UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LEANDRO GASPARETI

O SANTO GRAAL DA MATEMÁTICA: A HIPÓTESE DE RIEMANN

DISSERTAÇÃO

CURITIBA

2014

LEANDRO GASPARETI

O SANTO GRAAL DA MATEMÁTICA: A HIPÓTESE DE RIEMANN

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Matemática”.

Orientador: Roy Wilhelm Probst, Dr.

CURITIBA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

G249s Gaspareti, Leandro
2014 O Santo Graal da matemática : a hipótese de Riemann / Leandro Gaspareti.-- 2014.
50 f.: il.; 30 cm

Texto em português, com resumo em inglês.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Curitiba, 2014.
Bibliografia: f. 50.

1. Matemática - História. 2. Riemann-Hilbert, Problemas de. 3. Matemática – Pesquisa. 4. Matemática - Problemas, exercícios, etc.. 5. Professores de matemática - Formação. 6. Prática de ensino. 7. Matemática - Dissertações. I. Probst, Roy Wilhelm, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDD 22 -- 510

Biblioteca Central da UTFPR, Câmpus Curitiba

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação-Câmpus Curitiba
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Título da Dissertação No. 019

"O Santo Graal da Matemática: a Hipótese de Riemann"

por

Leandro Gaspareti

Esta dissertação foi apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Curitiba, às 15h do dia 10 de outubro de 2014. O trabalho foi aprovado pela Banca Examinadora, composta pelos doutores:

Prof. Roy Wilhelm Probst, Dr.
(Presidente - UTFPR/Curitiba)

Prof. Luiz Rafael dos Santo, Dr.
(UFSC/Blumenau)

Prof. Márcio Rostirolla Adames, Dr.
(UTFPR/Curitiba)

Visto da coordenação:

Prof. Ronie Peterson Dario, Dr.
(Coordenador do PROFMAT/UTFPR)

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do PROFMAT/UTFPR"

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente na construção deste trabalho. E principalmente às pessoas que o usarão na luta por uma educação de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Aos familiares e amigos por terem entendido os diversos nãos recebidos, para que eu pudesse me dedicar na realização deste sonho.

Ao meu orientador Professor Dr. Roy Wilhelm Probst pelas sábias contribuições para que este trabalho ocorresse.

À CAPES pelo incentivo financeiro recebido, através da bolsa de estudos concedida, e a todos os envolvidos para que o programa PROFMAT acontecesse, e se tornasse uma oportunidade para que professores da educação básica retornassem à universidade.

“Claro que seria desejável ter uma demonstração rigorosa deste fato [a Hipótese de Riemann]; entretanto, após algumas tentativas não muito sérias, em vão, pus de parte temporariamente a procura de uma demonstração, uma vez que parece desnecessária para o objetivo seguinte da minha investigação.” Bernhard Riemann.

RESUMO

GASPARETI, Leandro. O SANTO GRAAL DA MATEMÁTICA: A HIPÓTESE DE RIEMANN. 50 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

Este trabalho traz um relato a respeito da Hipótese de Riemann, com o objetivo de tornar os conceitos referentes a esse problema acessíveis ao professor da educação básica, que pretenda abordá-los em sala de aula quando tratar de conteúdos a ele relacionados. A pesquisa foi inteira bibliográfica, apoiada em sua grande parte em textos de História da Matemática, tornando este trabalho divulgador dos problemas que ocupam parte das pesquisas matemáticas deste século, em especial da Hipótese de Riemann.

Palavras-chave: História da Matemática, Problemas do Milênio, Hipótese de Riemann.

ABSTRACT

GASPARETI, Leandro. THE HOLY GRAIL OF MATHEMATICS: THE RIEMANN HYPOTHESIS . 50 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2014.

This study presents a report about the Riemann Hypothesis, leaving the underlying concepts behind this problem more accessible to a high school teacher. The literature review was based mainly on History of Mathematics texts. This research aims to study significant topics of mathematical research throughout this century, particularly to popularize the Riemann Hypothesis.

Keywords: History of Mathematics, Millennium Problems, Riemann Hypothesis

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, mesmo vivendo na era da informação, há pouca divulgação acerca do que é pesquisado nas universidades, em todas as áreas. A Matemática estudada atualmente pouco é conhecida pela sociedade, pois falta adequação da linguagem científica para que os assuntos pesquisados se tornem acessíveis à população. Como apontado por (DEVLIN, 2008), a Matemática que nos é familiar hoje, teve seu surgimento nas universidade a mais de dois séculos. Questionando se o desenvolvimento de nossa sociedade não poderia ser melhor; se os conhecimentos científicos que hoje são desenvolvidos no interior das universidades pudessem ser amplamente socializados.

Na virada do século XIX para o século XX, o matemático alemão David Hilbert, um dos grandes matemáticos do século XIX, propôs uma lista com 23 problemas, ainda não resolvidos, envolvendo assuntos da Matemática pesquisados à época, e afirmou que tais problemas ocupariam as mentes dos matemáticos pelos próximos anos, sendo que alguns deles continuam sem respostas atualmente. Essa época foi marcada por grande divulgação da Matemática, tendo sido muitos dos principais Departamentos de Matemática criados naquele momento, e, com isso, o número de matemáticos produtivos tornou-se muito grande (BOYER, 2010; EVES, 2004). Pode-se indagar se o fato de ter aparecido tantos bons matemáticos não está ligado a divulgação feita nessa época.

Na virada do século XX para o século XXI, o Instituto Clay de Matemática, sediado em Massachusetts nos Estados Unidos, seguindo os passos de Hilbert, criou uma lista com sete problemas intitulada *Os Problemas do Milênio*. Foi oferecido como prêmio, para quem os resolvesse, sete milhões de dólares, ou seja, um milhão de dólar para cada problema resolvido. Atualmente, apenas um foi solucionado, a Conjectura de Poincaré, permanecendo seis deles sem resposta.

A Matemática de maneira mais conservadora teve seu avanço pautado na solução direta de problemas (SAUTOY, 2007). Dos desafios lançados nas viradas dos últimos séculos, apenas um problema aparece em ambas as listas, tanto na dos 23 problemas de Hilbert, quanto na dos

Problemas dos Milênio, qual seja, a Hipótese de Riemann.

De tempos em tempos, é noticiado na grande mídia a solução de alguma dessas questões de grande importância para a Matemática. Porém, ao consultar livros didáticos ou artigos relativos a esses problemas, ou mesmo pensando nos temas tratados nas capacitações para professores de Matemática da Educação Básica, nota-se a escassez de publicações nesse sentido.

Percebe-se, com isso, que questões tão importantes para o desenvolvimento dessa ciência poderiam ser melhor divulgadas para aqueles que transmitem a Matemática no dia a dia, reduzindo, assim, a distância daquilo que é pesquisado no interior das universidades e do que se ensina nas escolas.

Mesmo sabendo da inviabilidade de aplicar alguns conceitos mais avançados da Matemática no currículo escolar, as ideias e os assuntos que permeiam a Hipótese de Riemann, e também dos demais problemas, podem ser abordadas nas formações com o intuito de ampliar o conhecimento dos professores da educação básica, e, por conseguinte, fazer despertar nos alunos o interesse de aprofundarem seus estudos acerca desses temas.

Diante disso, este trabalho se coloca como fonte de divulgação, pretendendo colocar o público alvo, que são os professores de Matemática, em contato com a Matemática avançada que vem sendo pesquisada nas universidades. Será feito um relato sobre as ideias matemáticas existentes na Hipótese de Riemann, tratado por (SAUTOY, 2007), e usado no título desse trabalho como o “Santo Graal da Matemática”, devido à relação que essa Hipótese tem com a busca do padrão na sequência dos números primos. Sendo assim, este pode ser um texto de base para que professores possam citá-lo quando forem abordar assuntos como: números primos, funções, probabilidade, entre outros.

No capítulo 2 será apresentado um breve relato histórico sobre como estavam as pesquisas Matemáticas na época em que, pela primeira vez, a Hipótese de Riemann foi proposta em uma lista para ser resolvida. Falaremos, também neste capítulo, a respeito do matemático David Hilbert, abordando de maneira bem sucinta os 23 problemas por ele propostos.

No capítulo 3 será relatado como foi organizada a lista dos sete Problemas do Milênio, na qual a Hipótese de Riemann foi o único problema repetido em relação à lista dos 23 problemas de Hilbert. Fala-se-á da criação do Instituto Clay de Matemática, apresentando-se os demais seis Problemas do Milênio, comentando sobre o prêmio para quem vier a resolver um desses enigmas da Matemática.

No capítulo 4 aprofundaremos a Hipótese de Riemann. Em princípio, faremos breve relato da evolução histórica desse problema, com a grande participação de Carl Friedrich Gauss, cujos estudos motivaram Bernhard Riemann a enunciar tal hipótese. Ainda neste capítulo, quando da abordagem matemática da Hipótese, serão tratados os conceitos de números primos, funções, probabilidade, séries e sequências.

2 OS PROBLEMAS DE HILBERT

O problema que este trabalho se propõe a apresentar um relato é parte de uma lista de problemas proposta por David Hilbert (1862-1943) em um congresso no começo do século XX. A Hipótese de Riemann foi formulada pelo alemão Bernhard Riemann em 1859, e ainda é considerado como um dos problemas mais difíceis e significativos na virada do Terceiro Milênio.

No século XIX, como apontado em (BOYER, 2010, p.417) "[...] não só o conteúdo da Matemática mas o seu enquadramento institucional e interpessoal tinham mudado radicalmente desde o começo do século." Houve, com isso, a criação de grande quantidade de departamentos matemáticos em vários países diferentes, como a London Mathematical Society na Inglaterra e a Société Mathématique de France na França. Esses dois departamentos, fundados respectivamente nos anos de 1865 e 1872, abriram caminho para a criação de outros tantos, mostrando que além da tradicional comunicação entre os matemáticos ser mantida, ela era ampliada através dos encontros internacionais de matemáticos ocorridos nesse século.

No século XIX, a divulgação da pesquisa científica na área da Matemática mostrou um avanço significativo, mesmo que restrita a um grupo específico da sociedade, que na grande maioria se resumia aos colegiados das universidade. Segundo (EVES, 2004, p.526) "[...] no século XIX, o número de matemáticos competentes e produtivos torna-se tão grande que somos obrigados a selecionar apenas umas poucas das estrelas de maior brilho no deslumbrante firmamento matemático".

Nota-se que através da criação dos departamentos de Matemática por toda Europa, foram também organizados vários congressos internacionais, e a pesquisa em Matemática teve um grande avanço naquele século. Naquele contexto histórico, de grandes eventos de divulgação da Matemática, em um congresso em Paris, no início do século XX, um dos grandes matemáticos da época, David Hilbert, chamado de "Príncipe da Matemática", anunciou uma lista com problemas da Análise Matemática e da Geometria. Antes de relatar, sucintamente, tais problemas e a situação de cada um deles, primeiramente é importante conhecer um pouco da vida e obra desse grande divulgador da Matemática, David Hilbert.

David Hilbert nasceu em Konigsberg, na Alemanha, em 1862, e cursou seu doutorado da universidade local em 1885, onde lecionou entre os anos de 1886-1894, e em 1895, tornou-se professor da Universidade de Gottingen, universidade em que continuou seus trabalhos até sua aposentadoria em 1930.

Hilbert foi um matemático excepcionalmente talentoso, dando diversas contribuições a vários campos da Matemática, como, por exemplo, aos Fundamentos da Geometria, Equações Integrais, contribuições em Física-Matemática à Teoria Cinética dos Gases e Teoria da Relatividade, investigações críticas dos Fundamentos da Matemática e da Lógica Matemática, entre outras (EVES, 2004). A Figura 1 é uma fotografia de Hilbert.

