidade localmente assintótica garantida, temos que independente do número da concentração de indivíduos se $\frac{\beta_a}{\mu_a}$ for menor que um, então a doença tenderá a auto erradicação.

Agora vamos analisar a matriz jacobiana no segundo ponto de equilíbrio E_2 . Neste

caso temos a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} -1 - \bar{i}_a & 0 & 1 & -\bar{s}_h \\ \frac{\delta_h \bar{i}_a}{\mu_h} - \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) & 0 & 0 & \frac{\delta_h \bar{s}_h}{\mu_h} \\ 0 & \frac{\gamma_h}{\mu_h} & -\left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\beta_a}{\mu_h} - \frac{\mu_a}{\mu_h} - \frac{\beta_a}{\beta_h}\right) - \frac{\beta_a \bar{i}_a}{\beta_h} (1 - \bar{i}_a) \end{bmatrix}.$$

Para facilitar a visualização faremos algumas mudanças de variáveis.

$$\begin{aligned} -(1 + \bar{i}_a) &= -a \\ \frac{\delta_h \bar{i}_a}{\mu_h} &= b \\ -\left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h}\right) &= -c \\ \frac{\gamma_h}{\mu_h} &= d \\ -\left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h}\right) &= -e \\ -\bar{s}_h &= -f \\ \frac{\delta_h \bar{s}_h}{\mu_h} &= g \\ -\left[\left(\frac{\beta_a}{\beta_h} + \frac{\mu_a}{\mu_h} - \frac{\beta_a}{\mu_h}\right) + \frac{\beta_a \bar{i}_a}{\beta_h} (1 - \bar{i}_a)\right] &= -h. \end{aligned}$$

Sendo assim ficamos com a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} -a & 0 & 1 & -f \\ b & -c & 0 & g \\ 0 & d & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h \end{bmatrix}.$$

Calculando o polinômio característico temos que

$$\det \begin{vmatrix} -a - \lambda & 0 & 1 & -f \\ b & -c - \lambda & 0 & g \\ 0 & d & -e - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -h - \lambda \end{vmatrix},$$

com o seguinte polinômio característico

$$\begin{aligned}
p_4(\lambda) &= (-h - \lambda)[(-a - \lambda)(-c - \lambda)(-e - \lambda) + bd] \\
p_4(\lambda) &= (-h - \lambda)[(-1)(\lambda^3 + (a + c + e)\lambda^2 + (ac + ae + ce)\lambda + ace - bd)] \\
p_4(\lambda) &= (-1)(h + \lambda)(-1)[(\lambda^3 + (a + c + e)\lambda^2 + (ac + ae + ce)\lambda + ace - bd)] \\
p_4(\lambda) &= (h + \lambda)[(\lambda^3 + (a + c + e)\lambda^2 + (ac + ae + ce)\lambda + ace - bd)],
\end{aligned}$$

a primeira raiz $\lambda_1 = -h$. Usaremos o critério de Routh-Hurwitz para o seguinte polinômio

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 + (a + c + e)\lambda^2 + (ac + ae + ce)\lambda + ace - bd.$$

Temos que:

$$a_1 = a + c + e > 0, \quad a_2 = ac + ae + ce > 0 \quad \text{e} \quad a_3 = ace - bd.$$

Provemos que $a_3 > 0$:

$$\begin{aligned}
a_3 &= (1 + \bar{i}_a) \left(1 + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) \left(1 + \frac{\delta_h}{\mu_h} \right) - \frac{\gamma_h \delta_h}{\mu_h^2} i_a \\
&= 1 + \frac{\delta_h}{\mu_h} + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\delta_h \gamma_h}{\mu_h^2} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h^2}{\mu_h^2} \\
&+ i_a + \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_a + \frac{\gamma_h \delta_h}{\mu_h^2} \bar{i}_a + \frac{\alpha_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h \delta_h}{\mu_h^2} - \frac{\gamma_h \delta_h}{\mu_h^2} \bar{i}_a \\
&= 1 + \frac{\delta_h}{\mu_h} + \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\delta_h \gamma_h}{\mu_h^2} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h^2}{\mu_h^2} \\
&+ i_a + \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_a + \frac{\alpha_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h \delta_h}{\mu_h^2} > 0.
\end{aligned}$$

Agora iremos mostrar que $a_1 a_2 - a_3 > 0$:

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= (a + c + e)(ac + ae + ce) - ace - bd \\
&= a^2 c + a^2 e + ac^2 + c^2 e + ae^2 + ce^2 + 3ace - ace - bd \\
&= a^2 c + a^2 e + ac^2 + c^2 e + ae^2 + ce^2 + 2ace - bd \\
&= a^2 c + a^2 e + ac^2 + c^2 e + ae^2 + ce^2 + 2 + 2 \frac{\delta_h}{\mu_h} + 2 \frac{\gamma_h}{\mu_h} + 2 \frac{\delta_h \gamma_h}{\mu_h^2} \\
&+ 2 \frac{\alpha_h}{\mu_h} + 2 \frac{\alpha_h^2}{\mu_h^2} + 2 \bar{i}_a + 2 \frac{\delta_h}{\mu_h} \bar{i}_a + 2 \frac{\gamma_h}{\mu_h} \bar{i}_a + 2 \frac{\gamma_h}{\mu_h} \\
&+ 2 \frac{\gamma_h \delta_h}{\mu_h} \bar{i}_a + 2 \frac{\alpha_h}{\mu_h} + 2 \frac{\alpha_h \delta_h}{\mu_h^2} - \frac{\gamma_h \delta_h}{\mu_h^2} \bar{i}_a.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_3 &= a^2 c + a^2 e + a c^2 + c^2 e + a e^2 + c e^2 + 2 + 2 \frac{\delta_h}{\mu_h} + 2 \frac{\gamma_h}{\mu_h} + 2 \frac{\delta_h \gamma_h}{\mu_h^2} \\
&+ 2 \frac{\alpha_h}{\mu_h} + 2 \frac{\alpha_h^2}{\mu_h^2} + 2 \bar{i}_a + 2 \frac{\delta_h}{\mu_h} \bar{i}_a + 2 \frac{\gamma_h}{\mu_h} \bar{i}_a + 2 \frac{\gamma_h}{\mu_h} \\
&+ \frac{\gamma_h \delta_h}{\mu_h} \bar{i}_a + 2 \frac{\alpha_h}{\mu_h} + 2 \frac{\alpha_h \delta_h}{\mu_h^2} > 0.
\end{aligned}$$

Com isso as condições do critério de Routh-Hurwitz são satisfeitas e E_2 é localmente assintoticamente estável.

Com a estabilidade localmente assintótica garantida, temos que independente do número da concentração de indivíduos se $\frac{\beta_a}{\mu_a}$ for maior que um, então a doença tenderá para um possível surto ou epidemia.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo faremos algumas simulações numéricas. Como nossa adimensionalização foi feita de uma forma diferente da do artigo original nossa curiosidade aqui consiste em analisar numericamente o quão próximas estas soluções são. Para isto usamos os mesmos parâmetros do artigo (DEROUICH; BOUTAYEB, 2008) e os resultados obtidos estão relatados.

Na primeira simulação numérica utilizamos parâmetros que descrevem a estabilidade do ponto de equilíbrio livre de doença, ou seja, $\frac{\beta_a}{\mu_a} \leq 1$. O gráfico para o primeiro experimento está na Figura 5.1

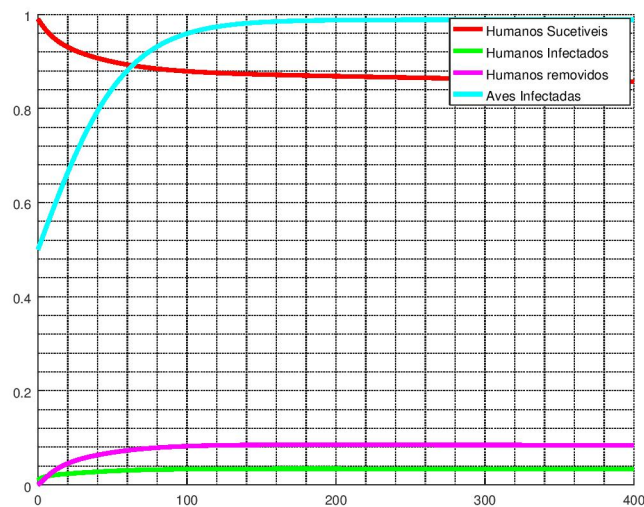


Figure 5.1: Estabilidade no ponto de equilíbrio livre da doença. Parâmetros utilizados: $\mu_a = 0.00004$, $\beta_a = 0.035$, $\mu_h = 0.00004$, $\gamma_h = 0.25$, $\delta_h = 0.1$ e $\alpha_h = 0.002$.

