

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

GIULIANA RAQUEL BUZATO PAULINO

**MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS À DINÂMICA DE  
POPULAÇÕES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2018

GIULIANA RAQUEL BUZATO PAULINO

**MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS À DINÂMICA DE  
POPULAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para a disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Mateus Bernardes

**CURITIBA**

**2018**



## TERMO DE APROVAÇÃO

### “MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS À DINÂMICA DE POPULAÇÕES”

por

### “Giuliana Raquel Buzato Paulino”

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às **13h30** do dia **29** de **novembro** de 2018 na sala **Q306** como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. A aluna foi arguida pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho **aprovado**.

<hr/> <p>Prof. Dr. Mateus Bernardes <b>(Presidente - UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Nara Bobko <b>(Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)</b></p>
<hr/> <p>Prof. Dr. Andrés David Baez Sanchez <b>(Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)</b></p>	
<hr/> <p>Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Priscila Savulski Ferreira de Miranda <b>(Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)</b></p>	<hr/> <p>Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Neusa Nogas Tocha <b>(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)</b></p>

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso. ”

## RESUMO

PAULINO, Giuliana. MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS À DINÂMICA DE POPULAÇÕES . 34 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

Este trabalho apresenta algumas aplicações de equações diferenciais à dinâmica populacional. Apresentando uma revisão de alguns dos principais modelos da literatura como o de Malthus que foi o primeiro a utilizar ferramentas matemáticas para estimar o crescimento da população mundial em 1798. Anos depois Verhurst em 1837, desenvolve um modelo baseado no modelo de Malthus, onde propõe uma alteração na taxa de crescimento de modo que a população tendesse à estabilidade. Serão citados outros modelos baseado na equação logística de Verhurst, aplicados ao crescimento de populações isoladas. Quando consideramos populações que interagem entre si, passamos a lidar com um sistema de equações diferenciais ordinárias. Estes modelos contemplam situações de convívio que variam desde a simbiose, passando pela competição intraespecífica ou mesmo o famoso modelo presa-predador de Lotka-Volterra. Outras situações de convívio de populações que serão analisadas, são as que uma população sujeita a um crescimento livre sofre com a interferência de um agente de controle que afetara a população inicial.

**Palavras-chave:** Dinâmicas populacionais, populações livres , sistemas não lineares

## ABSTRACT

PAULINO, Giuliana. MATHEMATICAL MODEL APPLIED TO POPULATION DYNAMICS. 34 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2018.

This work presents an application of differential equations to population dynamics. Presenting a review of some of the major literature models such as the Malthus who was the first to precede mathematical tools to estimate world population growth in 1798. Years after Verhurst in 1837, develop a model based on Malthus, growth rate of so that a trend tended to stability. Other types of logistic research from Verhurst will be cited for the growth of isolated communities. When the rules are interdisciplinary result in systems of differential equations, these models contemplate situations of conviviality that vary in a simulated way, pass through intraspecific competition or even the famous face-to-face model of Lotka-Volterra. Other occurrences of coexistence of populations that are analyzed are like a population subject to a free growth, with an interference of a control problem that affects an initial population.

**Keywords:** Population Dynamics, free populations, non-linear systems

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS MATEMÁTICOS PARA DINÂMICA POPULACIONAL BASEADOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS</b>	<b>6</b>
2.1	EQUAÇÕES AUTÔNOMAS	7
2.2	MODELO DE GOMPERTZ (1825)	11
2.3	SMITH (1963)	12
2.4	GOEL, MAITRA, MONTROLL (1971)	12
2.5	AYALA, GILPIN, EHRENFELD (1973)	14
<b>3</b>	<b>MODELOS BASEADOS EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS</b>	<b>15</b>
3.1	SISTEMAS AUTÔNOMOS	15
3.1.1	Espécies em competição	18
3.1.2	Presa-predador	20
<b>4</b>	<b>SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE: ESTUDO DE CASOS</b>	<b>21</b>
4.1	DINÂMICA POPULACIONAL LOGÍSTICA COM DINÂMICA DE CONTROLE LINEAR	21
4.2	DINÂMICA POPULACIONAL LOGÍSTICA COM DINÂMICA DE CONTROLE AFIM	23
4.3	DINÂMICA POPULACIONAL LOGÍSTICA COM DINÂMICA DE CONTROLE AFIM, EM COMPETIÇÃO	24
4.4	DINÂMICA POPULACIONAL DE SMITH COM DINÂMICA DE CONTROLE AFIM, EM REGIME DE COMPETIÇÃO	26
4.5	DINÂMICA POPULACIONAL E DE CONTROLE LOGÍSTICAS, EM COMPETIÇÃO	27
<b>5</b>	<b>UM MODELO MATEMÁTICO EM QUIMIOTERAPIA: ANÁLISE</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>33</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>34</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Equações diferenciais são conteúdos que possibilitam a interdisciplinaridade da matemática com outras áreas do conhecimento tais como: Biologia, Física, Química, Economia, Engenharias, entre outras. Isto faz destas equações ferramentas tão importantes, pelas suas diversas formas de aplicações que nos ajudam a entender fenômenos e simular acontecimentos que podem se aproximar da realidade.

Quando utilizamos estas equações para simular fenômenos em epidemiologia ou em ecologia, por exemplo, podemos compreender melhor o a dinâmica evolutiva de algumas doenças (epidemiologia) ou a dinâmica de populações isoladas ou em convívio (ecologia).

Diversos modelos para o crescimento populacional aparecem na literatura, em geral baseados em equações autônomas, onde o crescimento depende funcionalmente da densidade populacional presente instantaneamente, como acontece em modelos como os de Malthus ou o de Verhulst.

Estes modelos citados anteriormente se aplicam a populações isoladas. Por outro lado, quando estudamos populações que interagem, passamos a lidar com os sistemas de equações diferenciais ordinárias. Estes modelos contemplam situações de convívio que variam desde a simbiose, passando pela competição intraespecífica ou mesmo o famoso modelo presa-predador de Lotka-Volterra.

Outras situações de convívio de populações que serão analisadas, são as que uma população sujeita a um crescimento livre sofre com a interferência de um agente de controle que afetara a população inicial, em geral diminuindo o número de indivíduos da população.

## 2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA DINÂMICA POPULACIONAL BASEADOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Equações Diferenciais são ferramentas matemáticas extremamente importantes pelas suas diversas formas de aplicações que nos ajudam a entender fenômenos e simular acontecimentos que poderão levar as soluções próximas daquelas observadas na realidade. Define-se uma equação diferencial ordinária por

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0, \quad (2)$$

ou  $f(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , envolvendo uma função incógnita  $y = Y(t)$  e algumas derivadas em relação a  $t$ . Chama-se ordem da equação diferencial à maior das ordens das derivadas que nela aparecem.

Chama-se solução de uma equação diferencial de ordem  $n$  no intervalo  $I$  a uma função  $y = g(t)$  definida nesse intervalo, juntamente com as suas derivadas, até à ordem  $n$ , que satisfaz a equação diferencial, ou seja, tal que:

$$\forall x \in I, f(t, g(t), g'(t), \dots, g^{(n)}(t)) = 0$$

No caso de equações de primeira ordem, estas equações podem ser lineares, quando estão na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y + q(t), \quad (3)$$

ou não lineares caso contrário.



