UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LOREANE KATLER MARTENS

GEOMETRIA ESPACIAL VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CURITIBA
2016

LOREANE KATLER MARTENS

GEOMETRIA ESPACIAL VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II, do Curso de Licenciatura em Matemática do Departamento Acadêmico de Matemática – DAMAT – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada.

Orientadora: Profa. Dra. Angelita Minetto Araújo

CURITIBA

2016

Ministério da Educação
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
Câmpus Curitiba
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Matemática
Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

"Geometria Espacial via resolução de problemas"

por

"Loreane Katler Martens"

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 10h do dia 28 de junho de 2016 na sala Q312 como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba. O(a) aluno(a) foi arguido pela Banca de Avaliação abaixo assinados. Após deliberação, de acordo com o parágrafo 1º do art. 37 do Regulamento Específico do trabalho de Conclusão de Curso para o Curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR do Câmpus Curitiba, a Banca de Avaliação considerou o trabalho aprovado (aprovado ou reprovado).

Profa. Dra. Angelita Minetto Araújo (Presidente - UTFPR/Curitiba)	Profa. Dra. Luciana Schreiner de Oliveira (Avaliador 1 - UTFPR/Curitiba)
Profa. MSc. Violeta Maria Estephan **(Avaliador 2 - UTFPR/Curitiba)**	Prof. Dr. Marco Aurélio Kalinke (Professor Responsável pelo TCC – UTFPR/Curitiba)
Profa. Dra. Neusa Nogas Tocha **(Coordenador do curso de Licenciatura em Matemática – UTFPR/Curitiba)**	

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso."

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo propor problemas que instiguem no aluno, do ensino médio, por meio da Resolução de Problemas, o interesse pela Geometria Espacial, fazendo-o perceber que esse ramo da Matemática vai muito além da sala de aula e não se reduz a aplicação de fórmulas. Para destacar o valor da Geometria Espacial são apresentados alguns problemas do cotidiano que envolvem os conceitos de área e volume. Fundamentado numa abordagem de pesquisa qualitativa, o trabalho é pautado na pesquisa bibliográfica. Para abordar as questões que nos propomos, são apresentadas algumas pesquisas sobre a metodologia da Resolução de Problemas; pesquisas de autores que defendem como deve ser o ensino de geometria e algumas questões retiradas de livros de Matemática e das provas do ENEM sobre medidas de volume e de superfície pautadas em situações reais.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Geometria Espacial. Situações reais.

ABSTRACT

This thesis aims to instigate the Ensino Médio (Brazilian High School) student, through problem solving, the interest for spatial geometry. It makes the student to notice that this math segment goes beyond the classroom and it is not simply formula calculation. The evidence is presented in some daily problems, which involve spatial geometry concepts such as area and volume. This work is founded on qualitative research approach and guided by bibliography research. In order to approach such question some methodologies of problem solving are presented, research made by authors who advocate for how geometry teaching should happen; and some questions extracted from math books and from the ENEM (National High School Examination) about volume and surface calculation guided in real situations.

Key-words: Problem solving. Spatial geometry. Real situations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Historicamente, sempre muito valorizada em provas de seleção, e motivo de encaminhamento para uma futura vida profissional, a Matemática é uma Ciência que mexe muito com a vida dos alunos. Suas características remetem a aplicação de seus conceitos nas mais diversas áreas, utilização em situações da vida cotidiana, desenvolvimento dentro da própria área (muitas vezes abstratos), ou seja, tudo gira em torno do desenvolvimento da humanidade e da própria Ciência.

Nesse contexto, trazemos um dos ramos da Matemática, a Geometria, para refletir sobre como tem ocorrido o seu ensino.

Muito nos intriga a forma como os conteúdos de Geometria e em especial a Geometria Espacial, muitas vezes, são tratados na escola: reprodução e memorização de conceitos, muitas vezes sem significado. Embora, pesquisas de autores como D'Ambrósio (1996), Pires (2000), Krulik e Posamentier (2014) indiquem que uma das melhores formas de reverter essa situação é despertando o interesse dos alunos e dotando de sentido o ensino da Matemática, pois alunos interessados e receptivos tornam o processo de ensino mais agradável e eficaz. Para tanto, de acordo com Krulik e Posamentier (2014) é necessário que os professores desenvolvam estratégias de motivação em suas aulas, o que pode ser feito partindo dos interesses da turma, tentando relacioná-los à Matemática. Nesse sentido, os autores sugerem que a geometria, pela sua natureza visual, teria maior facilidade de gerar interesse entre os alunos, se bem trabalhada.

Aliados a esse esforço de atribuir maior significado aos conteúdos matemáticos ensinados na escola, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) enfatizam a importância de que:

> Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (BRASIL, 1998, p. 23).

Ainda sobre a questão de se trabalhar com os conteúdos matemáticos que constam nas diretrizes para a Educação Básica e, do papel que esses conteúdos têm para o professor, Rodrigues (1993 *apud* ARAÚJO, 2003), destaca três componentes:

> a) **valor intrínseco**: relativo à obtenção de pré-requisitos, como, técnicas, conhecimentos e metodologias, elementos necessários à continuidade do estudo da Matemática;
> b) **valor utilitário**: relativo à utilidade do estudo da Matemática na vida cotidiana e profissional;
> c) **valor formativo**: relativo às representações que o indivíduo faz, as quais estão relacionadas com o seu desenvolvimento intelectual. (ARAÚJO, 2003, p. 10)

Acreditamos que todas as componentes descritas por Rodrigues (1993) são imprescindíveis para a compreensão da Matemática, mas o que nos preocupa é a supervalorização de uma dessas componentes em detrimento das outras. Nesse sentido, acreditamos que é imprescindível explorar os conteúdos de forma equilibrada nas três componentes.

A partir dessas considerações identificamos a Resolução de Problemas como uma possibilidade para contribuir com o ensino de matemática, relacionando as três componentes descritas por Rodrigues (1993) mais especificamente, desenvolver um trabalho de geometria espacial, de forma mais significativa. A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino para a Matemática há muito tempo vem sendo defendida pelos PCN (1998) e PCN+ (2002, p.112) e outras tantas orientações curriculares. Sua defesa está na justificativa de que o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Além disso, a Resolução de Problemas se caracteriza pela construção dos conceitos, pela investigação e exploração a partir de situações que estimulem a curiosidade matemática dos alunos. Partindo de experiências com problemas de naturezas diferentes, possibilita-se que o aluno interprete o fenômeno matemático e procure explicá-lo segundo a sua concepção de matemática e a aprimore, sempre que necessário (SILVA, 2012, p. 50).

Ao pesquisar sobre a Resolução de Problemas, encontramos diferentes abordagens descritas por Schroeder e Lester (1989), citados por Oliveira (1993, p. 36-37): a) ensinar a resolver problemas; b) ensinar a cerca da resolução de problemas; e c) ensinar através da resolução de problemas.

Araújo (2003) ao se referir as abordagens de Schroeder e Lester (1989) assim as descreve:

> a) ensinar para resolver problemas: o que significa aplicar a Matemática na resolução de problemas, tornando o aluno capaz de utilizar o conhecimento matemático;
> b) ensinar acerca da resolução de problemas: o que significa ensinar algumas estratégias para descobrir como executar um plano para resolver o problema, abrangendo a explicitação e discussão a cerca da forma como estes se apresentam e são resolvidos;
> c) ensinar através da resolução de problemas: significa um dos melhores meios para se aprender Matemática. A partir de situações problemáticas são desenvolvidas técnicas como respostas ao problema. Seria um movimento do concreto para o abstrato. (ARAÚJO, 2003, p. 112).

A partir das abordagens apresentadas por Schroeder e Lester (1989) e da constatação da dificuldade que muitas pessoas têm em transpor o que aprenderam em sala de aula para situações do seu cotidiano, pretendemos discutir o ensino da Geometria Espacial, no ensino médio, através da resolução de problemas.

Nesse sentido, com o intuito de contribuir com o ensino da Geometria Espacial, utilizando a metodologia da Resolução de Problemas, pretende-se propor alguns problemas que instiguem os alunos a refletir sobre o significado dos conceitos e a sua aplicação em situações-problema.

2 PROBLEMA E PREMISSAS

Para abordar a temática “Geometria Espacial via Resolução de Problemas”, pretende-se investigar como propor problemas para tornar o trabalho com a Geometria Espacial mais instigador para os alunos do ensino médio.

Ao elaborar tal questão partimos das hipóteses de que:

- Os conteúdos de Geometria Espacial muitas vezes são focados na aplicação de fórmulas.
- Grande parte dos alunos não faz relação entre os conteúdos que aprendem em sala de aula com situações que encontram fora da escola.
- A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino que pode despertar maior interesse dos alunos pela Geometria Espacial.

Tais hipóteses têm origem na vivência acadêmica da autora como aluna, estagiária[1] em colégios estaduais, como professora particular de Matemática e principalmente da observação de como as pessoas lidam com as situações-problema que se apresentam fora do contexto escolar.

---

[1] Como aluna do Curso de licenciatura em Matemática, a autora já realizou os Estágios Curriculares obrigatórios – Estágios Supervisionados 1, 2 e 3.

3 OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste projeto é propor problemas que podem instigar nos alunos, do ensino médio, por meio da Resolução de Problemas, o interesse pela Geometria Espacial, fazendo-o perceber que esse ramo da Matemática vai muito além da sala de aula e não se reduz a aplicação de fórmulas.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar medidas de volume[2] e de superfície[3] via Resolução de Problemas como proposta metodológica.
- Propor problemas sobre medidas de volume e de superfície pautada na Resolução de Problemas.

---

[2] Volume é o espaço ocupado por um corpo, já a quantidade de líquido que cabe em um recipiente representa a sua capacidade, ou seja, capacidade é volume interno de um recipiente (CARDOSO, 2001, p. 36 e 277).