Para a segunda simulação utilizamos parâmetros que representam a estabilidade no ponto de equilíbrio endêmico, ou seja, $\frac{\beta_a}{\mu_a} > 1$. O gráfico do segundo experimento está na Figura 5.2

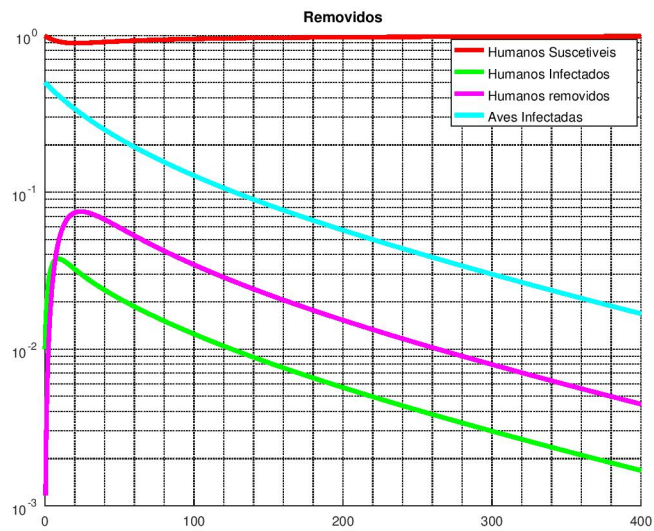


Figure 5.2: Estabilidade no ponto de equilíbrio endêmico. Parâmetros utilizados: $\mu_a = 0.04$, $\beta_a = 0.035$, $\mu_h = 0.00004$, $\gamma_h = 0.25$, $\delta_h = 0.1$ e $\alpha_h = 0.002$.

6 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho estudamos um sistema de EDOs que modela a dinâmica da gripe aviária. Apresentamos os pontos do equilíbrio deste sistema, bem como analisamos a estabilidade destes pontos de equilíbrio. O estudo realizado nos indica que o fator determinante na proliferação ou erradicação do vírus é $\frac{\beta_a}{\mu_a}$. Este parâmetro é a taxa de contato efetivo dividido pelo tempo médio de vida do causador da doença (aves). Do ponto de vista de políticas públicas de prevenção, isto é bastante relevante uma vez que sabemos onde devemos agir para conseguir erradicar, ou ao menos reduzir a quantidade de pessoas doentes.

APPENDIX A – ADIMENSIONALIZAÇÃO

Neste apêndice iremos apresentar detalhadamente a adimensionalização do sistema abaixo utilizado no Capítulo 4.

$$\begin{aligned}\frac{dS_h}{dt} &= \Pi_h \left(\mu_h - \frac{\beta_h I_a}{N_a} \right) S_h + \delta_h R_h \\ \frac{dI_h}{dt} &= \frac{\beta_h I_a}{N_a} S_h - (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h) I_h \\ \frac{dR_h}{dt} &= \gamma_h I_h - (\mu_h + \delta_h) R_h \\ \frac{dI_a}{dt} &= \frac{\beta_a}{N_a} I_a (N_a - I_a) - \mu_a I_a\end{aligned}$$

Analisemos primeiro as unidades das variáveis e dos parâmetros envolvidos. Denotaremos por $[*]$ a unidade da variável, ou do parâmetro em questão. Como as variáveis S_h , I_h e R_h representam a quantidade de pessoas temos $[S_h] = [I_h] = [R_h]$. Analogamente para as aves temos $[I_a] = [N_a]$. Temos ainda

$$[\mu_a] = [\mu_h] = [\gamma_h] = [\alpha_h] = [\delta_h] = \frac{1}{[t]},$$

onde $[t]$ é a unidade de tempo. Agora precisamos saber a unidade de $[\Pi_h]$ e de $[\beta_h]$. Primeiro vamos analisar $[\Pi_h]$.

$$[\Pi_h] = [S_h] = \frac{[S_h]}{[t]}$$

sendo assim temos que Π_h tem como unidade a quantidade de pessoas suscetíveis, pela unidade de tempo. Ibserve que isto é coerente do ponto de vista biológico, uma vez que Π_h é a variável que mede a quantidade de nascimento e de migração humana. Agora vamos para $[\beta]$.

$$\begin{aligned}\left[\beta \frac{I_a}{N_a} S_h \right] &\implies [\beta_h] = \frac{[S_h]}{[t]} \frac{[N_a]}{[I_a][S_h]} = \frac{1}{[t]} \\ &\implies [\beta_h] = \frac{1}{[t]}.\end{aligned}$$

Então, temos que a unidade para $[\beta_h]$ é igual ao inverso da unidade de tempo. De fato isto era esperado uma vez que a unidade β_h mede o contato efetivo entre humanos e aves.