## 2.1 EQUAÇÕES AUTÔNOMAS

Dentre as equações de primeira ordem, estão as chamadas equações autônomas, que são aquelas nas quais a variável independente não aparece explicitamente, ou seja, a taxa de variação  $\frac{dy}{dt}$  depende apenas de  $y$  e tem a forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (4)$$

Uma solução para uma equação como a anterior é uma função  $f(y)$  que satisfaz a condição por ela prescrita [Bassanezi e Ferreira 1988]. Métodos analíticos para encontrar soluções deste tipo de equações estão disponíveis em alguns casos, dependendo da relação funcional estabelecida por  $f(y)$ . Entretanto, um tipo especial de solução, e que é de muito interesse são as chamadas soluções de equilíbrio que são obtidas supondo que não existe variação temporal na variável dependente:

$$\frac{dy}{dt} = 0. \quad (5)$$

Se  $\bar{y}$  é um zero de  $f$ , ou seja,  $f(\bar{y}) = 0$ , então  $\bar{y}$  é chamada *solução de equilíbrio* para em (4).

Estas soluções de equilíbrio classificam-se de acordo com a estabilidade. [Figueiredo e Nunes 2010] definem:

Definição 1. Um ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  é estável, se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para  $|y_0 - \bar{y}| < \delta$ , a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} f(y) = \frac{dy}{dt} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (6)$$

é tal que  $|y(t) - \bar{y}| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .

Um ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  será *assintoticamente estável*, se for estável e se existir  $\eta > 0$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$$

quando  $|y_0 - \bar{y}| < \eta$ . Um ponto de equilíbrio não estável é dito *instável*.

Teorema 1: Seja  $\bar{y}$  ponto de equilíbrio de 4 sendo que todas as derivadas parciais de  $f$  devem existir e serem contínuas em um aberto  $A$  onde  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Então

$$\begin{cases} f'(\bar{y}) < 0 \implies \bar{y} \text{ e assintoticamente estavel} \\ f'(\bar{y}) > 0 \implies \bar{y} \text{ e instavel} \end{cases} \quad (7)$$

As equações autônomas e o estudo de seu equilíbrio são aplicados de várias maneiras. Uma delas é o crescimento de uma população, onde a taxa de crescimento da população  $P$  no instante  $t$  é definida por  $\frac{dP}{dt}$ .

Em 1798 Malthus foi o primeiro a apresentar uma proposta utilizando a matemática para estabelecer um modelo para o crescimento da população mundial. De acordo com a teoria de Malthus a população mundial cresce em progressão geométrica enquanto a produção de alimentos em produção aritmética. Esta teoria foi defendida por Malthus no livro *Ensaio Sobre o Princípio da População*. Thomas Malthus procurou alertar com sua teoria sobre os problemas gerados pelo elevado crescimento demográfico mundial. Conforme sua teoria, se o controle da natalidade não fosse aplicado, rapidamente haveria falta de alimentos, aumento da fome e da miséria no mundo. Segundo ele as soluções seriam o celibato, o casamento tardio e o controle da natalidade nos países pobres.

Malthus criou um modelo matemático conhecido como lei de Malthus, cujo objetivo era calcular o aumento da população em um período de 10 a 20 anos, para que os países pudessem fazer previsões e adotar medidas para evitar os problemas causados pelo crescimento demográfico.

Apesar de não haver incorreções do ponto de vista matemático do seu modelo, Malthus não conseguiu prever os avanços tecnológicos que viriam a ocorrer e que aumentaram significativamente a produção de alimentos e que evitaram as catástrofes previstas por ele.

O modelo Malthusiano é um dos mais simples com respeito a variação da população com o tempo, pois recai em uma equação linear. Supondo a taxa de crescimento constante igual a  $\lambda > 0$ , a equação que neste caso modela o crescimento da população é:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \lambda P \\ P(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Analisando as soluções de equilíbrio neste modelo temos:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \implies \lambda P = 0 \iff P = 0,$$

pois  $\lambda > 0$ .

A equação de Malthus, tem uma única solução de equilíbrio e quando aplicamos o Teorema 1. teremos:

$$f'(0) = \lambda > 0 \quad (9)$$

Pelo teorema 1, para que haja a estabilização do ponto de equilíbrio, é necessário que a derivada de primeira ordem da função seja menor que zero. Como, no modelo de Malthus isso não ocorre, ou seja, a derivada de primeira ordem é positiva, pode-se concluir que o ponto de equilíbrio não é estável e conseqüentemente a população continuaria indefinidamente em crescimento [Figueiredo e Nunes 2010].

O modelo malthusiano ainda é aplicado em caso de crescimentos de populações em um determinado espaço de tempo e em populações de micro-organismos que se reproduzem por mitose [Figueiredo e Nunes 2010].

Observamos ainda que, quando consideramos  $\lambda < 0$  este modelo pode ser aplicado no decaimento radioativo.

Em 1837 o matemático belga Pierre Verhulst, propôs um modelo com uma equação diferencial agora conhecida como equação logística, para o crescimento populacional. O modelo logístico presume que a população cresce de forma exponencial com relação ao tempo, porém a partir de certo período esta população tende a entrar em equilíbrio. Citado por [Bacaer 2011] em um artigo, publicado em 1845, Verhulst escreve: "Não insistiremos na hipótese da progressão geométrica, uma vez que ela pode se sustentar apenas em circunstâncias muito especiais; por exemplo, quando um território fértil de tamanho quase ilimitado passa a ser habitado por pessoas com uma civilização avançada, como foi o caso das primeiras colônias americanas."

O modelo proposto por Verhulst supõe que a taxa de crescimento da população, que é constante no modelo de Malthus, decresce linearmente com a população, isto é,  $\lambda = \lambda(P) = rP(1 - P/K)$ , com  $r, K > 0$ , constantes. Neste caso, a dinâmica é modelada pelo PVI equação:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (10)$$

Neste caso, as soluções de equilíbrio são obtidas por:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \iff rP \left(1 - \frac{P}{K}\right) = 0 \iff P = 0 \text{ ou } P = K.$$

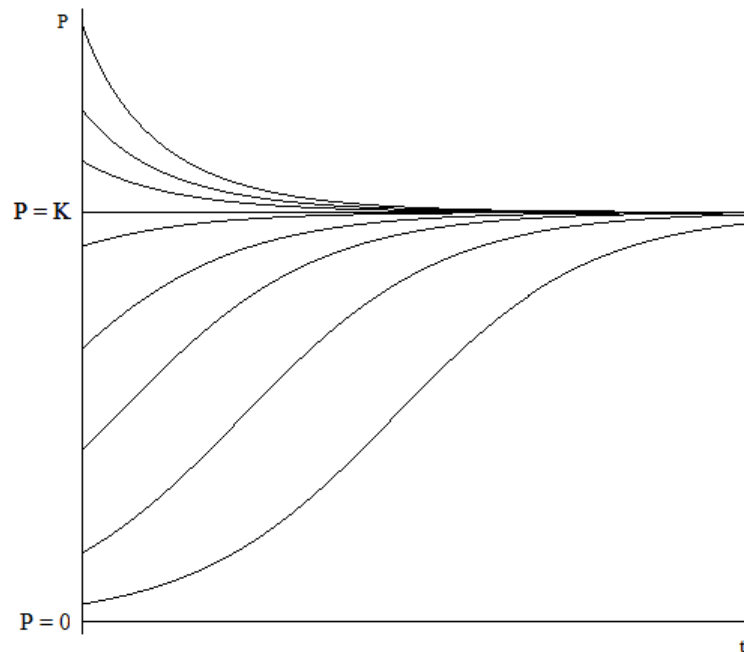
As soluções de equilíbrio encontradas, são classificadas encontrando a derivada da equação (10).

$$f'(P) = r - \frac{2rP}{K} \quad (11)$$

quando substituimos os pontos de equilíbrio e fazendo as simplificações temos que:

- Para  $P = 0$ :  $f'(0) = r > 0$ , logo, a solução é instável.
- Para  $P = K$ :  $f'(K) = -r < 0$ , e neste caso esta solução estacionária é assintoticamente estável.