[3] Superficie é uma grandeza com duas dimensões, enquanto área é a medida dessa grandeza, portanto, um número. Disponível em:< http://www.somatematica.com.br/fundam/medsup.php>. Acesso em: 22 mar. 2016.

4. JUSTIFICATIVA

A partir da observação em situações cotidianas de como as pessoas lidam com os conceitos da Geometria Espacial, ao serem solicitadas ou terem que optar pela compra de um produto, percebe-se que muitas vezes estas, nem sempre levam em conta o que aprenderam na escola.

Muitas vezes, tais escolhas são feitas a partir do formato, o tamanho da embalagem, confiança na marca, ou ainda, alguns optam pelos produtos observando apenas o preço. Informações contidas nos rótulos, como: conteúdo líquido, data de validade, composição, preocupação com o meio ambiente, excesso de embalagens, dentre outras, muitas vezes sequer são lidas ou analisadas. Todavia, o que nos intriga é que apesar de muitas dessas pessoas terem escolaridade, não costumam fazer a relação dos conteúdos aprendidos na escola com as situações cotidianas em que eles poderiam ser aplicados para favorecer o consumidor.

Tal falta de relação ou dificuldade em transpor conteúdos estudados na escola para situações corriqueiras, talvez, se deva ao fato de que os conteúdos trabalhados em Geometria Espacial se traduzam muitas vezes na aplicação de fórmulas. A distância entre o conteúdo ensinado em sala de aula e a sua aplicabilidade é o que nos faz pensar que grande parte das dificuldades dos alunos com esses conteúdos, se deva a falta de significado quando estes são ensinados em sala de aula.

Nessa perspectiva, tais questões tem nos instigado a refletir e a pesquisar sobre como e o quê pode ser feito para mudar essa realidade.

Focamos o desenvolvimento deste projeto na Resolução de Problemas, por acreditamos que as situações-problema possam ser vistas como ponto de partida para a construção e aprimoramento de conceitos, levando o aluno a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz, sendo construtor de seu próprio conhecimento e, o professor, o responsável por conduzir esse processo (ONUCHIC, 2011, p. 80-81).

Entretanto, de acordo com Onuchic (2011, p. 81), primeiramente temos que definir o que se entende por problema, ou seja, um "... problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver." Nesse sentido, e a partir da constatação dessa falta de relação entre os conteúdos da Geometria

Espacial com algumas situações corriqueiras e significativas, pretende-se propor problemas que possam servir de apoio para professores do ensino médio ao trabalharem com as medidas de superfície e volume.

Ainda que o trabalho com as medidas de superfície e volume apareçam nos três anos do ensino médio, é no 2° ano que esse conteúdo recebe um tratamento mais aprofundado.

Conforme verificado no guia do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD 2015 o tema estruturador Geometria Espacial, no ensino fundamental, em geral, é apresentado junto com a Geometria Plana. Ainda segundo o guia, tais conteúdos são apresentados com excesso de classificações e nomenclatura; falta de problemas genuínos; monótonas aplicações algébricas e pouca exploração da capacidade de visualização.

Tendo em vista os apontamentos descritos pelo PNLD 2015, acreditamos ser necessário despertar nos alunos maior interesse sobre a Geometria Espacial, possibilitando que compreendam e atribuam maior significado aos seus estudos.

Conforme Kilpatrick e Stanic (1989) a Resolução de Problemas como contexto tem subtemas baseados na ideia de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir fins importantes, como, por exemplo, o ensino da matemática e o interesse dos alunos. Nesse sentido, esperamos que esse trabalho possa contribuir para tal finalidade.

5. METODOLOGIA

Segundo Oliveira (2014) uma pesquisa qualitativa se caracteriza por um estudo, ou seja, reflexão e análise detalhada de um determinado fato, objeto, grupo de pessoas ou fenômenos da realidade. Esse processo implica em: buscar informações verdadeiras conforme a literatura apropriada ao tema, observações, entrevistas, questionários e análise de dados, para explicar o significado e as características de cada contexto do objeto de pesquisa.

Dentre os diversos tipos de pesquisa qualitativa temos: pesquisa exploratória, pesquisa experimental, pesquisa descritiva, pesquisa bibliográfica, pesquisa documental, pesquisa na internet, pesquisa de laboratório, pesquisa ex-post facto, pesquisa etnográfica, pesquisa-ação e pesquisa participativa.

A pesquisa bibliográfica de acordo com Oliveira (2014):

> É uma modalidade de estudo e análise de documentos de domínio científico tais como livros, enciclopédias, periódicos, ensaios críticos, dicionários, e artigos científicos.
> A principal finalidade da pesquisa bibliográfica é levar o pesquisador(a) a entrar em contato direto com obras, artigos ou documentos que tratem do tema estudado. (OLIVEIRA, 2014, p. 69).

Nesse sentido, pelas características apresentadas nos identificamos com a pesquisa qualitativa, com abordagem bibliográfica.

Tal abordagem bibliográfica se dará na análise e reflexão sobre a literatura já disponível referente à Resolução de Problemas, o ensino de Geometria Espacial, especificamente sobre as medidas de volume e superfície.

As literaturas para essa coleta de dados a que nos referimos são: livros; artigos científicos e trabalhos sobre a resolução de problemas; pesquisas sobre formas de se trabalhar de maneira mais significativa para despertar o interesse dos alunos pela Matemática, mais especificamente sobre a Geometria Espacial; artigos científicos sobre o ensino da Geometria Espacial; livros didáticos sobre os conteúdos de Geometria Espacial; e questões das provas do ENEM.

6. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Embora a questão da resolução de problemas no ensino da Matemática há muito tempo venha sendo destacada de acordo com Onuchic (1999, p. 199), há algum tempo apenas que “os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção.”.

Foi nos anos 60, nos Estados Unidos, pela influência de Polya que a Resolução de Problemas passou a ter destaque e a ser vista como um campo de pesquisa na Educação Matemática, iniciando-se assim pesquisas sistemáticas (ONUCHIC, 1999). Já nos outros países, “a Resolução de Problemas ganhou espaço” no final dos anos 70.

Polya (2006) organizou um esquema prático em quatro etapas para resolver problemas. Essas etapas são: primeiro, compreender o problema; segundo, estabelecer um plano; terceiro, executar o plano; e quarto, fazer o retrospecto, ou seja, examinar a solução obtida.

Para compreender o problema Polya (2006) propõe alguns questionamentos para o aluno se orientar. Que são: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É possível satisfazer a condição? A condição é suficiente para determinar a incógnita? Trace uma figura, adote uma notação adequada; separe as partes da condição, é possível anotá-las? O aluno precisa considerar as partes mais importantes do problema de forma atenta e repetidamente.

Para estabelecer um plano segundo Polya (2006) é preciso muitas vezes começar questionando: Existe algum problema similar? Se houver esse problema, e que já esteja resolvido: É possível utilizar o seu resultado ou método? É preciso acrescentar algum elemento para tornar possível a utilização desse método? É possível resolver uma parte do problema? É possível retirar dos dados algo útil? É possível pensar em outros dados adequados para definir a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles? Foram levadas em conta todas as noções principais do problema?

Ao executar o plano de resolução, Polya (2006) afirma que é preciso verificar cada passo questionando-se se é possível verificar claramente e/ou demonstrar que o(s) passo(s) está(ão) correto(s).

E por último para fazer o retrospecto Polya (2006) propõe os seguintes questionamentos: É possível verificar o resultado? E o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? E é possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema?

Para Polya (2006):

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os seus alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes.
> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxilio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma *parcela razoável do trabalho.* (POLYA, 2006, p. 1).

Corroborando com essa ideia, Onuchic (1999) traz algumas propostas básicas para trabalhar a Resolução de Problemas na sala de aula.

Inicialmente a autora propõe formar grupos entre os alunos e entregar uma atividade, pois para ela aprender é um processo compartilhado, então é preciso que os alunos experimentem um processo cooperativo e tenham a oportunidade de aprender uns com os outros.

A partir disso de acordo com Onuchic (1999):

> o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessários problemas secundários. (ONUCHIC, 1999, p. 216).

Quando os alunos tiverem terminado o trabalho o professor deve anotar todos os resultados obtidos pelos grupos na lousa, incluindo os resultados certos, errados e aqueles que foram feitos por caminhos diferentes.

Com todos os possíveis resultados anotados na lousa a autora recomenda que a turma se reúna num grupo só e discuta os resultados, procurando defender seus pontos de vista. A partir disso as dificuldades dos alunos vão sendo identificadas e sanadas e assim surgem os problemas secundários, os quais precisam ser resolvidos, para que se leve o trabalho adiante. Na sequência, é preciso buscar um consenso no grande grupo, ou na turma, sobre o resultado encontrado.

E para finalizar esse processo, Onuchic (1999) destaca a necessidade da formalização. A partir da direção do trabalho pelo professor, deverá ser feita uma síntese do que se pretendia aprender a partir do problema que foi dado, apresentar as definições, identificar as propriedades, fazer as demonstrações, e destacar os novos conceitos matemáticos construídos.

Entretanto, há que se ter cuidado de acordo com Polya (1965 in Onuchic, 1999, p. 210) com relação aos esforços feitos para se ensinar a 'como pensar' e que, a Resolução de Problemas, não se transforme em ensinar 'o que pensar' ou 'o que fazer'.

De acordo com documentos como o Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics do National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (1991)[4] foi a partir da década de 80 que houve a recomendação para que o foco no ensino de Matemática fosse a partir da Resolução de Problemas.

6.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Conforme as pesquisas de Onuchic (1999, p. 207) somente nos anos 90 a Resolução de Problemas "passa a ser o lema das pesquisas e estudos" como uma metodologia de ensino.

Pensar na Resolução de Problemas como metodologia de ensino implica discutirmos primeiramente o que se entende por "problema".