Figura 1: David Hilbert (O'SHEA, 2009, p.190)

Na sua fase de doutoramento em 1885, Hilbert se dedicou a Teoria dos invariantes. A contribuição de Hilbert ao tema se resume na publicação de um resultado, em 1888, do chamado "Teorema de Base". Antes desse resultado, foram gastas três décadas calculando-se invariantes específicos.

O "Teorema de Base" mostra a existência de um sistema finito completo de invariantes, para um número arbitrário de variáveis. Hilbert ficou focado nesse assunto até o ano de 1892, época que ainda trabalhava na universidade local de Konigsberg (BOYER, 2010).

David Hilbert foi o criador da escola formalista, e afirmava "[...] o formalismo considera a Matemática como uma coleção de desenvolvimentos abstratos em que os termos são meros símbolos e as afirmações são apenas fórmulas envolvendo esses símbolos [...]"(EVES, 2004).

A Matemática dada pela visão do formalismo carece de conteúdo concreto. Porém, ainda segundo essa linha, as demonstrações simbólicas dão consistência aos vários ramos da

Matemática. Esse programa mostra que um sistema era dado como consistente quando um determinado conjunto de fórmulas é aceito como verdade e nunca poderia ocorrer nenhuma fórmula contraditória. As ideias relacionadas ao formalismo foram fadadas ao fracasso, pois, dentro desse sistema existem problemas “indecidíveis” (EVES, 2004).

Típico de sua obra, como dar ênfase a inter-relação entre ramos antes considerados distintos, Hilbert consegue mostrar as ligações entre a Teoria dos Números e Álgebra, bem como a conexão entre a Teoria dos Números e Teoria das Funções. Ao se concentrar na Geometria, em 1894 fez uma conferência sobre Geometria Não-Euclidina, e publicou nos anos de 1898-1899 um volume pequeno, mas famoso, chamado de Fundamentos da Geometria.

Sua obra é marcada pelo formalismo e nessa época a área da Matemática que ainda carecia de uma roupagem formal, como a Álgebra e a Análise, era a Geometria. Ao publicar uma obra pioneira chamada de “Axiomas de Hilbert”, deu caráter puramente dedutivo e formal a Geometria (BOYER, 2010).

Uma característica atribuída a Hilbert era sua sociabilidade. Muitas vezes era encontrado em mesas de bares com alunos e colegas de trabalho discutindo sobre suas pesquisas, além de ser um frequentador assíduo de congressos internacionais.

Foi em uma dessas participações, colocada como a mais famosa, no ano de 1900 na cidade de Paris, na conferência intitulada de “Problemas Matemáticos”, que fez em sua palestra a leitura de 10 problemas de uma lista, futuramente publicada na sua versão completa, com 23 no total, e que logo foi traduzida e publicada em vários países. Segundo ele, esses problemas eram de muita importância para a Matemática, e alguns ainda movem matemáticos até os dias atuais, sendo que um deles compõem a lista dos Problemas do Milênio, divulgada no ano de 2000 (BOYER, 2010).

2.1 A LISTA DOS 23 PROBLEMAS DE HILBERT

Os 23 Problemas de Hilbert são na sua grande maioria de ordem conceitual, necessários para formalizar teorias de determinadas áreas da Matemática (BOYER, 2010; HILBERT, 1902).

1 Hipótese do Continuum

É uma conjectura proposta por Georg Cantor em 1878 sobre o tamanho dos conjuntos infinitos. Mais precisamente questiona se não existe conjunto cuja cardinalidade esteja estritamente entre a cardinalidade dos inteiros e a dos reais. O problema foi resolvido de forma surpreendente. Em 1940, Kurt Gödel mostrou ser impossível provar que a Hipótese do Continuum é falsa e, em 1963, Paul Cohen mostrou ser impossível provar que a Hipótese do Continuum é verdadeira. Assim, este é um exemplo de questão indecidível na Matemática.

2 Consistência dos axiomas da Aritmética

Esse problema questiona se é possível provar que os axiomas da Aritmética são consistentes, ou seja, um número finito de passos lógicos baseados nele nunca podem levar a resultados contraditórios. Em 1931, um jovem matemático austríaco chamado Kurt Gödel, baseado nas obras de Bertrand Russel e Alfred North Whitehead - as mais elaboradas tentativas feitas para se desenvolver noções fundamentais da aritmética, partindo de um conjunto preciso de axiomas -, verificou que dentro de um sistema lógico rígido como esse, desenvolvido por Russel e Whitehead, existem enunciados precisos que não podem ser provados nem negados, negando assim a veracidade do segundo problema proposto por Hilbert.

3 Igualdade de poliedros de mesmo volume

Esse problema busca saber, dados dois poliedros de mesmo volume, se é sempre possível decompor um deles em uma quantidade finita de peças e rearranjar essas peças para formar o segundo poliedro. O problema foi resolvido por um aluno de Hilbert, chamado Max Dehn, em 1900, que provou que a resposta para o caso geral é não, mostrando um contra-exemplo. Esse foi o primeiro problema da lista de Hilbert a ser resolvido.

4 Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas

O problema é a procura por geometrias cujos axiomas sejam os mais próximos dos que sustentam a Geometria Euclidiana, se conservados os axiomas de ordem e incidência, mas que,no entanto, enfraquecem os axiomas de congruência e que omite o axioma das paralelas. Foi dada uma resposta ao problema ainda por um aluno de Hilbert, chamado Georg Hamel, mas esse problema é considerado vago demais para dizer algo com relação a sua solução.

5 Existe alguma diferença se uma restrição a variedades diferenciáveis não é imposta?

Esse problema trata da caracterização dos grupos de Lie, que descrevem simetrias contínuas na Matemática. A formulação do problema é considerada muito vaga, pois Hilbert não tinha uma noção precisa da definição de variedade na época. Uma formulação alternativa foi resolvida por um grupo de matemáticos americanos em 1952.

6 Transformar toda Física em axiomas

Esse problema é uma tentativa de transformar a Física em forma de axiomas matemáticos, porém as conclusões que foram encontradas é de que muitas verdades matemáticas algumas vezes não são correspondidas na Física e vice-versa. O próprio Hilbert fez algum esforço nessa tentativa, no entanto, o problema ainda hoje não foi resolvido de forma Matemática, sendo considerado também como não matemático.

7 Irracionalidade e transcendência de certos números

Esse problema questiona se a potência entre dois números a^b em que a é algébrico diferente de zero e um, e b é irracional e algébrico é transcendente. Esse problema foi resolvido em 1934, por Alekasander Osipovich Gelfond. O resultado ficou conhecido com Teorema de Gelfond e o resultado foi verificado verdadeiro.

8 Hipótese de Riemann

Esse problema será abordado no quarto capítulo, sendo o objeto central deste trabalho.

9 Achar a lei de reciprocidade mais geral em um corpo numérico

Parcialmente resolvido, esse problema questiona se a lei da reciprocidade vale para um determinado corpo numérico. Um caso particular desse importante problema da Teoria dos Números foi resolvido por Emil Artin, em 1927, porém, o caso geral continua em aberto e está relacionado com o Problema 12.

10 Determinar se uma equação diofantina tem solução nos inteiros

Esse problema, hoje resolvido, questionava se, através de um número finito de operações, uma equação diofantina pode ser resolvida. Em 1970, Yuri Matiyasevich mostrou que tal algoritmo não existe.

11 Formas quadráticas com qualquer coeficiente numérico algébrico

O problema, parcialmente resolvido, classifica as formas quadráticas questionando se a solução de uma determinada equação quadrática com coeficientes numéricos algébricos, em qualquer número de variáveis de números inteiros ou fracionários, pertence ao corpo algébrico determinado pelos coeficientes.

12 Extensão do Teorema de Kronecker-Weber para os corpos não abelianos

Apontado por Hilbert como um dos problemas de maior relevância dessa lista, posto que transita entre três ramos da Matemática, a Teoria dos Números, Álgebra e Teoria das Funções, continua sem ser resolvido.

13 Solução de uma equação de sétimo grau usando funções contínuas de duas variáveis

Uma formulação alternativa foi respondida de forma positiva, em 1957 por Vladimir Arnold, baseado no trabalho de Andrei Kolmogorov. No entanto, ainda resta dúvida sobre a formulação original de Hilbert e o problema é considerado em aberto por alguns autores.

14 Prova de que certas álgebras são finitamente geradas

Através de um contra-exemplo, esse problema foi resolvido em 1959, por Masayoshi Nagata, mostrando assim a falsidade da conjectura. Nesse problema, de forma mais simples, queria-se mostrar que todas as funções racionais constituem um corpo finito.

15 Desenvolver uma fundamentação rigorosa para o cálculo enumerativo de Schubert

O problema foi parcialmente resolvido em 1930, por Bartel Leendert van der Waerden, e requeria uma base sólida para o cálculo enumerativo de Schubert, que é um ramo da Geometria Algébrica.

16 Problema de Topologia de curvas e superfícies algébricas

Ainda em aberto, esse problema requer seja desenvolvida uma topologia para as curvas e superfícies algébricas.

17 Expressões de formas definidas por quadrados

Esse problema questionava se uma função polinomial real positiva pode ser escrita como a soma de quadrado de funções racionais. Em 1927, Emil Artin mostrou que era verdadeira a afirmação.

18 Construção do espaço com poliedros congruentes

Esse problema está dividido em três perguntas, todas resolvidas. Em resumo, ele quer saber se é possível, através de uma justaposição de um número de cópias de poliedros congruentes, preencher todo o espaço.

19 As soluções de problemas no cálculo de variações são sempre analíticas?

O problema foi parcialmente resolvido em 1904, por Sergei Bernstein, e seu trabalho foi melhorado por Ivan Petrovsky, em 1939. Soluções diferentes foram apresentadas em 1957, de forma independente, por Ennio de Giorgi e John Forbes Nash, utilizando métodos diferentes.

20 Todos os problemas de valor de contorno têm solução?

A existência de uma solução não pode ser garantida em todos os casos. Esse problema foi muito estudado no século XIX por estar diretamente relacionado a problemas físicos.

Por haver resultados em muitos casos, o problema pode ser considerado resolvido e está intimamente ligado ao problema 19.

21 Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico

Resolvido parcialmente com diferentes enunciados por vários matemáticos, para o caso de dimensão um. A formulação para sistemas de equações diferenciais lineares ficou conhecido como problemas de Riemann-Hilbert e continua em aberto.

22 Uniformizar curvas analíticas através de funções automorfas

Resolvido em 1907, por Poincaré, esse problema trata de expandir as ideias de uniformizar uma dada região algébrica de duas variáveis através de uma função automorfa de uma variável, mas com algumas condições adicionais.

23 Desenvolver um método geral do cálculo de variações

Sem solução até hoje, esse problema, como apontado por Hilbert, trata de uma extensão do cálculo diferencial e integral. Ao contrário dos outros 22 problemas, esse não é um problema específico, mas um incentivo para continuar a desenvolver o cálculo das variações.

Muitos dos problemas da lista de Hilbert possuem enunciados vagos. Assim, vários deles podem ser considerados resolvidos ou não, dependendo da formulação. Já a lista dos Problemas do Milênio teve uma preocupação maior com a clareza dos enunciados, para não deixar dúvida na formulação.

3 OS PROBLEMAS DO MILÊNIO

Em 24 de maio de 2000, os matemáticos e a imprensa se reuniram em um congresso, no Collège de France, em Paris, lugar escolhido justamente pelo fato de que neste mesmo local, há 100 anos, David Hilbert tinha proferido o discurso no qual relatou os 23 problemas que ocupariam os matemáticos durante o século XX.

Essa reunião foi organizada para anunciar uma nova série de problemas que desafiariam a comunidade Matemática no novo século, e a nova lista de sete problemas foi sugerida por um pequeno grupo composto pelos mais conceituados matemáticos da atualidade. Dentre eles, Andrew Wiles, que tinha provado em 1994 um dos mais famosos problemas da Matemática, que permaneceu sem ser resolvido por 330 anos, O Teorema de Fermat (SAUTOY, 2007). Intitulada de *Os Problemas do Milênio*, essa nova lista com sete problemas é composta por seis novos e um único que aparecera na lista de Hilbert, a Hipótese de Riemann.

