

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MÁRIO VINÍCIUS TOREGIANI

**OTIMIZAÇÃO DE PERFIL ESTRUTURAL QUANTO AO  
CARREGAMENTO DE FLAMBAGEM E FREQUÊNCIA NATURAL**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CURITIBA

2012

MÁRIO VINÍCIUS TOREGIANI

**OTIMIZAÇÃO DE PERFIL ESTRUTURAL QUANTO AO  
CARREGAMENTO DE FLAMBAGEM E FREQUÊNCIA NATURAL**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira, Dra. Eng.

CURITIBA

2012

## TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa “OTIMIZAÇÃO DE PERFIL ESTRUTURAL QUANTO AO CARREGAMENTO DE FLAMBAGEM E FREQUÊNCIA NATURAL”, realizada pelo aluno MÁRIO VINÍCIUS TOREGIANI, como requisito parcial para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Prof.<sup>a</sup> Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira, Dra. Eng.  
Damec - UTFPR  
Orientador

Prof. Ivan Moura Belo, Dr. Eng.  
Damec - UTFPR  
Avaliador

Prof. Marco Antônio Luersen, Dr. Eng.  
Damec – UTFPR  
Avaliador

Curitiba, 20 de outubro de 2012.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela conquista, saúde e pela perseverança.

À professora Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira pela sua dedicação, paciência e horas despendidas na orientação e desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores Ivan Moura Belo e Marco Antônio Luersen, membros integrantes da banca examinadora, pelas sugestões e correções do trabalho.

Aos meus pais, Mário e Marilda, pelo amor e apoio incondicional.

À minha irmã, família e amigos, que sempre estiveram presentes em minha vida, seja pela torcida ou pelas simples palavras de incentivo.

## RESUMO

TOREGIANI, Mário Vinícius. Otimização de perfil estrutural quanto ao carregamento de flambagem e frequência natural. 2012. 87 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) – Programa de Graduação em Engenharia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

Um dos principais objetivos do projetista estrutural é desenvolver projetos robustos e de baixo custo. A carência de técnicas eficientes para otimizar estruturas quanto ao carregamento de flambagem e máxima frequência fundamental foi a motivação para o presente projeto. Devido à elevada importância e também aplicabilidade no âmbito da engenharia estrutural, um pórtico plano foi escolhido como modelo estrutural de análise. O desafio foi conseguir um ponto ótimo simples que simultaneamente satisfizesse as duas funções objetivo, flambagem e frequência, que em geral, é de difícil obtenção. Por se tratar de duas funções objetivo, um processo de otimização multiobjetivo foi necessário. Como técnica de otimização multiobjetivo foi adotada a estratégia minimax, que permite obter a melhor estrutura para a pior condição de carregamento. Quanto às variáveis de projeto, foram escolhidas as espessuras das seções transversais das colunas e da viga. Os resultados obtidos mostraram que a estratégia de otimização adotada foi satisfatória, pois foi possível determinar a configuração de espessuras que resultasse em uma estrutura ótima onde um critério é otimizado sem detrimento de outro.

**Palavras-chave:** Otimização Estrutural Paramétrica. Estratégia Minimax. Método dos Elementos Finitos (MEF). Método de Powell.

## ABSTRACT

TOREGIANI, Mário Vinícius. Optimization of structural profile regarding the buckling load and natural frequency. 2012. 87 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Mecânica) – Programa de Graduação em Engenharia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

One of the main objectives of the structural designer is to develop robust and low cost projects. The lack of efficient techniques to optimize structures on the buckling load and natural frequency was the motivation for this project. Due to the high importance and applicability in the context of structural engineering, a plane frame was chosen as the structural model of analysis. The challenge was getting a simple optimal point that simultaneously satisfies the two objective functions, buckling and frequency, which is generally difficult to obtain. In the case of two objective functions, a multiobjective optimization process is necessary. As multiobjective optimization technique, it was adopted the minimax strategy, which gives the best structure for the worst loading condition. Regarding the design variables, it was chosen the thicknesses of the cross section of columns and beams. The results showed that the optimization strategy adopted was satisfactory, because it was possible to determine the thicknesses that resulted in an optimal structure where a criterion is optimized without the detriment of another.

**Keywords:** Structural Size Optimization. Minimax Strategy. Finite Element Method (FEM). Powell Method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Pórtico plano a ser otimizado .....	18
Figura 2: Abordagens da otimização estrutural .....	22
Figura 3: Fluxograma geral da estratégia de minimização sem restrição .....	24
Figura 4: Método da Seção Áurea.....	25
Figura 5: Algoritmo da seção áurea .....	27
Figura 6: Aproximação por partes de uma função.....	31
Figura 7: Representação de um domínio bidimensional por uma coleção de triângulos e quadriláteros .....	33
Figura 8: Cinemática das teorias das vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko .....	35
Figura 9: Superposição do elemento de barra com o elemento de viga para se obter o elemento de pórtico plano .....	36
Figura 10: Cinemática do elemento de pórtico plano baseado na teoria de viga de Timoshenko.....	36
Figura 11: (a) Viga elástica delgada carregada por uma “força seguidora”; (b) Viga elasto-plástica carregada por uma força $P$ em uma direção fixa; (c) Tensão de contato em uma esfera de rolamento.....	38
Figura 12: Situações de equilíbrio: (a) indiferente; (b) instável; (c) estável .....	39
Figura 13: Coluna biarticulada submetida ao carregamento $P$ .....	40
Figura 14: Etapas da metodologia.....	43
Figura 15: Subetapas da implementação computacional do modelo matemático .....	44
Figura 16: Subetapas da validação dos resultados .....	45
Figura 17: Subetapas da implementação da otimização .....	46
Figura 18: Pórtico plano com dimensões de interesse.....	48
Figura 19: Representação das condições de contorno quanto ao deslocamento .....	48
Figura 20: Discretização da estrutura em análise .....	50

Figura 21: Elemento de Pórtico Plano Discretizado .....	51
Figura 22: Condições de contorno de deslocamento para o elemento 1 .....	56
Figura 23: Detalhe das regiões de aplicação das cargas nodais concentradas .....	57
Figura 24: Direção e sentidos das cargas atuantes no pórtico plano .....	58
Figura 25: Algoritmo do programa desenvolvido .....	58
Figura 26: Pórtico plano discretizado no Ansys para validação dos resultados .....	60
Figura 27: Resultado da validação para o problema de flambagem .....	61
Figura 28: Resultado da validação para o problema de frequência fundamental.....	62
Figura 29: Algoritmo do Método de Powell.....	65
Figura 30: Casos de carregamento para a análise 1.....	68
Figura 31: Dependência da flambagem e da frequência com <b>h1</b> para cada caso de carregamento da análise 1 .....	69
Figura 32: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 1 .....	70
Figura 33: Função desempenho para a análise 1 .....	72
Figura 34: Casos de carregamento para a análise 2.....	73
Figura 35: Dependência da flambagem e da frequência com <b>h1</b> para cada caso de carregamento da análise 2.....	74
Figura 36: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 2 .....	75
Figura 37: Casos de carregamento para a análise 3.....	76
Figura 38: Dependência da flambagem e da frequência com <b>h2</b> para cada caso de carregamento da análise 3.....	77
Figura 39: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 3 .....	78
Figura 40: Casos de carregamento para a análise 4.....	79
Figura 41: Dependência da flambagem e da frequência com <b>h1</b> para cada caso de carregamento da análise 4.....	80
Figura 42: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 4 .....	81



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Dados geométricos do problema	47
Tabela 2: Propriedades do Aço A36	48
Tabela 3: Dados de entrada para validação do modelo matemático computacional	59
Tabela 4: Comparativo entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido em ambiente MATLAB e os obtidos no programa ANSYS	62
Tabela 5: Grupos de carregamentos	67
Tabela 6: Resultados do processo de otimização da análise 1	72
Tabela 7: Resultados do processo de otimização da análise 2	76
Tabela 8: Resultados do processo de otimização da análise 3	79
Tabela 9: Resultados do processo de otimização da análise 4	82

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

<b><i>MEF</i></b>	Método dos Elementos Finitos
<b><i>PMEP</i></b>	Princípio da Mínima Energia Potencial
<b><i>FD</i></b>	Função Desempenho
<b><i>RV</i></b>	Restrição de Volume

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Capítulo 2

### Seção 2.1.4

$X^0$	Conjunto inicial de variáveis de projeto
$q$	Número da iteração
$X_p$	Variável de projeto
$\alpha^*$	Define a distância a ser percorrida em uma determinada direção
$S^q$	Vetor da direção de busca

### Seção 2.1.5

$F(X)$	Função unimodal
$X_l$	Limite inferior
$X_u$	Limite superior
$F_l$	Valor da função unimodal avaliada em $X_l$
$F_u$	Valor da função unimodal avaliada em $X_u$

### Seção 2.1.6

[U]	Matriz Hessiana
$\{S\}^{i,j}$	Direções de busca

### Seção 2.1.7

$\{\beta\}$	Casos de carregamento
$\{h\}$	Variáveis de projeto

### Seção 2.2

$\pi$	Energia potencial
$\sigma_{ij}$	Componentes de tensão
$\varepsilon_{ij}$	Componentes de deformação

$b_i$	Componentes de forças de campo
$t_i$	Componentes de forças de superfície
$u_i$	Deslocamentos
$\Omega$	Domínio de interesse
$\Gamma$	Contorno do domínio de interesse

### **Seção 2.3.1**

$\varphi_i$	Funções de aproximação
-------------	------------------------

### **Seção 2.3.2**

$E$	Módulo de elasticidade
$I$	Momento de inércia
$v(x)$	Função que representa o deslocamento da viga
$g(x)$	Carga distribuída

### **Seção 2.3.3**

$\Psi$	Rotação em torno do eixo y
$G$	Módulo de cisalhamento
$K_s$	Coefficiente de correção de cisalhamento
$A$	Área da seção transversal

### **Seção 2.3.4**

$u_i, v_i, \psi_i$	Graus de liberdade do elemento de pórtico plano
$\gamma_{xy}$	Deformação transversal devido ao cisalhamento
$\bar{U}, \bar{V}, \bar{\Psi}$	Componentes da equação cinemática do elemento de pórtico plano

### **Seção 2.4**

$\epsilon_{xx}$	Componente de deformação longitudinal
$\epsilon_{xx\text{linear}}$	Componente de deformação longitudinal linear
$\epsilon_{xx\text{não-linear}}$	Componente de deformação longitudinal não linear

$\gamma_{xy}$	Componente de deformação angular
$\gamma_{xy\text{linear}}$	Componente de deformação angular linear
$\gamma_{xy\text{não-linear}}$	Componente de deformação angular não linear

### Seção 2.5

$[K]$	Matriz de rigidez
$[KG]$	Matriz de rigidez geométrica
$\{q_\lambda\}$	Autovetor que descreve o modo de flambagem
$\lambda$	Autovalor que representa a relação entre a carga crítica e carga aplicada

### Seção 2.6

$\omega_n$	Frequência natural
$k$	Rigidez do corpo
$m$	Massa do corpo
$[M]$	Matriz de massa do sistema
$\{q_\omega\}$	Autovetor que descreve o modo de vibrar

## Capítulo 4

### Seção 4.1

$L$	Comprimento
$b$	Largura da seção transversal
$h_1$	Espessura da seção transversal das colunas
$h_2$	Espessura da seção transversal da viga
$E$	Módulo de elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade do material
$G$	Módulo de cisalhamento transversal
$[M]^e$	Matriz de massa elementar

$[K]^e$	Matriz de rigidez elementar
$[KG]^e$	Matriz de rigidez geométrica elementar
$u_h, v_h, \psi_h$	Deslocamentos elementares aproximados
$\varphi_i$	Funções de interpolação, onde $i$ é o número do nó
$\bar{x}$	Comprimento a partir da origem até um ponto “x” qualquer dentro elemento
$L_e$	Comprimento do elemento finito
$u_i, v_i, \psi_i$	Graus de liberdade do elemento, onde $i$ é o número do nó
$\Omega$	Domínio de interesse
$\{\sigma_T\}$	Tensão em qualquer ponto do corpo
$[E]$	Matriz Constitutiva
$\{\varepsilon\}$	Vetor de deformações
$\{\varepsilon\}^L$	Vetor de deformações lineares
$\{\varepsilon\}^{NL}$	Vetor de deformações não lineares
$\{\sigma_0\}$	Tensões iniciais no corpo
$ngdl$	Número de graus de liberdade por nós
$P_i$	Força nodal aplicada
$\{\varepsilon_{xx}^L\}, \{\gamma_{xy}^L\}$	Componentes de deformação linear
$\{\varepsilon_{xx}^{NL}\}, \{\gamma_{xy}^{NL}\}$	Componentes de deformação não linear
$\{\sigma_{xx_0}\}, \{\tau_{xy_0}\}$	Componentes de tensão pré-flambagem
$\{q\}$	Deslocamentos pré-flambagem
$\{P\}$	Vetor de carregamentos globais aplicados
$EC$	Energia cinética
$\dot{U}, \dot{V}$	Taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo
$\dot{u}_h, \dot{v}_h, \dot{\psi}_h$	Velocidades elementares
$\xi$	Número adimensional que representa a relação entre $\bar{x}$ e $L_e$

$[N_u], [N_v], [N_\psi]$  Vetores com as funções de aproximação

$[M]$  Matriz de massa global

$[K]$  Matriz de rigidez global

$[KG]$  Matriz de rigidez geométrica global

$P1, P2, P3, P4$  Cargas nodais concentradas que atuam no pórtico plano

#### **Seção 4.4**

$\omega_o$  Parâmetro de normalização da frequência

$\phi = FD$  Função de desempenho ou função objetivo

$[H]$  Matriz de armazenamento das direções de busca

$n$  Número de variáveis de Powell

$RV$  Restrição de volume

### **Capítulo 5**

#### **Seção 5.2**

$\lambda$  Autovalor que representa a carga de flambagem

$\omega/\omega_o$  Autovalor que representa a frequência fundamental normalizada

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
1.1	Contexto do Tema	17
1.2	Caracterização do Problema	17
1.3	Objetivos	18
1.4	Justificativa	19
1.5	Conteúdo do Trabalho	20
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>21</b>
2.1	Otimização Estrutural	21
2.1.1	Histórico	21
2.1.2	Abordagens da Otimização Estrutural	21
2.1.3	Definição e conceitos básicos	22
2.1.4	O Processo Iterativo da Otimização	23
2.1.5	Problemas de Otimização Univariáveis	24
2.1.6	Problemas de Otimização Multivariáveis sem Restrição	28
2.1.7	Estratégia Minimax	28
2.2	Princípios e Métodos Variacionais	29
2.3	Método dos Elementos Finitos	30
2.3.1	As características básicas do método	32
2.3.2	Elemento de Viga de Euler-Bernoulli	34
2.3.3	Elemento de Viga de Timoshenko	34
2.3.4	Elemento de Pórtico	35
2.4	Análise Não Linear	37
2.5	Flambagem	39
2.6	Análise Dinâmica: Vibração, Frequência Natural e Ressonância	41
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>43</b>
3.1	Etapas da Metodologia	43
3.1.1	Revisão Bibliográfica	43
3.1.2	Formulação do Problema	44
3.1.3	Implementação Computacional do Modelo Matemático	44
3.1.4	Validação dos Resultados	45
3.1.5	Implementação da Otimização	45
3.1.6	Interpretação e Discussão dos Resultados	46
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO</b>	<b>47</b>
4.1	Dados e Formulação do Problema	47
4.2	Implementação Computacional do Modelo Matemático	49
4.3	Validação dos Resultados	59
4.4	Implementação da Otimização	62
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>67</b>
5.1	Carregamentos	67
5.2	Análises	67
5.2.1	Análise 1	68
5.2.2	Análise 2	73
5.2.3	Análise 3	76
5.2.4	Análise 4	79
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>83</b>
	REFERÊNCIAS	85



# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto do Tema

O projeto estrutural está inserido no contexto da mecânica estrutural, ou ainda, engenharia estrutural, que é uma área da engenharia cujo objetivo é o dimensionamento, verificação e projeto de estruturas através da teoria das estruturas baseando-se na teoria de mecânica dos sólidos.

Estrutura, segundo Sant'Anna (2002), pode ser considerada como uma quantidade de material distribuído sobre um domínio de projeto com a finalidade de suportar cargas estáticas ou dinâmicas, absorver energia e transmiti-las aos apoios sem colapsar. Pode-se acrescentar ainda, que no projeto devem-se prever as máximas deformações admissíveis bem como limites de vibração da estrutura. Então, cabe ao projetista estrutural projetar uma estrutura robusta e preferencialmente de baixo custo.

Dois métodos de projeto, em uma maneira geral, são usados para alcançar o dimensionamento ótimo de uma estrutura. São eles: projeto convencional, que é feito por tentativa e erro baseado na experiência do engenheiro, e o projeto ótimo, que segundo Silva (2002) usufrui de um método matemático de busca sistemática da solução ótima.

## 1.2 Caracterização do Problema

Quando se tem duas ou mais funções objetivo a serem otimizadas, que geralmente são conflitantes, a utilização do processo denominado otimização multiobjetivo faz-se necessário. Através deste processo, há a possibilidade de estabelecer um ponto ótimo que satisfaça todas as funções objetivo.

De acordo com o artigo publicado por Ferreira e Faria (2008) há uma carência de técnicas eficientes capazes de otimizar simultaneamente o carregamento de flambagem e máxima frequência fundamental. Ainda, segundo os autores, é usualmente difícil encontrar um ponto simples (ou variável) que simultaneamente maximiza essas duas funções.

Tendo em vista a carência de técnicas e a dificuldade de obtenção do ponto ótimo, o problema deste projeto consiste na determinação de uma solução ótima para as seguintes funções objetivo: carregamento de flambagem e frequência fundamental, as quais são maximizadas. O pórtico plano representado na Figura 1 é a estrutura de análise.

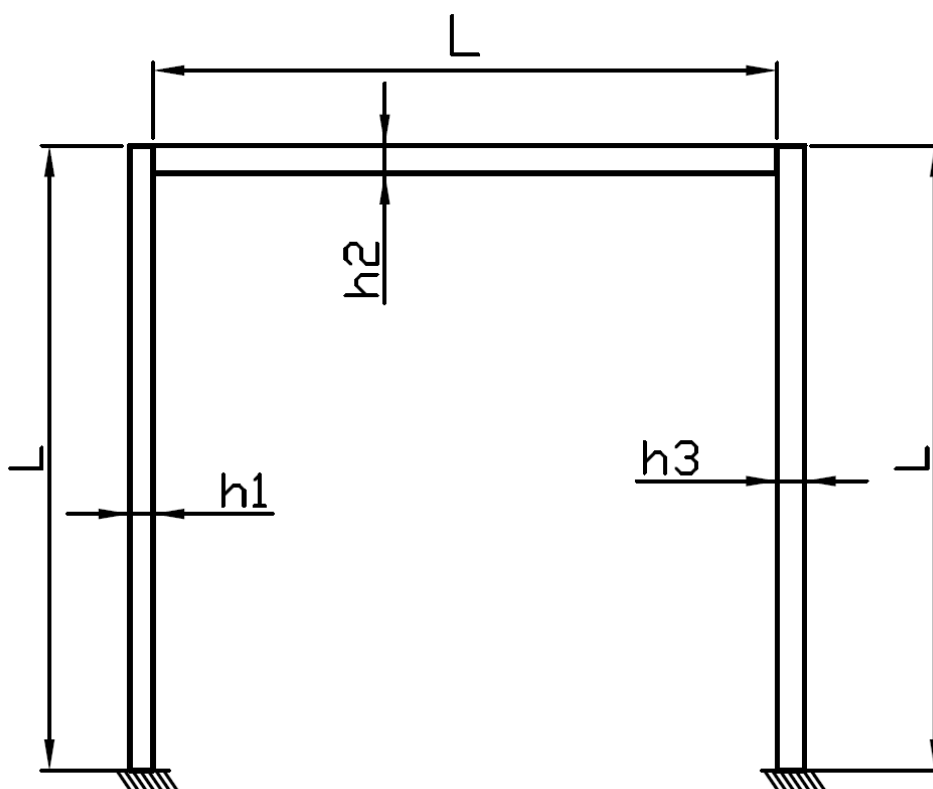


Figura 1: Pórtico plano a ser otimizado  
Fonte: Autoria própria<sup>1</sup>

### 1.3 Objetivos

A tradicional forma empírica do projeto convencional no dimensionamento de estruturas muitas vezes pode não ser satisfatória. Comparativamente com o método de projeto ótimo, aquela, na maioria das vezes, resulta em projetos mais custosos, pelo fato da estrutura final não possuir o menor volume.