Agora de fato, vamos a adimensionalização do sistema e para tal faremos a escolha da seguinte variável

$$\tau = \mu_h t$$

que mede o tempo de vida humana, sendo assim também temos que

$$\begin{aligned} s_h &= C_s S_h \\ i_h &= C_i I_h \\ r_h &= C_r R_h \\ i_a &= C_{i_a} I_a. \end{aligned}$$

Onde s_h, i_h, r_h, i_a são as novas variáveis relacionados à concentração de humanos suscetíveis, humanos infectados, humanos removidos e aves infectadas, respectivamente. C_s, C_i, C_r, C_{i_a} são constantes que iremos escolher a seguir. Na primeira equação de (4.1) temos

$$\begin{aligned} \frac{ds_h}{d\tau} &= \frac{ds_h}{dS_h} \frac{dS_h}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{C_s}{\mu} \frac{dS_h}{dt} \\ \frac{ds_h}{d\tau} &= \frac{C_s}{\mu_h} \left(\Pi_h - \mu_h s_h - \frac{\beta_h}{N_a} I_a s_h + \delta_h R_h \right) \\ \frac{ds_h}{d\tau} &= \frac{C_s}{d\tau} \Pi_h \left(1 - \frac{\mu_h s_h}{\Pi_h C_s} - \frac{\beta_h}{N_a} \frac{i_a}{C_{i_a} \Pi_h C_s} s_h + \frac{\delta_h r_h}{\Pi_h C_r} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Tomando $C_s = \frac{\mu_h}{\Pi_h}$ temos que $[s_h] = \frac{[\mu_h]}{\Pi_h} [S_h] = \frac{1}{[t]} \frac{[t]}{[S_h]}$, ou seja, $[s_h]$ é adimensional. Na primeira equação do sistema (4.1) temos

$$\frac{ds_h}{d\tau} = 1 - s_h \frac{\beta_h}{N_a \mu_h C_{i_a}} i_a s_h + \frac{\delta}{\Pi_h C_r} r_h.$$

Na equação 2 do sistema (4.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{C_i}{\mu_h} \left(\frac{\beta_h}{N_a} \frac{i_a}{C_{i_a}} \frac{s_h}{\mu_h} \Pi_h - (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h) \frac{i_h}{C_{i_h}} \right) \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{C_{i_h} \beta_h \Pi_h}{\mu_h^2 N_a C_{i_a}} i_a s_h - \frac{(\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)}{\mu_h} i_h \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \left(\frac{C_{i_h} \beta_h \Pi_h}{\mu_h^2 N_a C_{i_a}} \right) i_a s_h - \left(1 - \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Na equação 3 do sistema (4.1), temos

$$\begin{aligned}
\frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{C_r}{d\tau}(\gamma_h I_h - (\mu_h + \delta_h)R_h) \\
\frac{dr_h}{d\tau} &= \left(\gamma_h \frac{i_h}{C_{i_h}} - (\mu_h + \delta_h) \right) \frac{r_h}{C_r} \\
\frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{C_r}{d\mu_h} \left(\gamma_h \frac{i_h}{C_{i_h}} - (\mu_h + \delta_h) \frac{r_h}{C_r} \right) \\
\frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{C_r \gamma_h}{\mu_h C_{i_h}} i_h - \left(1 - \frac{\delta_h}{\mu_h} \right) r_h.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Por fim na equação 4 do sistema (4.1), temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{di_a}{d\tau} &= \frac{C_{i_a}}{\mu_h} \left(\beta_a I_a - \frac{\beta_a I_a^a}{N_a} - \mu_a I_a \right) \\
\frac{di_a}{d\tau} &= \frac{C_{i_a}}{\mu_h} \left(\beta_a \frac{i_a}{C_{i_a}} - \frac{\beta_a i_a^2}{N_a C_{i_a}^2} - \frac{\mu_a i_a}{C_{i_a}} \right) \\
\frac{di_a}{d\tau} &= \frac{C_{i_a}}{\mu_h} \left(\beta_a \frac{i_a}{C_{i_a}} - \frac{\beta_a i_a^2}{N_a C_{i_a}^2} - \frac{\mu_a i_a}{C_{i_a}} \right).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Agora tome as seguintes variáveis. Na (A.1) temos