A solução de equilíbrio  $P = K$  é a capacidade de suporte do meio, pois qualquer que seja a população inicial  $0 < P_0 < K$  a população cresce tendendo para  $K$ . Se a população inicial  $P_0$  for maior que a capacidade de suporte do meio, ou seja  $P_0 > K$ , a população  $P(t)$  decresce exponencialmente tendendo também para  $K$ , como é apresentado na Figura 6.



**Figura 6: Soluções estacionárias da equação Logística e estabilidade.**

Quando o gráfico de  $P(t)$  está entre as retas  $P = 0$  e  $P = K$ , tendo a forma de um S e a curva é chamada de *logística*. Ela tem um ponto de inflexão quando  $P(t) = \frac{K}{2}$ , isso quer dizer que até atingir  $\frac{K}{2}$  a população cresce com derivada positiva e a partir daí o crescimento se dá mais lentamente, como apresentado na figura.

Além destes dois modelos clássicos, existem outros modelos desenvolvidos para o estudo de crescimentos populacionais, em geral baseados em equações autônomas e não lineares. Tais modelos são geralmente modificações do modelo logístico, feitas buscando adaptações melhores aos problemas aplicados, como por exemplo os modelos de Gompertz(1825), Smith(1963), Goel-Maitra-Montroll (1971) e Ayala-Gilpin-Ehrenfeld (1973), todos citados em [Figueiredo e Nunes 2010] e [Bassanezi 2002]. Nas próximas seções são examinadas as soluções estacionárias e seu comportamento quanto à estabilidade.

## 2.2 MODELO DE GOMPERTZ (1825)

Segundo [Hooker 1965] Gompertz, em 1825, mostrou que a taxa de mortalidade aumenta em uma progressão geométrica. Assim, quando as taxas de mortalidade são plotadas em uma escala logarítmica, uma linha reta conhecida como função de Gompertz é obtida. É a função atuarial mais informativa para investigar o processo de envelhecimento. Esse modelo é utilizado na descrição de crescimento celular de bactérias, plantas, tumores entre outros, pois neste modelo a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento como explica [Bassanezi 2002].

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(r - K \ln P) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \quad (12)$$

Com  $r, K > 0$ .

Neste caso, as soluções de equilíbrio são obtidas por:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \iff P(r - K \ln P) = 0 \iff P = 0 \text{ ou } P = e^{r/K}.$$

Desconsiderando a solução de equilíbrio nula, pois não está definida para (12), a solução de equilíbrio não-nula encontrada para esta equação é classificada segundo:

$$f'(P) = r - K \ln P + K. \quad (13)$$

Quando substituimos os pontos de equilíbrio em (13) e fazendo as simplificações temos:

- Para  $P = e^{r/K}$ :  $f'(0) = K > 0$ , logo, a solução é instável.

### 2.3 SMITH (1963)

Segundo [Bassanezi 2002], este é o modelo de Smith.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \frac{K}{P} \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (14)$$

com  $\lambda, K > 0$ , constante.

Estudando as soluções de equilíbrio, temos:

$$\lambda P \ln \frac{K}{P} = 0 \iff \frac{K}{P} = 1 \text{ ou } P = 0 \iff P = K \text{ ou } P = 0.$$

Não analisaremos a solução de equilíbrio nula, pois não está definida para a equação (14). Para  $P = K$  temos a solução de equilíbrio não-nula. A análise de estabilidade é feita aplicando-se o Teorema 1 sobre esta solução.

$$f'(P) = \lambda \left( \ln \frac{K}{P} - 1 \right), \quad (16)$$

quando substituimos os pontos de equilíbrio em (16) e fazendo as simplificações temos:

- Para  $P = K$ :  $f'(K) = -1 < 0$ , e neste caso esta solução estacionária é assintoticamente estável.

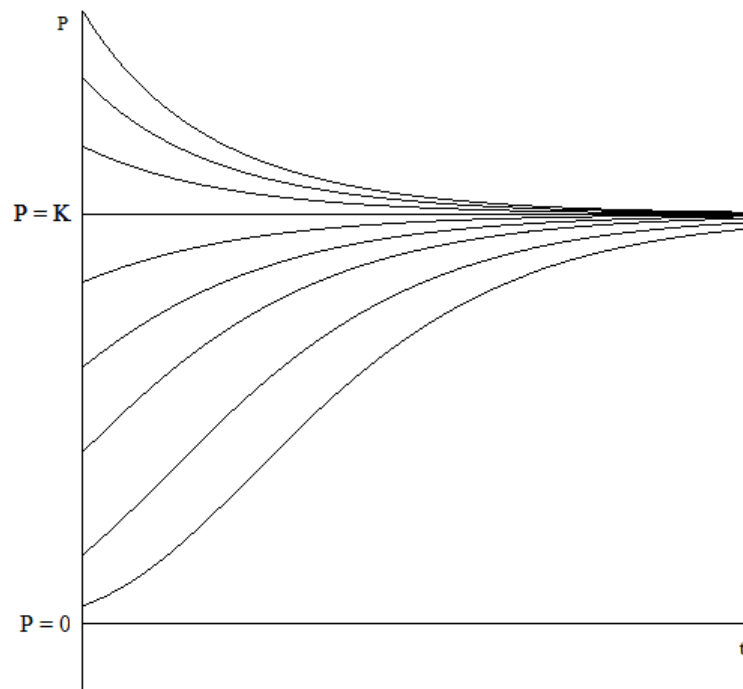
### 2.4 GOEL, MAITRA, MONTROLL (1971)

Este é mais um que modelo pode ser visto como uma generalização do Logístico (10).

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \lambda P \left[ 1 - \left( \frac{P}{K} \right)^\theta \right] \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (17)$$

onde as constantes  $K > 0$  e  $\theta > 0$ .

Em um caso particular deste modelo com  $\theta = 1$  voltamos ao modelo logístico. Se  $\theta > 1$  então a competição intra-específica nesta população é alta, significando que a população



**Figura 7: Soluções estacionárias da equação de Smith e estabilidade.**

leva mais tempo para atingir a sua capacidade suporte. Quando  $0 < \theta < 1$  encontramos pouca competição intraespecífica levando a população a encontrar a capacidade suporte mais cedo [Vladar 2006].