---

<sup>1</sup> Todas as figuras, tabelas e quadros que na sequência do trabalho não possuem a designação da fonte de referência, subentende-se que são de autoria própria.

O presente trabalho pretende selecionar um dos métodos de otimização existentes e implementar em ambiente MATLAB uma solução computacional matemática com objetivo de determinar as dimensões ótimas, respeitando determinada restrição de volume pré-estabelecida, para um pórtico plano (Figura 1) capaz de resistir a carregamentos de flambagem e com frequência fundamental apropriada a aplicação. O pórtico é constituído de barras de aço cujos perfis são seções retangulares maciças.

#### 1.4 Justificativa

Pórtico plano pode ser definido como uma estrutura constituída por barras retilíneas ligadas rigidamente entre si. Num pórtico, os carregamentos que agem ou que são transmitidos às vigas superiores são transferidas para os pilares. A análise aproximada de estruturas de edifícios, através de pórticos planos, é uma simplificação bastante interessante do ponto de vista operacional (computacional e análise de resultados), pois além da facilidade de manipulação e entendimento dos resultados, pode auxiliar significativamente a análise estrutural de um edifício (BRANCO, 2002).

A aplicabilidade desse tipo de estrutura bem como sua função estrutural é enorme. Como exemplos de utilização de pórticos, podem-se citar galpões industriais, *pipe racks*<sup>2</sup>, pontes e monovias.

As estruturas metálicas apesar de serem consideradas “obras rápidas” e sustentáveis, segundo a classificação de Rosso (2010), ainda hoje são evitadas por causa da inviabilidade do preço do sistema construtivo.

Perante esses dois aspectos, a importância estrutural do pórtico plano na engenharia estrutural e o alto custo do sistema construtivo no que diz respeito às estruturas metálicas, faz-se necessário o projetista ter conhecimentos técnicos sobre o tema. Com isso, se torna capaz de usufruir da otimização estrutural visando, principalmente, a redução do custo com projetos superdimensionados.

---

<sup>2</sup> Pipe rack é um tipo de estrutura metálica destinada a servir de apoio/ancoragem para tubulações industriais.

O processo de projeto usando técnicas de otimização é mais vantajoso que o processo de projeto convencional. O processo que usa otimização leva em consideração todas as restrições simultaneamente e iterativamente melhora o projeto enquanto minimiza a função custo (FERREIRA, 2010).

Ainda, no aspecto multidisciplinar, o trabalho envolve conhecimento e estudo em disciplinas técnicas que compõem a grade curricular da engenharia industrial mecânica tais como: mecânica dos sólidos, métodos numéricos e computação. Além disso, aborda tema como otimização numérica, tema esse que não é visto com grande grau de abrangência durante o curso.

### **1.5 Conteúdo do Trabalho**

A monografia está subdividida em seis capítulos, os quais foram organizados de forma sistemática. O primeiro capítulo, parte introdutória do trabalho, visa contextualizar o tema, caracterizar o problema proposto e ainda apresentar a justificativa e o objetivo pretendido com o projeto.

O segundo capítulo, fundamentação teórica, pode ser visto como a base do conhecimento necessária para compreensão da monografia. Este capítulo contém tópicos sobre otimização estrutural, princípios e métodos variacionais e método dos elementos finitos; ainda, são apresentados conceitos sobre flambagem, análise dinâmica e análise não linear. É neste capítulo também que são apresentadas as equações fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

O capítulo três aborda a metodologia empregada. São mostradas todas as etapas e subetapas empregadas durante o trabalho.

O desenvolvimento, abordado no capítulo quatro, contém os dados do problema e a aplicação seguida do desenvolvimento das equações fundamentais que foram apresentadas no segundo capítulo; ainda, contém o desenvolvimento da implementação do modelo computacional matemático, a validação deste modelo, e por fim, a abordagem utilizada na implementação da otimização.

O capítulo cinco aborda os resultados obtidos para os casos de carregamento considerados e as conclusões acerca da análise em questão.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Otimização Estrutural

#### 2.1.1 Histórico

Assim como o cálculo estrutural, os primeiros passos da otimização estrutural também consistiram de métodos analíticos para solução. Esses métodos, entretanto, não eram muito eficientes, pois apenas uma classe bastante limitada de problemas podia ser resolvida: aquela cujas equações diferenciais eram relativamente simples (HAFTKA e GÜRDAL, 1992).

Segundo Silva (2002), o pioneiro nos estudos foi Maxwell, que em 1872 estudou problemas simples baseando-se na teoria da elasticidade. Seu objetivo era encontrar o menor volume para estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos. Em 1904, Michell deu continuidade às pesquisas de Maxwell, e decidiu aplicar o método para diversificados tipos de estruturas com o menor volume de material. Suas estruturas são referências no que diz respeito à otimização topológica.

De acordo com Silva (2002) até o ano de 1960 não houve avanços significativos na otimização estrutural. Somente após o advento de computadores aliado com o surgimento do método dos elementos finitos, problemas de otimização voltam a ser estudados principalmente dentro da indústria aeronáutica. Coutinho (2006) diz que a popularização das técnicas de otimização numérica foi principalmente devido aos trabalhos de Schmit e Fox, em 1960 e 1965, respectivamente.

#### 2.1.2 Abordagens da Otimização Estrutural

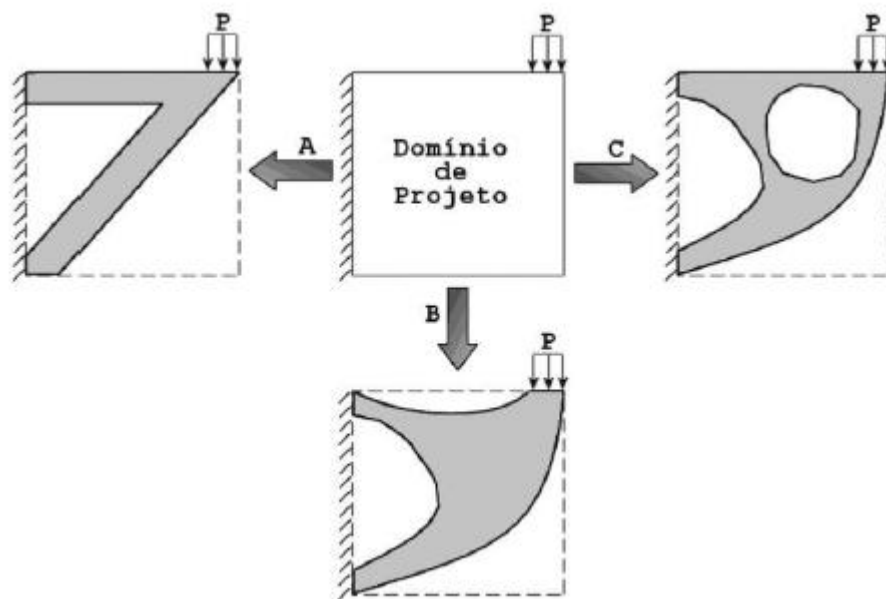
Segundo as abordagens tratadas nos trabalhos de Sommer (2010) e Silva (2002) a otimização estrutural pode ser dividida em três classificações:

a) Otimização Paramétrica (*Size Optimization*): as variáveis de projeto são as dimensões ou as razões de dimensões da peça. Assim esse tipo altera apenas o aspecto da peça.

b) Otimização de Forma (*Shape Optimization*): são alterados os contornos da estrutura e, com isto, as posições dos nós das malhas de elementos finitos.

c) Otimização Topológica (*Topology Optimization*): basicamente este método distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a maximizar ou minimizar uma função custo especificada. Portanto, ao final de um estudo, pode-se identificar a possibilidade da retirada de material que não contribui especificamente no quesito estrutural.

A Figura 2 ilustra as três abordagens da otimização estrutural descritas acima.



**Figura 2: Abordagens da otimização estrutural**  
Fonte: Pereira (2001)

### 2.1.3 Definição e conceitos básicos

Coutinho (2006) define a otimização estrutural como uma ferramenta de projeto que permite não apenas diminuir custos de operação, mas também melhorar a performance dos componentes e sistemas criados. Com a otimização, o melhor projeto é alcançado sem a necessidade de computar todas as possíveis alternativas (KOIDE, 2010).

A formulação do processo de otimização pode ser dividida em três etapas:

- 1ª etapa: Identificação e definição da função objetivo. Esta etapa define qual é o parâmetro que será maximizado ou minimizado dentro da abordagem do problema. Por exemplo, para se obter a menor massa de uma viga submetida a um determinado carregamento, a função objetivo, que neste caso será minimizada, será a massa.
- 2ª etapa: Identificação e definição das variáveis de projeto. As variáveis de projeto são os parâmetros que podem ser alterados durante o processo de otimização. No caso do exemplo da viga, uma possibilidade para as variáveis de projeto são as dimensões da seção transversal.
- 3ª etapa: Identificação e definição das restrições. As restrições podem ou não existir para determinada função objetivo e são definidas como funções que estabelecem limites para que o projeto seja aceitável. Para a viga do exemplo, pode-se citar como restrição um valor máximo para as tensões.

#### 2.1.4 O Processo Iterativo da Otimização

Segundo Vanderplaats (1984) muitos algoritmos de otimização requerem que um conjunto inicial de variáveis de projeto,  $X^0$ , seja especificado. Tendo este ponto de partida, o projeto de otimização é atualizado iterativamente. A forma mais comum do procedimento iterativo é dada por:

$$X_p^q = X_p^{q-1} + \alpha^* S^q \quad (1)$$

onde  $q$  é o número da iteração,  $S$  é o vetor da direção de busca dentro do espaço de projeto e  $\alpha^*$  define a distância a ser percorrida na direção  $S$ . É importante ressaltar que ao se fazer a busca em uma direção específica, um problema de  $n$  variáveis  $X$  é convertido para um problema de uma única variável. Com isto, o problema passa a ser denominado de busca unidimensional.

A Figura 3 fornece um fluxograma geral para minimização unidimensional sem restrição.

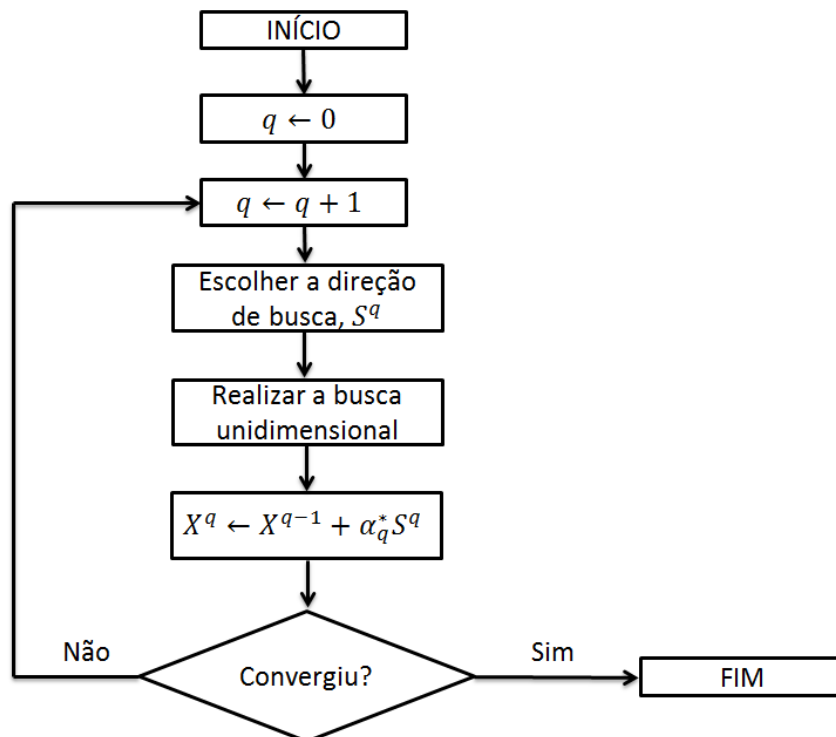


Figura 3: Fluxograma geral da estratégia de minimização sem restrição  
 Fonte: Adaptado de Vanderplaats (1984)

### 2.1.5 Problemas de Otimização Univariáveis

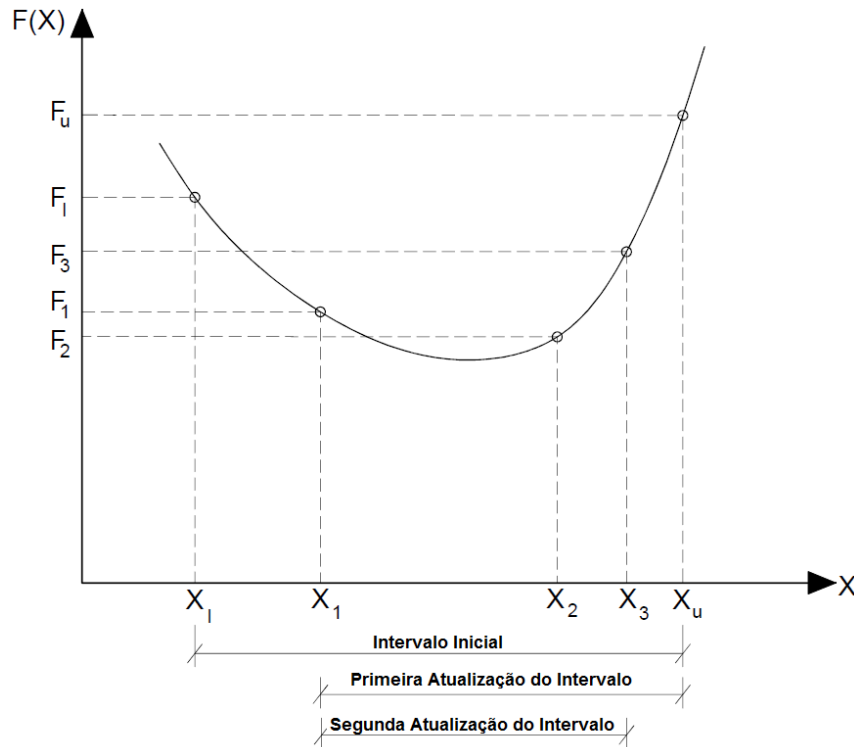
Para a solução de problemas de otimização definidos por somente uma variável, as técnicas mais comumente utilizadas são a Aproximação Polinomial e o Método da Seção Áurea (FERREIRA, 2010).

Vanderplaats (1984) afirma que a Aproximação Polinomial é uma das mais efetivas técnicas para encontrar o mínimo de uma função de uma única variável. O método tem a vantagem de necessitar de poucas avaliações da função, ou seja, o custo computacional é baixo. Entretanto, não há garantia de que o resultado obtido será verdadeiramente o mínimo.

Capacidade de lidar com funções não contínuas, possuir taxa de convergência conhecida e ser relativamente fácil de programar no ambiente computacional fazem do Método da Seção Áurea bastante popular. Entretanto, dependendo da natureza do problema, a convergência pode não ser muito rápida tornando-o computacionalmente caro (VANDERPLAATS, 1984).



O Método da Seção Áurea, segundo Vanderplaats (1984), pode ser explicado considerando um problema que possui como objetivo minimizar a função unimodal  $F(X)$ . Assume-se que o limite inferior e superior em  $X$  são conhecidos e são denominados  $X_l$  e  $X_u$ , respectivamente. Ainda, é assumido que a função  $F$  foi avaliada em cada um destes limites e correspondentemente resultou nos valores  $F_l$  e  $F_u$ . Esta situação é representada na Figura 4.



**Figura 4: Método da Seção Áurea**

Dentro do intervalo estabelecido pelos limites iniciais, escolhem-se dois pontos  $X_1$  e  $X_2$  tal que  $X_1 < X_2$ . Avaliando-se a função nesses pontos chega-se a  $F_1$  e  $F_2$ . Como inicialmente foi assumido que a função  $F$  é unimodal, ou seja, apresenta um único mínimo dentro região de busca, conseqüentemente  $X_1$  ou  $X_2$  formará uma nova fronteira no mínimo. Isto é, ou  $X_1$  tornará o novo limite inferior ou  $X_2$  tornará o novo limite superior. Neste caso, como  $F_1$  é maior que  $F_2$ , então  $X_1$  torna-se o novo limite inferior acarretando na atualização dos limites de busca.

Dentro deste novo intervalo,  $X_1$  e  $X_u$ , escolhe-se um ponto adicional,  $X_3$ . Fazendo-se a avaliação da função neste ponto, obtém-se  $F_3$ . Comparando-se  $F_3$  com  $F_2$  nota-se que  $F_3 > F_2$  e, portanto,  $X_3$  substitui  $X_u$  como o limite superior do

intervalo de busca. Dependendo da tolerância desejada para o resultado, repete-se o processo para haver um estreitamento do intervalo. E para que o método seja eficiente, este estreitamento deve ser realizado o mais rápido possível.

Os valores de  $X_1$  e  $X_2$  foram escolhidos de tal forma que fossem simétricos em relação ao centro do intervalo, ou seja:

$$X_u - X_2 = X_1 - X_l \quad (2)$$

Ainda,  $X_1$  e  $X_2$  foram escolhidos de modo que a seguinte relação se mantivesse:

$$\frac{X_1 - X_l}{X_u - X_l} = \frac{X_2 - X_l}{X_u - X_l} \quad (3)$$

Por exemplo, se  $X_1$  tornar-se o novo limite inferior  $X_l$ , então  $X_2$  será o novo  $X_1$  tal que a relação  $X_2 - X_1$  por  $X_u - X_l$  sempre será a mesma.