Para a solução de cada um desses problemas foi oferecida uma recompensa de um milhão de dólares, prêmio anunciado por Sir Michael Atiyah, da Grã-Bretanha, e John Tate, dos Estados Unidos, dois matemáticos de renome mundial, "[...] como se a glória da descoberta já não fosse suficiente"(SAUTOY, 2007, p.23). Esse prêmio em dinheiro é um incentivo dado pelo Institudo Clay de Matemática idealizado por Landon T. Clay (DEVLIN, 2008).

O Instituto Clay de Matemática (ICM) foi fundado em setembro de 1998, por Landon T. Clay, um empresário de Boston, e sua esposa, Lavinia D. Clay. O objetivo primordial do ICM é desenvolver e difundir o conhecimento matemático para informar os matemáticos e outros cientistas sobre as novas descobertas no campo da Matemática, e incentivar os alunos a seguirem carreiras como matemáticos e reconhecer realizações extraordinárias e avanços na investigação matemática (CMI, 1998).

Landon Clay foi graduado na faculdade de Harvard e teve uma carreira distinta como um homem de negócios. Ele também dedicou uma grande demanda de pensamentos e energia para causas filantrópicas, dentre elas Arqueologia, Astronomia, Biologia e Matemática. Ele acredita que a Ciência e a Matemática fizeram enormes contribuições para o bem-estar e a compreensão do mundo e da humanidade, e que o papel da Matemática será cada vez mais importante para o futuro (CMI, 1998).

Diferentemente da lista dos 23 problemas de Hilbert, que tratavam de situações mais conceituais, não priorizando fórmulas e equações e lidando com ideias e teoria abstrata, essa nova lista foi mais conservadora, pelo fato dos enunciados serem mais claros e diretos, para assim conceder o prêmio de um milhão de dólares ao descobridor (SAUTOY, 2007).

A pessoa que solucionar um desses problemas terá que obedecer a algumas regras impostas pelo Instituto Clay de Matemática e pelo Conselho Científico Consultivo (CCC) para conseguir receber o prêmio. Apenas os diretores do ICM serão capazes de fazer o pagamento do prêmio.

Primeiramente, quem apresentar uma solução para um desses problemas terá que publicar em um meio de publicação científica de Matemática que a qualifica, e ser aceita pela comunidade matemática. Após dois anos da publicação, o CCC irá investigar através de um comite específico. Em caso satisfatório irá indicar aos diretores do ICM o(s) nome(s) do(s) que irão receber o prêmio. No caso da solução ser apresentada através de contra-exemplos, outras regras específicas deverão ser obedecidas (INSTITUTE, 2006).

As ideias e a enumeração da lista dos Problemas do Milênio aparecerão neste texto conforme (DEVLIN, 2008). Caso haja necessidade de incluir outras referências, estas serão citadas no decorrer do texto. Segue a lista:

1 Hipótese de Riemann

  Esse problema será abordado no quarto capítulo, sendo o objeto central de estudo deste trabalho.

2 A teoria de Yang-Mills e a hipótese do intervalo de massa

  Diz respeito aos recentes avanços da Física, na busca de resposta para uma das mais antigas pergunta: de que matéria somos feitos? Essa busca em compreender o universo e suas origens faz da solução do segundo problema do milênio um grande passo no entendimento e na resposta dessa questão.

  Responder a pergunta referente às origens da matéria desde muito cedo fez com que pessoas se dedicassem nesse intuito. Os antigos acreditavam que tudo era gerado a partir de quatro elementos básicos: terra, fogo, água e ar.

  Platão associou os cinco sólidos regulares da geometria grega clássica, o tetraedro, cubo, octaedro dodecaedro e icosaedro, como sendo as peças associadas a cada um dos quatro elementos da natureza, deixando o dodecaedro como a forma do universo inteiro.

No final do século XIX surge uma teoria referente à composição da matéria composta de átomos. Essas ideias traziam a imagem do átomo como sendo pequenos sistemas solares em que o núcleo representava o sol e os elétrons seriam os planetas.

Embora tal representação do átomo seja usada didaticamente até os dias de hoje, no âmbito científico teve vida curta. A teoria que substituiu a imagem do átomo como sistemas solares foi a Teoria Quântica, surgida em 1920, mostrando que o comportamento da matéria só pode ser descrito matematicamente pela Teoria das Probabilidades. De início, foi criticada por Albert Einstein, que disse que "Deus não joga aos dados com o universo". Atualmente a Teoria Quântica vem revelando que tudo no universo consiste em minúsculas dobras e ondulações no espaço-tempo.

Na busca pelo entendimento das origens e funcionamento do universo surgem duas teorias, a Teoria da Relatividade, de Einstein, que descreve o universo em escala astronômica, e a Teoria Quântica que faz a mesma coisa, porém em escala subatômica. Ambas as teorias funcionam muito bem, entretanto se contradizem.

O Santo Graal da Física está em desenvolver uma Grande Teoria Unificada (GTU) que una essas duas teorias, sendo que essa busca permanece até os dias de hoje. Um dos mais conceituados físicos da atualidade nessa pesquisa é Edward Witten, do Instituto de Estudos Avançados, em Princenton, New Jersey.

Witten acredita que as respostas referentes à unificação das teorias e o entendimento da origem do universo dependem da Matemática. Muitas das teorias que nascem na Física são explicadas através da Matemática. Isso aconteceu com os estudos de Newton referentes ao Cálculo Diferencial e Integral, em relação ao qual a Matemática demorou mais de duzentos anos para se colocar em dia.

Com isso, o segundo Problema do Milênio - A Teoria de Yang-Mills - é um passo inicial para compreensão da GTU, em que a Hipótese do Intervalo de Massa é um problema matemático particular dentro da Teoria de Yang-Mills, porém a Matemática que permeia tais ideias permanece muito incompleta.

Ninguém ainda foi capaz de resolver as equações de Yang-Mills, nem mesmo escrever uma solução geral. Tem-se então uma teoria mais precisa já desenvolvida, com relação a esse assunto, mas possui equações que ninguém consegue escrever ou resolver matematicamente.

Para Witten, a compreensão das ciências da natureza sempre foi um grande desafio para a Matemática, e lamenta que muitas das leis usadas pelos físicos para compreender o universo ainda permanecem inacessíveis matematicamente.

Diante disso, Arthur Jaffe, na época diretor do Instituto Clay, disse que escolheram esse problema para a lista dos Problemas do Milênio porque a solução marcará o início de uma nova Matemática com ligações no entendimento do universo.

3 O Problema P versus NP

O P versus NP trata de problemas cujas respostas podem ser verificadas em tempo polinomial, que não possam ser resolvidos diretamente, sem se ter um candidato à solução em tempo polinomial.

Esse problema é encontrado na Complexidade Computacional, que é um ramo da Matemática Computacional que estuda a eficiência de algoritmos. Existem alguns problemas que, se forem resolvidos através de um algoritmo computacional, demoram anos. Isso mostra que o algoritmo é ineficiente.

Temos então (MALAGUTTI; PITÁGORAS, 2002):

> "Para medir a eficiência de um algoritmo frequentemente usamos o tempo teórico que o programa leva para encontrar uma resposta em função dos dados de entrada. Este cálculo é feito associando-se uma unidade de tempo para cada operação básica que o procedimento executa. Se a dependência do tempo com relação aos dados de entrada for polinomial, o programa é considerado rápido. Se, entretanto, a dependência do tempo for exponencial o programa é considerado lento."

Para entender o contexto em que surgem os problemas de dependência exponencial será relatado o Problema do Caixeiro Viajante, introduzido na década de 1930 pelo matemático Karl Menger.

Em resumo, o problema trata de um vendedor que sai de uma cidade A para visitar outras n cidades e volta para cidade A utilizando o menor caminho possível.

Para visitar três cidades, ele terá que verificar seis casos possíveis $ABCDA$, $ABDCA$, $ACBDA$, $ACDBA$, $ADBCA$ e $ADCBA$, que nada mais é que 3!, em que B, C e D são as cidades a serem visitadas.

Porém, para visitar 25 cidades, o que não é um número muito grande de cidades, o Caixeiro Viajante terá aproximadamente $25! \simeq 1,55 \cdot 10^{25}$ casos, sendo um número assombroso, tornando ineficiente para qualquer computador executar esse tipo de tarefa devido à demanda de tempo muito grande.

O Problema do Caixeiro Viajante é apenas um exemplo clássico desse tipo de problema, e hoje são conhecidos milhares, que surgem dentro de vários contextos.

A Tabela 1 a seguir faz um comparativo de tempo necessário para resolver problemas de dependência polinomial e de dependência exponencial, sendo resolvidos por um computador capaz de executar um milhão de operações aritméticas elementares por segundo.

Dep.	Tamanho dos dados: N				
	10	20	30	40	50
N	$1 \cdot 10^{-5}s.$	$2 \cdot 10^{-5}s.$	$3 \cdot 10^{-5}s.$	$4 \cdot 10^{-5}s.$	$5 \cdot 10^{-5}s.$
N^2	$1 \cdot 10^{-4}s.$	$4 \cdot 10^{-4}s.$	$9 \cdot 10^{-4}s.$	$1,6 \cdot 10^{-3}s.$	$2,5 \cdot 10^{-3}s.$
N^3	$1 \cdot 10^{-3}s.$	$8 \cdot 10^{-3}s.$	$2,7 \cdot 10^{-2}s.$	$6,4 \cdot 10^{-2}s.$	$1,25 \cdot 10^{-1}s.$
2^n	0,001 s.	1 s.	17,19 min.	12,2 dias	35,7 anos
3^n	0,059 s.	58 min.	6,5 anos	3855 séculos	$2 \cdot 10^8$ séculos

Tabela 1: Tempo necessário para um computador resolver um problema

E para compreender melhor esse problema, necessário se faz abordar as definições da classe P e NP (MALAGUTTI; PITÁGORAS, 2002; WIKIPÉDIA, 2014):

> **Definição:** A classe de algoritmos P é formada pelos procedimentos para os quais existe um polinômio $p(n)$ que limita o número de passos do processamento se este for iniciado com uma entrada de tamanho n.
>
> **Definição:** A classe dos problemas NP é aquela composta por problemas que podem ser verificados em tempo polinomial por uma máquina de Turing determinística.

O conceito de NP é puramente teórico, pois trabalha através da ideia de resolver o problema usando um computador não-determinísticos, ou seja, que parte da solução correta do problema e verifica em tempo polinomial que a solução é a verdadeira.

Visto que os computadores comuns são tratados por determinísticos, pois eles devem verificar caso a caso, o problema P versus NP surge da impossibilidade de mostrar que um computador comum, operando por algoritmos polinomiais não irá obter o mesmo desempenho de um computador não determinístico. Muitos acreditaram que P e NP são classes distintas de problemas, mas nada foi provado ainda.

Após a publicação de um artigo, Stephen Cook, em 1971, classificou uma grande quantidade de problemas NP em completos, e mostrou que se um problema NP-completo pudesse ser resolvido por um algoritmo em tempo polinomial, todos os problemas NP também poderiam. Uma das aplicações da demonstração desse terceiro problema do milênio, no caso da prova de que P=NP, será na segurança das transações feitas pela internet, pois o que garante essa segurança é a criptografia e está construída em cima de um problema NP (DEVLIN, 2008).

4 As equações de Navier-Stokes

Na busca pela compreensão da Mecânica dos Fluidos, Leonhard Euler, baseando-se nas ideias pertencentes aos trabalhos de Daniel Bernoulli, formulou um conjunto de equações que descrevem o movimento de um fluído sem levar em consideração a viscosidade.