Temos, neste caso, como solução de equilíbrio:

$$\lambda P \left[ 1 - \left( \frac{P}{K} \right)^\theta \right] = 0 \iff P = 0 \text{ ou } P = K.$$

$$f'(P) = \lambda - (\theta + 1) \frac{\lambda P^\theta}{K^\theta} \quad (19)$$

quando substituimos os pontos de equilíbrio em (19) e fazendo as simplificações, pelo Teorema 1 temos:

- Para  $P = 0$ :  $f'(0) = \lambda > 0$ , logo, a solução é instável.
- Para  $P = K$ :  $f'(K) = -\theta\lambda < 0$ , e neste caso esta solução estacionária é assintoticamente estável.

Exatamente o mesmo comportamento do modelo logístico, isto é, uma solução de equilíbrio nula instável e uma solução estacionária positiva que é assintoticamente estável, e que pode ser pensada como a capacidade suporte do meio.

## 2.5 AYALA, GILPIN, EHRENFELD (1973)

Este modelo aplicado em populações isoladas é uma adaptação sugerida por [Bassanezi 2002] do modelo de Lotka-Volterra, que é aplicado a populações que interagem e será analisado no próximo capítulo.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = P(\lambda - aP + be^{-P}) \\ P(0) = P_0, \end{cases} \quad (20)$$

onde as constantes  $\lambda > 0$ ,  $a > 0$  e  $b > 0$ .

Estudando as soluções de equilíbrio temos que  $P = 0$  é a uma das soluções de equilíbrio, podendo existir até mais duas outras dependendo da relação entre as constantes  $a, b$  e  $\lambda$ .

Quando  $P$  for grande, ou seja  $P \rightarrow \infty$ , teremos que  $be^{-P} \rightarrow 0$ , a equação (20) passa a ser  $P(\lambda - aP)$  que é a equação logística. Já quando temos  $P$  pequeno, sendo  $P \rightarrow 0$ , então  $be^{-P} \rightarrow 1$ , o que influenciara na capacidade de suporte da população.

Os modelos de dinâmicas populacionais apresentados representam populações isoladas que se desenvolvem sem migrações. Como explica [Bassanezi 2002]. A forma geral destes modelos de equações autônomas é do tipo

$$\frac{dP}{dt} = r(P)P \quad (22)$$

onde  $r(P)$  é chamada de taxa de crescimento densidade-dependente. Nos modelos que supõem estabilidade das populações tem-se que

$$r(P) \longrightarrow 0$$

quando

$$P \longrightarrow K$$

sendo  $K$  o suporte de capacidade do meio.

Para [Bassanezi 2002] os modelos de crescimento populacional da forma (22) são aproximações grosseiras da realidade e frequentemente são usados como instrumentos para verificação das tendências dos dados observados.



### 3 MODELOS BASEADOS EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Os sistemas de equações diferenciais ordinárias, como explica [Boyce e Diprima 2010], aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma delas função da mesma variável independente única. Vamos denotar a variável independente por  $t$  e as variáveis dependentes, que são funções de  $t$ , por  $x_1, x_2, x_3, \dots$

Existem muitas equações diferenciais que não podem ser resolvidas de maneira conveniente por métodos analíticos, como cita [Boyce e Diprima 2010], é importante considerar outros tipos de informações, que serão obtidos sobre suas soluções sem de fato resolver as equações. Relacionando suas soluções de equilíbrio com a estabilidade de cada caso.

#### 3.1 SISTEMAS AUTÔNOMOS

Quando estudamos populações que interagem, temos os sistemas de equações diferenciais ordinárias. Estes modelos contemplam situações de convívio em [Boyce e Diprima 2010], de modo geral descrito para duas populações  $x_1$  e  $x_2$  por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = G(x_1, x_2). \end{cases} \quad (24)$$

Se,  $F$  e  $G$  são lineares em  $x_1$  e  $x_2$ , temos um sistema linear. Se  $F$  e  $G$  são da forma  $ax_1 + bx_2$ , com  $a$  e  $b$  constantes, então temos um sistema de EDO's lineares a coeficientes constantes na forma matricial:

$$x' = AX \quad (25)$$

Onde  $A$  é uma matriz constante  $2 \times 2$ . Os elementos de  $A$  são números reais e  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

As soluções de equilíbrio deste sistema são encontradas resolvendo  $AX = 0$ . Supondo  $A$  é invertível, então,  $\det A \neq 0$ , resta que  $X = 0$  é a única solução de equilíbrio do sistema (25).

Para encontrar explicitamente as soluções vamos supor que  $x = \xi e^{rt}$  onde  $r$  é uma constante e  $\xi$  é um vetor de constantes, ambos a determinar. Para determinar os valores de  $r$  e  $\xi$ , substituímos este  $x$  na equação, então:

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}.$$

Cancelando o escalar não nulo  $e^{rt}$ , obtemos.

$$\xi = r\xi, \text{ ou } (A - rI)\xi = 0,$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ , para resolver o problema inicial precisamos resolver  $(A - rI)\xi = 0$ , determinando autovalores e autovetores da matriz de coeficientes  $A$ . O vetor dado por  $X = \xi e^{rt}$  é uma solução da equação inicial. As soluções do sistema (25), podem ser divididas em três casos dependendo da natureza dos autovalores de  $A$ .

**Caso 1** Autovalores reais com sinal opostos: quando os autovalores forem reais e com o mesmo sinal, dizemos que o ponto crítico será o é um ponto de *sela*.

**Caso 2** Autovalores reais diferente, mas com mesmo sinal: neste caso o ponto crítico será um *nó*. Se os autovalores forem ambos menores do que zero as trajetórias tendem a se aproximarem do ponto crítico e se os autovalores forem ambos positivos as trajetórias se distanciaram do ponto crítico.

**Caso 3** Autovalores iguais: considerando os autovalores negativos nosso ponto crítico será um *nó próprio* com as trajetórias tendendo a se aproximarem do ponto crítico. No caso dos autovalores iguais e positivos teremos também o *nó próprio*, porém com trajetórias no sentido oposto.

**Caso 4** Autovalores complexos: o ponto crítico neste caso será um *ponto espiral*.

**Caso 5** Autovalores imaginários puros: Neste caso o ponto crítico é dito *centro*.

Note que as funções  $F$  e  $G$ , nas equações (24) não dependem da variável independente  $t$ , mas apenas das variáveis dependentes  $x_1, x_2$ . Um sistema com essas propriedades é dito **autônomo**.

### Estabilidade e Instabilidade

Seja o sistema autônomo da forma

$$X' = f(X) \quad (26)$$

Os pontos, se existem, onde  $f(X) = 0$  são chamados pontos críticos do sistemas (26). Um ponto crítico  $x^0$  do sistema 26 é dito **estável** se, quando dado qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que toda solução  $x = \phi(t)$  do sistema (24), que satisfaz, em  $t = 0$ ,

$$|\phi(0) - x^0| < \delta$$

existe para todo  $t > 0$  e satisfaz

$$|\phi(t) - x^0| < \varepsilon$$

Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**. Já um ponto crítico  $x^0$  é dito **assintoticamente estável** se é estável e existe um  $\delta_0$ , com  $0 < \delta_0 < \delta$  tal que, se uma solução  $x = \phi(t)$  satisfaz

$$|\phi(0) - x_0| < \delta_0$$

, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = x^0$$

Logo, segundo [Boyce e Diprima 2010] as trajetórias que começam próximas de  $x^0$  não apenas permanecem próximas, mas têm que acabar tendendo a  $x^0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Teorema 2: O ponto crítico  $X = 0$  do sistema linear é: assintoticamente estável se os autvalores  $r_1$  e  $r_2$  são reais e negativos ou tem parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se  $r_1$  e  $r_2$  são imaginários puros; instável se  $r_1$  e  $r_2$  são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.