Por conveniência, faz-se  $X_l = 0$  e  $X_u = 1$  tal que os valores de  $X_1$  e  $X_2$  tornem-se frações no intervalo  $X_u - X_l$ . Reconhecendo que  $X_2 = 1 - X_1$ , a equação (3) torna-se:

$$X_1 = \frac{1 - 2X_1}{1 - X_1} \quad (4)$$

Simplificando:

$$X_1^2 - 3X_1 + 1 = 0 \quad (5)$$

A equação (5) possui duas raízes:

$$X_1 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 0.38197, 2.61803 \quad (6)$$

A segunda raiz pode ser ignorada, uma vez que é maior que o limite superior ( $X_u = 1$ ). Recordando que  $X_2 = 1 - X_1$ , tem-se:

$$X_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38197 \quad (7)$$

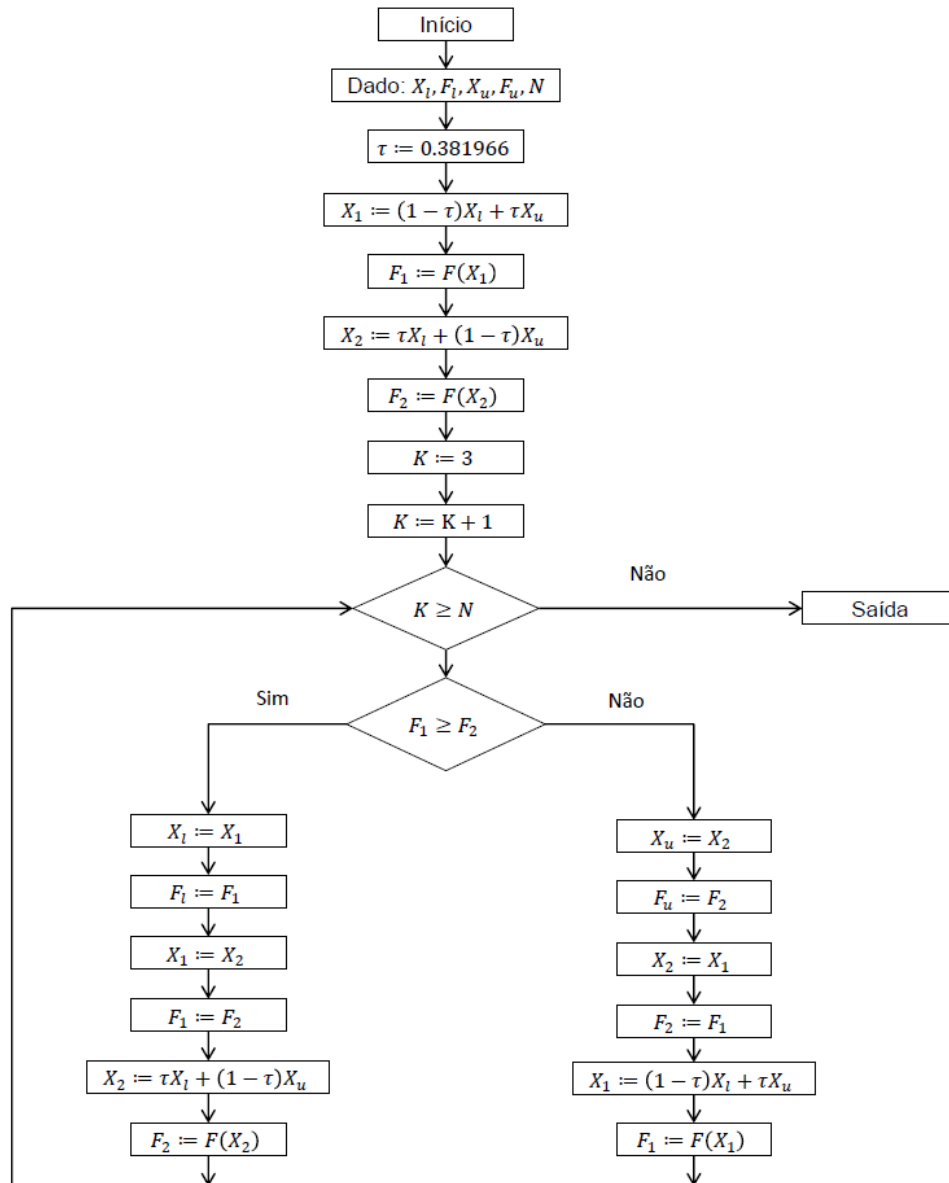
$$X_2 = 1 - X_1 = 0.61803 \quad (8)$$

Tomando-se a relação entre estas soluções obtém-se:

$$\frac{X_2}{X_1} = 1.61803 \quad (9)$$

O número obtido pela relação expressa pela equação (9), é o que se denomina de número áureo.

A Figura 5 demonstra o algoritmo da seção áurea para determinação do mínimo de uma função sem restrições.



**Figura 5: Algoritmo da seção áurea**  
**Fonte: Adaptado de Vanderplaats (1984)**

### 2.1.6 Problemas de Otimização Multivariáveis sem Restrição

Os algoritmos dos métodos de busca para problemas multivariáveis sem restrição são classificados de acordo com o tipo de informação que deve ser fornecida na busca pelo ótimo da função (VANDERPLAATS, 1984). Segundo a classificação proposta por Vanderplaats (1984) os métodos podem ser divididos em:

- Métodos de ordem zero: requerem apenas os valores da função na busca pelo ótimo. Exemplificando, se o objetivo é encontrar o mínimo de uma função  $F(X)$ , pode-se selecionar randomicamente um grande número de variáveis candidatas  $X$  e avaliar o objetivo para cada uma delas. A variável  $X$  que resultar no valor mínimo (ou máximo) de  $F(X)$  é denominado como o ótimo,  $X^*$ . Geralmente requerem muitas avaliações da função objetivo para atingir o ótimo. Dentre os métodos de ordem zero, um dos mais eficientes e confiáveis é o método de Powell e que será o método utilizado neste trabalho. Uma descrição do método é feita na seção 4.4.

- Métodos de primeira ordem: utilizam-se da informação do gradiente, ou da primeira derivada, da função objetivo. Por isso, comparativamente com o método anterior, a solução ótima será obtida em menor tempo. Por outro lado, se  $F(X)$  for altamente não linear a complexidade do processo de busca torna-se maior, pois se tem que avaliar  $\nabla F(X)$  a cada iteração.

- Métodos de segunda ordem: usam informações da derivada segunda da função objetivo  $F(X)$ . Devido a este fato, este método é especialmente eficiente comparado com os métodos anteriores.

### 2.1.7 Estratégia Minimax

Quando se aborda problemas com mínimos locais, descontinuidades ou domínio desconexo os métodos heurísticos são os mais eficientes. A estratégia minimax é um desses métodos heurísticos.

Considerando o problema deste projeto, ou seja, maximizar a frequência fundamental e a carga de flambagem de um pórtico plano submetido a carregamentos variados, o projeto ótimo para um determinado critério considerando um determinado carregamento pode não ser ótimo para outro critério sob o mesmo

carregamento. Em outras palavras, o projeto ótimo pode ser sensível ao critério considerado e às variações nos casos de carregamento considerados  $\{\beta\}$ .

O método desenvolvido por Cherkaev e Cherkaev (2008) e aplicado por Ferreira (2010) diz que para eliminar ou atenuar esta sensibilidade deve-se fazer com que os casos de carregamento sejam envolvidos diretamente no processo de otimização. Ainda, deve haver uma reformulação da forma tradicional de otimização. A reformulação consiste em um procedimento de otimização de duas etapas onde, a frequência fundamental e a carga de flambagem são simultaneamente maximizadas com respeito à  $\{h\}$  e minimizadas com respeito à  $\{\beta\} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ :

$$\max_{\{h\}} \min_{\{\beta\}} \left\{ \begin{array}{l} \omega(\{h\}, \{\beta\}) \\ \lambda(\{h\}, \{\beta\}) \end{array} \right\} = \max_{\{h\}} \phi(\{h\}), \quad \phi(\{h\}) = \min_{\{\beta\}} \left\{ \begin{array}{l} \omega(\{h\}, \{\beta\}) \\ \lambda(\{h\}, \{\beta\}) \end{array} \right\} \quad (10)$$

onde  $\{h\}$  representa as variáveis de projeto e  $\{\beta\}$  os casos de carregamento considerados. Neste trabalho, as variáveis de projeto são as espessuras das seções transversais das colunas e da viga e os casos de carregamento serão discutidos na seção 4.2.

## 2.2 Princípios e Métodos Variacionais

Com o objetivo de representar fenômenos físicos, geralmente se estabelece um sistema de equações diferenciais válidas em certa região (domínio) e impõem nesse sistema condições de contorno e condições iniciais (LUERSEN, 2000). A resolução exata de tais equações através de métodos matemáticos somente é possível para equações simples.

Para solucionar tais dificuldades, há a necessidade da utilização de métodos numéricos, obtendo-se assim soluções aproximadas da equação diferencial que se deseja resolver, sujeita a certas condições de contorno e condições iniciais (LUERSEN, 2000).

No método dos elementos finitos um dado domínio é visto como uma coleção de subdomínios, e sobre cada subdomínio a equação governante é aproximada por algum dos tradicionais métodos variacionais (REDDY, 2006).

Os métodos variacionais diretos referem-se aos métodos que usufruem dos princípios variacionais, tais como o princípio dos trabalhos virtuais e o princípio da mínima energia potencial total em mecânica dos sólidos e estrutural para determinar soluções aproximadas de problemas. No sentido clássico, o princípio variacional tem a ver com encontrar os valores extremos ou estacionários de um funcional com respeito às variáveis do problema. O funcional inclui todas as características intrínsecas do problema. Em mecânica dos sólidos e estrutural o funcional representa a energia total do sistema, e em outros problemas, simplesmente é uma representação integral das equações governantes (REDDY, 2006).

As equações que fornecem os deslocamentos nodais de um sistema estrutural podem ser derivadas usando o princípio da mínima energia potencial (PMEP). Tal princípio diz que: dentre todas as equações de deslocamento que satisfazem a compatibilidade interna e as condições de contorno, aquelas que também satisfazem as equações de equilíbrio fazem da energia potencial um mínimo em um sistema estável (SEGERLIND, 1984).

A energia potencial total ( $\pi$ ) em um sistema estável é dada, em notação indicial, por (SEGERLIND, 1984):

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \quad (11)$$

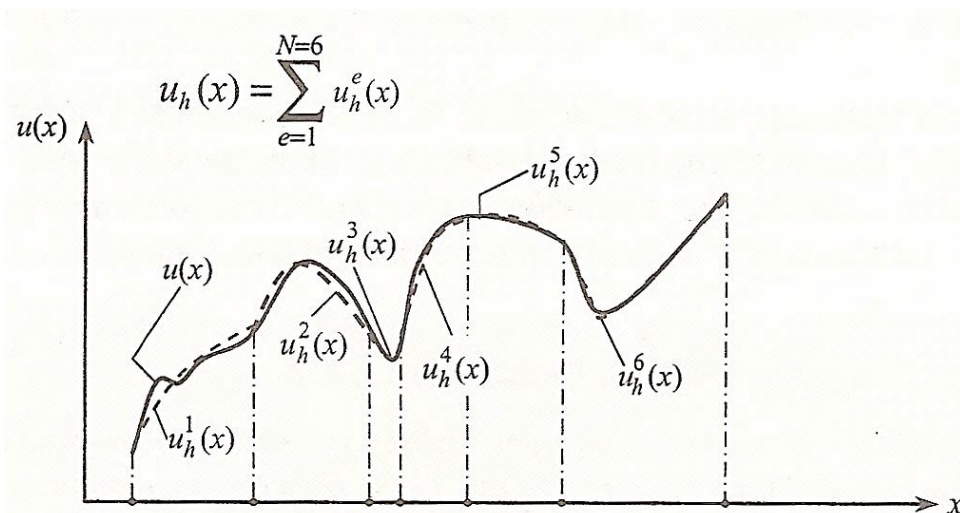
onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensão,  $\varepsilon_{ij}$  as componentes de deformação,  $b_i$  as componentes de forças de corpo,  $t_i$  as forças de superfície,  $u_i$  os deslocamentos,  $\Omega$  o domínio de interesse e  $\Gamma$  o contorno do domínio de interesse.

### 2.3 Método dos Elementos Finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é um dos métodos numéricos para obter a solução aproximada de equações diferenciais ordinárias e parciais (BHATTI, 2005). Alves Filho (2000) define MEF como um método aproximado de cálculo de sistemas contínuos.

A característica mais peculiar deste método comparado com os outros métodos existentes é a divisão de um determinado domínio em um conjunto de subdomínios simples, chamados elementos finitos, e que sobre cada subdomínio a equação

governante é aproximada por algum dos tradicionais métodos variacionais (REDDY, 2006). A Figura 6 ilustra como uma função complexa pode ser facilmente aproximada por um conjunto de polinômios simples.



**Figura 6: Aproximação por partes de uma função**  
**FONTE: Reddy (2006, p. 13)**

De acordo com Reddy (2006) a aplicação do MEF para um dado problema envolve a aplicação dos seguintes passos:

- 1º: Desenvolvimento das equações do elemento finito;
- 2º: Discretização do domínio da solução em uma malha de elementos finitos;
- 3º: Cálculo das matrizes de um elemento finito;
- 4º: Montagem das equações do elemento para obter as equações do problema completo.
- 5º: Imposição das condições de contorno;
- 6º: Solução para incógnitas nodais;
- 7º: Pós-processamento dos resultados, ou seja, a solução para as outras quantidades de interesse, que estão relacionadas com as derivadas das incógnitas nodais.

Na formulação do modelo matemático discreto equivalente à estrutura contínua, é importante a correta escolha do tipo de elemento finito propício àquela

aplicação. Vários são os tipos de elementos finitos que já foram formulados. A escolha deve ser fundamentada na natureza geométrica do problema (estrutura contínua ou reticulada) e às condições que é submetido (por exemplo, tipo de carregamento).

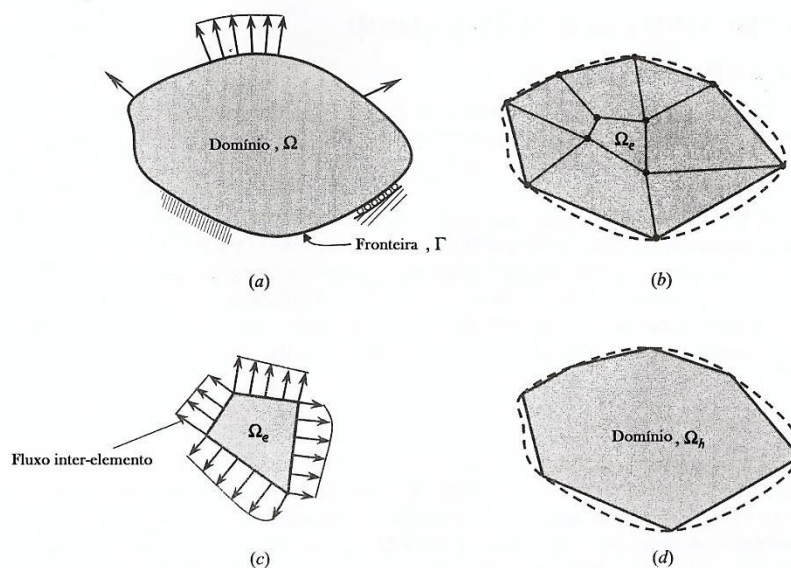
### 2.3.1 As características básicas do método

De acordo com Reddy (2006) o MEF possui três características que o tornam mais competitivo comparado com os outros métodos. Primeira, um domínio<sup>3</sup> geometricamente complexo  $\Omega$  de um problema, como o da Figura 7(a), é representado como uma coleção de subdomínios geometricamente simples denominados elementos finitos, Figura 7(b). Cada elemento finito  $\Omega_e$ , representado na Figura 7(c), é visto como um domínio independente por si só. Segunda, sobre cada elemento finito, equações algébricas entre as quantidades de interesse são desenvolvidas usando as equações do problema. Terceira, a relação de todos os elementos são montadas (isto é, elementos são postos de volta em suas posições originais no domínio total), como indicado na Figura 7(d). Nesta mesma figura fica fácil perceber que a divisão do domínio completo por elementos finitos e seu consequente agrupamento pode não ser exato.

---

<sup>3</sup> Domínio refere-se à região geométrica para a qual as equações são solucionadas.





**Figura 7: Representação de um domínio bidimensional por uma coleção de triângulos e quadriláteros**

**FONTE: Adaptado de Reddy (2006, p. 14)**

Tipicamente, as variáveis dependentes ( $u$ ) do problema são aproximadas usando a básica ideia de que qualquer função contínua pode ser representada por uma combinação linear de funções conhecidas  $\varphi_i$  e coeficientes indeterminados (REDDY, 2006). As funções de aproximação  $\varphi_i$  comumente são tomadas como sendo polinômios e são oriundas dos conceitos da teoria de interpolação. A aproximação polinomial da solução dentro de um elemento finito típico ( $\Omega$ ) é assumida ser da forma:

$$u^e \approx u_h^e = \sum_{i=1}^n u_i^e \varphi_i^e \quad (12)$$

sendo  $n$  o número de nós que compõem o elemento.

Na sequência, serão sucintamente discutidos os dois principais elementos de vigas e o elemento de pórtico plano.

### 2.3.2 Elemento de Viga de Euler-Bernoulli

O modelo de viga de Euler-Bernoulli é conhecido como teoria elementar por considerar apenas a contribuição da deformação por momento fletor na equação do movimento (ALMEIDA E LIMA JUNIOR, 2010).

Reddy (2006) afirma que na teoria do elemento de viga de Euler-Bernoulli é assumido que a seção transversal plana perpendicular ao eixo da viga permanece plana e perpendicular ao eixo após a deformação como pode ser observado na Figura 8(b). Como consequência, tem-se que a tensão de cisalhamento transversal é nula.

Esta teoria se aplica para vigas que possuem uma grande relação entre o comprimento e altura da seção transversal. A equação de Euler-Bernoulli descreve uma relação entre o deslocamento de uma viga e o carregamento aplicado (SOMMER, 2010).

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = g \quad (13)$$

onde  $v = v(x)$  é o deslocamento transversal da viga e  $g = g(x)$  é a carga distribuída por unidade de comprimento.

### 2.3.3 Elemento de Viga de Timoshenko

Ao contrário da teoria de viga de Euler-Bernoulli, a teoria de viga de Timoshenko assume que a seção plana permanece plana, mas não necessariamente normal ao eixo longitudinal após a deformação, Figura 8(c). Ou seja, a tensão de cisalhamento transversal não é nula (REDDY, 2006).

A teoria de Timoshenko aplica-se com resultados satisfatórios em vigas cuja relação comprimento altura é pequena (SOMMER, 2010).

De acordo com Reddy (2006) a equação da teoria de viga de Timoshenko difere da teoria de viga de Euler-Bernoulli quanto às relações cinemáticas. A equação em termos do deslocamento  $v$  e da rotação em torno do eixo  $y$ ,  $\Psi$ , é dada por:

$$-\frac{d}{dx}\left(EI \frac{d\Psi}{dx}\right) + GAK_s \left(\Psi + \frac{dv}{dx}\right) = 0 \quad (14)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $K_s$  é o coeficiente de correção de cisalhamento e  $A$  é a área da seção transversal.

A Figura 8 ilustra as teorias anteriormente discutidas.