Em 1922, o engenheiro francês, famoso construtor de pontes e conselheiro governamental, Claude-Louis-Marie-Henri Navier, lapidou as equações de Euler acrescentando a variável viscosidade, tornando as equações mais realísticas. Embora o raciocínio de Navier estivesse errado, as suas equações estavam corretas.

Finalmente, com o trabalho do matemático irlandês George Gabriel Stokes, no final do século XIX, os estudos referentes ao movimento do fluídos estavam próximos de serem concluídos, com a publicação das chamadas equações de Navier-Stokes.

Muitas aplicações surgiriam com esses resultados, pois resultaria no melhoramento no desenho de barcos, aviões e até mesmo na Medicina, com relação ao sistema circulatório. O problema é que ninguém conseguiu encontrar uma solução geral dessas equações. Os matemáticos se quer conseguiram mostrar que elas possuem solução, mas como relatado por (DEVLIN, 2008, p.180), “a natureza resolve as equações cada vez que um fluído se move, ...”.

O problema de Navier-Stokes foi resolvido, no caso reduzido de duas dimensões e até mesmo uma parte restrita para três dimensões foi resolvida, porém o caso mais geral está resistindo ao tempo, fazendo alguns matemáticos acreditarem que a solução depende de técnicas genuinamente novas.

5 A conjectura de Poincaré

Henri Poincaré nasceu em Nancy, na França, em 1854. Proveniente de uma família um tanto quanto distinta, desde cedo teve contato com cientistas e intelectuais da época. A preferência pela Matemática e Física o colocou como um dos maiores e mais inovadores que o mundo já conheceu.

Ocupou, em Sorbonne, a cátedra de Física Matemática e Teoria da Probabilidade, onde permaneceu até a sua morte precoce, aos 58 anos. Um de seus feitos foi criar sozinho a Topologia Algébrica.

Devido a sua grande contribuição em diversas áreas das ciências, ele muitas vezes é tido como o último grande universalista da ciência, sendo a única pessoa eleita para todas as cinco seções da Academia das Ciências Francesa: Geometria, Mecânica, Física, Geografia e Navegação (DEVLIN, 2008; O’SHEA, 2009).

O quinto problema do milênio teve origem no ramo da Topologia, que nasceu com estudos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), mas foram os trabalhos de Poincaré que deram os conceitos e métodos que guiariam essa disciplina pelos anos seguintes.

A Topologia trata principalmente de objetos de três ou mais dimensões. No entanto, é necessário o entendimento da Topologia bidimensional para compreender o que se encontra por trás dessa conjectura.

Na Topologia bidimensional é necessária a compreensão e o estudo de superfícies como o toro, esfera, e superfícies mais complexas como a garrafa de Klein, esta última, originária da Faixa de Möbius.

Na busca por classificar essas superfícies, e superfícies de maiores dimensões, Poincaré questionou sobre uma propriedade chamada de contratibilidade dos laços. Essa propriedade diz que toda superfície de duas dimensões que possui essa característica é topologicamente equivalente a uma esfera.

A pergunta de Poincaré foi a seguinte: Será que o mesmo acontece para hipersuperfícies, ou seja, se uma hipersuperfície de dimensão três tiver a propriedade contratibilidade dos laços, essa hipersuperfície é equivalente topologicamente a uma hiperesfera de dimensão três? (DEVLIN, 2008).

A demonstração para dimensões maiores que quatro foi feita pelo matemático americano Stephen Smale, no ano de 1960. Para a dimensão quatro outro americano, Michael Freedman, fez a demonstração em 1981. Porém, a conjectura original, que era para dimensão três, continuava em aberto, e por isso foi incluída na lista dos Problemas do Milênio pelo Instituto Clay.

Eis que em 11 de novembro de 2002, o russo Grigory Perelman disponibilizou um artigo no qual afirmava ter demonstrado tudo sobre o que teria sido conjecturado anteriormente sobre o Fluxo de Ricci.

O mais interessante desse artigo é que nessa demonstração estava entrelaçada a demonstração da Conjectura de Poincaré. Qualquer pessoa teria começado dizendo que tinha resolvido um dos Problemas do Milênio, mas as palavras de Grigory Perelman formavam uma mistura de audácia e modéstia, na qual colocava a demonstração da conjectura de Poincaré em segundo plano.

Depois de alguns anos de avaliações e durante um congresso, em agosto de 2006, na cidade de Madri, foi dado o anuncio que Perelman demonstrou a conjectura de Poincaré, a quem o Instituto Clay premiou com um milhão de dólares, mas Perelman recusou o dinheiro. Este também foi premiado com a medalha Fields, honra equivalente ao prêmio Nobel da Matemática, entretanto, novamente não compareceu para receber o prêmio (O'SHEA, 2009).

6 A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer

Fazendo uso na década de 1960 do computador mais poderoso da época, os matemáticos britânicos Brian Bich e Peter Swinnerton-Dyer formularam a conjectura que, se verdadeira sua solução, terá ramificações por várias áreas da Matemática.

A conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer trata de curvas elípticas. Desde 1950, os matemáticos perceberam a relação que tais curvas tem com a Teoria dos Números, Geometria e a Criptografia. Esse problema se encontra debaixo de uma grande quantidade de Matemática avançada.

De uma maneira bem geral, Birch e Swinnerton-Dyer começaram a indagar sobre certas curvas elípticas e encontrar pontos cujos coeficientes são números racionais. Nessa tarefa, tentaram um modo de contar o número de pontos racionais sobre uma curva elíptica, mas, como muitas vezes essas soluções são infinitas, o contar se remete em muitos casos a certo número de subcontagens finitas.

7 A Conjectura de Hodge

Nascido em 1903 em Edimburgo, Escócia, pouco se tem registrado sobre a vida de William Hodge, o matemático que formulou o sétimo Problema do Milênio. As contribuições para Matemática deram no desenvolvimento da relação entre a Geometria, Análise e Topologia. Durante a sua vida foi eleito presidente da Sociedade Matemática de Londres em 1952, e em 1959 foi feito cavaleiro pela Rainha.

A Conjectura de Hodge se encontra imersa em um emaranhado de abstrações matemáticas. Quem for se aventurar na solução desse problema terá que se debruçar e dominar assuntos que poucos matemáticos profissionais no mundo conheçam, tornando a Conjectura de Hodge, de longe, o problema mais difícil de compreensão dessa lista.

Segue a Conjectura de Hodge (DEVLIN, 2008, p.287):

> Seja X uma variedade algébrica projetiva não singular e p um número inteiro positivo. Seja $H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{alg} \subset H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ o subespaço dos cociclos algébricos, isto é, o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado pelas classes fundamentais de subvariedades algébricas de codimensão p em X. A conjectura de Hodge afirma que podemos "'calcular"o subespaço $H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{alg}$ usando teoria de Hodge, especificamente, que $H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{alg} = H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X,\mathbb{Q})$.

Uma das aplicações está em estabelecer uma ligação fundamental entre a Geometria Algébrica, Análise e Topologia.

4 A HIPÓTESE DE RIEMANN

Sem dúvida, a pessoa que resolver a Hipótese de Riemann será lembrado não só por ter ganhado o prêmio de um milhão de dólares, como também por apresentar uma solução para o problema mais importante da história dessa ciência, pois existe uma estreita ligação entre a resposta e o comportamento dos números primos. Por isso, a Hipótese de Riemann também é chamada de “o Cálice Sagrado da Matemática”(SAUTOY, 2007, p.10). Muitos dos relatos desse capítulo seguem apoiados nas ideias de (SAUTOY, 2007), outras referências usadas serão citadas ao longo do texto.

4.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Os números primos despertaram a curiosidade humana desde muito cedo. O registro mais antigo referente ao conjunto de números é um pedaço de osso que data de cerca de 6500 a.C., conhecido como osso de Ishango que foi encontrado na África Central Equatorial, em 1960. Tal pedaço contém entre as colunas de entalhes, uma coluna com os números 11, 13, 17 e 19.

Não se sabe ao certo se esse registro representa o conhecimento sobre o conceito de números primos, porém é no mínimo curioso. Os chineses deixaram indícios de que, por volta de 1000 a.C., já tinham desenvolvido um método físico de entender o que torna esses números diferentes dos compostos.

Somente com os gregos, por volta do século III a.C., que o matemático Eratóstenes desenvolveu e registrou um mecanismo, ainda hoje muito usado de forma didática, chamado de Crivo de Eratóstenes.

Ao observar a sequência de primos $2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots$, vê-se que para uma ciência que busca encontrar padrões, ter até então uma lista caótica de números primos fez com que, por mais de 2000 anos, matemáticos dedicassem a vida estudando esses números.

Como questionado por (SAUTOY, 2007, p.47) “Como poderíamos mapear um caminho por esse emaranhado caótico, encontrando algum padrão que pudesse prever seu comportamento?"Alguns matemáticos chegam a acreditar que "[...] essa procissão dos primos se assemelha muito mais a uma sucessão de números aleatórios que a um belo padrão ordenado."(SAUTOY, 2007, p.15).

Desde Euclides de Alexandria, em III a.C., ficou formalizado que o conjunto dos primos é infinito. Para demonstrar esse fato ele supôs que a quantidade de números primos era finita, e que com isso existiria um número p que seria o maior número primo. Seja $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p$ um número obtido pela multiplicação de todos os primos até p.

Tomando o número $N+1 > p$, Euclides notou que esse número teria que ser primo, pois deixaria resto ao dividir por qualquer um dos primos conhecidos. Com esse brilhante argumento, Euclides mostrou que o conjunto dos números primos é infinito, mesmo não sabendo como seriam gerados (DEVLIN, 2008).

Muitos séculos se passaram sem muitos avanços sobre o entendimento com relação aos números primos. Nos trabalhos de Pierre de Fermat (1601-1665) chegou-se a conjecturar que a fórmula $2^{2^n}+1$ sempre geraria números primos. Tal suposição é errada, pois o quinto número de Fermat é divisível por 641.

Outro que nessa época se dedicou à Matemática foi um monge francês, Marin Mersenne (1588-1648), que mantinha contato com Fermat através de cartas. Mersenne também chegou a uma fórmula, $2^n - 1$, e afirmou que se n fosse primo essa fórmula teria uma quantidade infinita de resultados primos. Tal conjectura permanece sem resposta até hoje.

O início do século XVIII é marcado com o nascimento de um ilustre matemático suíço, Leonhard Euler (1707-1783). Desde muito cedo disputado pelas academias de toda Europa, preferiu em 1726 aceitar a oferta e se juntou a Academia de Ciências de São Petesburgo na Rússia. Dando ênfase ao valor da prova e apoiado em seus métodos, deu a Teoria dos Números uma contribuição muito grande a qual culminou em novas janelas sobre o entendimento dos números primos.

Euler, em uma de suas correspondências com Chistian Goldbach, foi desafiado a provar que todo número par pode ser expresso pela soma de dois números primos. Na época, consideravam-se o número 1 como sendo primo, porém hoje a reformulação do problema é "todo número inteiro par maior que cinco pode ser escrito como a soma de três número primos", conhecido hoje como a Conjectura forte de Goldbach e ainda não foi resolvido.

Nos estudos de Euler surge uma função que irá desempenhar um papel muito importante, 100 anos depois, nos trabalhos de Riemann.

Um grande contribuidor para a Matemática e Astronomia foi Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Nascido em uma família de trabalhadores na Alemanha, desde criança tinha uma grande habilidade no trato com os números. Alguns títulos foram dados a ele, "menino-prodígio"e "gênio matemático", devido ao seu brilhantismo.

Teve seus estudos financiados por nobres da região, recebendo o equivalente hoje a bolsas de estudos. Frequentou a Academia de Ciências de Elite em Brunswick (1792-1795) e posteriormente a Universidade de Gottingen (1795-1798), no reino de Hânover. A pedido do duque de Brunswick-Wolfenbuttel, que subsidiava seus estudos, defendeu sua tese de doutorado no ano de 1799, na Universidade de Helmstedt.