### Aproximação Linear de Sistemas Não Lineares

Considerando o sistema não linear

$$X' = f(X) \quad (27)$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Perto de cada ponto crítico de um sistema não linear o padrão da trajetórias é parecido com o das trajetórias de um determinado sistema linear. Sem perda de generalidade, podemos escolher o ponto crítico como a origem, se  $x^0 \neq 0$  podemos substituir  $u = x - x^0$  na equação

(27), então  $u$  satisfaz um sistema autônomo com ponto crítico na origem. Supondo que

$$X' = AX + g(X) \quad (28)$$

Se  $x^0 = 0$  um ponto crítico **isolado** do sistema, ou seja existe um círculo em torno da origem, onde não existem outros pontos críticos. Vamos supor que  $\det A \neq 0$ , de modo que  $x^0 = 0$  é um ponto crítico do sistema  $X' = AX$  para que o sistema não linear (28) esteja próximo do sistema linear  $X' = AX$ , vamos supor que  $g(X)$  é pequeno.

Quando analisamos o sistema não linear da forma

$$\begin{cases} x_1' = F(x_1, x_2) \\ x_2' = G(x_1, x_2) \end{cases} \quad (29)$$

o sistema (29) vai ser localmente linear em uma vizinhança de um ponto crítico sempre que as funções  $F$  e  $G$  tiverem derivadas parciais contínuas até segunda ordem. Segundo o desenvolvimento trazido por [Boyce e Diprima 2010], resultará em uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} F_{x_1} & F_{x_2} \\ G_{x_1} & G_{x_2} \end{pmatrix} \quad (30)$$

é chamada de **matriz jacobiana** das funções  $F$  e  $G$  em relação a  $x_1$  e  $x_2$ . Vamos supor que o  $\det(A)$  não se anula em no ponto crítico, de modo que este ponto seja um ponto crítico isolado do sistema.

**Teorema 3:** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  os autovalores do sistema linear (25) correspondente ao sistema localmente linear (28). Então a estabilidade do ponto crítico  $(0,0)$  do sistema linear (25) e do sistema localmente linear (28) são descrito como na tabela.

Os sistemas analisados podem ser aplicados em problemas de dinâmicas populacionais envolvendo duas ou mais populações, como cita [Boyce e Diprima 2010]. Apesar de extremamente simples, se comparadas as complexas relações encontradas na natureza, ainda é possível obter informações que ajudam a compreender algumas coisas sobre os princípios ecológicos.

### 3.1.1 ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO

Supondo que existem duas populações semelhantes, em algum ambiente fechado, onde nenhuma é presa da outra, mas as duas competem por um suprimento limitado. Denota-se por

Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Localmente Lineares				
	Sistemas Lineares		Sistemas Localmente Lineares	
$r_1, r_2$	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável	Nó	Assintoticamente estável
$r_1 > 0 > r_2$	Ponto de Sela	Instável	Ponto de sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó próprio ou Nó impróprio	Instável	Nó ou Ponto espiral	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó próprio ou Nó Impróprio	Assintoticamente estável	Nó ou Ponto espiral	Assintoticamente estável

**Tabela 7: Baseado na tabela de [Boyce e Diprima 2010]**

$x_1$  e  $x_2$  as duas espécies num instante  $t$ . Cada populações na ausência da outra está sujeita a um crescimento livre na forma logística. A taxa de crescimento das populações são denotadas por  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  enquanto  $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}$  e  $\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2}$  são os níveis de saturação. Então

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(\varepsilon_1 - \sigma_1 x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(\varepsilon_2 - \sigma_2 x_2) \end{cases} \quad (31)$$

Quando as duas espécies disputarem o mesmo alimento, cada uma afetará o suprimento de comida disponível para a outra. A taxa de crescimento de  $x_1$  será reduzida devido à presença de  $x_2$ , substituindo a taxa de crescimento de  $x_1$  no sistema (31) por  $\varepsilon_1 - \sigma_1 x_1 - \alpha_1 x_2$ , onde  $\alpha_1$  é uma medida de grau de interferência da espécie  $x_2$  sobre  $x_1$ . Analogamente para a interferência de  $x_1$  sobre  $x_2$ . Obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(\varepsilon_1 - \sigma_1 x_1 - \alpha_1 x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(\varepsilon_2 - \sigma_2 x_2 - \alpha_2 x_1) \end{cases} \quad (32)$$

Os valores de  $\varepsilon_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\sigma_2$  e  $\alpha_2$  são positivos e segundo [Boyce e Diprima 2010] dependem das espécies particulares em consideração, devem ser obtidas através de observações. Em alguns casos, a competição entre duas espécies leva a um estado de equilíbrio de coexistência, enquanto há outros casos onde a competição resulta na extinção de uma das espécies.

### 3.1.2 PRESA-PREDADOR

Quando analisamos um modelo envolvendo apenas duas espécies não podemos descrever as relações que ocorrem na natureza com toda as suas complexidades. Apesar disto estudaremos uma situação onde uma espécie (predador) se alimenta de outra (presa). Denotaremos por  $x_1$  a população da presas e por  $x_2$  a população de predadores em um instante  $t$ . Segundo [Boyce e Diprima 2010] devemos considerar as seguintes hipóteses: Na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual, ou seja quando  $x_2 = 0$ ,  $\frac{dx_1}{dt} = ax_1$  com  $a > 0$ . Na ausência da presa, o predador é extinto, assim  $\frac{dx_2}{dt} = -cx_2$  com  $c > 0$ , quando  $x_1 = 0$ . O número de encontros entre predador e presa é proporcionais ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento das populações de predadores na forma  $\gamma x_1 x_2$  e inibir o crescimento da população de presas na forma  $-\alpha x_1 x_2$ , onde  $\alpha$  e  $\gamma$  são constantes positivas.

Com isso chegamos às equações

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(a - \alpha x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-c + \gamma x_1). \end{cases} \quad (33)$$

As constantes  $a, c, \alpha$  e  $\gamma$  são todas positivas.  $a$  a taxa de crescimento das presas e  $c$  a taxa de morte dos predadores. Já  $\alpha$  e  $\gamma$  são medidas do efeito da interação entre as populações.

Segundo [Gilpin e Ayala 1973] as equações (33) que são chamadas de Lotka-Volterra, foram propostas por Lotka e Volterra na década de 1920. Embora sejam equações simples caracterizam muitos problemas.

#### 4 SOLUÇÕES DE EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE: ESTUDO DE CASOS

Foram estudados alguns casos de dinâmicas populacionais onde uma população inicial sofre uma interferência de um agente de controle. A forma geral do sistema de equações é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r(N) + h(N, Q) \\ \frac{dQ}{dt} = f(Q, t) \end{cases} \quad (35)$$

Sendo  $N$  uma população livre e  $Q$  o agente de controle.