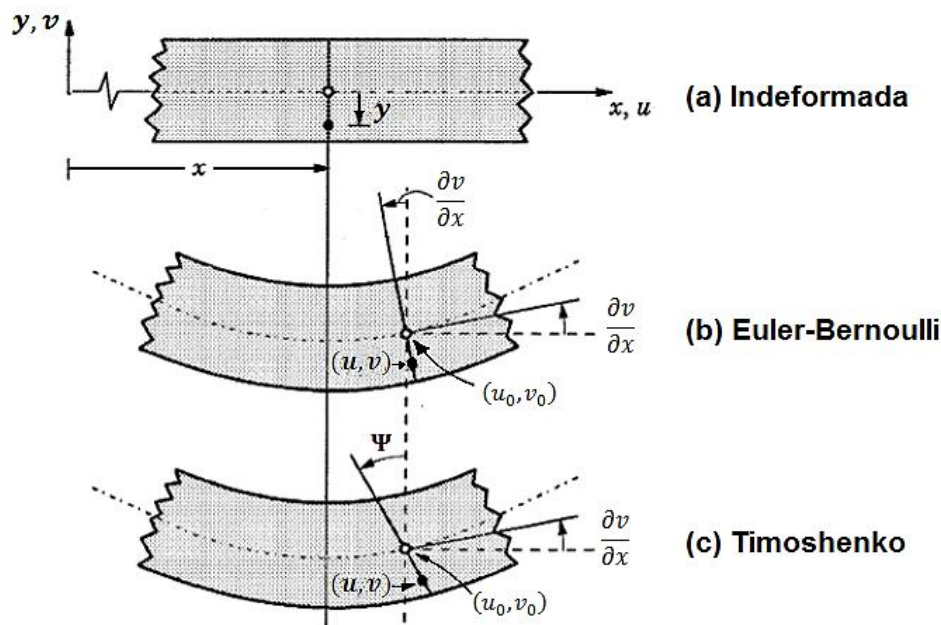


Figura 8: Cinemática das teorias das vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko

Fonte: Adaptado de Reddy (1997, p. 114)

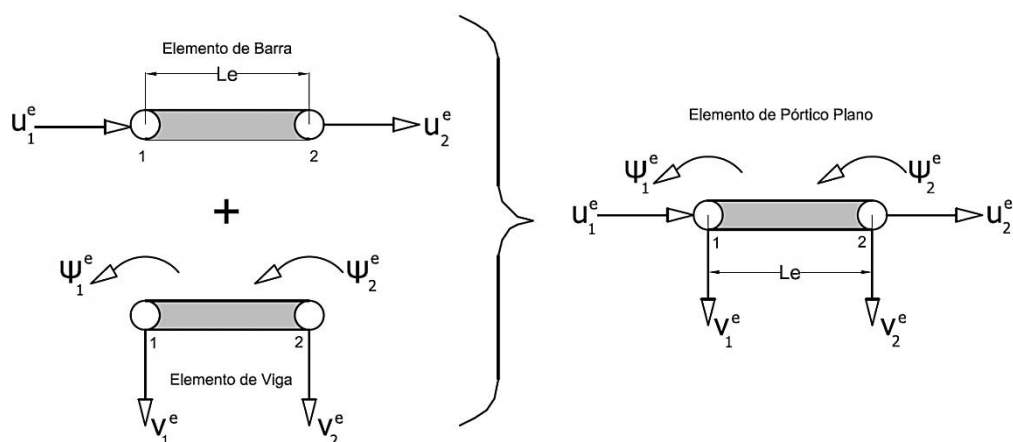
### 2.3.4 Elemento de Pórtico

A ação de momento fletor ou força cortante em uma viga reta não gera forças axiais no elemento, e vice-versa. Com isso, o elemento de barra permite apenas estudar o comportamento de elementos sob ação de forças axiais, e o elemento de viga permite estudar o comportamento de elementos sob ação de carregamentos de flexão (ALVES FILHO, 2000).

Portanto, nas estruturas que ambos os carregamentos atuam simultaneamente, faz-se necessário a utilização do elemento de pórtico plano, que apresenta tanto rigidez axial quanto rigidez à flexão.

O elemento de pórtico plano pode ser entendido como a superposição do elemento de barra com o de viga, este podendo ser tanto o elemento de viga de

Euler-Bernoulli quanto o de Timoshenko (REDDY, 2006). A Figura 9 ilustra esta superposição dos elementos.

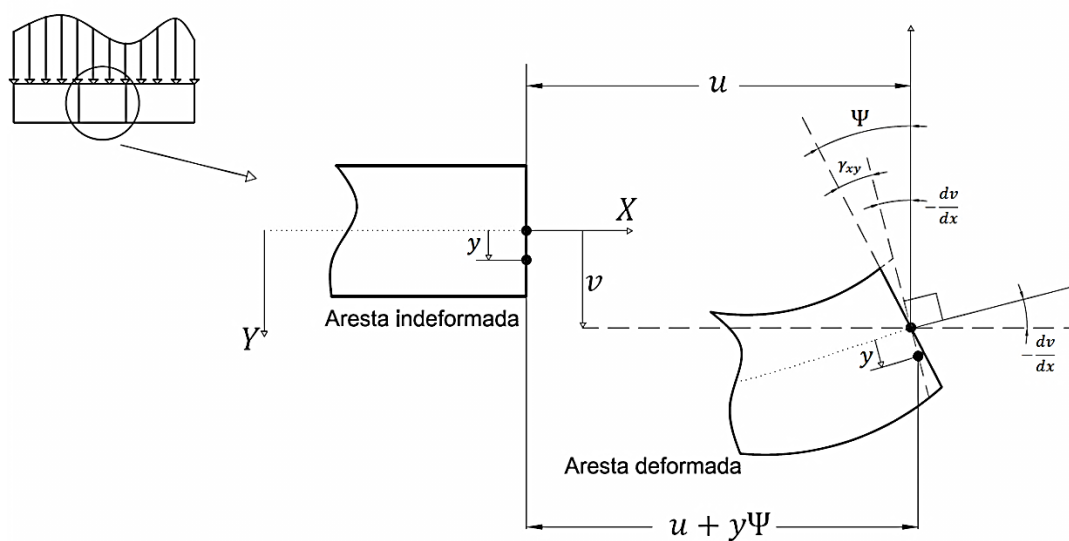


**Figura 9: Superposição do elemento de barra com o elemento de viga para se obter o elemento de pórtico plano**

Fonte: Adaptado de Reddy (2006, p. 275)

Ainda, pela Figura 9, pode-se visualizar que o elemento de pórtico plano possui três graus de liberdade por nó ( $u, v, \psi$ ).

As equações cinemáticas do elemento de pórtico plano, baseado na teoria de viga de Timoshenko, podem ser obtidas a partir da análise da Figura 10 e são escritas na sequência.



**Figura 10: Cinemática do elemento de pórtico plano baseado na teoria de viga de Timoshenko**

Fonte: Adaptado de Reddy (2006, p. 261)

$$\bar{U} = u + y\Psi \quad (15)$$

$$\bar{V} = v \quad (16)$$

$$\bar{\Psi} = \Psi \quad (17)$$

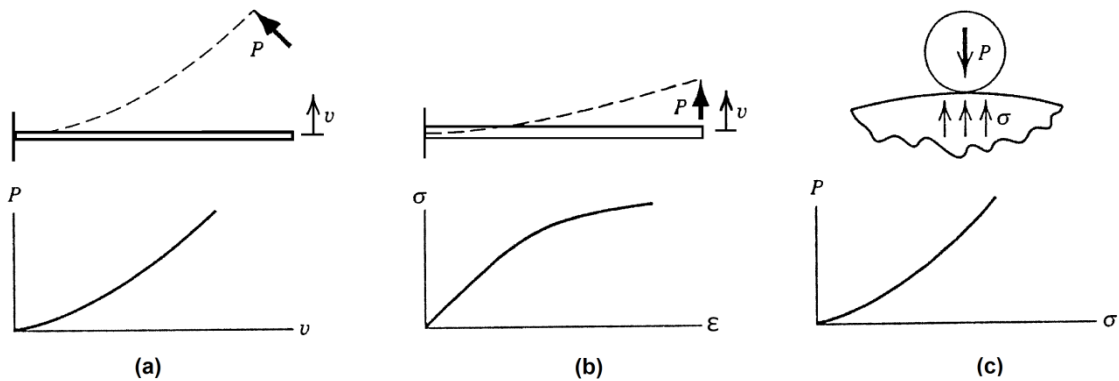
onde as variáveis  $u$  e  $v$  correspondem aos deslocamentos nodais na direção dos eixos locais  $x$  e  $y$  do elemento, respectivamente, e  $\Psi$  representa a rotação em relação ao eixo local  $z$ . Na Figura 10 a variável  $\gamma_{xy}$  representa a deformação transversal devido ao cisalhamento.

## 2.4 Análise Não Linear

Na análise não linear admite-se que a resposta da estrutura a um estado de carregamento não é linear, isto é, incrementos iguais de carga não correspondem necessariamente incrementos constantes de deslocamentos (SILVA, 1996).

De acordo com Cook (1995) três são os tipos de não linearidades:

- Não linearidade devido à geometria: surge quando há uma significativa mudança na geometria da estrutura, Figura 11(a);
- Não linearidade devido ao material: surge quando o material não possui relação tensão-deformação linear, Figura 11(b);
- Não linearidade devido ao contato: a área de contato em dois corpos cresce à medida que  $P$  aumenta, quer ocorra escoamento do material ou não, Figura 11(c).



**Figura 11: (a) Viga elástica delgada carregada por uma “força seguidora”; (b) Viga elasto-plástica carregada por uma força P em uma direção fixa; (c) Tensão de contato em uma esfera de rolamento.**

Fonte: Adaptado de Cook (1995, p. 276)

Reddy (2004) apresenta equações que relacionam deformação-deslocamento para análise não linear de placas. Fazendo-se uma adaptação para o problema envolvendo elemento de pórtico plano, as equações de interesse ficam como apresentados a seguir:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{linear} + \varepsilon_{não-linear} = \frac{d\bar{U}}{dx} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d\bar{U}}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\bar{V}}{dx} \right)^2 \right) \quad (18)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{linear} + \gamma_{não-linear} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{U}}{dy} + \frac{d\bar{V}}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{U}}{dx} \frac{d\bar{U}}{dy} + \frac{d\bar{V}}{dx} \frac{d\bar{V}}{dy} \right) \quad (19)$$

Pelas equações (18) e (19) percebe-se que ambas as deformações são constituídas por uma parcela de deformação linear e outra não linear.

Substituindo as equações (15), (16), (17) nas equações (18) e (19) obtém-se:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{d}{dx}(u + y\Psi) + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{d}{dx}(u + y\Psi) \right)^2 + \left( \frac{d}{dx}(v) \right)^2 \right) \quad (20)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dy}(u + y\Psi) + \frac{d}{dx}(v) \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx}(u + y\Psi) \frac{d}{dy}(u + y\Psi) + \frac{d}{dx}(v) \frac{d}{dy}(v) \right) \quad (21)$$

Desenvolvendo as equações anteriores chega-se a:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{d(y\Psi)}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{du}{dx} + \frac{d(y\Psi)}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (22)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \left( \Psi + \frac{dv}{dx} \right) + \left( \frac{du}{dx} + y \frac{d\Psi}{dx} \right) \Psi \right] \quad (23)$$

Estas equações são utilizadas na seção 4.2, onde é mostrada a obtenção do elemento de pórtico plano para o problema deste trabalho.

## 2.5 Flambagem

De acordo com Beer e Johnston (2009), nos cálculos de dimensionamento estrutural há de se preocupar com diversos requisitos. Alguns deles são:

- Resistência: a estrutura deve resistir a um determinado carregamento sem que no material que a constitui ocorra tensões excessivas;
- Rigidez: a estrutura deve resistir a um determinado carregamento sem que apresente deslocamentos inaceitáveis;
- Estabilidade: geralmente a estrutura deve resistir a um determinado carregamento sem sofrer uma mudança inesperada em sua configuração inicial.

A estabilidade estrutural está diretamente relacionada ao fenômeno da flambagem. Antes de definir a flambagem, é importante conceituar os tipos de equilíbrio.

Em geral, o equilíbrio de uma estrutura pode ser considerado como: indiferente, instável e estável. Tal classificação está mostrada esquematicamente na Figura 12.

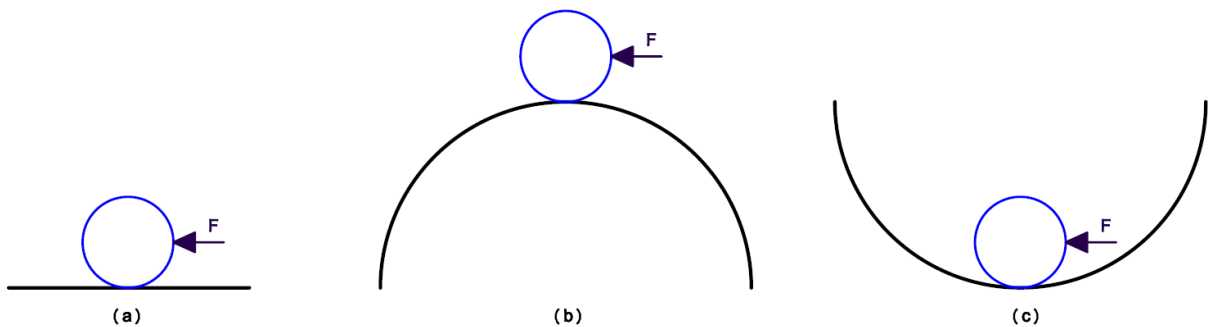
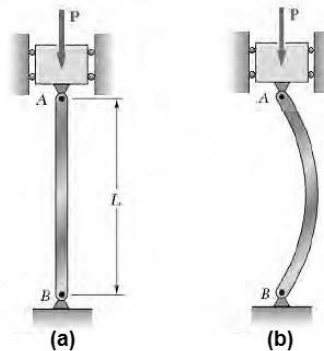


Figura 12: Situações de equilíbrio: (a) indiferente; (b) instável; (c) estável

Na Figura 12(a) tem-se o equilíbrio indiferente, isto é, depois da aplicação da força  $F$  na esfera que está sobre um plano, ocorrerá, após um determinado deslocamento, uma nova posição de equilíbrio semelhante à condição inicial. Na Figura 12(b) tem-se a situação de equilíbrio instável, pois após a ação da força  $F$  a esfera não voltará para a posição de equilíbrio inicial. Por último, na Figura 12(c), é apresentado o caso de equilíbrio estável, no qual a força  $F$  promove um deslocamento na esfera e esta oscila em torno da posição de equilíbrio inicial.

A definição de flambagem pode ser feita considerando uma coluna de comprimento ( $L$ ), articulada nas extremidades e submetida à força centrada ( $P$ ), Figura 13(a). Quando a força  $P$  tem valores pequenos a coluna permanece reta e o equilíbrio é estável. Quando a força  $P$  é aumentada gradativamente, podem surgir deslocamentos transversais nas seções da coluna levando-a para um novo estado de equilíbrio, Figura 13(b). Ou seja, ao invés da coluna permanecer com seu eixo retilíneo, a coluna se torna encurvada. Tal fenômeno é o que se denomina flambagem.



**Figura 13: Coluna biarticulada submetida ao carregamento  $P$**

**Fonte: Adaptado de Beer e Johnston (2009, p. 608)**

Porém, se a carga  $P$  atingir o valor crítico (carga crítica), o novo estado de equilíbrio será o instável. Na maioria dos casos de dimensionamento estrutural, deve-se garantir que a carga crítica não seja alcançada.

Conforme mostrado por Ferreira (2010) a equação linearizada do problema de flambagem é governado pela seguinte equação de autovalores e autovetores:



$$([K] + \lambda[K_G])\{q_\lambda\} = \{0\} \quad (24)$$

onde  $[K]$  é a matriz de rigidez,  $[K_G]$  é a matriz de rigidez geométrica que depende do estado inicial de tensão,  $\{q_\lambda\}$  é o autovetor que descreve o modo de flambagem e  $\lambda$  é o autovalor que representa a relação entre a carga crítica de flambagem e a carga aplicada. Vale ressaltar que o valor de  $\lambda$  pode ser positivo ou negativo dependendo das tensões atuantes usadas na determinação de  $[K_G]$ .

## 2.6 Análise Dinâmica: Vibração, Frequência Natural e Ressonância

Segundo Moreira (1996) vibração é o resultado do comportamento de uma estrutura quando excitada por forças dinâmicas, cuja origem pode ser tanto externa quanto interna.

Quando num corpo ou sistema de corpos é imposto um deslocamento inicial em relação à sua posição de equilíbrio e em seguida ele é abandonado, ele vibrará com uma frequência conhecida como frequência natural (HIBBELER, 1999).

Se a frequência de excitação for igual (ou aproximadamente igual) à frequência natural do sistema, o sistema oscilará com uma amplitude muito maior que a amplitude da força excitadora. Esse fenômeno é denominado ressonância (TIPLER, 1995).

Ainda, de acordo com Hibbeler (1999), vibrações ressonantes podem causar altas tensões e falhas rápidas de componentes. Devido a esse fato, o dimensionamento dinâmico deve ser orientado de forma a evitar que as frequências de ressonâncias da estrutura e todos os componentes associados se situem na banda de frequências de funcionamento (MOREIRA, 1996).

A frequência natural é definida por (TIPLER, 1995):

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (25)$$

onde  $k$  é a rigidez do corpo [N/m] e  $m$  é a massa [Kg]. Algumas conclusões podem ser obtidas pela análise da equação (25). Se um corpo, por exemplo, uma viga, tiver sua rigidez aumentada sem que a massa seja modificada, sua frequência natural

também o é. Portanto, maior terá de ser a frequência de excitação para que o corpo entre em ressonância. Raciocínio análogo pode ser feito com a variável massa, ou seja, aumentando-se a massa sem modificar a rigidez do corpo diminui-se a frequência natural do corpo, fazendo que o mesmo esteja mais susceptível ao fenômeno da ressonância.

Da mesma maneira que o problema de flambagem, o problema de frequência natural também é governado por uma equação envolvendo autovetores e autovalores. A dedução é efetuada a partir da equação geral do movimento para a análise dinâmica.

Conforme a dedução apresentado por Ferreira (2010) a modelagem do problema envolvendo frequência natural de uma maneira linearizada, na presença de enrijecimento por tensão, pode ser descrita na forma matricial como:

$$([K] + \lambda[K_G] - \omega_n^2[M])\{q_\omega\} = \{0\} \quad (26)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa do sistema,  $\{q_\omega\}$  é o autovetor que descreve os modos de vibrar.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Etapas da Metodologia

As etapas que compõem a metodologia adotada neste trabalho estão representadas na Figura 14. Na sequência são discutidas cada uma destas etapas bem como suas subetapas.

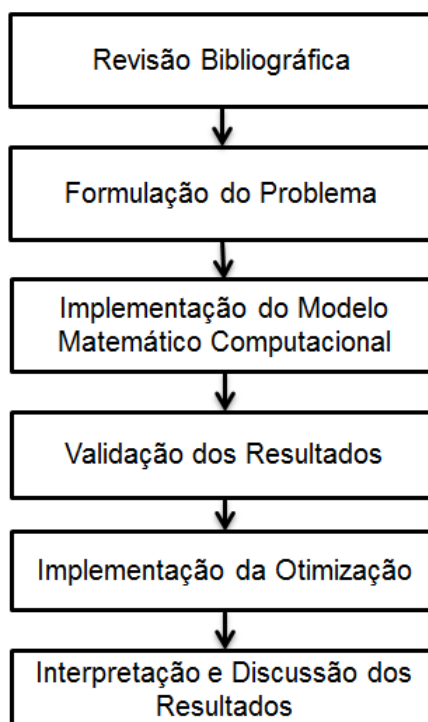


Figura 14: Etapas da metodologia

##### 3.1.1 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica foi a primeira etapa executada durante o desenvolvimento do trabalho. A elaboração do projeto basicamente envolveu conhecimentos acerca de técnicas de elementos finitos, otimização matemática e linguagem de programação. Ainda, para validação dos resultados, conhecimento a respeito de algum programa comercial de análise em elementos finitos foi exigido. Portanto, a partir da revisão bibliográfica baseada em livros, artigos científicos publicados em periódicos e documentos eletrônicos pôde-se desenvolver a fundamentação teórica, capítulo 2 do trabalho, revisando e aprendendo novos conceitos essenciais para o desenvolvimento do projeto.

### 3.1.2 Formulação do Problema

De uma maneira figurada, a etapa da formulação do problema pode ser definida como a transcrição do problema real para o papel. Isto é, após a análise do problema físico a ser resolvido deve-se encontrar meios de representá-lo matematicamente e que o torne condizente com a realidade. Por exemplo, no dimensionamento de uma estrutura metálica tem-se que verificar quais cargas que efetivamente nela atuam e quais podem ser desprezadas. Ainda, deve-se checar o tipo de ligação existente entre os elementos (se a ligação é rígida, semirrígida ou flexível), especificar o material e as dimensões dos perfis metálicos e elaborar as hipóteses simplificadoras aplicadas ao caso. Para o trabalho em questão, a formulação encontra-se descrita nos capítulos 2 e 4.