Conforme Ferreira (1986), um problema é:

> Questão matemática proposta para que se lhe dê a solução; questão não resolvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento; proposta duvidosa, que pode ter numerosas soluções;

---

[4] NCTM sigla americana para Conselho Nacional de Professores de Matemática é uma organização preocupada com a Educação Matemática. Apoia projetos para garantir a aprendizagem da matemática para todos os alunos. Atua no desenvolvimento profissional da classe e em pesquisas. O NCTM é o responsável pela produção das Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar.

> qualquer questão que dá margem a hesitação ou perplexidade, por ser difícil de explicar ou de resolver. (FERREIRA, 1986, p. 1394).

Para Onuchic (1999, p. 215), como já mencionado "... problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver.", é um ponto de partida, por meio do qual os professores devem gerar novos conceitos e conteúdos fazendo conexões a partir da resolução de problemas entre os diversos ramos da matemática.

Ao colocar o foco na Resolução de Problemas, Onuchic (1999) defende que:

> O ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Como uma metodologia de ensino a autora afirma que o aluno aprende Matemática resolvendo problemas, assim como também para resolver problemas. Para a autora, em uma aula com abordagem de ensino através da Resolução de Problemas, utiliza-se a repetição, a compreensão e o uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos.

Ao ensinar Matemática através da Resolução de Problemas de acordo com Onuchic (1999), os problemas não são só importantes como sendo um objetivo de aprender matemática, mas também como o primeiro passo para se fazer isso.

No momento em que os professores ensinam Matemática através da Resolução de Problemas, eles estão oferecendo a seus alunos uma forma poderosa e importantíssima de desenvolver sua própria compreensão (ONUCHIC, 1999). A medida que os alunos são inseridos nessa forma de trabalhar, vão compreendendo cada vez mais e de forma mais profunda, o que possibilita que a aptidão para usar a matemática ao resolver problemas melhore significativamente.

A indicação da Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino para a Matemática há muito tempo também vem sendo defendida pelos PCN (1998), PCN+ (2002) e outras tantas orientações curriculares.

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (PCN +, 2002, p. 112)

Para Onuchic (1999, p. 207) o ensino-aprendizagem de um determinado conteúdo matemático começa com uma situação-problema que retrata aspectos-chave desse conteúdo, e a partir dali são estruturadas algumas “técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis.”.

Ensinar por meio da Resolução de Problemas não é uma tarefa fácil, é preciso muito planejamento, os problemas precisam ser cuidadosamente escolhidos considerando as orientações curriculares e o nível de compreensão dos alunos. Onuchic e Allevato (2012) apontam algumas razões sobre a vantagem de se trabalhar por meio dessa metodologia:

> – Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o “dar sentido”. Ao resolver problemas, os alunos necessitam refletir sobre as ideias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema;
> – Resolução de problemas desenvolve o “poder matemático”. Os estudantes, ao resolver problemas em sala de aula, se engajam em raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir bem além na compreensão do conteúdo que está sendo construído em sala de aula;
> – Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. (...) Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;
> – Resolução de Problemas provê dados de avaliação contínua que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajudar os alunos a ter sucesso e informar os pais;
> – É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo “ensinar dizendo”. A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo o esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos;
> – A formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, faz mais sentido para os alunos. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012, p. 243-244).

Portanto conforme Onuchic (1999, p. 211) “Resolver problemas é um bom caminho para se ensinar matemática”, embora, os problemas não tenham desempenhado bem seu papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como uma forma de aplicação de conhecimentos anteriormente adquiridos pelos alunos. A autora defende a Resolução de Problemas como uma forma de “aplicar a Matemática ao mundo real, atende a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolve questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências Matemáticas.” (ONUCHIC, 1999, p. 204).

Schroeder e Lester (1989) afirmam que o ensino de matemática através da Resolução de Problemas não tem sido exercido, nem implicitamente nem explicitamente, pelos professores, autores de livros e promotores de currículos. Mas sem dúvida, ensinar matemática através da Resolução de Problemas é a abordagem mais coerente segundo as recomendações do National Council of Teachers of Mathematics - NCTM e dos PCN, pois conceitos e habilidades matemáticas são aprendidos nesse contexto.

Nos currículos de matemática conforme Stanic e Kilpatric (1989) o papel da Resolução de Problemas é caracterizada em três temas gerais: a Resolução de Problemas como contexto, como capacidade e como arte.

Na Resolução de Problemas como contexto Stanic e Kilpatric (1989) dividem-no em cinco subtemas. Que são a Resolução de Problemas como: justificação, motivação, atividade lúdica, veículo e prática.

Para os autores, a justificação está no fato dos problemas fornecerem uma justificativa para se ensinar matemática.

> Presumivelmente, pelo menos alguns problemas relacionados de algum modo com experiências do mundo real foram incluídos no currículo para convencer os alunos e professores do valor da Matemática. (STANIC & KILPATRICK, 1989, p. 12).

Relacionada com a justificação, os autores apontam a motivação, a qual tem por objetivo gerar o interesse dos alunos. E, sobre este aspecto, Posamentier e Krulik (2014) afirmam que para gerar esse interesse, é preciso apresentar problemas que levem a padrões, apresentem desafios e tragam experiências da vida real.

Outro aspecto apontado por Stanic e Kilpatric (1989) diz respeito a Resolução de Problemas como atividade lúdica, a qual está relacionada com a motivação, já que o interesse dos alunos também está envolvido, pois permite que eles tenham alguma diversão com a matemática aprendida. Conforme Stanic e

Kilpatric (1989, p.13) “presumivelmente, tais problemas satisfazem um interesse humano natural em explorar situações não usuais”.

Já na Resolução de Problemas como veículo:

> Os problemas são muitas vezes fornecidos (...) como veículo através do qual um novo conceito ou técnica deve ser aprendido. Os métodos de descoberta reflectem em parte a ideia de que a resolução de problemas pode ser um veículo para a aprendizagem de novos conceitos e técnicas. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 12).

E, por fim, o aspecto da prática, de acordo com os autores está no potencial, pois os problemas providenciam “... a prática necessária para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente”. (STANIC; KILPATRIC, 1989, p. 13). A partir do exposto, a Resolução de Problemas para Stanic e Kilpatric (1989) não é precisamente uma capacidade única, mas há visivelmente um conjunto de fatores que contribuem para gerar essa capacidade.

Pensar a Resolução de Problemas como uma capacidade traz algumas consequências do seu papel no currículo, pois conforme os autores, ocorrem desigualdades de níveis entre resolver problemas rotineiros e não rotineiros. A resolução de problemas que não são rotineiros é qualificada como uma capacidade com grau mais elevado, adquirida após a capacidade da resolução de problemas rotineiros.

Portanto, como explicam Stanic e Kilpatric,

> Esta visão adia a atenção à resolução de problemas não rotineiros e, como resultado, apenas alguns alunos que conseguiram dominar os pré-requisitos chegam a ser expostos a tais problemas. Mais do que para todos os alunos, a resolução de problemas não rotineiros torna-se então uma actividade para os estudantes especialmente capazes. (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 15).

Já a Resolução de Problemas como arte de acordo com Stanic e Kilpatric surgiu do trabalho de Polya, que definia a Resolução de Problemas como uma arte prática, “como nadar, fazer esqui, ou tocar piano”.

Pois ensinar também é uma arte conforme Stanic e Kilpatric, não se pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas, ela é uma atividade humana que exige experiência, gosto e julgamento.

Dos três temas discutidos acima, os autores enxergam a Resolução de Problemas como arte como a mais defensável e justa. Porém ao mesmo tempo consideram o tema mais problemático, pois é o mais difícil de operacionalizar em manuais escolares e salas de aula. O problema dos educadores matemáticos que acreditam na resolução de problemas como uma forma de arte é como desenvolver esta capacidade artística nos estudantes.

Vários são os autores a fazer distinção entre o que se entende por problema e a classificá-los.

Dante (2009) classificou os problemas matemáticos em seis tipos:

1. Exercícios de reconhecimento, onde o aluno deve: reconhecer, identificar ou lembrar um fato, um conceito, uma definição ou uma propriedade.

2. Exercícios de algoritmos têm por objetivo reforçar conhecimentos anteriores e treinar a habilidade de execução dos algoritmos das quatro operações fundamentais. Normalmente podem ser resolvidos passo a passo, num nível elementar.

3. Problemas-padrão, são os que envolvem a aplicação direta de um ou mais algoritmos já aprendidos, não exigem estratégia de resolução, a solução está contida no próprio enunciado.

4. Problemas-processo ou heurísticos são aqueles em que as soluções já envolvem operações que não estão explicitas no enunciado, pois requerem dos alunos um tempo maior para pensar e elaborar uma estratégia de resolução, e portanto tornam-se mais interessantes e despertam a curiosidade permitindo que o aluno desenvolva a criatividade.

5. Problemas de aplicação retratam situações reais do dia a dia, mas que precisam da matemática para serem resolvidos. Muitas vezes são problemas que necessitam de pesquisa e levantamento de dados.

6. Problemas de quebra-cabeça são os que desafiam e envolvem os alunos, pois a solução quase sempre, vai depender da ‘sorte’ ou da facilidade de perceber alguma regularidade ou truque para a solução. Além da classificação proposta, Dante (2009) destaca algumas questões que devem ser consideradas e adequadas em relação às dificuldades de um problema. Tais questões dizem respeito à faixa etária e condições dos alunos quanto: a linguagem usada na redação do problema; tamanho e estrutura das frases; vocabulário matemático específico; tamanho e complexidade dos números; o modo como o problema é apresentado; ordem em que as informações (dados e condições) são apresentadas; o número de condições a

serem satisfeitas e sua complexidade; o número e complexidade de operações e as estratégias envolvidas.

Assim como Dante (2009), outros pesquisadores já haviam feito uma classificação sobre os tipos de problemas que surgem e devem ser trabalhados em matemática.