As equações  $f(Q, t)$  e  $H(N, Q) = r(N) + h(N, Q)$ , onde  $r(N)$  é a equação que modela o crescimento da população livre e  $h(N, Q)$  a interação entre a população e o agente de controle, foram escolhidas de tal forma que existissem pelo menos uma solução de equilíbrio com  $N \neq 0$ . Para o estudo do sistema (35), analisaremos as soluções de equilíbrio.

$$\frac{dN}{dt} = 0 \text{ e } \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Encontrando as soluções de equilíbrio, estudaremos sua estabilidade, a partir do estudo dos autovalores resultantes da matriz jacobiana  $A$ , calculando  $A - I\alpha$ .

$$A = \begin{pmatrix} f_N & f_Q \\ H_N & H_Q \end{pmatrix} \quad (36)$$

A seguir, exibem-se alguns dos casos estudados.

##### 4.1 DINÂMICA POPULACIONAL LOGÍSTICA COM DINÂMICA DE CONTROLE LINEAR

Considere  $N$  uma população sujeita a crescimento livre de interação na forma logística, isto é,

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right),$$

Com  $r > 0$  e  $K > 0$  e  $Q$  um agente de controle adicionado à sua dinâmica, cuja própria dinâmica é Malthusiana, definida por:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q.$$

Além disso, considere que a interação entre estas populações é dada pela equação  $h(N, Q)$  na forma Michaelis-Menten, que segundo [Edelstein-Keshet 1988] é utilizada para descrever o crescimento bacteriano dentro de um quimiostato, assumimos uma expressão para a taxa de crescimento dependente de nutrientes que tem a propriedade de saturação. Para baixos níveis de concentração de nutrientes  $Q$ , a taxa de crescimento bacteriano dada pela equação é aproximadamente proporcional a  $Q$ . No nível  $Q$  alto, porém, esta taxa aproxima-se de um valor constante  $\mu$ , numerosos fenômenos biológicos exibem uma cinética de saturação. A expressão

$$M(Q) = \frac{\mu Q}{a + Q} \quad (37)$$

que representa tal propriedade, é chamada a cinética de Michaelis-Menten. essa expressão na verdade deriva de um conjunto particular de suposições sobre o que pode estar ocorrendo no nível molecular na superfície da membrana celular bacteriana.

Para a interação do agente de controle com a população livre usaremos uma adaptação da equação (37), onde  $h(N, Q) = N.M(Q)$ .

O sistema inicial é representado por:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{\mu N Q}{a + Q} \\ \frac{dQ}{dt} = -\lambda Q \end{cases} \quad (38)$$

Para encontrar as soluções de equilíbrio do sistema (38), resolvemos  $\frac{dN}{dt} = 0$  e  $\frac{dQ}{dt} = 0$  portanto, são soluções:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q = 0 \quad \iff \quad Q_0 = 0$$

e:



$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{\mu N Q}{a + Q} = 0 \iff$$

$$rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{\mu N Q_0}{a + Q_0} = 0$$

Ou seja:

$$N_0 = 0 \text{ ou } N_1 = K$$

As soluções encontradas são  $(0, 0)$  e  $(K, 0)$ , nenhuma das quais exibe a presença do agente de controle, que é levado a extinção. Repare que neste caso o equilíbrio em  $N$  é o mesmo que se obtém com a população livre de controle, portanto, neste caso, não há influência deste agente sobre dinâmica original de  $N$ .

#### 4.2 DINÂMICA POPULACIONAL LOGÍSTICA COM DINÂMICA DE CONTROLE AFIM

Vamos manter as mesmas equações do sistema (38), uma população com o crescimento logístico e a interação com o agente de controle dada pela forma Michaelis-Menten, apenas alterando o valor de  $q(t)$  que agora será uma constante  $q_0$ . O sistema inicial será dado por:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{\mu N Q}{a + Q} \\ \frac{dQ}{dt} = q_0 - \lambda Q \end{cases} \quad (39)$$

encontramos as soluções de equilíbrio resolvendo:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow Q_0 = \frac{q_0}{\lambda}$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N_0 = 0 \text{ ou } N_1 = \left( 1 - \frac{\mu Q_0}{r(a + Q_0)} \right) K$$

Soluções:  $(N_0, Q_0)$  e  $(N_1, Q_0)$

Não estudaremos a solução  $(N_0, Q_0)$  pois este caso corresponde ao extermínio da população de interesse. Para a análise da solução de equilíbrio  $(N_1, Q_0)$ , calculamos a Matriz Jacobiana aplicada sobre o sistema (39):

$$A = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - \frac{\mu Q_0}{a + Q_0} & \left(-\frac{\mu N_1 a}{(a + Q_0)^2}\right) \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} \quad (40)$$

Então:

$$A - I\alpha = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - \frac{\mu Q_0}{a + Q_0} - \alpha & \left(-\frac{\mu N_1 a}{(a + Q_0)^2}\right) \\ 0 & -\lambda - \alpha \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Cujo o determinante fornece os autovalores:

$$\alpha_1 = -\lambda \text{ ou } \alpha_2 = r \left( \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - \frac{\mu Q_0}{a + Q_0} \right).$$

Substituindo  $N_1$  e  $Q_0$  em  $\alpha_2$  e fazendo as simplificações, teremos:

$$\alpha_2 = \frac{\mu q_0}{a\lambda + q_0}$$

Se  $\alpha_1 < 0$  e  $\alpha_2 > 0$ , então a solução de equilíbrio será instável. Apesar de uma interação instável o agente de controle é eficiente, pois a solução de equilíbrio  $N_1$  é estritamente menor do que é a capacidade de suporte da população na ausência do agente de controle, pois:

$$N_1 \leq K \text{ entao } 0 \leq \frac{\mu Q_0}{r(a + Q_0)} \leq 1$$

Substituindo  $Q_0 = \frac{q_0}{\lambda}$ , temos:

$$0 \leq \frac{\mu q_0}{r(\lambda a + q_0)} \leq 1$$

O agente de controle diminui a capacidade de suporte da população, reduzindo o número de indivíduos da mesma, podendo ser utilizada como controle de pragas.

### 4.3 DINÂMICA POPULACIONAL LOGÍSTICA COM DINÂMICA DE CONTROLE AFIM, EM COMPETIÇÃO

Vamos montar um sistema onde a população inicial cresce de forma logística e a interação com o agente de controle se dá por forma de competição. O sistema inicial será dado por:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - bNQ \\ \frac{dQ}{dt} = q_0 - \lambda Q. \end{cases} \quad (42)$$

Obtendo as soluções de equilíbrio do sistema (42) temos:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow q_0 - \lambda Q = 0 \Rightarrow Q = \frac{q_0}{\lambda} = Q_0$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N_0 = 0 \text{ ou } N_1 = \left(1 - \frac{bQ_0}{r}\right)K$$

Soluções:  $(N_0, Q_0)$  e  $(N_1, Q_0)$

Não estudaremos o ponto  $(0, Q_0)$  pois ocorre a extinção da população de interesse. Da mesma forma como apresentado no caso 39 analisaremos a solução de equilíbrio  $(N_1, Q_0)$

Aplicando a Matriz Jacobiana na equação (42):

$$A = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - bQ_0 & -bN_1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Portanto,

$$A - I\alpha = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - bQ_0 - \alpha & -bN_1 \\ 0 & -\lambda - \alpha \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Pelo determinante da matriz (44) encontramos os autovalores:  $\alpha_1 = -\lambda$  ou  $\alpha_2 = r \left(1 - \frac{2N_1}{K} - bQ_0\right)$ . Substituindo  $N_1$  e  $Q_0$  em  $\alpha_2$  e fazendo as simplificações necessárias, encontramos:

$$\alpha_2 = rb \frac{q_0}{\lambda}.$$

Como  $\alpha_1 < 0$  e  $\alpha_2 > 0$  a solução de equilíbrio será instável.