### 3.1.3 Implementação Computacional do Modelo Matemático

Antes de se fazer a implementação computacional do modelo matemático em algum ambiente de programação faz-se necessário aplicar as etapas da formulação dos elementos finitos introduzidas na seção 2.2 e desenvolvidas na seção 4.2. A Figura 15 ilustra a ordem das subetapas adotadas nesta fase do trabalho.

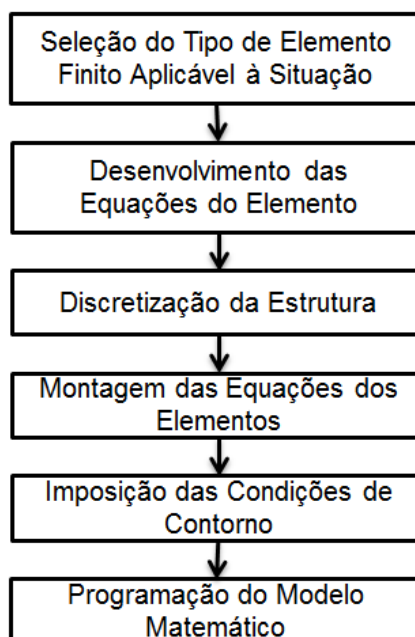


Figura 15: Subetapas da implementação computacional do modelo matemático

### 3.1.4 Validação dos Resultados

A fase de validação dos resultados tem como objetivo verificar se os resultados obtidos com o modelo matemático computacional implementado estão corretos. Um dos métodos de se fazer essa validação é resolver o problema com um programa comercial de elementos finitos e fazer um comparativo dos resultados. Nesse trabalho, a validação dos resultados está descrita na seção 4.3.

A Figura 16 representa a sequência das subetapas adotadas nesta fase.

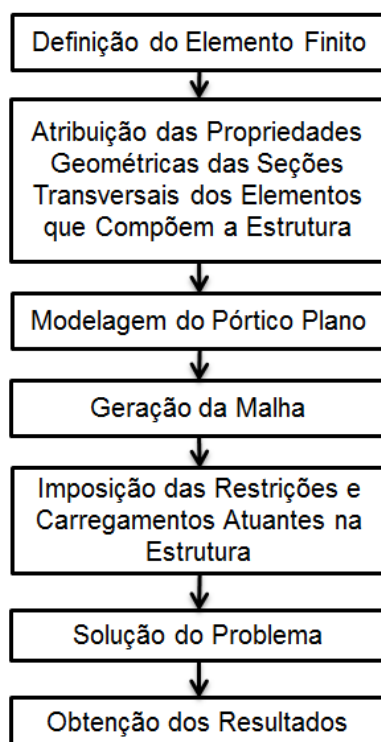
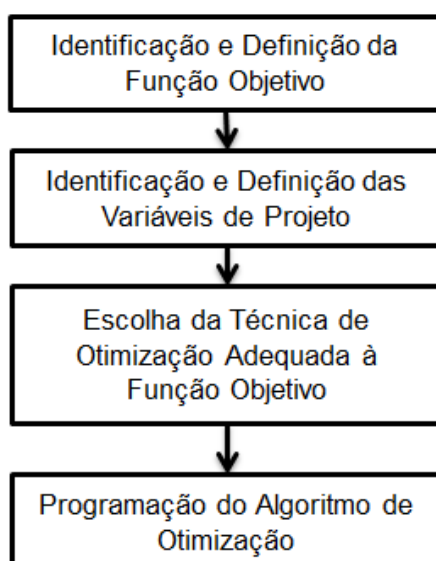


Figura 16: Subetapas da validação dos resultados

### 3.1.5 Implementação da Otimização

Concluída a etapa da validação iniciou-se a etapa da implementação da otimização (seção 4.4), ou seja, aplicação de alguma técnica de otimização a fim de maximizar a função objetivo.

Na Figura 17 são mostradas as subetapas desta etapa.



**Figura 17: Subetapas da implementação da otimização**

### **3.1.6 Interpretação e Discussão dos Resultados**

A etapa de interpretação e discussão dos resultados é a etapa conclusiva do projeto e encontra-se descrita no capítulo 5. Engloba a descrição dos casos de problemas que foram solucionados, as conclusões obtidas e as discussões sobre pontos relevantes.

## 4 DESENVOLVIMENTO

Após a apresentação da metodologia aplicada ao presente projeto, este capítulo tem como finalidade descrever o que efetivamente foi realizado e a maneira pela qual foi realizado. Conforme o capítulo anterior, este também é dividido em etapas e dentro de cada etapa são abordados os procedimentos adotados.

### 4.1 Dados e Formulação do Problema

Na tentativa de abordar um problema bastante condizente com a realidade, adotou-se como dados geométricos de entrada para o pórtico plano os valores listados na Tabela 1.

Tabela 1: Dados geométricos do problema

Descrição	Variável	Valor	Unidade
Comprimento	$L$	4000	mm
Largura da Seção Transversal	$b$	200	mm

A Figura 18 ilustra a estrutura de análise com as dimensões de interesse. Vale ressaltar que tanto a viga (identificada com o número 2 na Figura 18) como as colunas (números 1 e 3) possuem o mesmo comprimento e a mesma largura da seção transversal. Ainda, a incógnita que representa a espessura da seção transversal é  $h_2$  para a viga e  $h_1$  para ambas as colunas.

A ligação entre viga e colunas foi considerada perfeitamente rígida, ou seja, o ângulo formado nas ligações entre a viga e as colunas permanece em  $90^\circ$  mesmo após a estrutura se deformar; a Figura 19(A) ilustra esta consideração. As extremidades inferiores das colunas foram consideradas engastadas, isto é, na interface da extremidade da coluna com o solo não existe rotação relativa entre o eixo axial da coluna e a linha horizontal que delimita o solo, Figura 19(B).

O material considerado foi o aço A36. As propriedades do material necessárias para o projeto estão resumidas na Tabela 2.

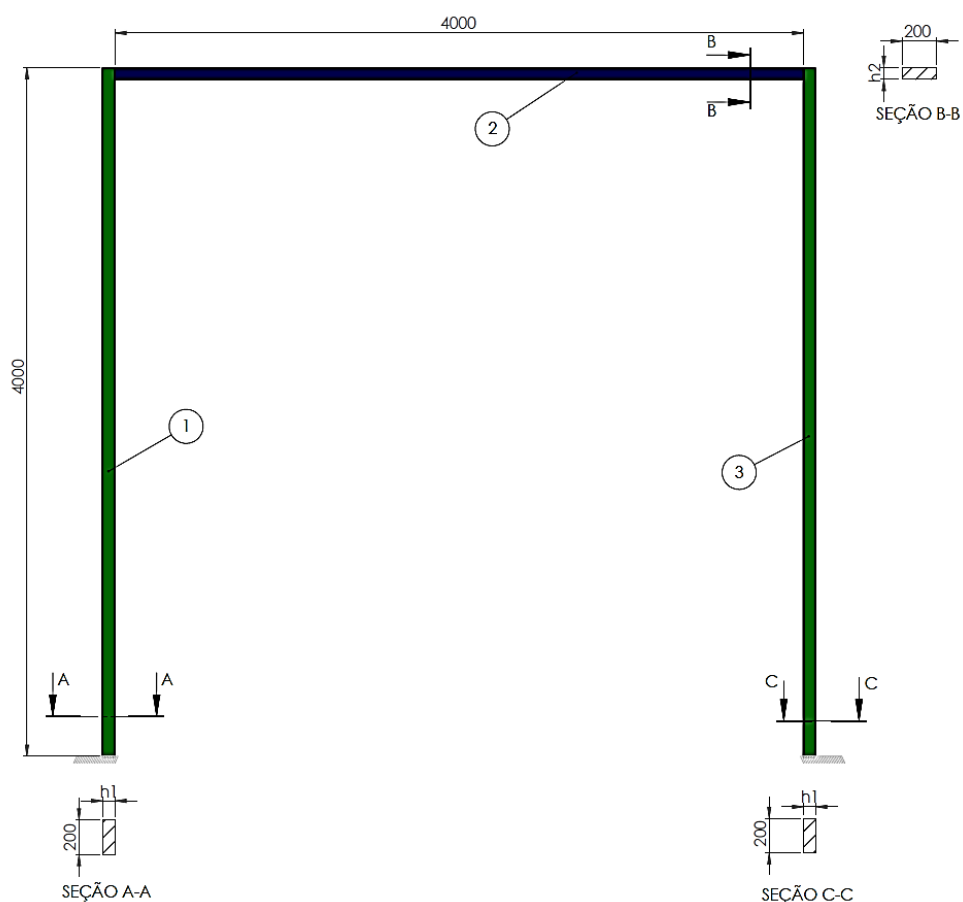


Figura 18: Pórtico plano com dimensões de interesse

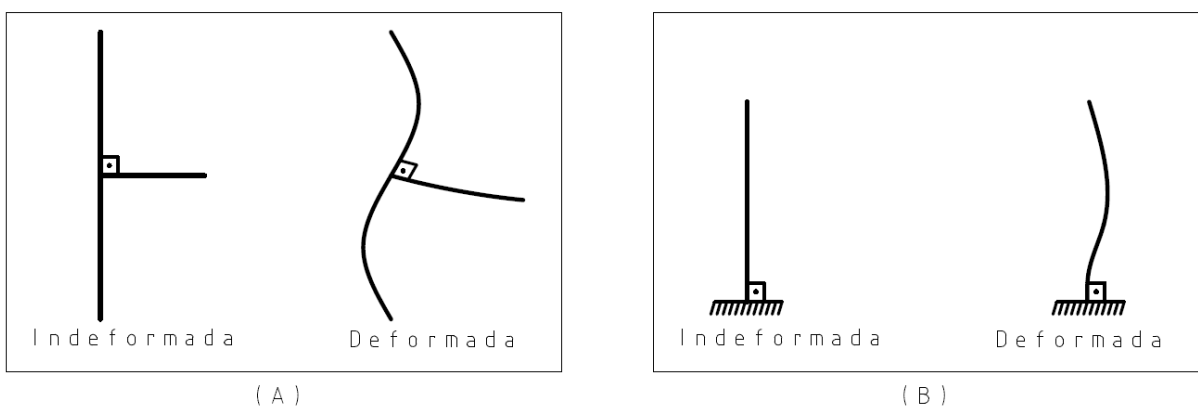


Figura 19: Representação das condições de contorno quanto ao deslocamento  
(A) Ligação rígida entre viga-pilar; (B) Pilar engastado

Tabela 2: Propriedades do Aço A36

Descrição	Variável	Valor	Unidade
Módulo de Elasticidade	$E$	200	GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,28	-
Densidade	$\rho$	7860	kg/m <sup>3</sup>



O módulo de cisalhamento transversal ( $G$ ) do material é obtido a partir de:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 78,125 \text{ GPa} \quad (27)$$

## 4.2 Implementação Computacional do Modelo Matemático

A implementação computacional do modelo matemático foi feita no programa *MATLAB*. A escolha se justifica, pois a programação no *MATLAB* é bastante facilitada comparada com outras linguagens de programação, por exemplo, Fortran ou C++. Isto porque dispensa declaração de variáveis e alocação de memória. Ainda, em sua biblioteca de funções já estão inclusas operações com matrizes, fundamentais para programação envolvendo o método dos elementos finitos.

A seleção do elemento finito foi o primeiro passo desta etapa do desenvolvimento. O elemento de pórtico plano baseado na teoria de viga de Timoshenko foi o elemento escolhido. De acordo com Reddy (2006) a utilização do elemento de viga baseado na teoria de Timoshenko se justifica quando se deseja considerar o efeito da deformação por cisalhamento transversal. Tal situação é relevante quando a relação entre o comprimento e espessura da viga/coluna for menor do que 20. Nas formulações onde a relação comprimento/espessura for maior que 20 (vigas finas) a modelagem da viga ou coluna pela teoria de Timoshenko com função de interpolação linear pode levar a um erro numérico conhecido como travamento (*shear locking*). Para evitar este problema, foi utilizado o método da subintegração seletiva, onde os termos relativos ao cisalhamento transversal são subintegrados e os demais termos integrados de forma completa (HUGHES, 2000). Com isso, garante-se resultado satisfatório para qualquer relação comprimento/espessura adotada.

Diferentemente do que é feito no cálculo analítico de sistemas contínuos, isto é, determinar os deslocamentos nos infinitos pontos do elemento em análise, ao se utilizar o método dos elementos finitos, em primeira instância, são calculados os deslocamentos de somente alguns pontos, os nós do modelo (ALVES FILHO, 2000). Então, o corpo contínuo tem de ser subdividido em um número finito de partes (os elementos) os quais são conectados entre si por intermédio de pontos discretos (os

nós). Esta idealização da estrutura, ou seja, formulação do modelo matemático discreto equivalente à estrutura contínua constitui a etapa denominada de discretização.

A discretização do pórtico plano em análise está representada na Figura 20. Esta figura também pode ser denominada como a malha de elementos finitos. A determinação da quantidade de elementos finitos a ser utilizada, ou seja, grau de refinamento da malha, está relacionada com as propriedades do elemento escolhido para a representação do problema e também com o grau de complexidade da estrutura a ser analisada (ALVES FILHO, 2000). Quanto mais refinada a malha, maior será o custo computacional. E como o custo computacional para a análise do pórtico plano é pequeno, neste trabalho foi utilizada uma malha de 120 elementos, 40 para cada um dos três componentes do pórtico plano. Cada elemento possui dois nós, um em cada extremidade e cada nó possui três graus de liberdade, ou seja, pode-se deslocar horizontalmente, verticalmente e rotacionar em torno do eixo normal ao plano devido às possíveis componentes de flexão.



**Figura 20: Discretização da estrutura em análise**

A Figura 21 representa um elemento de pórtico plano discretizado.

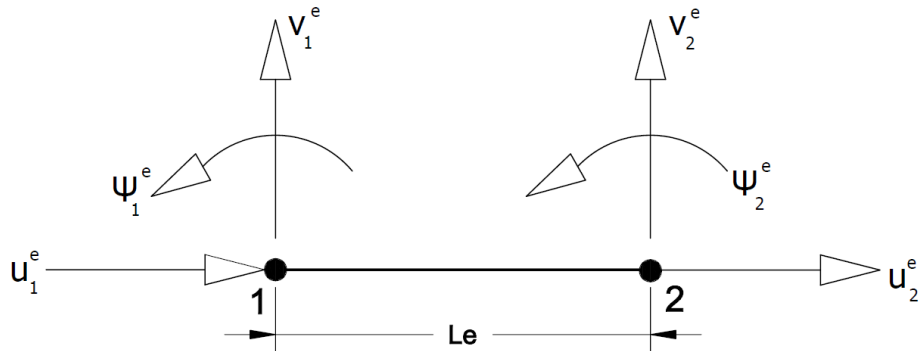


Figura 21: Elemento de Pórtico Plano Discretizado

Com a definição do tipo e quantidade de elementos finitos a ser utilizado e, concluída a etapa da discretização da estrutura, o próximo passo foi a determinação das matrizes elementares que regem o problema. As deste trabalho foram: matriz de massa  $[M]^e$ , matriz de rigidez  $[K]^e$  e matriz de rigidez geométrica  $[K_G]^e$ .

O primeiro passo na determinação das matrizes foi a definição das equações que regem os deslocamentos elementares aproximados  $u_h$ ,  $v_h$  e  $\Psi_h$ . Neste projeto, foi utilizada a técnica de interpolação matemática para determinação de tais deslocamentos.

As funções de aproximação ( $\varphi$ ) foram tomadas como sendo polinômios de primeiro grau e tem como incógnitas os deslocamentos nos pontos nodais. Considerando o sistema de coordenadas locais com origem no nó 1, as funções de interpolação ( $\varphi_i$ ) podem ser escritas como:

$$\varphi_1^e(\bar{x}) = 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \quad (28)$$

$$\varphi_2^e(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{L_e} \quad (29)$$

Partindo-se da equação (12) e utilizando as equações (28) e (29) pode-se escrever  $u_h$ ,  $v_h$  e  $\Psi_h$  como:

$$u_h = u_1 \left( 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \right) + u_2 \left( \frac{\bar{x}}{L_e} \right) \quad (30)$$

$$v_h = v_1 \left( 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \right) + v_2 \left( \frac{\bar{x}}{L_e} \right) \quad (31)$$

$$\Psi_h = \Psi_1 \left( 1 - \frac{\bar{x}}{L_e} \right) + \Psi_2 \left( \frac{\bar{x}}{L_e} \right) \quad (32)$$

Na seção 2.2 foi apresentada a equação da energia potencial total de um sistema estável, equação (11), e que por conveniência é mostrada novamente na sequência:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \quad (11)$$

Para este projeto, a parcela que representa as forças de campo é nula e a que representa as forças de superfície estão associadas às forças no contorno do elemento, ou seja, carregamentos aplicados nos nós. Portanto, o pórtico plano está submetido apenas a carregamentos nodais concentrados. Com isso, o trabalho das forças externas consiste do produto entre a força nodal concentrada e o respectivo deslocamento nodal. O domínio de interesse ( $\Omega$ ) no presente caso é o volume do elemento.

A relação constitutiva, abordada nos conceitos de resistências dos materiais, diz que a tensão em qualquer ponto do corpo  $\{\sigma_T\}$  pode ser expressa por:

$$\{\sigma_T\} = [E] \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} = \{\sigma\} + \{\sigma_0\} \quad (33)$$

onde  $[E]$  é a matriz constitutiva,  $\{\varepsilon\}$  é o vetor de deformações e  $\{\sigma_0\}$  são as tensões iniciais no corpo, que neste projeto são induzidas por forças externas.

A dedução das matrizes elementares foi baseada no trabalho desenvolvido por Faria e Almeida (2006) e é discutida na sequência.

O estado de equilíbrio de uma estrutura quando submetida a um estado inicial de tensão induzidas por forças externas é governado pela seguinte equação:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_0 \cdot \varepsilon^L d\Omega - \int_{\Gamma} t_i \cdot u_i d\Gamma = 0 \quad (34)$$

Substituindo a equação (33) na equação (11) e lembrando que as forças de superfície estão relacionadas com carregamentos nodais concentrados, conforme explicitado anteriormente, pode-se reescrever a energia potencial como:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V (\{\sigma\} + \{\sigma_0\})^T \{\varepsilon\} dV - \sum_{i=1}^{ngdl} P_i u_i = \frac{1}{2} \int_V (\{\sigma\} + \{\sigma_0\})^T (\{\varepsilon^L\} + \{\varepsilon^{NL}\}) dV - \sum_{i=1}^{ngdl} P_i u_i \quad (35)$$

onde *ngdl* corresponde ao produto do número de graus de liberdade por nó pela quantidade total de nós do modelo.

Desenvolvendo a equação (35) tem-se:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^L\} + \{\sigma_0\}^T \{\varepsilon^L\} + \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{NL}\} + \{\sigma_0\}^T \{\varepsilon^{NL}\} dV - \sum_{i=1}^{ngdl} P_i u_i \quad (36)$$

A teoria de rigidez geométrica negligencia o termo  $\{\sigma\}^T \{\varepsilon^{NL}\}$  tal que a linearização do problema é caracterizada (FARIA e ALMEIDA, 2006). Ainda, considerando a equação (34), pode-se reescrever a equação (36) como:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^L\} + \{\sigma_0\}^T \{\varepsilon^{NL}\} dV \quad (37)$$

onde os termos  $\{\varepsilon^L\}$  e  $\{\varepsilon^{NL}\}$  referem-se às parcelas de deformação linear e não linear, respectivamente.

Em termos matemáticos o princípio da mínima energia potencial diz que (SEGERLIND, 1984):

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_i} = 0; i = 1, \dots, n \quad (38)$$

onde  $u_i$  corresponde ao respectivo grau de liberdade.