Butts (1997) dividiu o conjunto dos problemas matemáticos em cinco categorias:

1. Exercícios de reconhecimento, são aqueles em que é necessário reconhecer ou relembrar uma situação específica, uma definição ou o enunciado de um teorema. São apresentados normalmente como verdadeiro ou falso, múltipla escolha ou comparações.

2. Exercícios algorítmicos são exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo, geralmente um algoritmo numérico.

3. Problemas de aplicação são os que envolvem algoritmos aplicativos, “os problemas tradicionais”, exigindo sua resolução.

De acordo com Butts (1997), grande parte dos exercícios dos livros didáticos do ensino básico cai nessas três primeiras categorias.

4. Problemas de pesquisa aberta são aqueles que não possuem uma estratégia no enunciado para resolvê-los, o que requer um nível mais elevado de raciocínio para resolução.

5. Situações-problema são situações onde é preciso identificar o(s) problema(s) para então resolvê-los, e essa solução irá melhorar a situação. Seria a parte da resolução de problemas no sentido amplo, conforme o autor.

Essas cinco categorias conforme Butts (1997) servem como base para discutir sobre a arte de formular problemas. Sendo que na última, situações-problema, o essencial é identificar os problemas que acabam recaindo nas categorias de aplicação e de pesquisa aberta.

Nos exercícios de reconhecimento, por se tratar na sua maioria de exercícios de verdadeiro ou falso e múltipla escolha, segundo Butts (1997) os professores hesitam em trabalhar tais exercícios, por medo de que haja uma memorização sem compreensão. Então Butts (1997) propõe que sejam feitos problemas do tipo “dê um exemplo de”, (por exemplo: dê se possível, um exemplo de uma fração própria maior que 3/4), não como questões de provas, pois dificulta a correção, mas como uma proposta de problemas a serem resolvidos durante a aula, pois podem gerar uma diversidade de respostas e acabar estimulando uma discussão interessante.

Os exercícios algorítmicos de acordo com Butts (1997) visam desenvolver habilidades básicas para fazer cálculos, e um desafio pode tornar esses exercícios interessantes, propondo esses problemas de forma mais desafiadora, podendo resultar em problemas com mais de uma solução.

Além da categorização elaborada por Butts (1997), o autor discute como propor problemas adequadamente para que possam se enquadrar em problemas de aplicação e de pesquisa aberta.

Nos problemas de aplicação, conforme Butts (1997) os dados devem ser realistas, tanto nas informações como nos valores numéricos. A incógnita deve ser efetivamente desconhecida, e a “resposta do problema deverá ser uma quantidade para cuja procura possivelmente se pudesse encontrar uma razão”. Portanto, é preciso uma análise crítica para a formulação de problemas. Para o autor, os melhores problemas de aplicação solicitam que os resolvedores reúnam seus próprios dados, problemas esses mais adequadamente classificados como uma situação-problema.

Nos problemas de pesquisa aberta, para Butts (1997) o objetivo é incentivar a conjectura, exigindo do resolvedor que este faça conjecturas da solução. Algumas sugestões do autor para propor bons problemas de pesquisa aberta são:

> - “Vinte Perguntas” – Pense em algum objeto matemático, como um número, figura geométrica, conceito ou teorema. (Se for um objeto palpável, você pode colocá-lo em uma maleta para maior repercussão.) Os alunos tentam então identificá-lo fazendo o mínimo de perguntas possível, que você pode responder apenas com sim ou não. Desencoraje a pergunta “É um(a)...?”. Tal atividade poderia ser usada antes de dar problemas de pesquisa aberta, como um meio para incentivar conjecturas – algo que os professores frequentemente têm dificuldade em fazer.
> - Problemas extravagantes – Muito frequentemente os alunos consideram os problemas de livros didáticos artificiais; uma solução citada anteriormente é fazer o problema o mais realista possível. Outra possibilidade é formular o problema de uma maneira totalmente irreal, fazendo dele um problema extravagante. Tais problemas frequentemente pintam um quadro expressivo, algumas vezes grotesco, na mente. (...) Um problema extravagante pode atrair os alunos porque eles não consideram extravagante despertar sua curiosidade intelectual. (BUTTS, 1997, p. 43-44).

Outra sugestão dada pelo autor é o uso de jogos matemáticos e quebra-cabeças, como uma “rica fonte de problemas de pesquisa aberta”, sendo formulados como perguntas e como problemas extravagantes. Além disso, Butts (1997) afirma que o uso de humor, mesmo de forma fraca, normalmente vale a pena.

Conforme Butts (1997), dado algum conceito ou habilidade, em geral é possível formular problemas não-rotineiros de vários tipos e dificuldades que envolvem aquele conceito ou habilidade, assim, o autor conclui afirmando que:

> É preciso formular um problema com a criatividade de um artista para que o resolvedor potencial: 1. Seja motivado a resolver o problema; 2. Entenda e retenha o conceito envolvido na solução do problema; 3. Aprenda alguma coisa sobre a arte de resolver problemas. Estudar matemática é resolver problemas. Consequentemente, cabe aos professores de matemática, em todos os níveis, ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é formular o problema adequadamente. (BUTTS, 1997, p. 48).

Corroborando com a ideia de formular problemas para torná-los mais atrativos e estimulantes, Dante (2009) também descreve algumas características para que o professor formule bons problemas:

- Os problemas devem ser desafiadores para os alunos, trazendo motivação e curiosidade para solucioná-los.
- Os dados do problema precisam ser reais, pois dados e perguntas artificiais desmotivam o aluno.
- O problema precisa ser do interesse do aluno.
- O elemento desconhecido, ou o que se procura responder, de um problema deve ser realmente desconhecido. Por exemplo, problemas que envolvem idades, a idade de uma pessoa já é determinada, então é só perguntar para ela.
- O problema não pode basear-se na aplicação direta e evidente de uma ou mais operações aritméticas.
- E por fim, o problema deve ter um nível adequado de dificuldade, de acordo com a faixa etária dos alunos e suas condições, pois se a dificuldade for muito além pode levá-los a frustrações e desânimo irreversíveis.

De acordo com esses autores e outros pesquisadores sobre a questão da resolução e problemas no ensino de Matemática, podemos observar que existem diferentes tipos de problemas. Embora cada especificação, ou classificação atenda determinadas habilidades, acreditamos que todas são de fundamental importância e devem ser trabalhadas em sala de aula para que os estudantes desenvolvam diferentes habilidades e aprendam a mobilizar seus conhecimentos para resolver diferentes tipos de situações-problema.

7. O ENSINO DA GEOMETRIA

Segundo Eves (1992) a geometria surgiu de necessidades práticas, há milhares de anos, em certas áreas do Oriente antigo, como uma ciência necessária às atividades de agricultura e de engenharia.

A geometria, como parte integrante do saber teórico e simbólico que compõe a matemática, conforme Kaleff (2007, p. 50), tem origem nas civilizações que viviam às margens de grandes rios como Nilo, Tigre, Eufrates e Ganges. Os conhecimentos dessas civilizações se baseavam em relações lógicas e construções de traçados característicos de desenhos, vindos, essencialmente da geometria estabelecida pelos gregos por volta de 700 a.C. Tal Geometria é conhecida hoje como Geometria Euclidiana e é considerada o primeiro Sistema Axiomático de Conteúdo, a qual se tornou meio de descrever e apresentar as características da realidade do universo físico, por aqueles que eram interessados em entender a natureza humana e o seu meio ambiente.

A partir de todo esse conhecimento, construído pela humanidade ao longo desses anos, aos poucos com o surgimento das escolas, nós temos o que hoje conhecemos por conhecimento escolarizado. Ainda, de acordo com Gauthier e Tardif (2010) a maneira como esse conhecimento escolarizado se traduz em conteúdos, e mais especificamente distribuído em faixas etárias, anos, ou seja, como o conhecimento foi de certa forma, compartimentalizado.

Nesse sentido, apresentamos algumas pesquisas sobre como tem ocorrido o ensino da Geometria nas escolas.

Para Kaleff (1994, p. 29) “A geometria é, em geral, ensinada de uma forma mecânica.” E as atividades usadas para o ensino de geometria têm, muitas vezes, o nível de seu conteúdo reduzido para que os alunos possam memorizá-lo. Além disso, conforme a autora o questionamento e a linguagem usados pelo professor são empregados de forma deficiente.

Corroborando com essa ideia Pavanello (1995) afirma que, atualmente a geometria é trabalhada na sala de aula para memorização e aplicação direta de fórmulas, ou seja, de forma mecânica. Porém, a geometria oferece um grande número de situações em que os alunos podem exercitar a criatividade para interagir com as propriedades geométricas e suas representações.

Entretanto, para que isso ocorra, a geometria, de acordo com Murari (2012),

> exige linguagem e procedimentos apropriados para que suas relações conceituais e sua especificidade quanto às representações simbólicas sejam entendidas. (...) Ela é um ramo da matemática que possui um campo muito fecundo, e a maneira como for estudada irá refletir no desenvolvimento intelectual, no raciocínio lógico e na capacidade de abstração e generalização do aluno. (MURARI, 2012, p. 216).

Também Fonseca et al. (2011) afirmam que o ensino de geometria favorece diversas habilidades, como: a percepção espacial, ou modos de organizar o espaço e a resolução de problemas (escolares ou não), e oferece aos alunos oportunidades de olhar, comparar, medir, adivinhar, generalizar e abstrair; perceber regularidades; promove valores culturais e estéticos importantes para uma melhor apreciação e compreensão das obras da natureza e do homem; auxilia na compreensão de outros conteúdos da matemática e de outros campos do conhecimento devido às representações diversificadas que a geometria proporciona. Além do desenvolvimento de todas essas aptidões, está vinculada à preparação profissional, e desenvolvimento de habilidades indispensáveis a determinadas carreiras (FONSECA et al. 2011, p. 96).