$$\frac{\beta}{N_a \mu C_{i_a}} \quad \text{e} \quad \frac{\delta}{\Pi_h C_r}$$

em (A.2)

$$\frac{C_{i_h} \beta_h \Pi_h}{\mu_h^2 N_a C_{i_a}},$$

em (A.3)

$$\frac{C_{r_h} \gamma_h}{\mu_h C_{i_h}}$$

em (A.4)

$$\frac{\beta_a}{\mu_h C_{i_a} N_a}$$

Vamos simplificar estas variáveis. Para

$$\frac{\beta_h}{N_a \mu_h C_{i_a}} = 1 \implies C_{i_a} = \frac{\beta_h}{N_a \mu_h},$$

sendo assim, temos

$$[i_a] = \frac{[\beta_h]}{[N_a][\mu_h]} [I_a],$$

ou seja, $[i_a]$ está dimensional. Em

$$\frac{C_{i_a} \beta_h \Pi_h}{\mu_h^2 N_a C_{i_a}} = \frac{C_{i_a} \beta_h \Pi_h}{\mu_h^2 N_a} = \frac{C_{i_h} \Pi_h}{\mu_h}.$$

Em,

$$\frac{\beta_a}{\mu_h C_{i_a} N_a} = \frac{\beta_a}{\mu_h N_a} \frac{N_a \mu_h}{\beta_h} = \frac{\beta_a}{\beta_h},$$

para

$$\frac{\delta}{\Pi_h C_r} = 1 \implies C_r = \frac{\delta}{\Pi_h},$$

sendo assim temos que $[r_h] = \frac{[\delta]}{\Pi_h} R_h = \frac{[t]^{-2}}{[S_h][t]^{-1}} S_h$ que é dimensional, então temos

$$\frac{ds_h}{d\tau} = 1 - s_h - i_a s_h + r_h,$$

Agora temos

$$\frac{C_i \Pi_h}{\mu_h} \quad \text{e} \quad \frac{C_r \gamma_h}{\mu_h C_i} = \frac{\delta_h}{\Pi_h} \frac{\gamma_h}{\mu_h} \frac{1}{C_i}$$

tomando $C_i = \frac{\delta_h}{\Pi_h}$, em

$$\frac{\delta_h}{\Pi_h} \frac{\Pi_h}{\mu_h} = \frac{\delta_h}{\mu_h},$$

em

$$\frac{\delta_h}{\Pi_h} \frac{\gamma_h}{\mu_h} \frac{\Pi_h}{\delta_h} = \frac{\gamma_h}{\mu_h}$$

Deste modo temos o seguinte sistema, que é dimensional

$$\begin{aligned} \frac{ds_h}{d\tau} &= 1 - s_h - i_a s_h + r_h \\ \frac{di_h}{d\tau} &= \frac{\delta_h}{\mu_h} i_a s_h \left(1 - \frac{\gamma_h}{\mu_h} + \frac{\alpha_h}{\mu_h} \right) i_h \\ \frac{dr_h}{d\tau} &= \frac{\gamma_h}{\mu_h} i_h - \left(1 - \frac{\delta_h}{\mu_h} \right) r_h \\ \frac{di_a}{d\tau} &= \frac{\beta_a}{\mu_h} i_a - \frac{\beta_a}{\beta_h} i_a^2 - \frac{\mu_a}{\mu_h} i_a \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

ÁVILA-PIRES, F. D. d. Zoonoses: hospedeiros e reservatórios. **Cadernos de Saúde Pública**, SciELO Public Health, v. 5, n. 1, p. 82–97, 1989.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: Guanabara Dois, 1985.

DEROUICH, M.; BOUTAYEB, A. An avian influenza mathematical model. **Applied mathematical sciences**, v. 2, n. 36, p. 1749–1760, 2008.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983.

MURRAY, J. Appendix b. routh-hurwitz conditions, jury conditions, descartes? rule of signs and exact solutions of a cubic. **Mathematical Biology**, Antman SS, Marsden JE, Sirovich L, and Wiggins S, eds, p. 507–509, 2002.