Aplicando o PMEP, equação (38), para cada grau de liberdade obtém-se o sistema de equações elementares para a resolução do problema. As equações para determinação das matrizes elementares de rigidez  $[K]^e$  e rigidez geométrica  $[K_G]^e$  são apresentadas na sequência:

$$[K]^e = \int_V \{\varepsilon_{xx}^L\}^T E \{\varepsilon_{xx}^L\} dV + \int_V \{\gamma_{xy}^L\}^T G \{\gamma_{xy}^L\} dV \quad (39)$$

$$[K_G]^e = \int_V \{\sigma_{xx_0}\}^T \{\varepsilon_{xx}^{NL}\} dV + \int_V \{\tau_{xy_0}\}^T \{\gamma_{xy}^{NL}\} dV \quad (40)$$

Os termos  $\{\sigma_{xx_0}\}^T$  e  $\{\tau_{xy_0}\}^T$  nas equações (39) e (40) representam as parcelas de tensões pré-flambagem, caracterizando a dependência linear da matriz de rigidez geométrica com o estado inicial de tensão. Estes termos são obtidos a partir dos deslocamentos de pré-flambagem, que por sua vez são determinados através da solução de um problema do tipo  $[K]\{q\} = \{P\}$ , onde  $\{q\}$  são os deslocamentos pré-flambagem e  $\{P\}$  é o carregamento aplicado.

Até este ponto foram determinadas as equações para a obtenção das matrizes  $[K]^e$  e  $[K_G]^e$ . Resta então determinar a equação da matriz de massa elementar  $[M]^e$ , que provém da energia cinética ( $EC$ ). A energia cinética é definida pela seguinte equação:

$$EC = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{U}^2 + \dot{V}^2 dV \quad (41)$$

onde  $\rho$  representa a densidade do material que constitui o elemento e o termo entre parênteses representa a taxa de variação do deslocamento em relação ao tempo, ou seja, a velocidade, ao quadrado.

Desenvolvendo a equação (41) tem-se:

$$EC = \frac{1}{2} \int_V \dot{u}_h^2 + 2y\dot{u}_h\dot{\psi}_h + y^2\dot{\psi}_h^2 + \dot{v}_h^2 \rho dV = \frac{1}{2} \int_0^L [A\rho \dot{u}_h^2 + \dot{v}_h^2 + I\rho\dot{\psi}_h^2] dx \quad (42)$$

As velocidades elementares  $\dot{u}_h$ ,  $\dot{v}_h$  e  $\dot{\psi}_h$  foram obtidas através de interpolação linear das velocidades nodais, e em forma matricial, são descritas como:

$$\dot{u}_h = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = N_u \dot{q} \quad (43)$$

$$\dot{v}_h = \begin{bmatrix} 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 \end{bmatrix} \dot{q} = N_v \dot{q} \quad (44)$$

$$\dot{\psi}_h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \dot{q} = [N_\psi] \dot{q} \quad (45)$$

onde  $\xi = \bar{x}/L_e$  e  $[N_u]$ ,  $[N_v]$  e  $[N_\psi]$  são os vetores com as funções de aproximação.

Substituindo as equações (43), (44) e (45) na equação (42) e fazendo-se algumas manipulações algébricas obtém-se:

$$EC = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left( \int_0^L A\rho N_u^T N_u dx + \int_0^L A\rho N_v^T N_v dx + \int_0^L I\rho [N_\psi]^T [N_\psi] dx \right) \dot{q} \quad (46)$$

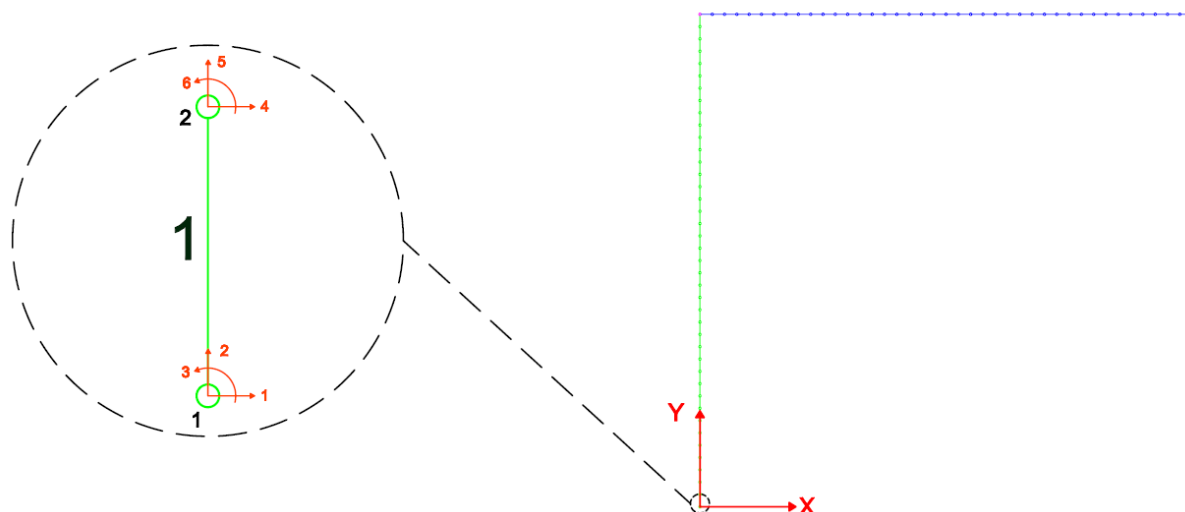
Portanto, a matriz de massa elementar  $[M]^e$  é definida por:

$$M^e = \int_0^L A\rho N_u^T N_u dx + \int_0^L A\rho N_v^T N_v dx + \int_0^L I\rho [N_\psi]^T [N_\psi] dx \quad (47)$$

Definidas as matrizes  $[K]^e$ ,  $[K_G]^e$  e  $[M]^e$  relativas ao sistema global de coordenadas, partiu-se para a determinação das matrizes globais  $[K]$ ,  $[K_G]$  e  $[M]$ . Tais matrizes são obtidas através da superposição de cada uma das matrizes elementares de modo a preservar a continuidade. Superposição pode ser entendida como a soma dos elementos das matrizes elementares que possuem efeitos do grau de liberdade coincidentes. Ao contrário das matrizes elementares que representam apenas um elemento, as matrizes globais representam a estrutura completa englobando todas as matrizes elementares. A mesma técnica de superposição foi utilizada para determinação do vetor de forças globais  $\{P\}$ .

Conforme já foi citado, ambas as colunas do pórtico foram consideradas engastadas em suas extremidades inferiores. Por exemplo, o nó 1 do elemento 1, mostrado em detalhe na Figura 22, tem os três graus de liberdade (1, 2 e 3) restringidos, o que implica em deslocamento nulo em qualquer uma das direções. De forma análoga, a mesma consideração foi feita para os graus de liberdade (361, 362 e 363) do nó 121 pertencente ao elemento 120.

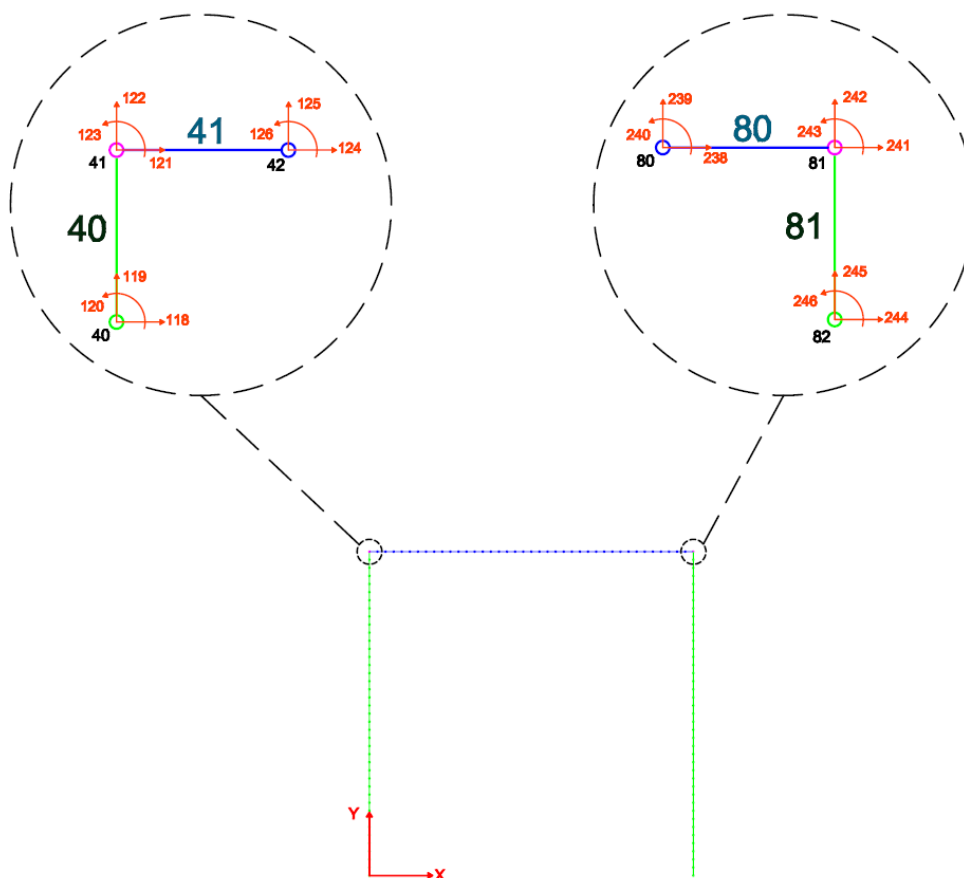
Tais considerações de deslocamento nulo implicam em aplicações de condições de contorno nas matrizes  $[K]$ ,  $[K_G]$  e  $[M]$ . Por exemplo, na matriz de rigidez global, as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade restringidos são zeradas, excetuando-se os elementos situados na diagonal principal que recebem o valor 1. Com isto, a matriz  $[K]$  deixa de ser singular tornando possível o procedimento de cálculo.



**Figura 22: Condições de contorno de deslocamento para o elemento 1**

Quatro são os grupos que constituem os carregamentos aplicados na estrutura. Em cada grupo considerou-se dois casos de carregamento. Todas as cargas aplicadas são forças nodais concentradas. Os nós de aplicação destas cargas são os nós 41 e 81. As regiões de aplicação das cargas estão detalhadas na Figura 23.





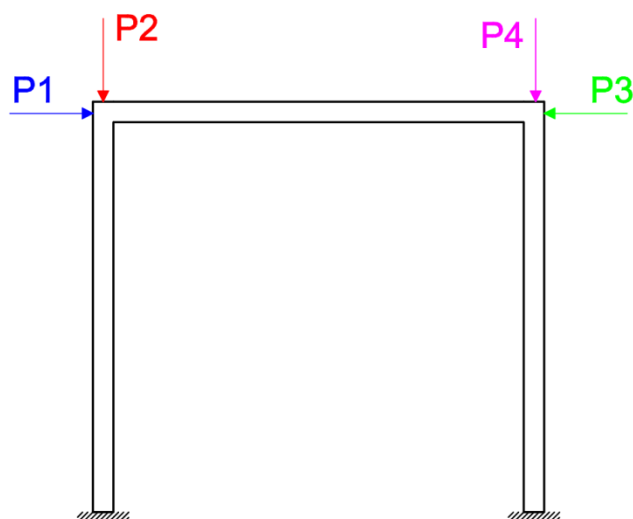
**Figura 23: Detalhe das regiões de aplicação das cargas nodais concentradas**

Na Tabela 5 (seção 5.1) constam os valores das cargas para os casos de carregamentos considerados.

Quanto às direções das cargas considerou-se:

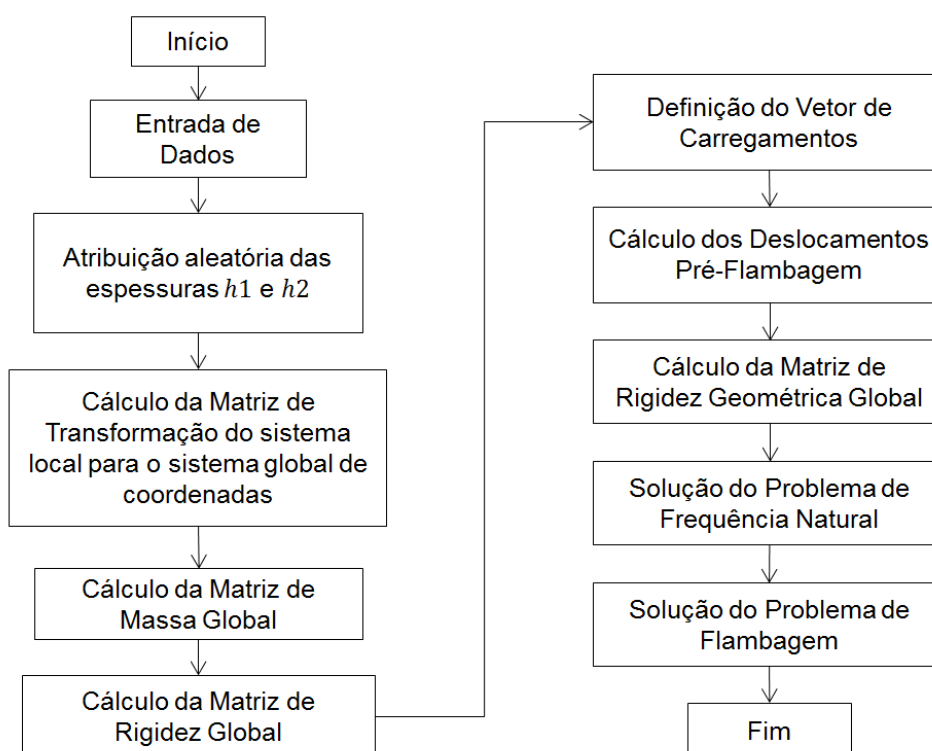
- P1: Atua no nó 41 e na direção positiva do grau de liberdade 121;
- P2: Atua no nó 41 e na direção negativa do grau de liberdade 122;
- P3: Atua no nó 81 e na direção negativa do grau de liberdade 241;
- P4: Atua no nó 81 e na direção negativa do grau de liberdade 242.

A Figura 24 ilustra o sentido e direção das cargas atuantes no pórtico plano.



**Figura 24: Direção e sentidos das cargas atuantes no pórtico plano**

Concluído os passos anteriores, partiu-se para a programação do modelo computacional matemático em ambiente MATLAB. A Figura 25 representa o algoritmo simplificado do programa desenvolvido.



**Figura 25: Algoritmo do programa desenvolvido**

### 4.3 Validação dos Resultados

A validação dos resultados foi realizada com a versão educacional do programa ANSYS. De acordo com Cook (1995) uma análise de elementos finitos utilizando programas comerciais é constituída de três etapas:

1. Preparação do modelo em elementos finitos. Nesta etapa o analista deve
  - a. discretizar a estrutura dividindo-a em um número finito de elementos,
  - b. definir o tipo de elemento e propriedades do material,
  - c. prescrever como a estrutura é carregada,
  - d. prescrever como a estrutura é suportada.
2. Realização dos cálculos. O programa deve
  - a. gerar as matrizes elementares que descrevem o comportamento de cada elemento,
  - b. combinar as matrizes elementares para obter as matrizes globais,
  - c. solucionar a equação global para obter os deslocamentos nodais.
3. Cálculo das deformações e tensões.

Estas três etapas são respectivamente denominadas de pré-processamento, processamento e pós-processamento.

O objetivo da validação é confirmar se os resultados obtidos com o programa matemático computacional implementado estão corretos. O primeiro passo foi a escolha, de forma arbitrária, para os valores das variáveis  $h_1$  e  $h_2$  e também para o caso de carregamento considerado.

Os parâmetros de entrada estão resumidos na Tabela 3. Os demais parâmetros não listados na tabela permanecem inalterados e conforme discutidos na seção 4.2.

**Tabela 3: Dados de entrada para validação do modelo matemático computacional**

	<b>Variável</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
<b>Altura da seção transversal</b>	h1	0.055	<i>m</i>
	h2	0.055	<i>m</i>
<b>Carregamento</b>	P1	0	<i>N</i>
	P2	45000	<i>N</i>
	P3	0	<i>N</i>
	P4	45000	<i>N</i>

Portanto, atribuiu-se o valor de 55 mm tanto para a espessura da seção transversal das colunas quanto para a viga. Quanto ao caso de carregamento, foi considerado duas forças de 45000N, P2 e P4, que atuam simultaneamente comprimindo verticalmente o pórtico plano.

Considerando estes dados de entrada obteve-se, com o programa a ser validado, a solução do problema de flambagem e frequência natural. Na sequência, resolveu-se o problema com os mesmos dados de entrada no programa ANSYS.

A resolução do problema no ANSYS iniciou-se com a definição do tipo de elemento. Neste trabalho utilizou-se o elemento *BEAM3*, que é um elemento de viga reto com três graus de liberdade por nó e com capacidade de resistir às forças de tração, compressão e flexão (ANSYS, 2005).

A seguir foram definidas as propriedades da seção transversal das colunas e da viga. Após, construiu-se o modelo geométrico, gerou-se a malha e aplicou-se a condição de engastamento nos nós inferiores das colunas. O último passo do pré-processamento foi a imposição do caso de carregamento nos nós de interesse. A geometria do modelo matemático está ilustrada na Figura 26.