Nos anos seguintes Gauss recebeu ofertas de trabalho e, em 1805, aceitou trabalhar na Universidade de Gottingen, a qual prometeu construir para ele um observatório e lhe foi oferecido um assistente talentoso (O'SHEA, 2009).

Gottingen é uma cidade pacata nas colinas da Baixada Saxônica, contendo uma vila medieval cercada de muralhas que ainda hoje mantém aspectos originais. A vida universitária de Gottingen era autossuficiente, mesmo que de início a universidade tivesse o estudo de Teologia como principal. Logo ocorrem mudanças no cenário acadêmico, quando Gauss assume o observatório e os cargos de professor de Astronomia. A cidade se torna famosa também pelo estudo de ciência (SAUTOY, 2007).

Uma das grandes contribuições de Gauss está na criação da Teoria dos Números como disciplina própria, a qual gostava de chamar de "Rainha da Matemática". Ele considerava os números primos com papel principal. A criação da calculadora-relógio contribuiu muito para o entendimento sobre os números, e hoje, temos essa teoria estudada em Aritmética com o nome de classes modulares.

A Figura 2 é uma fografia de Gauss (O'SHEA, 2009, p.94).

Figura 2: Carl Friedrich Gauss

Gauss, aos 15 anos, ganhou de presente um livro sobre logaritmos, cuja capa era estampada com números primos. Coincidência ou não, percebeu que os números primos e os logaritmos pareciam estar relacionados.

A ideia de Gauss não buscava uma fórmula que resultasse na sequência dos primos, mas sim em observar de como esse padrão acontece. Ele usou a função $\pi(N)$, que fornece a quantidade de números primos menores que N. Por exemplo, $\pi(100) = 25$, pois existem 25 números primos menores que 100.

E fez isso ao construir e analisar uma tabela semelhante a essa, que fornece a média de números primos que se deve contar até encontrar o próximo número primo (SAUTOY, 2007):

N	$\pi(N)$	Média
10	4	2,5
10^2	25	4,0
10^3	168	6,0
10^4	1 229	8,1
10^5	9 592	10,4
10^6	78 498	12,7
10^7	664 579	15,0
10^8	5 761 455	17,4
10^9	50 847 534	19,7
10^{10}	455 052 511	22,0

Tabela 2: Média de números primos que deve-se contar até encontrar o próximo primo.

Ao fazer um estudo dessa tabela, Gauss observou que na terceira coluna que se trata da média, de uma linha para a outra, tende a somar sempre aproximadamente $2,3$ a medida que aumentamos uma unidade no expoente das potências da primeira coluna. Como Gauss havia feito recentes estudos, as funções que transformam multiplicações em somas são as logarítmicas. Assim, ele percebeu a relação existente entre os números primos e tais funções.

Gauss sabia que a base da função logarítmica candidata a estar relacionada com a sequência de números primos não seria 10, pois a medida que multiplicava por 10 os números da primeira coluna ele aumentava aproximadamente $2,3$ na terceira coluna. O passo seguinte foi analisar a densidade $D_n = \pi(N)/N$ com que os números primos surgem, como a Tabela 3 (DEVLIN, 2008).

Estudos a respeito dos logaritmos fizeram com que Gauss percebesse que a base era e, conhecida como base dos logaritmos naturais. Os logaritmos naturais também são nomeados logaritmo neperiano em homenagem a John Napier (1550-1617), matemático que inseriu esse

N	$\pi(N)$	D_n
10	4	0,4
10^2	25	0,25
10^3	168	0,168
10^4	1 229	0,1229
10^5	9 592	0,09592
10^6	78 498	0,078498
10^7	664 579	0,0664579
10^8	5 761 455	0,05761455
10^9	50 847 534	0,050847534
10^{10}	455 052 511	0,0455052511

Tabela 3: Densidade de números primos

base. A definição do número e pode ser dado pelo seguinte limite (SBM, 2006):

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Voltado para a descoberta sobre a possível ligação entre os logaritmos naturais e os números primos, Gauss pode conjecturar que a medida que aumentamos o número N a densidade com que se tem primos tende a $1/\ln N$. De fato, Gauss notou que a probabilidade com que se tem primos menores que N é o número irracional $1/\ln N$.

O resultado enunciado é conhecido hoje como o Teorema dos Números Primos, e foi demonstrado não por Gauss, mas pelo francês Jacques Hadamard e o belga Charles de la Vallée, em trabalhos independentes, usando métodos matemáticos um tanto quanto sofisticados (DEVLIN, 2008). Segue um dos enunciados do Teorema dos Números Primos dado pelo limite (OBM, 2011):

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\pi(N)}{N/\ln N}\right) = 1$$

Como aparece em (DEVLIN, 2008), a ideia de números inteiros surge entre cerca de 5000 a 8000 a.C.. No entanto o primeiro teorema a respeito da distribuição dos números primos surge apenas depois dos trabalhos de Gauss, e para que esse resultado fosse enunciado, necessitou-se da astúcia desse matemático em perceber a relação existente entre a sequência dos números primos e os logaritmos.

A figura 3 mostra o gráfico da função $\pi(N)$ em uma escala menor, evidênciando o aspecto aleatório com que surgem os números primos, através dos saltos. Ao tomar uma escala maior, como aparece na Figura 4 (SAUTOY, 2007, p.60), se torna visualmente uma curva um tanto quanto suave.

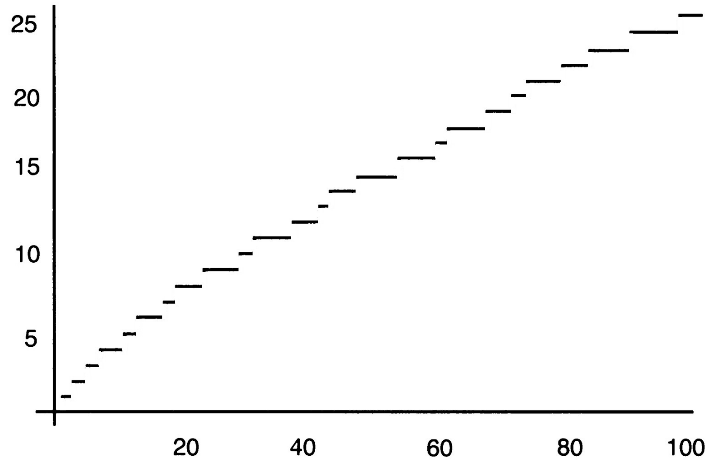

Figura 3: Gráfico da função $\pi(N)$

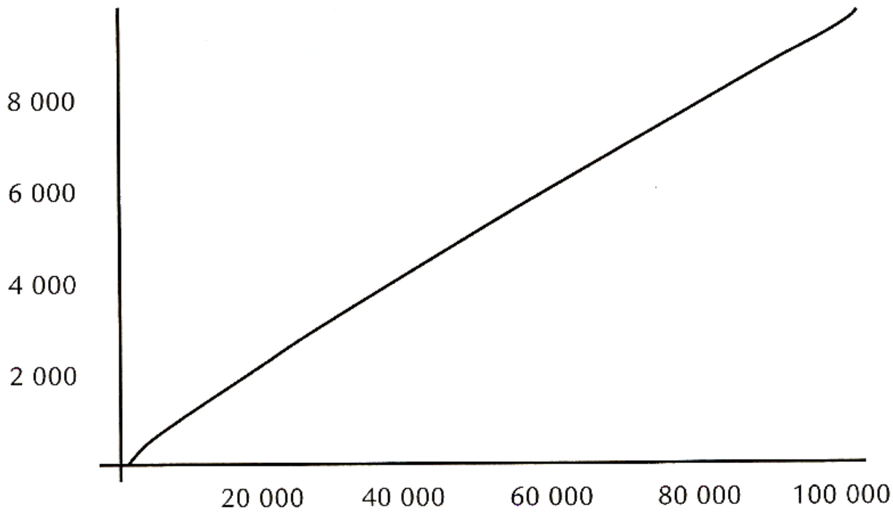

Figura 4: Gráfico da função $\pi(N)$ ampliado

O interessante também está na aparência com que a representação gráfica da função $\pi(N)$, representada pela Figura 4, se assemelha a uma curva que lembra a função $\ln(x)$, com a qual Gauss conjecturou ter relações.

Embora o resultado sobre a densidade dos números primos conjecturado por Gauss estivesse certo, ele mesmo percebeu que necessitava de aprimoramentos. "Segundo a previsão de Gauss, havia aproximadamente $N/\ln N$ primos até N. Embora fosse uma estimativa próxima, descobriu-se que ela se desvia gradualmente do número real de primos à medida que o valor de N se eleva"(SAUTOY, 2007, p.62).

Um dos matemáticos da época a fazer estudos referentes à Teoria do Números foi o francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Seis anos após os estudos iniciais de Gauss, a respeito da relação entre os números primos e os logaritmos, Legendre também mostra essa conexão. O crédito sobre a descoberta da relação acabou sendo dada a Gauss, após analisados seus artigos e correspondências, em 1849, isso já após a sua morte.

Na busca por encontrar uma estimativa mais próxima a respeito da verdadeira quantidade de números primos, Legendre fez o seguinte aperfeiçoamento:

$$\begin{array}{cc} \text{Estimativa de Gauss} & \text{Estimativa de Legendre} \\ \dfrac{N}{\ln N} & \dfrac{N}{\ln N - 1,08366} \end{array}$$

Esse número incorporado por Legendre deu uma aproximação melhor à estimativa de Gauss, pois para os cálculos feitos na época davam um resultado aparentemente mais preciso. Embora números como $1,08366$ são aceitos com facilidade em outras ciências, os matemáticos achavam que existiria algo mais estético que esse número para descrever o comportamento do primos. “[...] o termo de correlação, $1,08366$, era um tanto feio, fazendo com que os matemáticos acreditassem que deveria existir algo mais natural para apreender o comportamento dos números primos”(SAUTOY, 2007, p.64).

Gauss refinou ainda mais sua estimativa com relação à quantidade exata de números primos. Partindo do raciocínio do cálculo de probabilidades, tem-se que a esperança de se obter cara no lançamento de uma moeda, durante N lançamentos é dado por:

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{2}}_{N \quad vezes} = N \cdot \frac{1}{2}$$

Porém, a moeda lançada para se obter números primos é viciada, tendo como resultado favorável a probabilidade de $1/\ln N$. Por exemplo, a chance de um número ser primo até 100 corresponde a $1/\ln 100$, que é aproximadamente $1/5$. Com isso, a previsão de se ter números primos até um número N é:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+....+\frac{1}{\ln N}$$

Gauss criou assim, uma função conhecida como integral logarítmica, denotada por $Li(N)$ e como aparece definida em (RIBENBOIM, 2001, p.139) por:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Com essa nova abordagem, Gauss consegue uma nova estimativa bem mais próxima da quantidade verdadeira de números primos até N. A Tabela 4 mostra o comparativo entre $\pi(N)$, $N/\ln N$ e $Li(N)$ para valores entre 10^8 e 10^{20} (RIBENBOIM, 2001):

N	$\pi(N)$	$\left[\dfrac{N}{\ln N}\right] - \pi(N)$	$[Li(N)] - \pi(N)$
10^8	5 761 455	-332 774	754
10^9	50 847 534	-2 592 592	1 701
10^{10}	455 052 511	-20 758 030	3 104
10^{11}	4 118 054 813	-169 923 160	11 588
10^{12}	37 607 912 018	-1 416 705 193	38 263
10^{13}	346 065 536 839	-11 992 858 452	108 971
10^{14}	3 204 941 750 802	-102 838 308 636	314 890
10^{15}	29 844 570 422 669	-891 604 962 453	1 052 619
10^{16}	279 238 341 033 925	-7 804 289 844 393	3 214 632
10^{17}	2 623 557 157 654 233	-68 883 734 693 929	7 956 589
10^{18}	24 739 954 287 740 860	-612 483 070 893 537	21 949 555
10^{19}	234 057 667 276 344 607	-5 481 624 169 369 961	99 877 775
10^{20}	2 220 819 602 560 918 840	-49 347 193 044 659 702	222 744 643

Tabela 4: Comparativo entre $\pi(N)$, $N/\ln N$ e $Li(N)$

O interessante com relação à função $Li(N)$ é que até quantidades bem elevadas de números N, a quantidade de números primos que ela gera parece ser sempre maior que a de $\pi(N)$, como mostra o gráfico representado pela Figura 5 (SANTOS, 2009, p.3).