Por ter um conteúdo rico em diversidade de situações, objetos, e problemas a geometria possibilita um ensino pautado em explorações e investigações que contribuem para a compreensão de fatos e relações, que são muito mais importantes do que simplesmente a memorização de fórmulas (SCHEFFER, 2012, p. 97).

Portanto, a apresentação de conceitos geométricos de acordo com Kaleff (2007) não deve consistir apenas de exercícios para rever noções formais e partes características da Matemática. As variações de linguagem e os registros de representação precisam ser considerados nos processos de abstração para a construção do conceito, com a finalidade de que aspectos adequados aos conteúdos e sobrevindos de cada ambiente de representação se articulem, em busca de uma compreensão que se integre.

Conforme Kaleff (2007) para chegar ao abstrato é preciso partir de materiais concretos[5]. Os modelos concretos visam dar ênfase a um desenvolvimento de habilidades matemáticas que sejam adequados à aprendizagem dos conceitos abstratos euclidianos.

Também Murari (2012), defende que nas atividades onde os estudantes são estimulados a investigar ideias geométricas utilizando material manipulável, disponibilizam-se condições para a descoberta e para estabelecer as relações geométricas que existem no universo.

A esse respeito os PCN+ (2002), assim se referem:

> usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (PCN +, 2002, p. 123).

A partir dessa defesa da utilização de materiais manipuláveis em sala de aula para o desenvolvimento da capacidade de abstração e visualização em Geometria concorda-se com Fonseca et al. (2011) ao afirmar que é pelo exercício de observação, descrição e comparação de diferenças, das formas geométricas que constituem o espaço (material manipulável), que os alunos vão construir uma imagem mental, e assim ter a possibilidade de pensar no objeto na sua ausência.

Para tanto, é preciso ter claro o que devemos contemplar no ensino para que essas capacidades sejam desenvolvidas. E, nesse sentido, temos de acordo com o PCN+ (2002), a indicação de que o ensino de Geometria deve contemplar: o estudo das propriedades de posições relativas de objetos geométricos; relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos; propriedades de congruência e semelhança de figuras planas e espaciais; análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, como por exemplo, os desenhos, planificações e construções com instrumentos.

[5] O termo materiais concretos conforme Lorenzato (2012) pode ser interpretado como materiais manipuláveis. Acreditamos que quando se fala em uso de materiais concretos para o ensino, a razão para isso não deve ser apenas o de motivação, “o uso pelo uso”, mas que é preciso ter um objetivo muito claro para o uso desse material. Inicialmente se parte de um material concreto para construir o conceito, e no momento correto esse material precisa ser deixado de lado evoluindo assim para a abstração.

A partir do que deve ser contemplado no ensino da Geometria, apresentamos o trabalho de Kaleff (1994) sobre o modelo de van Hiele, o qual descreve a aprendizagem e a avaliação das habilidades dos alunos em geometria.

De acordo com Kaleff (1994), o modelo de van Hiele está dividido em cinco níveis de compreensão que descrevem as características do processo de pensamento geométrico. São eles:

- Nível 0 – Visualização ou Reconhecimento: é o estágio inicial, aqui os alunos raciocinam essencialmente por contemplações visuais. Os conceitos geométricos são vistos como um todo, sem as considerações explícitas das propriedades. Ou seja, neste nível o aluno pode aprender o vocabulário geométrico, identificar as formas específicas e representar uma figura que é dada.

- Nível 1 – Análise: é onde os alunos já raciocinam sobre conceitos geométricos, mas através de uma análise informal por meio de observação e experimentação. Ou seja, os alunos começam a diferenciar as características das figuras e estabelecem propriedades, mas ainda não evidenciam uma articulação entre figuras e propriedades.

- Nível 2 – Dedução informal ou Ordenação: aqui os alunos formam definições abstratas podendo evidenciar as articulações das propriedades nas figuras, conseguem diferenciar entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades para estabelecer um conceito. Mas ainda não compreendem o significado de uma dedução como um todo, nem o papel dos axiomas. Podem até acompanhar as provas formais, mas não percebem como construí-las.

- Nível 3 – Dedução formal: neste nível, os alunos já desenvolvem uma sequência de afirmações deduzindo-as de outras, eles raciocinam formalmente no contexto de um sistema matemático completo. Ou seja, poderão construir provas e percebem a possibilidade de construí-las de mais de uma maneira.

- Nível 4 – Rigor: o mais alto nível, onde os alunos poderão avaliar vários sistemas dedutivos com alto grau de rigor. Podem comparar sistemas baseados em diferentes axiomas e na falta de modelos concretos vão estudar várias geometrias. E, além disso, são capazes de analisar as propriedades de um sistema dedutivo como a consistência, independência e completude dos axiomas.

Além dos níveis de compreensão, neste Modelo de van Hiele são descritas algumas propriedades, que de acordo com Kaleff (1994) fornecem capacidade de se aprimorar numa situação não usual, desenvolver corretamente ações solicitadas e desenvolver conscientemente um método que resolva uma determinada situação. Tais propriedades, segundo Kaleff (1994) são:

> (1) o Modelo é parte de uma teoria de desenvolvimento e, portanto, presume que um aluno para atuar com sucesso em um determinado nível necessita ter adquirido (através de experiências de aprendizagem apropriadas), as estratégias dos níveis anteriores, não permitindo ao aluno saltar níveis;
> (2) o processo, ou falta dele, de um nível para outro, depende mais dos conteúdos e métodos de ensino recebidos do que da idade. Van Hiele chama atenção para o fato de que é possível *ensinar* a um aluno habilidades acima de seu nível real. Por exemplo, sabe-se que se podem treinar crianças na aritmética das frações sem falar-lhes no que as frações realmente significam. Todavia, em tais situações o que realmente acontece é que o conteúdo foi reduzido para um nível mais baixo, e o entendimento não ocorreu;
> (3) no mecanismo entre os níveis, os objetos inerentes a um nível se transformam em objetos de estudo para o nível posterior. Por exemplo, no nível 0 é percebida a forma de uma figura; todavia, suas propriedades e seus componentes serão reconhecidos e analisados somente no nível 1;
> (4) cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e seu próprio sistema de relações conectando esses símbolos. Assim, uma relação que é aceita como *correta* em um nível pode ser modificada em outro. Um exemplo é encadeamento das classes de inclusão (por exemplo, um quadrado é também um retângulo, que é também um paralelogramo; no entanto, estas figuras num nível anterior naturalmente podem ser consideradas excludentes). (KALEFF, 1994, p. 27)

A partir dessas propriedades Kaleff (1994), descreve as cinco fases de aprendizagem em Geometria, propostas pelo modelo van Hiele:

- Fase 1 – Questionamento ou Informação: é a fase em que o professor e os alunos estabelecem um diálogo sobre o material de estudo, onde são feitas observações, levantamento de questões, e é introduzido o vocabulário específico. O professor percebe quais são os conhecimentos anteriores dos alunos, e estes percebem a direção que os estudos tomarão.

- Fase 2 – Orientação direta: aqui os alunos devem explorar o assunto que será estudado através de materiais que foram escolhidos pelo professor de forma cuidadosa, essa exploração levará os alunos a se familiarizarem com as estruturas características. São tarefas, em sua maioria, de uma etapa só, e que possibilitam respostas objetivas e específicas.

- Fase 3 – Explicitação: os alunos refinam o seu vocabulário a partir das experiências anteriores, expressam verbalmente as opiniões resultantes sobre as estruturas observadas. O professor deve fazer o mínimo possível, e deixar o aluno buscar a formação de relações em estudo independentemente.

- Fase 4 – Orientação livre: é onde as tarefas apresentadas aos alunos devem ser de múltiplas etapas, que dão a possibilidade de serem completadas de várias formas. O aluno precisa ganhar experiência em buscar sua forma individual de resolver as tarefas, e assim, muitas relações se tornam mais claras entre os objetos de estudo.

- Fase 5 – Integração: é a fase de revisão e resumo do que foi estudado, alcançando um novo nível de pensamento. O professor deve auxiliar nesse processo fornecendo experiências e observações, mas sem introduzir novas ideias.

Ao ter passado pelas cinco fases Kaleff (1994) afirma que os alunos deverão ter alcançado um novo nível de pensamento, e assim estarão aptos a repetir essas fases no próximo nível de compreensão.

A partir do modelo de van Hiele, e a afirmação de Kaleff (1994) e Pavanello (1995) sobre a forma mecânica como a geometria têm sido ensinada, acreditamos que é preciso rever esse ramo da Matemática se pretendemos que os alunos vejam sentido no que estão aprendendo. Nessa perspectiva, é que pretendemos apresentar situações diferenciadas, instigadoras, e de cunho real para que os alunos sejam mobilizados a aprender e ver sentido na Geometria.

Como o intuito aqui é discutir particularmente o ensino da Geometria espacial, relativa aos conceitos de área de superfície e volume, abordamos na sequência questões relativas a esse bloco de conteúdos.

8. GEOMETRIA ESPACIAL

Antes de entrarmos especificamente no campo da Geometria Espacial, consideramos imprescindível, apresentar o que encontramos, em dicionário de Matemática, quando buscamos uma definição para o que se entende por Geometria:

> ... é a ciência da extensão. Estuda as propriedades, as relações e a forma das figuras e dos sólidos, ou seja, no plano, no espaço bidimensional e no espaço tridimensional. (CARDOSO, 2001, p. 121).

Em sua forma mais simples, como mencionam Davis e Hersh (1985) é a ciência do espaço.

Mais especificamente, a Geometria Espacial[6] para Lima et al. (2006) se define em figuras geométricas tridimensionais e, sobre questões relativas as medidas de superfície e volume, os sólidos que se encontram nesse campo segundo os autores, são: o prisma, a pirâmide, o cilindro, o cone e a esfera.

Sobre esses sólidos, Dolce e Pompeo (2013) assim definem seus elementos:

- Prisma: consideremos um polígono convexo ABCD...MN situado num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma a reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α.