Neste caso o agente de controle é também eficiente, pois diminui a capacidade de suporte da população. Pois  $N_1$ , que é a solução de equilíbrio não nula do sistema, é estritamente menor que  $K$  a capacidade de suporte da população.

$$N_1 \leq K \text{ entao } 0 \leq 1 - \left(\frac{bQ_0}{r}\right) \leq 1$$

Substituindo  $Q_0 = \frac{q_0}{\lambda}$ , temos:

$$0 \leq 1 - \left(\frac{bq_0}{r\lambda}\right) \leq 1$$

O agente de controle diminui a quantidade de indivíduos da população, reduzindo a capacidade de suporte da população.

#### 4.4 DINÂMICA POPULACIONAL DE SMITH COM DINÂMICA DE CONTROLE AFIM, EM REGIME DE COMPETIÇÃO

Vamos montar um sistema onde a população inicial cresce de acordo com a equação de Smith e a interação com o agente de controle se dá por forma de competição. O sistema inicial será dado por:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \ln \frac{K}{N} - bNQ \\ \frac{dQ}{dt} = q_0 - \lambda Q \end{cases} \quad (45)$$

encontramos as soluções de equilíbrio resolvendo:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \implies q_0 - \lambda Q = 0 \implies Q_0 = \frac{q_0}{\lambda}$$

e

$$\frac{dN}{dt} = 0 \implies N_0 = 0 \text{ ou } N_1 = Ke^{-bQ_0/r}.$$

Soluções:  $(N_0, Q_0)$  e  $(N_1, Q_0)$ .

Não estudaremos a solução  $(N_0, Q_0)$  pois ocorre o extermínio da população avaliada. Para a análise da solução de equilíbrio  $(N_1, Q_0)$ , calculamos a Matriz Jacobiana do sistema (45).

$$A = \begin{pmatrix} r \left( \ln \frac{K}{N_1} - 1 \right) - bQ_0 & -bN_1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Logo,

$$A - I\alpha = \begin{pmatrix} r\left(\frac{K}{N_1} - 1\right) - bQ_0 - \alpha & -bN_1 \\ 0 & -\lambda - \alpha \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Calculando o determinante da matriz (47) encontramos os autovalores:

$$\alpha_1 = -\lambda \quad \text{ou} \quad \alpha_2 = r\left(\ln \frac{K}{N_1} - 1 - bQ_0\right).$$

Substituindo  $N_1$  e  $Q_0$  em  $\alpha_2$  e fazendo as simplificações, encontramos:

$$\alpha_2 = -r.$$

Como os dois autovalores encontrados são negativos,  $\alpha_1 < 0$  e  $\alpha_2 < 0$ , a solução de equilíbrio assintoticamente estável. E o agente de controle é novamente eficiente, pois a solução de equilíbrio não nula  $N_1$  é estritamente menor do que  $K$  a capacidade de suporte da população.

$$N_1 \leq K \text{ entao } 0 \leq e^{-bQ_0/r} \leq 1.$$

Substituindo  $Q_0 = \frac{q_0}{\lambda}$ , temos:

$$0 \leq e^{-bq_0/r\lambda} \leq 1.$$

Ou seja, teremos uma diminuição na capacidade de suporte do meio, reduzindo o número de indivíduos da população inicial.

#### 4.5 DINÂMICA POPULACIONAL E DE CONTROLE LOGÍSTICAS, EM COMPETIÇÃO

Vamos montar um sistema onde a população inicial e o agente de controle crescem de forma logística e a interação do agente de controle com a população inicial se dá por forma de competição. O sistema inicial será dado por:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - bNQ \\ \frac{dQ}{dt} = rQ\left(1 - \frac{Q}{K}\right) \end{cases} \quad (48)$$

soluções de equilíbrio do sistema (48):

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow rQ \left(1 - \frac{Q}{K}\right) = 0 \Rightarrow Q_0 = 0 \text{ ou } Q_1 = K$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Rightarrow N_0 = 0 \text{ ou } N_1 = \left(1 - \frac{bQ}{r}\right)K.$$

Soluções:  $(N_0, Q_0)$ ,  $(N_0, Q_1)$ ,  $(N_1, Q_0)$  e  $(N_1, Q_1)$ .

Não analisaremos as soluções de equilíbrio  $(N_0, Q_0)$  e  $(N_0, Q_1)$  pois ocorre a extinção da população de interesse. A solução  $(N_1, Q_0)$  também não será avaliada, pois o agente de controle não interfere na população estudada. A solução de equilíbrio que nos interessa é  $(N_1, Q_1)$ .

Analisando a solução de equilíbrio  $(N_1, Q_1)$ , calculamos a Matriz Jacobiana de (48).

$$A = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - bQ_1 & -bN_1 \\ 0 & r \left(1 - \frac{2Q_1}{K}\right) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Então

$$A - I\alpha = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - bQ_1 - \alpha & -bN_1 \\ 0 & r \left(1 - \frac{2Q_1}{K}\right) - \alpha \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Cujo o determinante fornece os autovalores:

$$\alpha_1 = r \left(1 - \frac{2Q_1}{K}\right), \text{ ou}$$

$$\alpha_2 = r \left(1 - \frac{2N_1}{K}\right) - bQ_1.$$

Substituindo  $N_1$  e  $Q_1$  e fazendo as simplificações encontramos:

$$\alpha_2 = rb \frac{q_0}{\lambda}$$

Como  $\alpha_1 < 0$  e  $\alpha_2 > 0$  a solução de equilíbrio será instável.

Apesar de encontrarmos uma solução de equilíbrio instável, conseguimos reduzir a

capacidade de suporte do meio, pois  $N_1$  é estritamente menor do que a capacidade de suporte do meio  $K$ , ou seja:

$$N_1 \leq K \text{ entao } 0 \leq \left(1 - \frac{bQ_1}{r}\right) \leq 1.$$

Substituindo  $Q_1 = K$ , temos:

$$0 \leq \left(1 - \frac{bK}{r}\right) \leq 1$$

Portanto o agente de controle é eficiente e reduz a quantidade de indivíduos da população inicial, diminuindo a capacidade de suporte do meio.

## 5 UM MODELO MATEMÁTICO EM QUIMIOTERAPIA: ANÁLISE

Os sistemas que estudamos no capítulo anterior são exemplos de interações que podem ocorrer na natureza, onde uma população inicial sofre uma redução causada por um agente de controle. Um dos casos onde há uma aplicação destes sistemas e temos uma análise satisfatória considerando os resultados obtidos é no estudo de como a quimioterapia pode interferir em células tumorais e normais, durante um tratamento de câncer de mama. Dentro disto em quais hipóteses se consegue a cura da doença.

O modelo matemático é aplicado buscando entender quais os motivos que levam a tratamentos quimioterápicos mal sucedidos. Rodrigues, Pinho e Mancera publicaram no artigo [Rodrigues et al. 2012], estudando o funcionamento da doença, as reações causadas as células pelas drogas aplicadas durante o tratamento e as consequências causadas por elas.