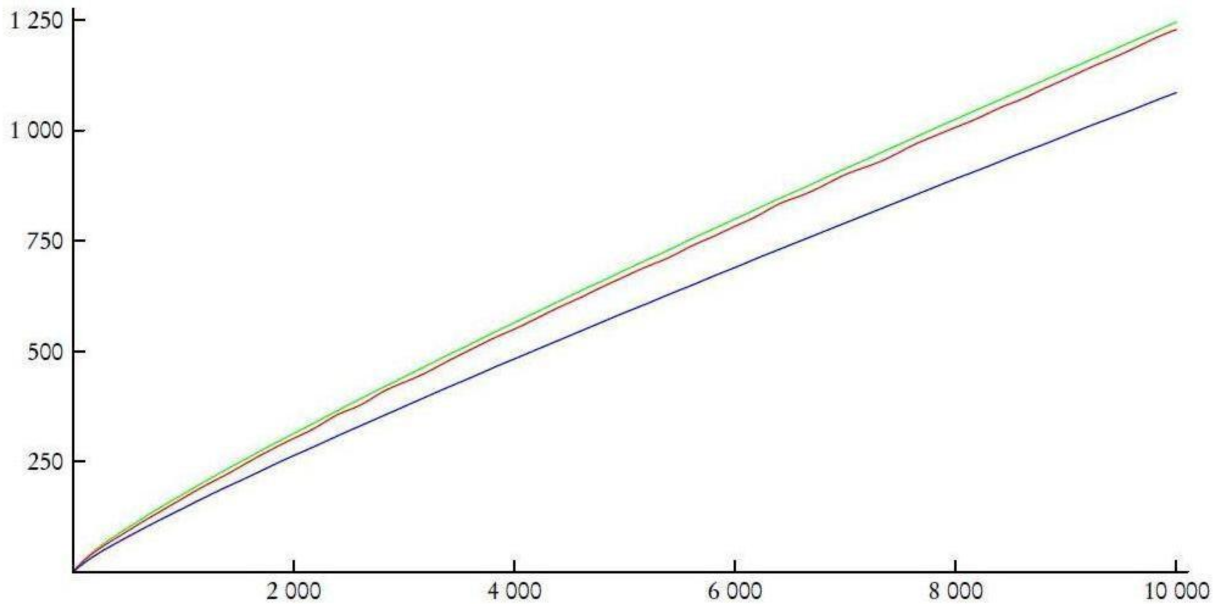

Figura 5: Gráficos $\pi(N)$ (vermelho), $Li(N)$ (verde) e $N/\ln N$ (azul)

Esse comportamento levou Gauss a conjecturar que, para todo número N vale

$$Li(N) > \pi(N),$$

ou seja, que a função $Li(N)$ sempre iria ultrapassar a função $\pi(N)$. Pela primeira vez uma conjectura feita por ele embasado na análise intuitiva de valores até 3000000, resultou estar equivocada. (RIBENBOIM, 2001):

> Por outro lado, Riemann e Gauss acreditavam que $Li(N) > \pi(N)$ para N suficientemente grande. Pelas tabelas conhecidas na época, a desigualdade valeria. Mais tarde, em 1914, Littlewood mostrou que a diferença $Li(N) - \pi(N)$ mudava de sinal uma infinidade de vezes nos pontos $N_o < N_1 < ... < N_n < ...$, e N_n tende para o infinito.

Isso mostra um dos motivos pelos quais, diferente das outras ciências, a Matemática não se satisfaz com resultados obtidos através de repetições ou mesmo por generalizações precipitadas (SAUTOY, 2007).

Gauss, através das tentativas em entender o caos aparente na sequência dos números primos, deu um passo muito importante nessa direção, deixando para as futuras gerações conjecturar o que seria o cume dessa subida.

Em 1826, nasce Bernhard Riemann, no vilarejo de Quickborn, reino de Hanôver na Alemanha. Foi uma pessoa sossegada, tímida e com vários problemas de saúde. Uma das poucas pessoas que ganhou sua confiança e que participou de sua vida foi Richard Dedekind, que escreveu uma biografia sobre sua vida dez anos após a sua morte (DEVLIN, 2008). Na Figura 6 segue a imagem de Riemann (O'SHEA, 2009, p.137).

Figura 6: Bernhard Riemann

Filho de um pastor luterano de família pobre, foi educado pelo pai devido a morte da mãe, quando ele tinha seis anos. Da infância até os quatorze anos estudou em Hanôver. Logo após, frequentou o colegial numa cidade próxima de sua casa (O'SHEA, 2009). O diretor do colégio em que Riemann estudou o encorajou a se dedicar a Matemática dando o livro "Teoria do Números de Legendre'"de 900 páginas. "Riemann devolve-o em menos de uma semana, dizendo: Este livro é espantoso; decorei-o"(DEVLIN, 2008, p.41).

Vinte anos decorreram entre o nascimento e a formação de Riemann. Foi para a universidade de Gottingen, no ano de 1846, com o intuito de estudar Teologia seguindo a vontade do pai. Logo de início, Riemann matriculou-se também em cursos de Matemática. Foi quando pediu a seu pai para mudar de curso e se dedicar a Matemática, no que foi autorizado nesse mesmo ano. Ali permanecera um ano, até esgotar todos os recursos que pudera aproveitar em Gottingen. Mudou-se para Berlim, onde passou os anos acadêmicos de 1847 a 1849 (O'SHEA, 2009).

Berlim atraía estudantes de Matemática de toda a Europa, pois tinha famosos professores de Matemática, e como aponta (O'SHEA, 2009, p.106) "O cálculo havia sido aplicado a vários novos sistemas, com resultados extraordinários. Parecia que cada dia se descobriam novas funções com admiráveis propriedades. Ali, Riemann dominou a Análise Complexa e aprendeu muita coisa nova em Matemática".

Em 1849, Riemann voltou à Gottingen para elaborar e defender sua tese de doutorado, sob a orientação de Gauss. Nessa época, Gauss escreveu uma carta a um amigo sobre a descoberta da relação entre os números primos e os logaritmos, mas Riemann na ocasião pensava escrever uma tese seguindo a revolução Matemática que vinha chegando em seu auge, pensando de maneira mais conceitual e deixando um pouco de lado as equações e a manipulação de fórmulas (SAUTOY, 2007; DEVLIN, 2008). Gauss classificou a tese de Riemann em 1851 como a demonstração de uma mente criativa, com originalidade e verdadeiramente Matemática.

Na sua única passagem pela Teoria dos Números em 1859, mais especificamente a respeito da Teoria dos Números Analítica, Riemann baseando-se nos trabalhos de Johann Dirichlet, que usa ferramentas do Cálculo Infinitesimal para resolver situações a cerca dos números inteiros e positivos, publicou um artigo intitulado (DEVLIN, 2008, p.46) "Sobre o número de primos menores que uma dada quantidade". Acredita-se ter escrito em honras à Gauss que é considerado o pai da Teoria dos Números (DEVLIN, 2008).

Nesse artigo, Riemann discute vários métodos a serem utilizados na compreensão dos números primos, e comenta sobre os resultados de uma equação que afirma ter sido incapaz de resolver. Em uma carta a Karl Weierstrass (1815-1887) ele reconhece a necessidade de amadurecer o artigo.

Segue um trecho da carta (DEVLIN, 2008, p.46):

> Claro que seria desejável ter uma demonstração rigorosa deste fato [a Hipótese de Riemann]; entretanto, após algumas tentativas não muito sérias, em vão, pus de parte temporariamente a procura de uma demonstração, uma vez que parece desnecessária para o objetivo seguinte da minha investigação.

Na solução dessa equação que surge o problema que hoje vale um milhão de dólares. A Figura 7 mostra a primeira das oito páginas do artigo original de Riemann (CMI, 1998).

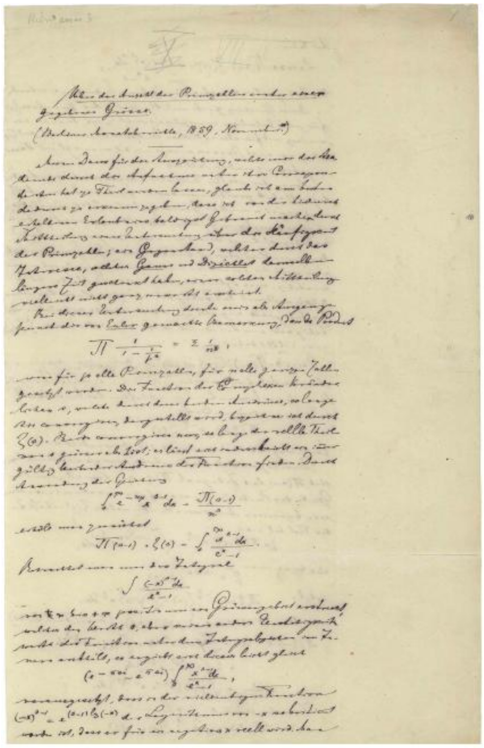

Figura 7: Sobre o número de primos menores que uma dada quantidade

4.2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA HIPÓTESE DE RIEMANN

Para entender a Hipótese de Riemann, precisa-se conhecer os conceitos matemáticos surgidos a priori. A equação que Riemann a que se referiu começa com conceitos matemáticos da época de Pitágoras.

Nos cursos de graduação em matemática trabalha-se as séries, em especial a série harmônica, que recebe esse nome por estar relacionada a harmonia da música descoberta por Pitágoras ao golpear uma urna vazia, e depois golpeando novamente com determinadas frações de água. Essa série é a da soma dos inversos dos números inteiros positivos, ou seja:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Essa série é divergente pelo seguinte fato:

$$
\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots \\
> & \ 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots \\
= & \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.
\end{aligned}
$$

Ou seja, a soma dos inversos dos números inteiros positivo aumenta infinitamente.

No século XVII, com trabalhos de Pietro Mengoli e de Jacob Bernoulli, que se começa a estudar a série (SANTOS, 2009):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{5^x}+\frac{1}{6^x}+\cdots$$

Para $x=1$ tem-se a série harmônica. Para qualquer $x>1$, a série converge. Quando $x=2$, pergunta-se qual o resultado de,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$$

já que a série é convergente, dando origem ao problema conhecido como O Problema de Basileia (GAYO, 2013).

Em 1735, Euler trata a série como uma função, chamando-a de *função zeta* (DEVLIN, 2008):

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Na busca por calcular $\zeta(2)$, isto é,

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

chegou a dizer que só conseguir valores aproximados para $\zeta(2)$. Eis que Euler percebe no caos resultante da soma dessa série, e a relação com o valor de π.

Assim motrou que

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Esse resultado que Euler descobriu de forma criativa (GAYO, 2013), “[...] um dos cálculos mais intrigantes de toda a Matemática, e ela encantou inteiramente a comunidade da época”(SAUTOY, 2007, p.89).

Nos trabalhos de Euler (RIBENBOIM, 2001), também encontram-se os resultados de $\zeta(2k)$, para todo inteiro $k \geq 1$. Por exemplo:

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Qual a relação entre a função $\zeta(x)$ e os números primos? Para responder essa pergunta é necessário entender como Euler demonstrou que existem infinitos números primos (RIBENBOIM, 2001) e como reescreveu a função $\zeta(x)$ dependendo apenas dos números primos (AGUILERA-NARRAVO et al., 1999). Essas ideias estão descritas a seguir.