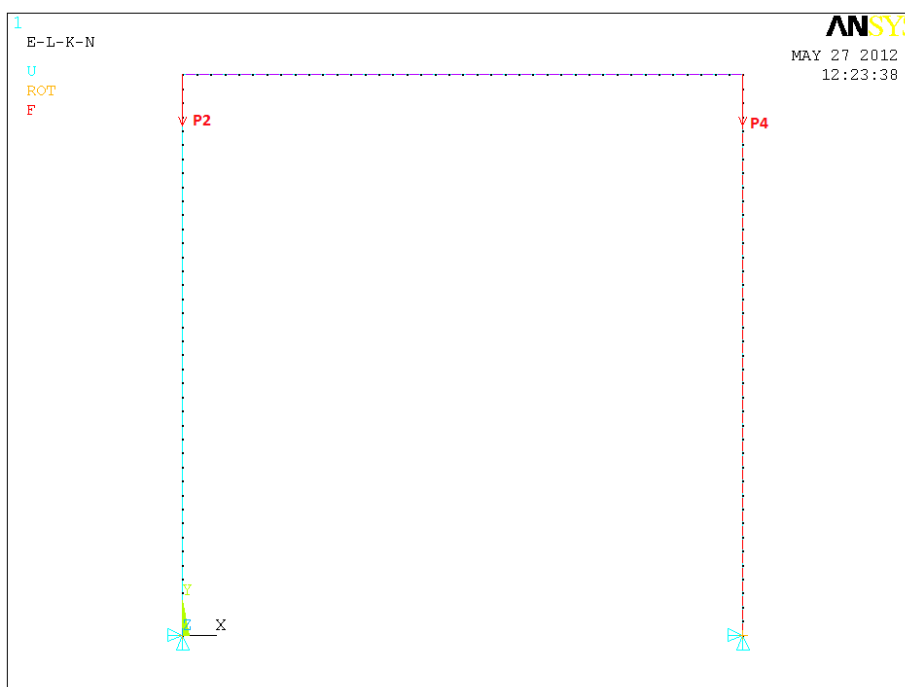
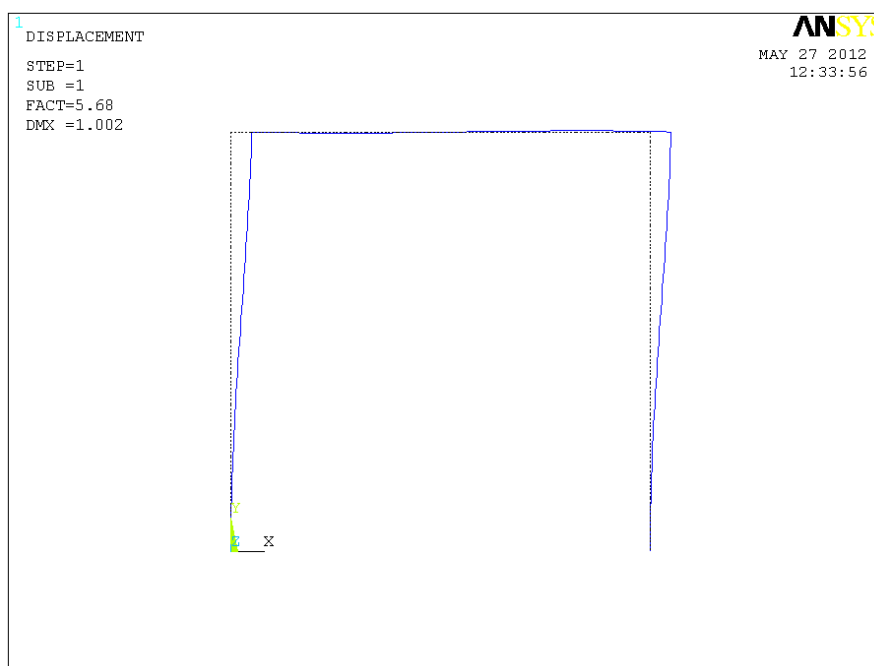


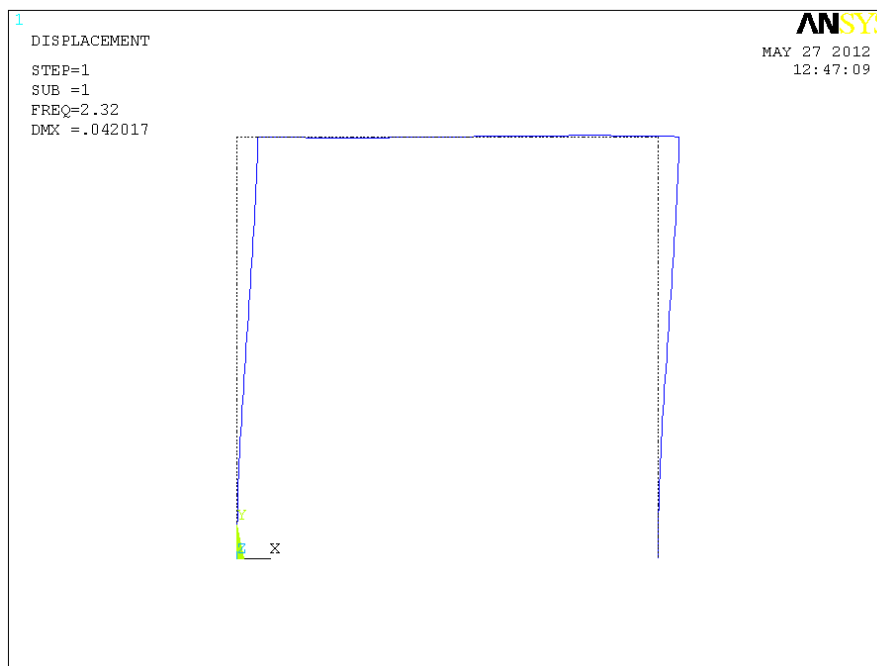
Figura 26: Pórtico plano discretizado no Ansys para validação dos resultados

Na etapa de pré-processamento, tanto a resolução do problema de flambagem quanto o da frequência natural apresentam os mesmos procedimentos de entrada de dados. Já na etapa de processamento, primeiramente resolveu-se a solução estática do problema para então solucionar cada um dos problemas separadamente. A solução do problema de flambagem foi realizada através da opção “*eigen buckling*” e a solução do problema de frequência através da opção “*modal*”. Ambas as opções são uma resolução de um problema de autovalores e autovetores. Na etapa de pós-processamento obtiveram-se os autovalores para os problemas em análise.

A solução para os problemas de flambagem e frequência, através do ANSYS, podem ser visualizados na Figura 27 e Figura 28, respectivamente.



**Figura 27: Resultado da validação para o problema de flambagem**



**Figura 28: Resultado da validação para o problema de frequência fundamental**

A Tabela 4 mostra os resultados obtidos com o modelo computacional matemático e com o programa Ansys. Pode-se notar que os resultados foram bastante próximos, concluindo-se que o modelo computacional matemático desenvolvido está correto.

**Tabela 4: Comparativo entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido em ambiente MATLAB e os obtidos no programa ANSYS**

	<b>MATLAB</b>	<b>ANSYS</b>	<b>Erro (%)</b>
<b>Frequência [Hz]</b>	2.321	2.320	0.049
<b>Flambagem</b>	5.685	5.680	0.087

#### **4.4 Implementação da Otimização**

Uma vez validado o modelo matemático computacional iniciou-se a implementação do procedimento de otimização em ambiente MATLAB.

Este trabalho possui duas funções objetivo, o que inicialmente pode representar uma dificuldade relativa. Os dois critérios a serem otimizados são a frequência fundamental e a carga crítica de flambagem. Antes de iniciar o processo de otimização, estes dois critérios impreterivelmente devem ser normalizados para que possam ser diretamente comparados.

Uma forma prática de se fazer isso é checar entre as especificações de projeto e tentar obter valores objetivos para as cargas de flambagem e frequência natural e usar esses valores como fatores de normalização. Matematicamente, se as cargas máximas de flambagem  $p_1, p_2, \dots, p_i$  estão disponíveis nas especificações de projeto bem como uma frequência fundamental  $\omega_0$ , então se pode usar funções objetivo normalizadas  $\lambda_i^* = \lambda_i/p_i$  e  $\omega_i^* = \omega_i/\omega_0$  (FERREIRA, 2010).

Portanto, o projeto ótimo torna-se dependente dos fatores de normalização, sendo tarefa do projetista selecionar os fatores de normalização adequados. Por outro lado, possui a vantagem da capacidade de detectar discrepâncias nos fatores de normalização e melhorar automaticamente os critérios de projeto que são mais vulneráveis (FERREIRA, 2010).

Neste trabalho normalizou-se apenas a frequência ( $\omega$ ), visto que o fator de flambagem ( $\lambda$ ), como calculado aqui, já é adimensional. A normalização da frequência utilizou-se do parâmetro de normalização ( $\omega_0$ ), que pode representar o menor valor de frequência fundamental admissível. Neste trabalho, adotou-se  $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$ , visando apenas uma comparação de critérios apropriada. Em aplicações práticas, onde se tenha uma especificação de frequência mínima desejada,  $\omega_0$  influi diretamente no resultado da otimização podendo tornar a frequência o critério dominante ou não.

Conforme já foi discutido, cada grupo de carregamento possui dois casos de carregamento. Então, a resolução do modelo matemático computacional ao final de uma iteração fornece quatro respostas: a frequência fundamental e a carga crítica de flambagem para os respectivos casos de carregamento. A função ( $\phi$ ), por vezes também denominada de função desempenho ( $FD$ ), recebe o mínimo dentre estes quatro valores. Esta é a primeira etapa da estratégia minimax.

A segunda etapa da estratégia minimax consiste na maximização da função ( $\phi$ ) com relação às variáveis de projeto. O método de Powell foi utilizado para realizar esta maximização.

De acordo com Vanderplaats (1984) o método de Powell é baseado no conceito de direções conjugadas, onde as direções  $\{S\}^i$  e  $\{S\}^j$  são conjugadas se:

$$(\{S\}^i)^T [\nabla^2] \{S\}^j = 0 \quad (48)$$

onde  $[\nabla^2]$  é a matriz Hessiana, ou seja, matriz das derivadas de segunda ordem da função objetivo com relação às variáveis de projeto.

O primeiro passo da maximização é buscar em  $n$  direções ortogonais, sendo  $n$  o número de variáveis de Powell; neste projeto têm-se duas variáveis de Powell ( $h1$  e  $h2$ ), portanto,  $n = 2$ . Cada busca consiste em atualizar o vetor das variáveis de projeto,  $X_p$ , de acordo com a equação (1). Inicialmente, as direções de busca não são conjugadas, porém, fornecem um ponto inicial para construção das direções conjugadas.

Segundo Vanderplaats (1984) é conveniente armazenar a informação de busca em uma matriz  $[H]_{n \times n}$ , a qual é iniciada com a matriz identidade:

$$[H] = [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

onde as colunas de  $[H]$  são os vetores de busca unidirecionais  $\{S\}^i$ ,  $i = 1, n$ . A matriz  $[H]$  é bastante próxima à matriz Hessiana, porém, não utiliza informação das derivadas de segunda ordem da função objetivo. É por isso que o método de Powell se enquadra como um método de ordem zero, conforme definido na seção 2.1.6.

Após encontrar o mínimo em cada direção usando a equação (1), substitui-se  $\{S\}^i$  na matriz  $[H]$  por  $\alpha_i \{S\}^i$ , que após  $n = 2$  iterações fornece:

$$[H] = \begin{bmatrix} \alpha_1^* \{S\}^1 & \alpha_2^* \{S\}^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

onde  $\alpha_i$  foi determinado através do método da seção áurea e representa o parâmetro de movimento ou multiplicador escalar.

Então, cria-se a direção conjugada  $n + 1$ :

$$\{S\}^{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \{S\}^i = \text{somatório das colunas de } [H] \quad (51)$$

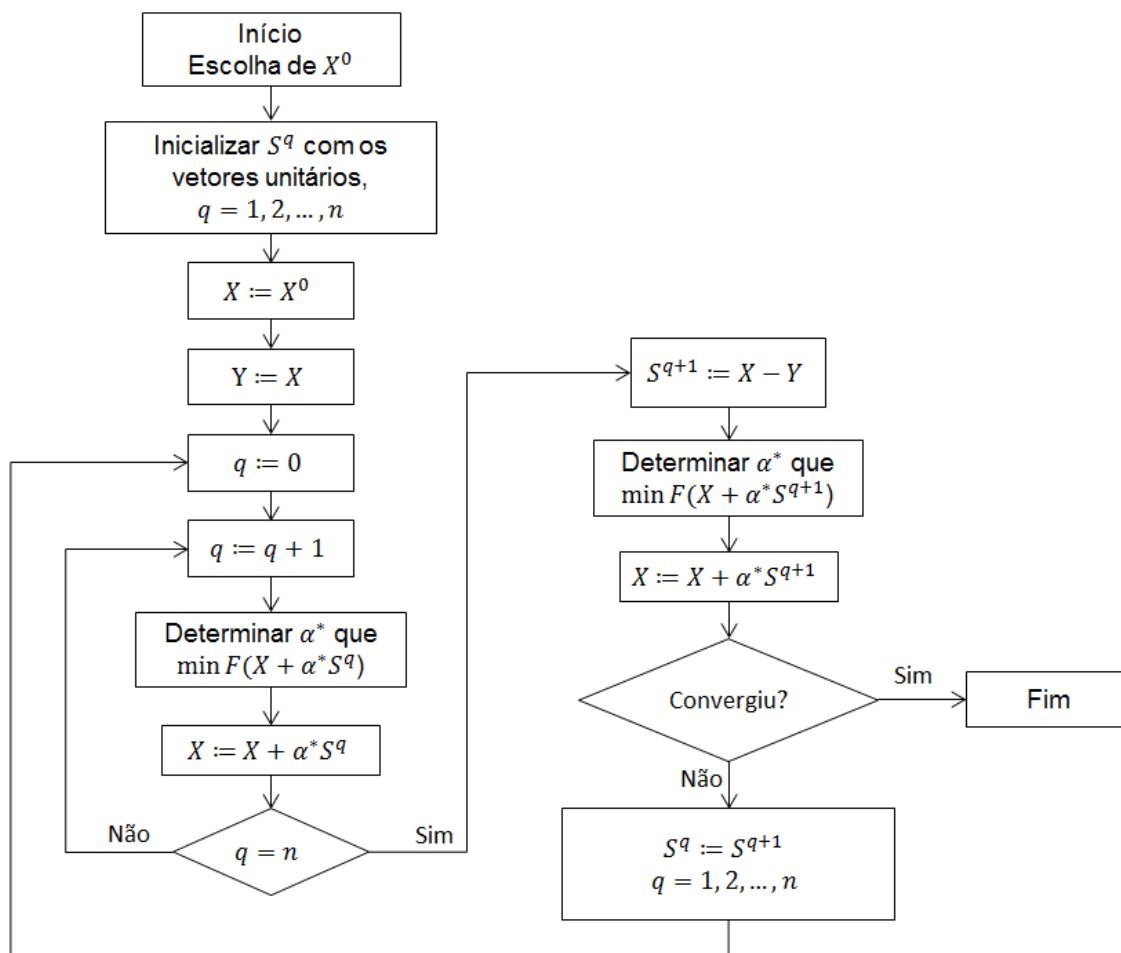
Em seguida, busca-se nesta nova direção para determinar  $\alpha_{n+1}^*$ . Posteriormente, ocorre o deslocamento à esquerda das colunas da matriz  $[H]$ . Mais especificamente,  $\alpha_2^* \{S\}^2$  ocupa o lugar de  $\alpha_1^* \{S\}^1$  e  $\alpha_{n+1}^* \{S\}^{n+1}$  substitui  $\alpha_2^* \{S\}^2$ :



$$[H] = \begin{bmatrix} \alpha_2^* \{S\}^2 & \alpha_{n+1}^* \{S\}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Com isso, tem-se uma nova matriz  $[H]$  contendo  $n$  direções de busca para começar todo o processo novamente até atingir o critério de convergência.

A Figura 29 ilustra o algoritmo do método de Powell.



**Figura 29: Algoritmo do Método de Powell**  
**Fonte: Adaptado de Vanderplaats (1984)**

Pode-se dizer que o método de Powell é competitivo para problemas de otimização relativamente pequenos ou com custo computacional de avaliação da função objetivo pequeno. Isto porque as  $n + 1$  buscas unidirecionais necessárias para obter a direção conjugada são apenas uma iteração do método de Powell, ou seja, assumindo que um ponto ótimo de uma função quadrática é encontrado em  $n$

ou menos direções conjugadas, na verdade o algoritmo realiza  $n(n + 1)$  iterações até obter a convergência. Porém, cada iteração requer muitas avaliações da função objetivo para encontrar o  $\alpha^*$  ótimo.

Durante o processo de otimização, a configuração das espessuras deve respeitar a restrição de volume ( $RV$ ) inicialmente imposta, ou seja, a estrutura possui volume constante. A restrição de volume é dada por:

$$RV = b_1L_1h_1 + b_2L_2h_2 + b_3L_3h_3 = \sum_{i=1}^3 b_iL_ih_i \quad (53)$$

onde  $L_i$  é o comprimento,  $b_i$  a largura e  $h_i$  a espessura da seção transversal do componente  $i$  do pórtico plano. Neste projeto foi adotado  $RV = 0,396 \text{ m}^3$ .

Os valores de  $L_i$  e  $b_i$  tanto para as colunas quanto para as vigas são os mesmos e foram definidos na Tabela 1. Com isso, pode-se reescrever a equação (53) como:

$$\frac{RV}{\sum_{i=1}^3 b_iL_i} = h_1 + h_2 + h_3 \quad (54)$$

onde  $h_1$  representa a espessura da seção transversal da primeira coluna,  $h_2$  representa a espessura da seção transversal da viga e  $h_3$  representa a espessura da seção transversal da segunda coluna. Em termos numéricos tem-se:

$$h_1 + h_2 + h_3 = \frac{0,396}{3 \cdot (0,2 \cdot 4)} = 0.165 \quad (55)$$

Porém, como  $h_3 = h_1$ , pode-se reescrever a equação (55) como:

$$2h_1 + h_2 = 0.165 \quad (56)$$

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos.

### 5.1 Carregamentos

Os grupos, bem como os casos de carregamentos considerados nas análises, estão listados na Tabela 5.

Tabela 5: Grupos de carregamentos

Grupo	Caso de Carregamento	CARGA [N]			
		P1	P2	P3	P4
1	A		85000		85000
	B	50000		50000	
2	C		20000		20000
	D	70000		70000	
3	E		85000		83000
	F	67000		70000	
4	G		50000		50000
	H	50000		50000	

As direções e sentidos das cargas consideradas foram discutidos na seção 4.2.

As cargas foram escolhidas de forma arbitrária, visando ilustrar o procedimento de otimização proposto. Para isso foram adotados quatro tipos de carregamentos: cargas verticais iguais e maiores que as cargas horizontais; cargas horizontais iguais e maiores que as cargas verticais; cargas verticais e horizontais diferentes em todos os pontos; e por fim, cargas horizontais e verticais iguais.

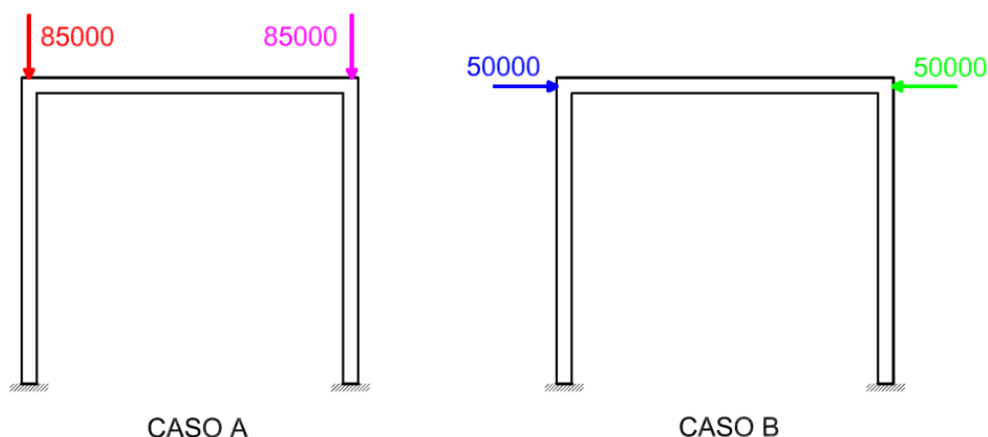
### 5.2 Análises

As análises estão relacionadas com os grupos de carregamento, ou seja, cada grupo consiste em uma análise. Os únicos dados de entrada distintos entre as análises são os valores dos carregamentos. Ao final de cada análise é apresentada

a configuração das espessuras que maximiza a carga crítica de flambagem e a frequência fundamental, respeitando a restrição de volume.

### 5.2.1 Análise 1

Os dois casos de carregamento para a análise 1 estão ilustrados na Figura 30.