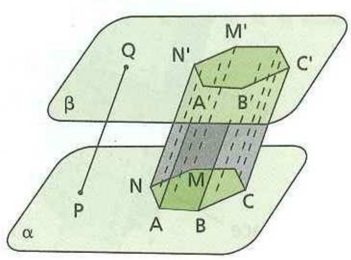


Figura 1 – Prisma

Fonte: DOLCE E POMPEO, 2013, p.136

[6] O termo Geometria Espacial, também é encontrado como sinônimo de Geometria Sólida, ou seja, a geometria dos objetos sólidos, tridimensionais (ROONEY, 2012).

- Pirâmide: consideremos um polígono convexo ABCD...MN situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. V é o vértice, e o polígono ABC...MN é a base da pirâmide.

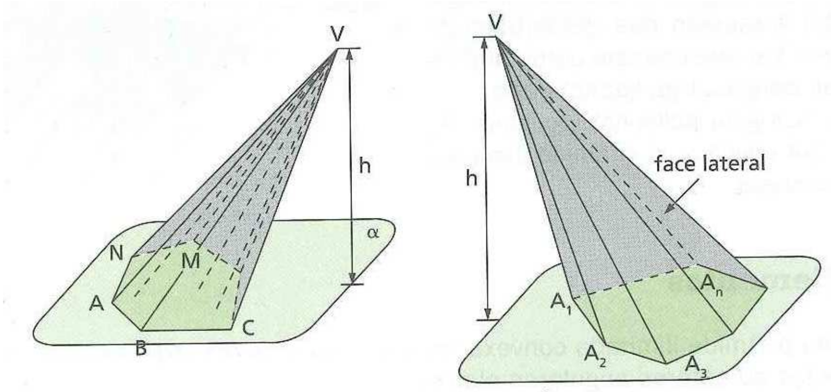


Figura 2 – Pirâmide

Fonte: DOLCE E POMPEO, 2013, p.178

- Cilindro: consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se cilindro a reunião dos segmentos congruentes a, paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α.

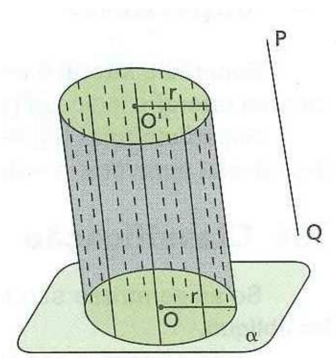


Figura 3 – Cilindro

Fonte: DOLCE E POMPEO, 2013, p.178

- Cone: consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α, e um ponto V fora de α. Chama-se cone a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

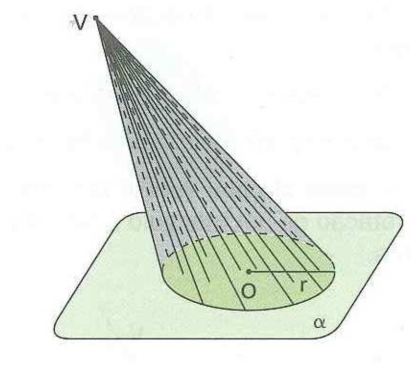


Figura 4 – Cone

Fonte: DOLCE E POMPEO, 2013, p.227

- Esfera: consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja menor ou igual a r.

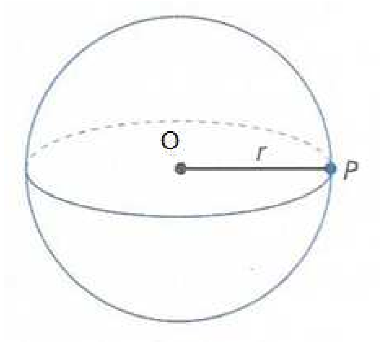


Figura 5 – Esfera

Fonte: LEONARDO, 2013, p. 187

O trabalho com esses sólidos nos livros didáticos, conforme o PNLD (2015), aparece com uma deficiência em problemas genuínos, como, por exemplo, os problemas de “áreas e volumes recaem em monótonas aplicações da álgebra”. Tal afirmação se comprova também a partir de conversas informais com alguns professores que atuam nessa área e afirmam que não veem sentido em muitas questões, ou problemas dos livros didáticos, e que os alunos não demonstram interesse, nem entendem o sentido ou significado dessas questões.

Para mudar isso é fundamental a ação do professor, para que desenvolva estratégias de motivação em suas aulas, o que deve ser feito partindo dos interesses da turma (KRULIK; POSAMENTIER, 2014), e um dos meios para fazer isso é pela Resolução de Problemas (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011).

Partindo da Resolução de Problemas recomenda-se que sejam problemas reais, não que esse seja o único caminho como afirmam os PCN (1998), mas com certeza é um deles.

Tendo em vista os apontamento descritos acima e com o intuito de fornecer um conjunto de questões instigadoras sobre medidas de superfície e volume, para o Ensino Médio, na sequência apresentamos questões selecionadas das Provas do ENEM (2014, 2015), por ser uma prova de âmbito nacional e conhecida por apresentar questões de Resolução de Problemas, materiais de apoio para o professor, como a Coleção do professor de Matemática (LIMA et al., 2006) e outras questões elaborados pela autora.

Apesar da dificuldade em encontrar problemas sobre esse bloco de conteúdos, essas questões foram escolhidas por parecerem-nos mais instigadoras. Ressalte-se que, alguns problemas encontrados não foram colocados neste trabalho por considerarmos que seus dados não eram reais ou as situações apresentadas não eram instigadoras. Outro dado importante sobre o levantamento das questões selecionadas diz respeito ao número reduzido de questões sobre área de superfície.

9. PROBLEMAS ENVOLVENDO GEOMETRIA ESPACIAL

9.1 PROBLEMAS RELATIVOS A MEDIDAS DE SUPERFÍCIE

Problema 1: (Lima et al., 2006, p. 302, ex. 2)

Um tablete de doce de leite medindo 12 cm por 9 cm por 6 cm, está inteiramente coberto com papel laminado. Esse tablete é dividido em cubos com 1cm de aresta.

a) Quantos desses cubos não possuem nenhuma face coberta com o papel laminado?
b) Quantos desses cubos possuem apenas uma face coberta com papel?
c) Quantos desses cubos possuem exatamente duas faces cobertas com papel?
d) Quantos desses cubos possuem três faces cobertas com papel?

Problema 2: (Lima et al., 2006, p.304-305, ex. 18)

Um fabricante de leite condensado deseja comercializar seu produto em embalagens cilíndricas de volume V. Determine as dimensões dessa embalagem para que seja gasto um mínimo de material em sua fabricação (ou seja, a superfície da lata deve ser mínima).

Problema 3: (Elaboração da autora, 2016)

Temos pelo menos dois tipos de embalagem de leite que devem conter 1 litro. As medidas dessas embalagens são respectivamente:

- embalagem 1 – 7,3 cm de comprimento, 7,3 cm de largura e 20,2 cm de altura;
- embalagem 2 – 9,6 cm de comprimento, 6,5 cm de largura e 16,7 cm de altura.

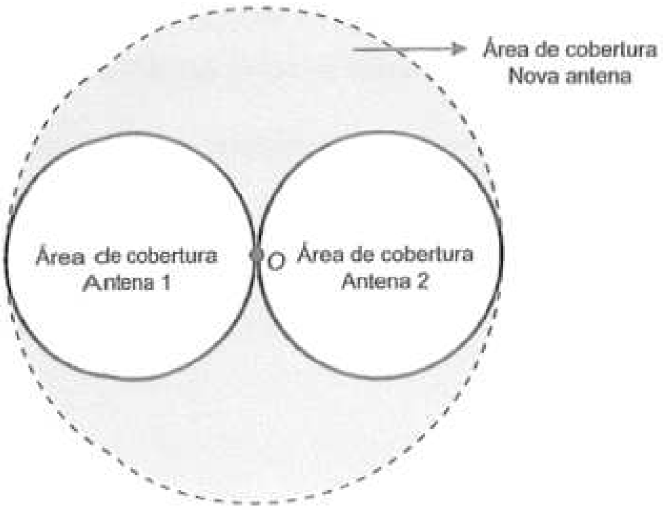
a. Confira se a capacidade dessas embalagens confere com a informação do rótulo.
b. Qual foi a quantidade de material utilizado para confeccionar essas embalagens?
c. Uma fábrica quer começar a produzir embalagens de leite para fornecer aos laticínios, acontece que ela quer obter o maior lucro possível, por isso precisará

usar a menor quantidade possível de material para produzir essas embalagens. Quais teriam que ser as medidas dessa embalagem para que a capacidade continue sendo de 1 litro, mas, a quantidade de material usado seja a menor possível?

Obs.: Desconsiderar a quantidade de material das abas da caixa de leite que não influenciam na capacidade da embalagem.

Problema 4: (ENEM, 2015, p. 27, questão 162)

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto *O*, como mostra a figura.



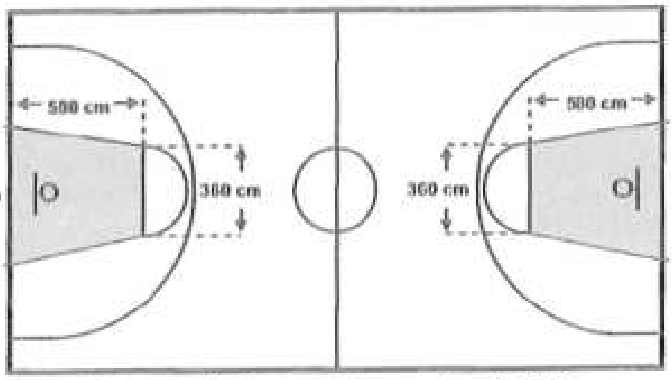
O ponto *O* indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

- A 8π.
- B 12π.
- C 16π.
- D 32π.
- E 64π.