Primeiramente, dado p um número primo qualquer, Euler analisou o comportamento das séries geométricas de razão $1/p$ e primeiro termo 1. Como $1/p < 1$, todas essas séries são convergentes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^n} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/p}.$$

As primeiras dessas séries são

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2}$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/3}.$$

Multiplicando, membro a membro, essas últimas duas igualdades, tem-se

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{1 - 1/2} \cdot \frac{1}{1 - 1/3}.$$

O primeiro termo é a soma dos inversos de todos os números naturais da forma $2^{k_1}3^{k_2}$ (com $k_1, k_2 \geq 0$ e inteiros), cada um sendo contado somente uma vez, pois a expressão de cada número natural, como produto de primos, é única.

A demonstração de Euler para a infinitude dos números primos está baseada nessa ideia. Suponha que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sejam todos os números primos. Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, tem-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^n} = \frac{1}{1 - 1/p_i}.$$

Multiplicando, membro a membro, essas r igualdades, obtém-se

$$\prod_{i=1}^{r}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^n}\right)=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-1/p_i}$$

e o primeiro termo, após efetuadas as operações, é a soma dos inversos dos números que podem ser expressos na forma $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r}$ (com $k_1,k_2,\dots,k_r \geq 0$ e inteiros). Mas, o Teorema Fundamental da Aritmética garante que todo número natural pode ser expresso como esse produto de fatores primos de maneira única (a menos de permutações), logo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-1/p_i}.$$

Como o primeiro termo da igualdade é infinito (pois a série harmônica é divergente), o resultado implica o segundo termo não pode ser finito. Isso mostra que o conjunto dos números primos é infinito.

Usando essa mesma ideia, Euler mostrou a relação entre a função $\zeta(x)$ e os números primos. Primeiramente, para $x>1$, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{nx}}$$

é convergente, pois é uma série geométrica de razão $1/p^x<1$. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{nx}}=\frac{1}{1-1/p^x}.$$

Agora, ao tomar os r primeiros números primos, considerou o produto a seguir:

$$\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-1/p_i^x}.$$

Por exemplo, para $r=2$ tem-se

$$\left(\frac{1}{1-1/p_1^x}\right)\left(\frac{1}{1-1/p_2^x}\right)=1+\frac{1}{(p_1)^x}+\frac{1}{(p_2)^x}+\frac{1}{\left(p_1^2\right)^x}+\frac{1}{(p_1p_2)^x}+\frac{1}{\left(p_2^2\right)^x}+\cdots,$$

ou seja

$$\left(\frac{1}{1-1/p_1^x}\right)\left(\frac{1}{1-1/p_2^x}\right)=\sum_{k_1,k_2\geq 0}\frac{1}{\left(p_1^{k_1}p_2^{k_2}\right)^x}.$$

Por indução, Euler obteve o seguinte produto:

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{1-1/p_i^x} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r \geq 0} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}\right)^x}.$$

Finalmente, ao considerar todos os números primos ($r \to \infty$), Euler mostrou que

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-1/p^x} = \sum_{k_j \geq 0} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r} \ldots\right)^x},$$

onde $\mathbb{P}$ é o conjunto dos números primos.

Porém, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, qualquer número natural pode ser decomposto em produto de fatores primos na forma $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m} \ldots$ (com $k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots \geq 0$ e inteiros). Assim, Euler mostrou que

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-1/p^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

ou seja,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\dfrac{1}{p^x}}. \tag{1}$$

Este resultado, devido a Euler, mostra a notável relação entre a função $\zeta(x)$ e os números primos.

O artigo que Riemann escreve é uma tentativa em demonstrar o Teorema dos Números Primos, conjecturado por Gauss e Legendre. Embora nesse artigo Riemann não tenha conseguido seu objetivo, seu trabalho trouxe as ferramentas necessárias para a demonstração desse teorema por Hadamard e de la Vallée Poussin em 1896 (DEVLIN, 2008).

Na buscar por melhorar a aproximação da integral logarítmica $Li(N)$ de Gauss da verdadeira quantidade de números primos $\pi(N)$, Riemann, em seu artigo, exprimiu uma nova função conhecida como a função de Riemann (RIBENBOIM, 2001, p.143):

$$R(N) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} Li(N^{1/m}), \tag{2}$$

em que $\mu(m)$ é a função de Möbius, definida por:

$$\mu(m) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ tiver algum fator primo repetido na sua fatoração.} \\ (-1)^k, & \text{se } m \text{ for o produto de } k \text{ primos distintos.} \end{cases}$$

Essa nova aproximação apresenta uma diferença ainda menor da verdadeira quantidade de números primos, como mostra a Tabela 5 (RIBENBOIM, 2001, p.152)

N	$\pi(N)$	$[Li(N)]-\pi(N)$	$[R(N)]-\pi(N)$
10^8	5 761 455	754	97
10^9	50 847 534	1 701	-79
10^{10}	455 052 511	3 104	-1828
10^{11}	4 118 054 813	11 588	-2318
10^{12}	37 607 912 018	38 263	-1476
10^{13}	346 065 536 839	108 971	-5773
10^{14}	3 204 941 750 802	314 890	-19 200
10^{15}	29 844 570 422 669	1 052 619	73 218
10^{16}	279 238 341 033 925	3 214 632	327 052
10^{17}	2 623 557 157 654 233	7 956 589	-598 255
10^{18}	24 739 954 287 740 860	21 949 555	-3 501 366
10^{19}	234 057 667 276 344 607	99 877 775	23 884 333
10^{20}	2 220 819 602 560 918 840	222 744 643	-4 891 825

Tabela 5: Comparativo entre $\pi(N)$, $Li(N)$ e $R(N)$

Para a quantidade de números primos até 10^{20}, o erro apresentado pela equação de Riemann é de 0,0022 %, enquanto o erro dado pela equação de $Li(N)$ é de 1 %. Mesmo assim, ambas ainda apresentam erros.

Riemann trouxe também, nesse artigo, uma nova maneira de investigar a função $\zeta(x)$, ao definir essa função para todo número complexo $z = a + bi$ em que a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$, com $z \neq 1$.

Essa ideia de inserir números complexos em funções reais, definindo uma função real de variável complexa, teve seu início na época de Euler (DEVLIN, 2008; SANTOS, 2009).

Riemann, ao estudar o comportamento da função zeta definida para todo número complexo z , usando as descobertas feitas durante seu anos de estudos em Berlim, consegue, através de um mecanismo conhecido hoje como extensão analítica, definir uma equação funcional de $\zeta(z)$ para todo o números complexo $z \neq 1$(SAUTOY, 2007). O processo para chegar e essa equação funcional está além do escopo deste trabalho. Segue, no entanto, um exemplo de como é feita a extensão analítica de funções.

Seja a série de potências definida para todo número complexo z

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} = z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots$$

A série é convergente para todo número complexo pertencente ao conjunto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, definindo então uma função analítica no disco $|z| < 1$.

Seja $g(z)$ a função dada por:

$$g(z) = \frac{1}{1-z}$$

em que $g(z)$ é definida para todo número complexo pertencente ao conjunto $E = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$. Neste caso

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} = z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = \frac{1}{1-z} \quad \text{em} \quad D$$

e

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{em} \quad E.$$

Tem-se que $f(z)$ e $g(z)$ coincidem na interseção entre D e E. Então $g(z)$ é uma extensão de $f(z)$. Mais do que isso, é uma extensão analítica de $f(z)$ para todo número complexo z pertencente à $E - D$ (AVILA, 2013). "Isto é importante pois, embora uma função possa ter muitas extensões diferentes, essa extensão é única quando preserva a analiticidade [...]"(AVILA, 2013, p.179).

Nesse exemplo clássico de extensão analítica, a extensão analítica de $f(z)$ é facilmente feita, pois essa série tem a soma determinada de maneira simples, no disco de convergência $|z| < 1$, o que não acontece em muitos casos.

A função zeta definida para um número real, ou para um número complexo, é um exemplo de série cuja soma não é conhecida facilmente. No seu artigo de oito páginas, Riemann define a função zeta, conhecida a partir de então como função zeta de Riemann (SANTOS, 2009, p.4):

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{para} \quad \mathrm{Re}(z) > 1, \tag{3}$$

em que $\mathrm{Re}(z)$ é a parte real de um número complexo z.

Riemann também encontra uma extensão analítica para a função zeta $\zeta(z)$ para todo número complexo $z \neq 1$, com a seguinte equação funcional (AGUILERA-NARRAVO et al., 1999, p.40):

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\zeta(1-z)\Gamma(1-z)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right),$$

em que $\Gamma(1-z)$ é a função gama calculada para o número complexo $1-z$.

Através dessa equação funcional é possível analisar os resultados da função zeta para valores que antes não eram possíveis pela função dada pela equação (3) (SANTOS, 2009; RIBENBOIM, 2001).

Analisando os zeros da função zeta, ou seja, tal que $\zeta(z) = 0$, Riemann descobre uma estreita ligação entre os resultados dessa equação e a função densidade dos números primos D_n. Com isso, $\zeta(z) = 0$ para todo número inteiro par e negativo, $\zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = ... = \zeta(-2n) = ... = 0$ e esses são chamados de zeros triviais. Pode-se pensar que $\zeta(z) = 0$ para todo número par e positivo, mas pela função definida pela equação (3) isso não acontece.

Riemann mostrou ainda que a função $\zeta(z)$ tem infinitos zeros complexos diferentes dos zeros triviais e fez a seguinte conjectura (DEVLIN, 2008):

"todos os zeros não triviais de $\zeta(z)$ têm a forma $z = 1/2 + bi$, com b real"

e essa é a **Hipótese de Riemann**.

Tal afirmação continua sem ser provada até hoje e vale um milhão de dólares para quem demonstrá-la(DEVLIN, 2008). Riemann conjectura também que todos os zeros não triviais da função $\zeta(z)$ estão sobre uma região denominada *faixa crítica* dada por $0 < Re(z) < 1$. Jacques Hadamard foi a primeiro a provar a veracidade dessa afirmação, em 1893.

Em termos geométricos, a Hipótese de Riemann diz que todos os zeros não triviais da função zeta estão localizados na reta em que $Re(z) = 1/2$, conhecida como linha crítica, como mostra a representação gráfica Figura 8:

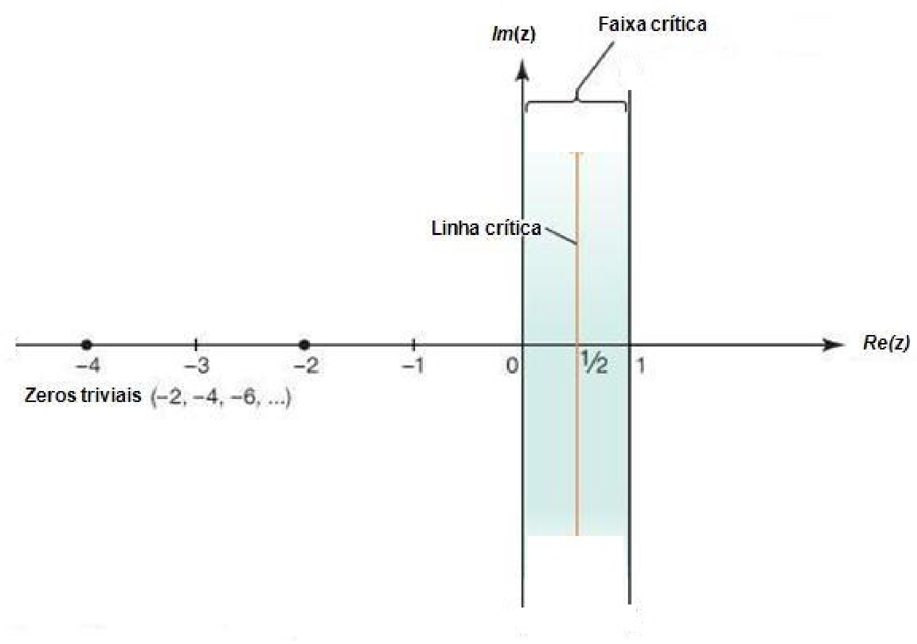

Figura 8: Linha crítica de Riemann

Os primeiros 1,5 trilhões de zeros não triviais da função $\zeta(z)$, calculados com o uso de computador, estão sobre a linha crítica (DEVLIN, 2008). Por curiosidade, a Tabela 6 apresenta os primeiros 30 zeros não triviais da função $\zeta(z)$, primeiros no sentido de estarem mais próximo do eixo real. Seja ρ_n o n-ésimo zero não trivial da função $\zeta(z)$. Assim (RIBENBOIM, 2001):

$$\rho_n = \frac{1}{2} + it_n, \quad t_n > 0.$$

n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	$14,134725\ldots$	11	$52,970321\ldots$	21	$79,337375\ldots$
2	$21,022040\ldots$	12	$56,446248\ldots$	22	$82,910381\ldots$
3	$25,010858\ldots$	13	$59,347044\ldots$	23	$84,735493\ldots$
4	$30,424876\ldots$	14	$60,831779\ldots$	24	$87,425275\ldots$
5	$32,935062\ldots$	15	$65,112544\ldots$	25	$88,809111\ldots$
6	$37,586178\ldots$	16	$67,079811\ldots$	26	$92,491899\ldots$
7	$40,918719\ldots$	17	$69,546402\ldots$	27	$94,651344\ldots$
8	$43,327073\ldots$	18	$72,067158\ldots$	28	$95,870634\ldots$
9	$48,005151\ldots$	19	$75,704691\ldots$	29	$98,831194\ldots$
10	$49,773832\ldots$	20	$77,144840\ldots$	30	$101,317851\ldots$

Tabela 6: Primeiros 30 zeros não triviais da função $\zeta(z)$

Riemann consegue, através de uma análise intuitiva da paisagem geométrica, que só poderia ser representada na quarta dimensão, perceber que esses zeros não triviais e os números primos tem uma ligação. Essa paisagem vista por ele é criada ao inserir números imaginários na variável da função $\zeta(z)$ e descobre-se uma ligação entre os pontos em que a função $\zeta(z) = 0$ e os números que foram objetos iniciais estudados através da Equação (1) de Euler, ou seja, os números primos, como relatado em (SAUTOY, 2007, p.99):

> Se esses dois elementos, os números primos e os zeros, geravam a mesma paisagem, Riemann sabia que deveria haver alguma conexão entre eles. Era o mesmo objeto, construído de duas maneiras diferentes. A genialidade de Riemann revelara que esses elementos eram os dois lados da mesma equação.

Ao fazer essa análise, Riemann encontra não somente uma maneira de prever quantos primos existem entre os números de 1 até N, como feito por Gauss. Ele percebe uma maneira exata para determinar a quantidade de números primos até N, usando os zeros não triviais da função $\zeta(z)$.

Riemann, quando busca por diminuir a diferença entre $Li(N)$ de Gauss e a verdadeira quantidade de números primos, encontra a função $R(N)$ já relatada e dada pela Equação (2) determinando uma grande melhoria, como mostra a Tabela 5, porém esse função ainda contém erros.

Acredita-se que os erros serão eliminados após o conhecimento das regiões sem zeros da função $\zeta(z)$, gerando assim melhores estimativas de funções ligadas à distribuição dos números primos.

Por outro lado, o conhecimento dos zeros da função zeta sobre a linha crítica conduz a melhores estimativas do termo erro (RIBENBOIM, 2001).

A Figura 3 representa o gráfico que conta os números de primos $\pi(N)$. A função de Riemann $R(N)$ é representada por um gráfico liso. A Figura 9 apresenta essas duas funções:

O desafio de Riemann foi em passar de um gráfico contínuo para uma função escalonada, e fez isso usando os zeros não triviais da função zeta. Com o conhecimento dos primeiros 30 zeros de ζ usados na função $R(x)$, o aspecto contínuo do gráfico da função de Riemann é perdido e tende a ficar semelhante ao gráfico da função $\pi(x)$, como apresentado pela Figura 10:

A descoberta de cada novo zero da função zeta, e inseridos esses resultados na função de Riemann, fará no gráfico uma nova ondulação. Riemann percebeu que se fosse acrescido todos os zeros, o gráfico de $R(x)$ terá exatamente o mesmo aspecto de $\pi(x)$, com isso o erro apresentado no refinamento de sua função é extinto, e descobre o padrão nos números primos.

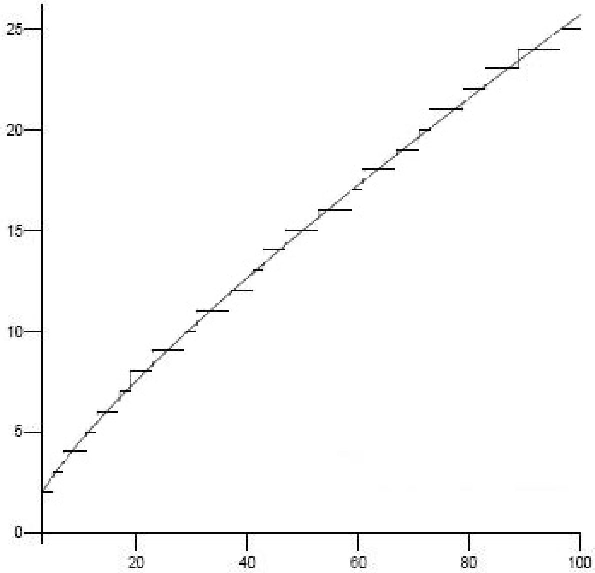

Figura 9: $\pi(x)$ **e** $R(x)$

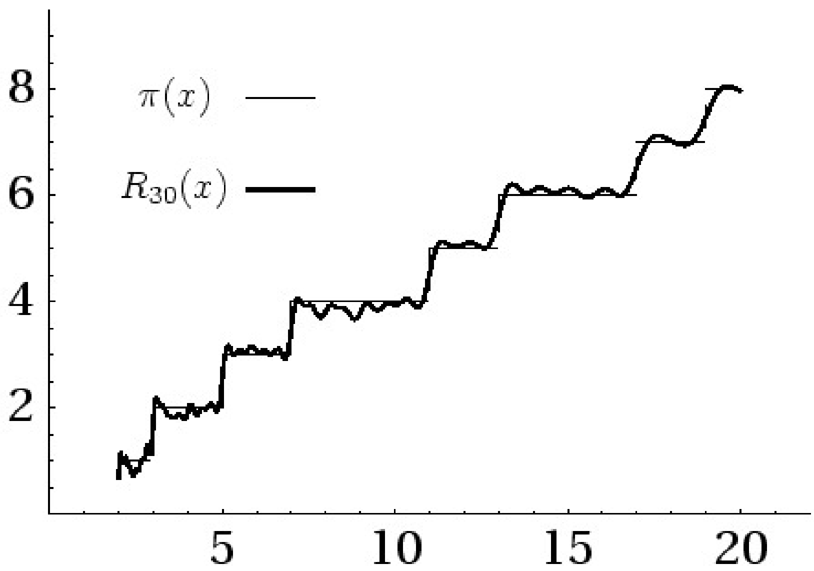

Figura 10: Inserção dos primeiros 30 zeros na função $R(x)$

5 CONCLUSÃO

De tempos em tempos, são repercutidos fatos de grande relevância para Matemática nos mais diversos meios de comunicação. Algo amplamente divulgado recentemente, foi a premiação de um brasileiro com a medalha Fields. Também é anunciado a solução de algum problema importante, entretanto, ao questionar um grupo de professores da Educação básica sobre a existência desses problemas, ou mesmo verificar os temas abordados em momentos de formação continuada, nenhum texto que trate desses temas é encontrado.

Diante do apresentado, foi proposto por este trabalho fazer um relato sobre os problemas da Matemática, resolvidos ou não, em especial a Hipótese de Riemann, também não resolvido, tornando os conceitos que envolvem esse problema acessíveis a professores de Matemática da Educação Básica, para que possam divulgar as ideias nas suas classes quando forem trabalhar alguns conteúdos relacionados.

O método usado foi a busca de textos, livros e artigos que falassem a respeito do problema, no qual pudessem ser usados como referência na elaboração deste estudo. Parte das referências encontradas tratavam o problema de maneira bem superficial, e outras de maneira acadêmica.

A maior dificuldade sentida, e o ponto chave desse trabalho, foi fazer com que essas duas abordagens pudessem ser aproveitadas, para que a explanação não fosse muito densa nem muito resumida, afim de contribuir na construção de um texto que divulgasse a Matemática por trás desse problema, e que se tornasse acessível a um professor da Educação básica, escrito também por um professor da Educação Básica.

A divulgação da Matemática é um ponto interessante para despertar o interesse de estudantes desde cedo, por isso é necessário que isso seja feito na Educação Básica. Sabe-se que a disciplina de Matemática faz a divulgação dessa ciência através do currículo escolar, porém todos os conteúdos trabalhados nesse nível de ensino foram construídos a alguns séculos atrás. Assim, quando professores conhecerem um pouco a respeito de problemas que de certa forma movem as pesquisas nos dias atuais, poderão, mesmo que de maneira sucinta, relatar aos estudantes temas da Matemática atual. Além disso, o prêmio para quem solucionar esse problema, a Hipótese de Riemann, é um incentivo a mais.

A ideia inicial desse trabalho era fazer a divulgação de todos os Sete Problemas do Milênio, mas, pelo tema ser extenso, foi necessário delimitar em um único problema. Fica como sugestão para quem quiser se aventurar por esse tema de divulgar a Matemática fazer o mesmo com esses e com outros problemas da Matemática atual, que são tão interessantes quanto a Hipótese de Riemann, mas que pouco se sabe a respeito deles na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

AGUILERA-NARRAVO, V. C. et al. A função zeta de Riemann. **Revista Ciências Exatas e Naturais - UNICENTRO/PR**, Guarapuava, 1999.

AVILA, G. **Variáveis Complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CMI. **The Clay Mathematics Institute: Overview and History**. Boston: CLAY MATHEMATICS INSTITUTE, 1998. Disponível em: <http://www.claymath.org//about-cmi/clay-mathematics-institute-overview-and-history>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2014.

DEVLIN, K. **Os Problemas do Milênio**. 1. ed. Lisboa: Gradiva, 2008.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 1. ed. Campinas: Unicamp, 2004.

GAYO, J. O problema que tornou Euler famoso. **Dissertação de Mestrado em Matemática em Rede Nacional**, Curitiba, 2013.

HILBERT, D. Mathematical problems. **Bulletin of American Mathetematical Society**, v. 33, n. 4, p. 437–479, 1902.

INSTITUTE, C. M. **The Millennium Prize Problems**. 1. ed. Cambridge: American Mathematical Society, 2006.

MALAGUTTI, P. L. A.; PITÁGORAS, H. **P versus NP**. São Carlos: UFSCar, 2002.

OBM. **O Teorema dos Números Primos**. Rio de Janeiro: OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMáTICA, 2011. Disponível em: <http://www.obm.org.br/export/sites/default/semana-olimpica/docs/2011/E-tengan-primos.pdf>. Acesso em: 25 de março de 2014.

O'SHEA, D. **A Solução de Poincaré**. 1. ed. Rio de Janeiro: Record, 2009.

RIBENBOIM, P. **Números Primos: mistérios e recordes**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

SANTOS, J. C. A hipótese de Riemann - 150 anos. **Gazeta de Matemática**, v. 1, n. 158, p. 8–14, 2009.

SAUTOY, M. du. **A música dos números primos: A história de um problema não resolvido na matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

SBM. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

WIKIPÉDIA. **P versus NP - Wikipédia, a enciclopédia livre**. 2014. [Online; acesso em 06 de novembro de 2014]. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP>.