Considerando-se uma situação na qual inibição e estímulos angiogênicos estão em equilíbrio antes do tratamento se iniciar, denota-se o número de células tumorais e normais por  $N_i (i = 1, 2)$ , onde  $i = 1$  diz respeito as células tumorais e  $i = 2$  às células normais  $r_i$  é a taxa de crescimento das populações tumorais e normais,  $k_1$  diz-se capacidade de suporte do tumor,  $k_2$  a capacidade de suporte da células normais e  $\alpha_i$  o coeficiente de competição interespecífica referente a população  $i$ . A interação entre as células tumorais e normais é dada pelo Lotka-Volterra.

O modelo para o caso sem tratamento da doença, segundo [Gatenby 1996] é dado por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{k_1} - \frac{\alpha_1 N_2}{k_1} \right) \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{k_2} - \frac{\alpha_2 N_1}{k_2} \right) \end{cases} \quad (52)$$

Analisando a estabilidade local do sistema 52 encontramos os pontos de equilíbrio:  $F_1(0,0)$  onde ocorre a extinção das células tumorais e normais, o que pela *hipótese geral do câncer* não ocorrerá na ausência do tratamento,  $F_2(0, K_2)$  ocorre a cura espontânea,  $F_3(k_1, 0)$  nesta hipótese ocorrerá a extinção das células normais e a persistência do tumor e



$$F_4 \left( \frac{\alpha_1 k_2 - k_1}{\alpha_1 \alpha_2 - 1}, \frac{\alpha_2 k_1 - k_2}{\alpha_2 \alpha_1 - 1} \right).$$

Os autovalores da matriz jacobiana em  $F_4$  são negativos para  $N_1$  e  $N_2$ , se  $\alpha_1 \alpha_2 - 1 < 0$  e  $\alpha_2 \alpha_1 - 1 < 0$  as células tumorais e normais coexistem.

Quando começa a ser aplicado o tratamento, além da interação vista em 52 entre as células tumorais e normais, teremos um agente de controle que afeta tanto as células tumorais quanto as normais. Denotando-se por  $Q$  a quantidade do agente quimioterápico, a interação entre as células e o agente será da forma Michaelis-Menten, onde  $a$  e  $b$  determinam a saturação do efeito resposta da droga,  $\lambda$  é a taxa de decaimento de um dado agente quimioterápico,  $\mu$  é a taxa de tratamento das células tumorais e  $\nu$  a taxa de mortalidade das células normais em decorrência do tratamento .

O modelo para o caso com tratamento da doença, segundo [Gatenby 1996] é dado por

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1}{k_1} - \frac{\alpha_1 N_2}{k_1} \right) - \frac{\mu N_1 Q}{a + Q} \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2}{k_2} - \frac{\alpha_2 N_1}{k_2} \right) - \frac{\nu N_2 Q}{b + Q} \\ \frac{dQ}{dt} = q(t) - \lambda Q \end{cases} \quad (53)$$

Para entender as situações onde o tratamento será bem ou mal sucedido, faremos um estudo dos pontos de equilíbrio do sistema 53.

$$\frac{dN_1}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

resolvendo as igualdades e simplificando os resultados, temos:

$$N_1 = \frac{k_1(r_1 a \lambda + q(r_1 - \mu))}{r_1(a \lambda + q)} = \bar{N}_1$$

$$N_2 = \frac{k_2(r_2 b \lambda + q(r_2 - \nu))}{r_2(b \lambda + q)} = \bar{N}_2$$

$$Q = \frac{q}{\lambda}$$

Quando  $q(t) = q > 0$ , o sistema 53, possui quatro pontos de equilíbrio, dados  $G_1 \left( 0, 0, \frac{q}{\lambda} \right)$ , que não será estudado pois ocorre a extinção das células normais e tumorais. O ponto de

equilíbrio  $G_2 \left( 0, \overline{N}_2, \frac{q}{\lambda} \right)$  as células tumorais serão eliminadas, causando a cura da doença. Já no ponto de equilíbrio  $G_3 \left( \overline{N}_1, 0, \frac{q}{\lambda} \right)$  também não será observado pois causara a eliminação do órgão hospedeiro, porém sem a eliminação da doença.  $G_4 \left( \overline{N}_1, \overline{N}_2, \frac{q}{\lambda} \right)$  significa uma coexistência entre as células tumorais e normais mesmo que na presença do tratamento.

## 6 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos modelos matemáticos para a dinâmica de populações baseado em equações diferenciais. Expondo uma breve revisão de equações autônomas, fazendo um estudo dos pontos de equilíbrio e a sua classificação quanto à estabilidade, analisamos alguns modelos de crescimento populacional como o de Malthus que apesar de suas limitações, foi de grande importância por ser o precursor de vários outros. Verhurst desenvolveu a equação logística onde sugere que a taxa de crescimento populacional deixe de ser constante e passe a decrescer linearmente com a população. Além destes dois modelos clássicos, outros modelos desenvolvidos para o estudo de crescimentos populacionais foram estudados, em geral baseados em equações autônomas e não lineares, são geralmente modificações do modelo logístico, feitas buscando adaptações melhores aos problemas aplicados, como por exemplo, os modelos de Gompertz(1825), Smith(1963), Goel-Maitra-Montroll (1971) e Ayala-Gilpin-Ehrenfeld (1973).

Quando estudamos populações que interagem, analisamos os sistemas de equações diferenciais. Os modelos que contemplam situações de convívio variando desde a competição intraespecífica ao modelo de presa e predador de Lotka-Volterra. Outras situações de convívio de populações analisadas foram as que uma população de crescimento livre sofre uma interferência de um agente de controle, onde nos casos estudados encontramos os agentes de controle eficientes, pois conseguiam reduzir a capacidade de suporte da população diminuindo o número inicial de indivíduos desta população. Buscando uma aplicação para os modelos estudados fizemos a análise de uma aplicação no artigo [Rodrigues et al. 2012].

## REFERÊNCIAS

- BACAËR, N. **Verhulst and the logistic equation (1838)**. [S.l.]: Springer-Verlag, 2011. 35-39 p.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Sao Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**. Sao Paulo: Harbra, 1988.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. New York: McGraw-Hill, 1988.
- FIGUEIREDO, D. G.; NUNES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- GATENBY, R. A. **Application of competition theory to tumour: implications for tumour biology and treatment**. [S.l.]: Eur. J. Cancer, 1996. 722- 726 p.
- GILPIN, M. E.; AYALA, F. J. Global models of growth and competition. **Proc. Nat. Acad. Sci. USA**, v. 70, n. 12, p. 3590–3593, 1973.
- HOOKER, P. **Benjamin Gompertz**. [S.l.]: Jornal do Institute of Actuaries 91, 1965. 203-212 p.
- RODRIGUES, D. S.; PINHO, S. T. R.; MANCERA, P. F. A. Um modelo matemático em quimioterapia. **Tend. Mat. Apl. Comput.**, v. 13, n. 1, p. 1–12, 2012.
- VLADAR, H. P. de. Density-dependence as a size-independent regulatory mechanism. **Journal of Theoretical Biology**, v. 238, n. 2, p. 242–256, 2006.