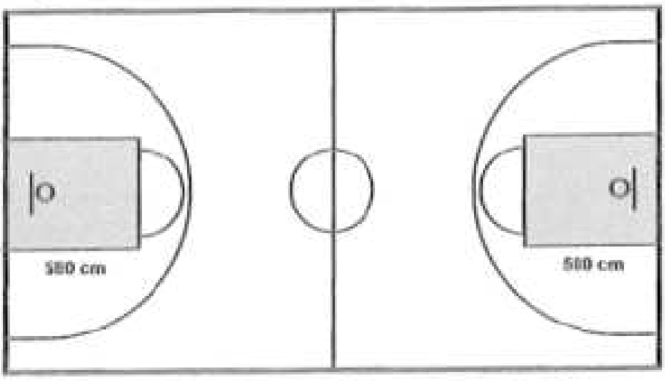
Problema 5: (ENEM, 2015, p. 28, questão 168)

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

- Ⓐ aumento de 5 800 cm².
- Ⓑ aumento de 75 400 cm².
- Ⓒ aumento de 214 600 cm².
- Ⓓ diminuição de 63 800 cm².
- Ⓔ diminuição de 272 600 cm².

Problema 6: (ENEM, 2014, p. 27, questão 163)

Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é

A 4.
B 8.
C 9.
D 12.
E 20.

9.2 PROBLEMAS RELATIVOS A MEDIDAS DE VOLUME

Problema 1: (Elaboração da autora, 2016)

Uma distribuidora de pêssegos em calda precisa fazer o carregamento das latas em um caminhão baú com as seguintes medidas da carroceria: 5,3 m de comprimento, 2 m de largura e 2,2 m de altura. Se a altura dessas latas é 20 cm, o comprimento de toda volta da lata é 37,6 cm, e, se as latas estiverem empacotadas em caixas com as seguintes medidas 48 cm de comprimento, 24 cm de largura e 60 cm de altura:

a. Qual será a melhor maneira de embalar essas latas nas caixas e empilhar as caixas no caminhão para que seja aproveitado o máximo de espaço possível?
b. Qual será o número máximo de latas que o caminhão poderá transportar?

Problema 2: (Lima et al., 2006, p. 304, ex. 15)

Uma garrafa de bebida com 30 cm de altura tem uma miniatura perfeitamente semelhante com 10 cm de altura. Se a miniatura tem 50 ml de volume, qual é o volume da garrafa original?

Problema 3: (ENEM, 2015, p. 23, questão 152)

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

A) 450.
B) 500.
C) 600.
D) 750.
E) 1 000.

Problema 4: (ENEM, 2015, p. 26, questão 161)

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

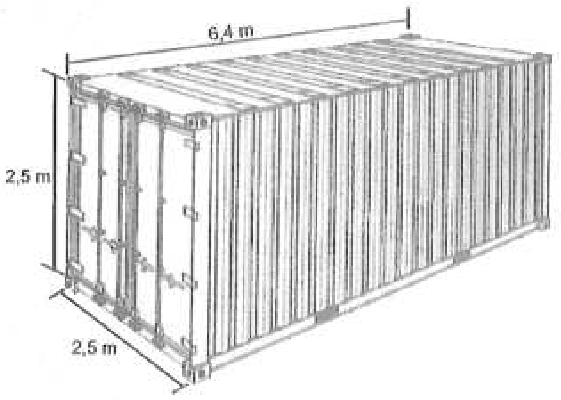


Figura 1

Figura 2

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é

- Ⓐ 12,5 m.
- Ⓑ 17,5 m.
- Ⓒ 25,0 m.
- Ⓓ 22,5 m.
- Ⓔ 32,5 m.

Problema 5: (ENEM, 2015, p. 31, questão 178)

O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em 1 m², ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m² de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal, verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em uma lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade.

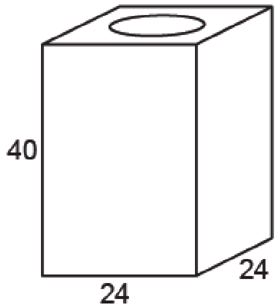
Utilize 3,0 como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

- Ⓐ 10,8.
- Ⓑ 12,0.
- Ⓒ 32,4.
- Ⓓ 108,0.
- Ⓔ 324,0.

Problema 6: (ENEM, 2014, p. 22, questão 146)

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- A) 14,4%
- B) 20,0%
- C) 32,0%
- D) 36,0%
- E) 64,0%

Problema 7: (ENEM, 2014, p. 26, questão 158)

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

- A) 168.
- B) 304.
- C) 306.
- D) 378.
- E) 514.

Problema 8: (ENEM, 2014, p. 27, questão 160)

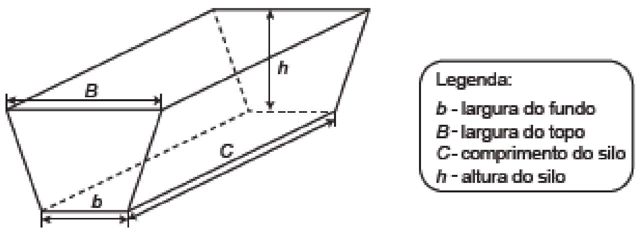
O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

- A 6.
- B 600.
- C 6 000.
- D 60 000.
- E 6 000 000.

Problema 9: (ENEM, 2014, p. 29, questão 171)

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

EMBRAPA. **Gado de corte.** Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

- A 110.
- B 125.
- C 130.
- D 220.
- E 260.

10. ANÁLISE DOS RESULTADOS

A partir dos problemas selecionados, fizemos um levantamento da categoria a qual eles pertencem, segundo Butts (1997).

Problemas relativos à medida de superfície	**Problemas relativos à medida de volume**
Problema 1: problema de aplicação *Elaborado por Lima et al.*	Problema 1: situação-problema *Elaborado pela autora*
Problema 2: situação-problema *Elaborado por Lima et al.*	Problema 2: problema de aplicação *Elaborado por Lima et al.*
Problema 3: problema de aplicação e situação-problema *Elaborado pela autora*	Problema 3: problema de aplicação *Questão do ENEM 2015*
Problema 4: problema de aplicação *Questão do ENEM 2015*	Problema 4: problema de aplicação *Questão do ENEM 2015*
Problema 5: problema de aplicação *Questão do ENEM 2015*	Problema 5: problema de aplicação *Questão do ENEM 2015*
Problema 6: situação-problema *Questão do ENEM 2014*	Problema 6: problema de aplicação *Questão do ENEM 2014*
	Problema 7: problema de aplicação *Questão do ENEM 2014*
	Problema 8: problema de aplicação *Questão do ENEM 2014*
	Problema 9: problema de aplicação *Questão do ENEM 2014*

Todos os problemas selecionados são de cunho real, pois seus dados são atuais e reais. De forma bastante categórica, em todos eles o que se procura responder é realmente desconhecido, o que de acordo com Dante (2009) são duas das características para que os problemas sejam significativos para os alunos.

Entretanto, isso ainda não garante que realmente serão instigadores para os alunos, uma vez que seus interesses podem ser diferentes, e conforme Dante (2009) e Krulik e Posamentier (2014) o problema precisa ser do interesse do aluno, por isso a importância do professor verificar primeiramente qual é o interesse do seu público.

Sobre os problemas relativos às medidas de superfície, encontramos nos problemas 1, 4 e 5 situações que recaem na tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática para então serem resolvidos com a aplicação de fórmulas, ou seja, o enunciado é simples e em alguns casos indica uma estratégia para sua resolução. Já em relação aos problemas 2, 3 e 6 temos situações mais elaboradas, exigindo que o aluno primeiramente reconheça, identifique qual é a situação para então tentar traçar uma estratégia e resolver as situações propostas.

Um problema que nos chamou a atenção nessa seleção, foi o problema 3 sobre medidas de superfície, em que se pede para encontrar as medidas de uma embalagem que use a menor quantidade de material possível para a capacidade de 1 litro. Tal problema nos chamou a atenção por ser um problema muitas vezes trabalhado na disciplina de Cálculo na Universidade. Ao ver esse problema, lembramos que Dante (2009) defende que o problema deve ter um nível adequado de dificuldade, de acordo com a faixa etária dos alunos e suas condições, pois se a dificuldade for muito além, pode levá-los a frustrações e desânimo irreversíveis. Porém é possível discutir sobre isso com os alunos, e pedir para fazerem tentativas e ao final compartilhar as tentativas de toda turma e fazer um comparativo de qual opção seria a melhor resposta. Essa mesma explicação se aplica ao problema 2 também relativo a medidas de superfície.

Em relação aos problemas sobre medidas de volume, apenas o problema 1 identificamos como sendo uma situação-problema, por ser mais elaborado e não trazer indícios de formas de resolução em seu enunciado. Já os demais problemas, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 ao nosso ver, são todos problemas de aplicação, uma vez que, apesar de serem bem elaborados, se traduzem na tradução da linguagem escrita para a linguagem matemática adequada, para então serem resolvidos. Aqui, o aluno precisará fazer algumas conjeturas mais elaboradas, antes ou depois de aplicar a fórmula para realmente resolver os problemas, desenvolvendo assim um raciocínio maior. Mas apesar disso, o enunciado também indica uma estratégia para a resolução, e, portanto também os classificamos como problemas de aplicação.

Olhando para as questões selecionadas, pudemos verificar que todas elas atendem ao modelo de Van Hiele descrito por Kaleff (1994). Aqui, identificamos claramente o nível 2, chamado de dedução informal ou ordenação, onde os alunos deverão formar definições abstratas podendo evidenciar as articulações das propriedades nas figuras, conseguir diferenciar entre a necessidade e a suficiência de um conjunto de propriedades para estabelecer um conceito. Apesar, de ainda não compreendem o significado de uma dedução como um todo, nem o papel dos axiomas. Podem até acompanhar as provas formais mas não percebem como construí-las, apesar de ser o nível desejável para os alunos do ensino médio. Entretanto, saliente-se que como afirma Kaleff (1994), os três primeiros níveis do modelo vão das séries iniciais até o início do ensino superior.

A partir da coleta e análise das questões que foram selecionadas com o objetivo de propor alguns problemas que tivessem cunho real e fossem instigadores aos alunos do ensino médio, sobre a geometria espacial à luz de nossa vivência em situações cotidianas de observação de pessoas em momentos de compra de produtos em supermercados, pudemos atestar o quão difícil é encontrar esse tipo de questão, principalmente que tratassem da temática da análise das embalagens. Tanto que, foi devido a essa dificuldade que nos aventuramos a propor alguns problemas.

11. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de discutir a problemática da geometria espacial ser abordada, geralmente, como aplicação de fórmulas, de forma mecânica e em problemas rotineiros, fomos em busca da literatura sobre o ensino da geometria, tendo como fundamentação a metodologia da Resolução de Problemas, por acreditarmos que essa era uma das formas que mais se aproximaria da realidade da sala de aula do ensino médio.

Nesse sentido buscamos fundamentação teórica que nos fizesse entender o caminho que o ensino da Geometria ao longo dos anos vem percorrendo. Assim, a partir da leitura dos trabalhos de Kaleff (1994), da análise das questões propostas em livros didáticos, e paralelamente às vivências no estágio supervisionado e da atuação como professora de reforço pudemos confirmar a nossa hipótese de que a geometria espacial vem, de fato, sendo ensinada, mecanicamente como aplicação de fórmulas.

Outra questão que nos chamou a atenção foram às observações do guia do PNLD 2015, sobre as análises dos livros didáticos. E, sobre esse aspecto, confirmamos a afirmação de Butts (1997), segundo a qual grande parte dos exercícios dos livros didáticos recai nas três primeiras categorias, a saber: exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos e problemas de aplicação. Além disso, esses problemas de aplicação são propostos em quantidades bem reduzidas, e muitas vezes não são significativos para os alunos, pois os dados desses problemas nem sempre são reais, e como o próprio guia do PNLD 2015 afirma, os problemas recaem em monótonas aplicações da álgebra.

Portanto, há a necessidade de apresentar problemas que sejam significativos aos alunos desse nível de ensino. E, pensando nessa questão, é que foram apresentados alguns problemas que visam instigar nos alunos o carácter de desafio, que levam a padrões e trazem experiências da vida real, pontos esses considerados essenciais por Krulik e Posamentier (2014) para gerar interesse. Mas, como afirma Dante (2009) para que um problema seja significativo para o aluno é preciso que ele seja do interesse dele. E, portanto é de fundamental importância o professor verificar primeiramente qual o interesse dos alunos (KRULIK; POSAMENTIER, 2014). Assim sendo para conferir se os problemas realmente são significativos seria necessário aplicá-los a alunos do ensino médio, o que não foi possível devido ao tempo.

Além dessa proposta de trabalho via Resolução de Problemas há outras formas de trabalho que podem instigar nos alunos maior interesse pela Geometria Espacial como, a Modelagem Matemática, a História da Matemática, a Investigação Matemática, dentre outras, ou seja, são diversas as metodologias de ensino, o que nos cabe é identificar o perfil da turma e aliar essas metodologias a favor do ensino da Matemática.

Ao propor problemas que atendessem aos objetivos do trabalho, houve certa dificuldade em encontrar problemas genuínos de geometria espacial relacionados à questão das embalagens, que foi a origem de toda essa discussão. Devido à isso, e ainda mais a dificuldade em elaborar problemas, pode-se perceber que ensinar por meio da Resolução de Problemas demanda tempo, dedicação, planejamento, estudo, reflexão e conhecer os interesses dos alunos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012). Essa talvez seja uma das justificativas do por que a Resolução de Problemas é tão pouco explorada na sala de aula como afirma Onuchic (1999). Outra questão que nos deparamos quando fomos em busca dos problemas para compor o nosso trabalho, foi a dificuldade que os alunos geralmente enfrentam quando não são ensinados a trabalhar nesse tipo de metodologia, ao receberem quase tudo pronto, não são desafiados, e isso pode dificultar o aprendizado. Outro ponto possível a ser considerado, muitas vezes pode ser a insegurança do professor, pois com a Resolução de Problemas a solução pode transcorrer de maneira diferente da prevista professor, necessitando assim de conhecimento muito além do conteúdo estudado naquele momento.

Entretanto, apesar de todos os possíveis empecilhos, defendemos junto com Onuchic e Allevato (2012) que é preciso vencer essa barreira, pois o ensino pela Resolução de Problemas desenvolve a crença nos alunos de que são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido, ainda que, as autoras lembrem que não existe um caminho único para ensinar e aprender matemática.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Angelita Minetto. **A passagem da 4ª para a 5ª série**: o que pensam professores dessas séries sobre os conteúdos essenciais de Matemática. 219 f. Dissertação de Mestrado, Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio**: um ensaio para a vida (ENEM). Caderno 5, amarelo, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Exame Nacional do Ensino Médio** (ENEM). Caderno 8, rosa, 2015.

BRASIL. Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Guia de livros didáticos**: Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015): matemática: ensino médio. 2015

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (3° e 4° ciclos). Brasília: MEC/SEB, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (Matemática). Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCN+) – Matemática. Brasília: MEC/SEB, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (1ª a 4ª séries): Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, v. 1, 1997.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução: DOMINGUES, Hygino H.; CORBO, Olga. São Paulo: Atual, 1997.

CARDOSO, Luiz F. **Dicionário de matemática.** Rio de Janeiro: Expressão e Cultura, 2001.

CURITIBA, Secretaria Municipal da Educação. **Diretrizes Curriculares para a Educação Municipal de Curitiba** – Ensino Fundamental. 2006.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1 ed. São Paulo: Ática, 2009.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A Experiência Matemática**. Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos de Matemática Elementar 10**: geometria espacial, posição e métrica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2013.

EVES, Haward. Tópicos de história da matemática para o uso em sala de aula; **Geometria**. Tradução: DOMINGUES, Hygino H. Campinas SP: Editora da Unicamp, 1992.

FERREIRA, Aurélio B. de H. **Novo dicionário da língua portuguesa.** 2 ed. 33 reimpressão. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

FONSECA, Maria da C. F. R., et al. **O ensino de geometria na escola fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

GAUTHIER, Clermont; TARDIF, Maurice (org.). **A pedagogia**: teorias e práticas da antiguidade aos nossos dias. Petrópolis: Vozes, 2010.

KALEFF, Ana M. M. R. Reflexões sobre o caminho desde o concreto ao abstrato no ensino da Geometria: vivências no Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense. In: SAGULA, J e outros. (Org.). **Memorias del 9 no Simposio de Educación Matemática**. 1 ed. Buenos Aires: Edumat, 2007, v. 1, p. 48-59.

KALEFF, Ana M. M. R.; HENRIQUES, Almir; REI, Dulce M.; FIGUEIREDO, Luiz G. **O desenvolvimento do pensamento geométrico:** o Modelo de van Hiele. Bolema, 1994, n. 10, p. 21 – 30.

KRULIK, S; POSAMENTIER, A S. **A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática.** Tradução: COSTA, Roberto Cataldo. Revisão técnica: Katia Stocco Smole. Porto Alegre: AMGH, 2014.

LEONARDO, Fabio M. de. **Conexões com a matemática.** Vol. 2. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **A matemática do ensino médio.** v. 2. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LORENZATO, Sergio. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO; Sergio (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3 ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2012.

MURARI, Claudemir. Espelhos, caleidoscópios, simetrias, jogos e softwares educacionais no ensino e aprendizagem de Geometria**.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, Marcelo de C.(Orgs.). **Educação matemática**: pesquisa em movimento. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2012.

OLIVEIRA, Maria M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa.** 6. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

ONUCHIC, Lourdes DE L. R.; ALLEVATO, Norma S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. Bolema, Rio Claro (SP): 2011.

ONUCHIC, Lourdes DE L. R.; ALLEVATO, Norma S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, Marcelo de C.(Orgs.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2012.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999.

PAVANELLO, Regina M. **Formação de possibilidade cognitivas em noções geométricas.** Tese de doutorado. Orientador: SISTO, Firmino F. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP: 1995.

PIRES, Célia M. C. **Currículo de matemática**: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PIRES, Celia Maria Carolino. **Currículos de Matemátic**a: para onde se orientam? 2004. Disponível em: <http://www.google.com/search?q=cache:RDQZO2YgzNIJ:www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr2-Celia.doc+%22curriculos+de+matematica%22&hl=pt-BR>. Acesso em: 10 maio 2005.

PIRES, Celia Maria Carolino. **Currículos de Matemática**: para onde se orientam? Revista de Educação PUC – Campinas, no 18, p. 25-34, jun. 2005. (texto ampliado)

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Tradução: ARAUJO, Heitor L. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RODRIGUES, Elizabete da Fonseca. **Perspectiva dos professores sobre o ensino da Matemática**. 395 f. Tese (Mestrado em Educação) – Faculdade Psicologia e Ciências de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1993.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática** – desde a criçaõd as pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda. 2012.

SCHEFFER, Nilce F. **O LEM na discussão de conceitos de geometria a partir das mídias:** dobradura e software dinâmico. In: LORENZATO; Sergio (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3 ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados, 2012.

SCHROEDER, T. L. & LESTER, F. K. Jr. **Developing understanding in mathematics via problem solving**. In: P. R. Trafton e A. P. Shulte (Eds.), New directions for elementary school mathematics (1989, yearbook). Reston: NCTM.

SILVA, Lucineide de A. **Ensino - aprendizagem da matemática através da resolução de problemas no ensino fundamental II.** Ano 6, n. 6. Rios Eletrônica: Revista Científica da FASETE, 2012.

STANIC, G. M. A., & KILPATRICK, J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum**. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.