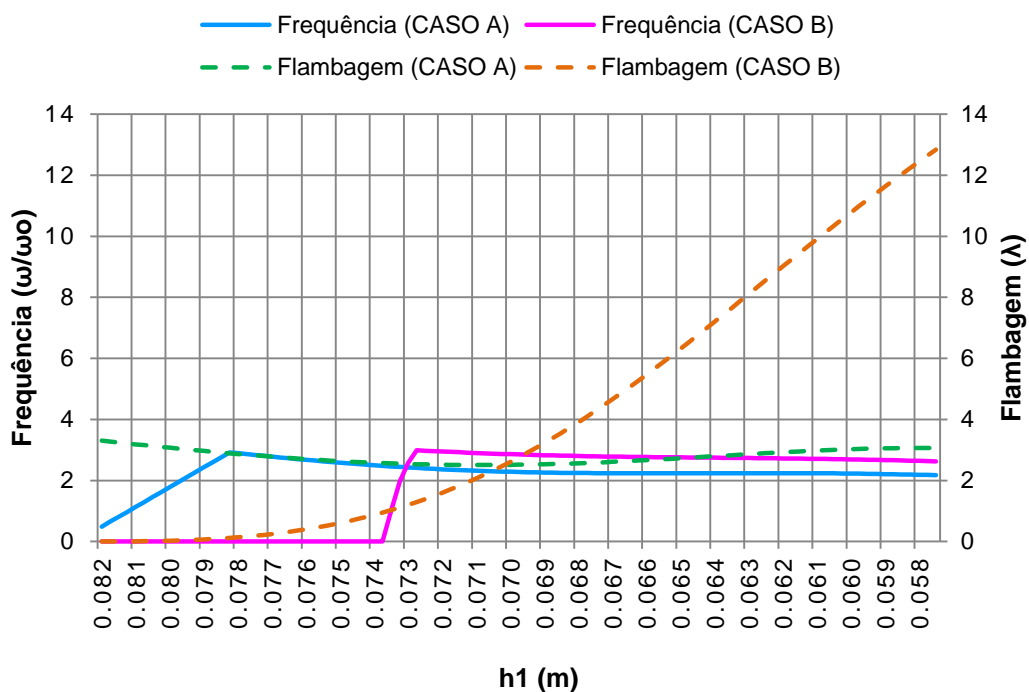
**Figura 30: Casos de carregamento para a análise 1**

O CASO A consiste em duas forças de 85000N, cada uma comprimindo verticalmente o pórtico. Já o CASO B consiste em duas forças de 50000N comprimindo horizontalmente o pórtico.

Devido à consideração de volume constante para o pórtico plano durante o processo de otimização, foi possível escrever a soma das espessuras das seções transversais das colunas e da viga como uma constante, conforme equação (56). Com isso, é possível realizar uma análise gráfica do problema a ser otimizado, a qual permite obter uma visualização completa da dependência da flambagem e frequência fundamental à medida que a espessura da seção transversal varia. Os resultados gráficos são obtidos calculando-se os valores de flambagem e frequência para cada caso de carregamento varrendo-se uma das espessuras ( $h_1$  ou  $h_2$ ), onde o intervalo de varredura deve respeitar a equação (56).

Para a análise 1 a análise gráfica está representada na Figura 31, que mostra a variação da flambagem e da frequência à medida que a espessura da seção transversal das colunas ( $h_1$ ) é alterada. O eixo das ordenadas é composto pelos

autovalores de flambagem ( $\lambda$ ) e autovalores normalizados de frequência ( $\omega/\omega_0$ ) enquanto que o eixo das abcissas é composto pelos valores da espessura da seção transversal em metro.



**Figura 31: Dependência da flambagem e da frequência com  $h_1$  para cada caso de carregamento da análise 1**

Na Figura 32 são identificados os pontos de interseção entre as curvas de flambagem e frequência para os casos de carregamentos considerados.

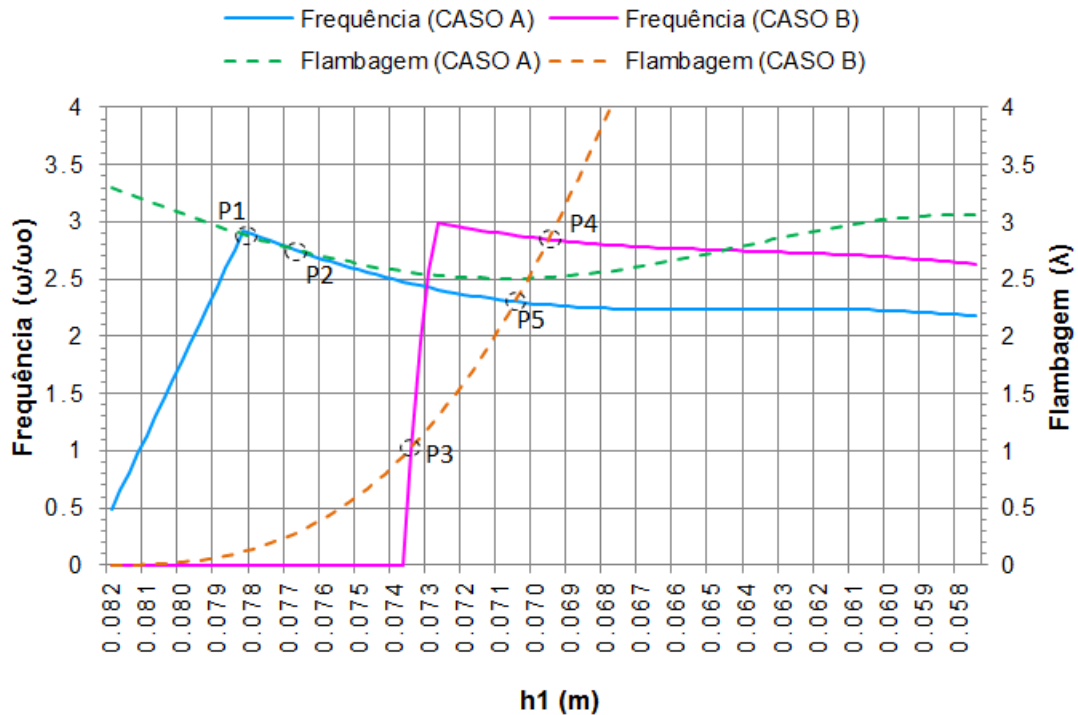


Figura 32: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 1

Analisando o gráfico é possível perceber que para o CASO A de carregamento a frequência é o critério dominante até o ponto P1, entre os pontos P1 e P2 a flambagem se torna o critério dominante, e a partir do ponto P2 a frequência se torna novamente dominante. Dessa forma, considerando o CASO A de carregamento isoladamente, o ponto ótimo seria o ponto P1. No entanto, a otimização considera também o CASO B de carregamento e para este carregamento a estrutura estaria flambada nesse ponto. Analisando-se agora o CASO B de carregamento isoladamente, a frequência é o critério dominante até o ponto P3, entre P3 e P4 a flambagem se torna o critério dominante e a partir de P4 a frequência volta a ser dominante. Para o CASO B de carregamento o ponto ótimo acontece então no ponto P4, porém, nesse ponto a pior condição de carregamento é o CASO A. Como a otimização é feita considerando a pior condição de carregamento, esse também não é ainda o ponto ótimo do processo de otimização.

Considerando os dois casos de carregamentos e analisando o gráfico da Figura 32, é possível perceber que até o ponto P3 a frequência para o CASO B de carregamento é o critério dominante. Entre os pontos P3 e P5 a flambagem para o CASO B se torna o critério dominante. A partir do ponto P5, a frequência para o

CASO A torna-se o critério dominante. O ponto onde os critérios são otimizados sem que os outros sejam prejudicados é o ponto P5. Neste ponto, a flambagem para o CASO B foi otimizada sem que a frequência para o CASO A fosse prejudicada e, ainda, a flambagem para o CASO A e a frequência para o CASO B possuem valores maiores. Dessa forma, o ponto deverá ser o ponto ótimo global do processo de otimização, visto que é o ponto onde os dois critérios atingem valores mais altos sem prejuízo dos demais.

Além de permitir uma visualização do comportamento da estrutura para várias configurações de espessuras, a análise gráfica é um dos métodos de validação do processo de otimização. E para que haja a validação do processo de otimização, o resultado obtido com este deve ser igual ao obtido pela análise gráfica.

No processo de otimização multicritério implementado foi utilizada a estratégia minimax, definida pela equação (10). A primeira etapa da estratégia minimax é a determinação da função desempenho e que, para o processo de otimização em questão, pode ser definida como:

$$FD = \min(\omega_A, \lambda_A, \omega_B, \lambda_B) \quad (57)$$

A função desempenho para a análise 1 está representada na Figura 33. Pode-se dizer que a curva obtida representa a fronteira dominante de projeto, e é a região de atuação do método de Powell.

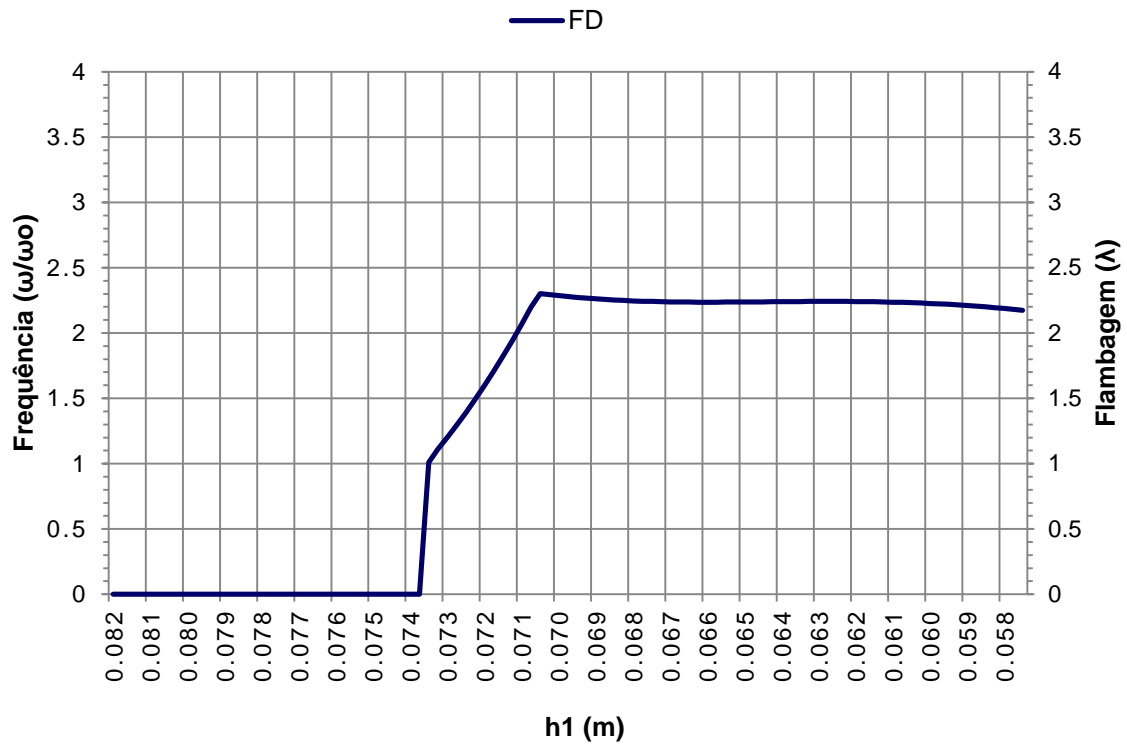


Figura 33: Função desempenho para a análise 1

A segunda etapa da estratégia minimax, que foi realizada através do método de Powell, consiste em determinar a espessura que maximiza a função desempenho:

$$\max_{\{h1\}} FD(\{h1\}) \quad (58)$$

O ponto em que a espessura maximiza a função desempenho é coincidente ao ponto P5 da Figura 32.

Os resultados obtidos pelo processo de otimização implementado encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6: Resultados do processo de otimização da análise 1

CASO A		CASO B		ESPESSURA		FLAMBAGEM	FREQÜÊNCIA
P2	P4	P1	P3	h1	h2	$\lambda$	$\omega/\omega_0$
[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[m]	[m]		
85	85	0	0	0.07029	0.02441	2.508	2.304
0	0	50	50			2.304	2.883



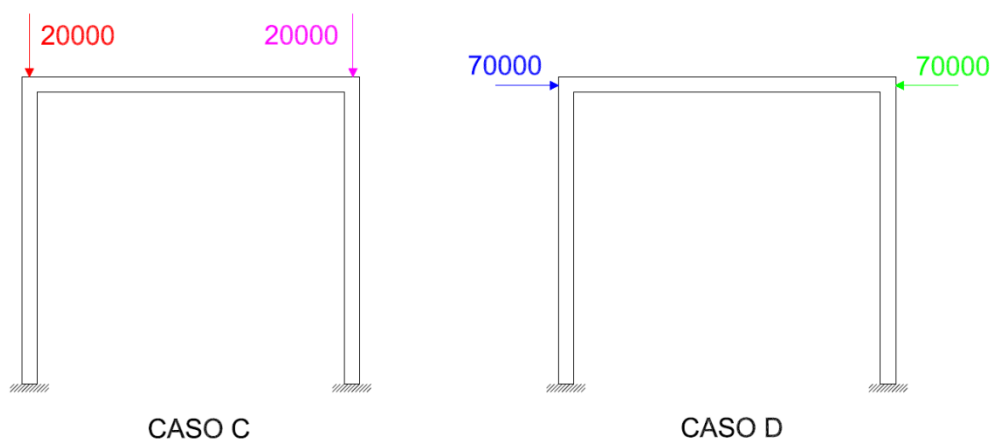
Portanto, as espessuras das seções transversais das colunas e da viga que maximizam simultaneamente a carga crítica de flambagem e a frequência fundamental em  $\lambda = \omega/\omega_o = 2.304$  são  $h1 = 70,29 \text{ mm}$  e  $h2 = 24,41 \text{ mm}$ , respectivamente. Tais resultados confirmam o ponto ótimo P5 conforme mostrado na Figura 32.

É importante ressaltar que os resultados obtidos no gráfico da Figura 31 também poderiam ser obtidos determinando-se as curvas de flambagem e frequência varrendo-se a espessura da viga ( $h2$ ). E uma vez determinado uma das espessuras das seções transversais pelo gráfico, a outra é obtida diretamente através da equação (56).

Da mesma maneira como foram apresentados os resultados da análise 1, na sequência será apresentado os resultados das outras análises.

### 5.2.2 Análise 2

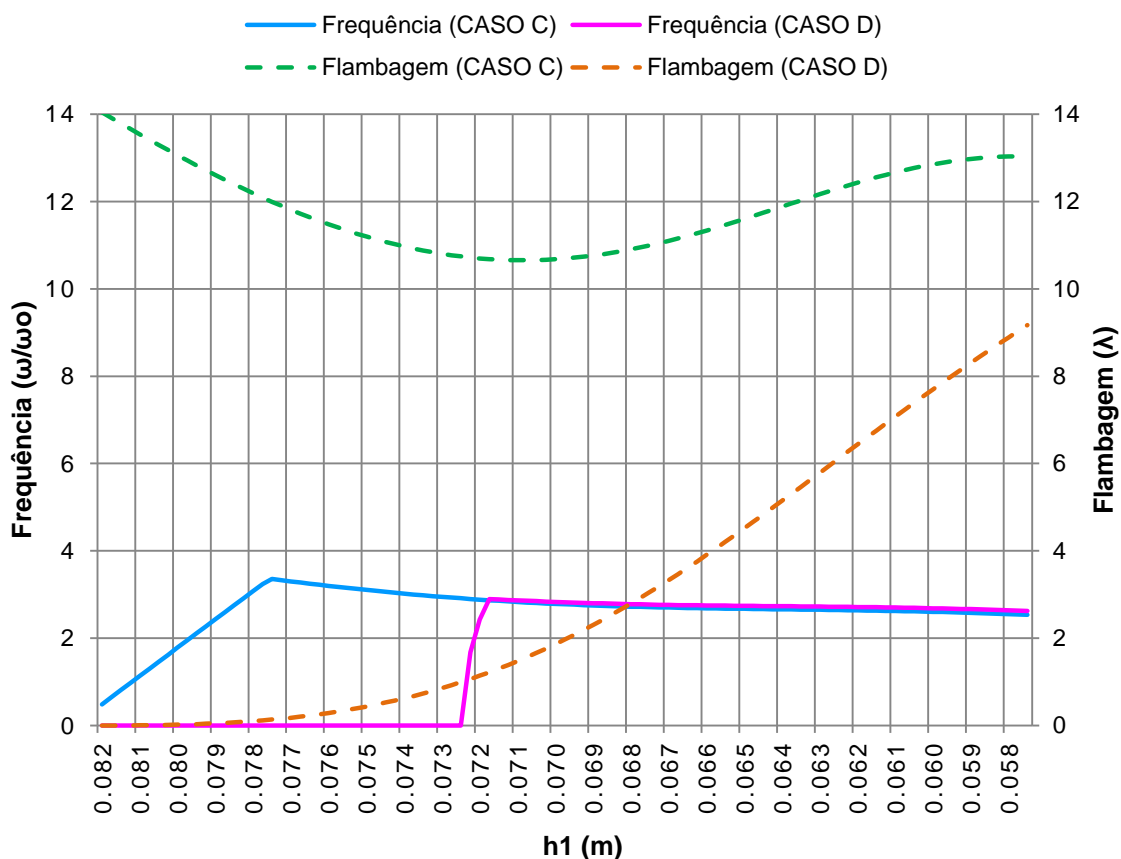
Os dois casos de carregamento para a análise 2 estão ilustrados na Figura 34:



**Figura 34: Casos de carregamento para a análise 2**

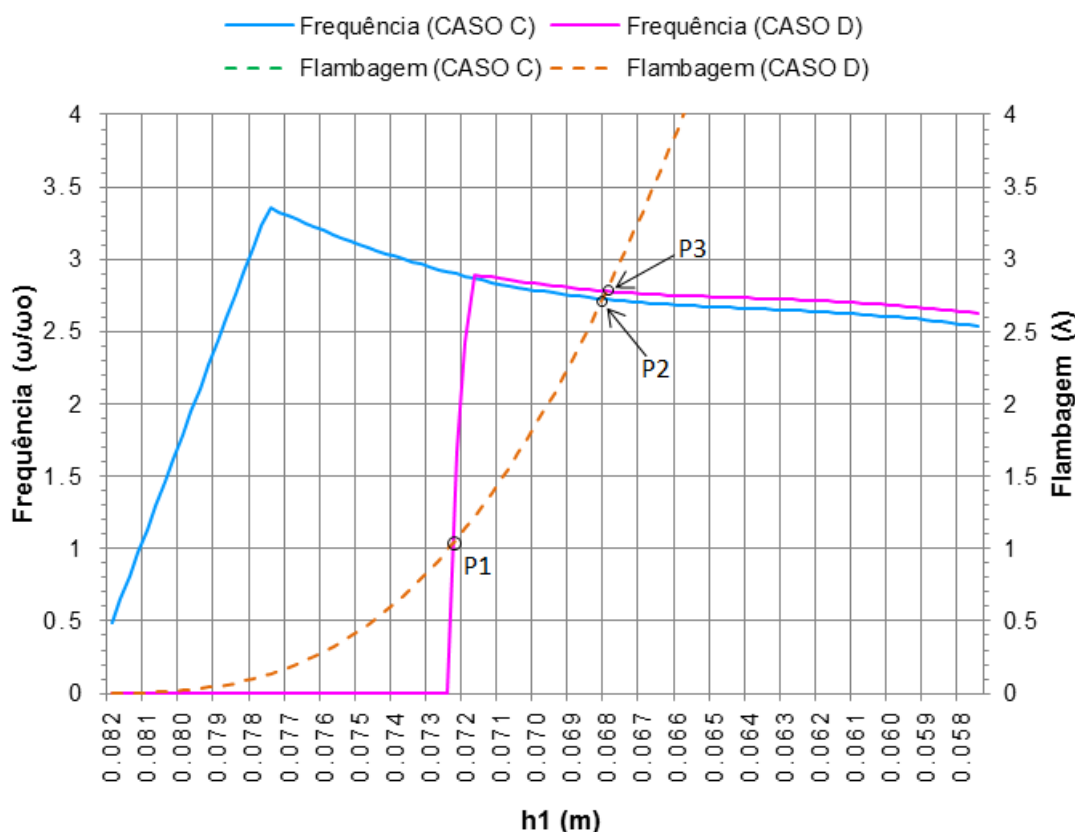
Portanto, o CASO C consiste em duas forças de 20000N, cada uma comprimindo verticalmente o pórtico e o CASO D consiste em duas forças de 70000N comprimindo horizontalmente o pórtico.

As curvas de flambagem e frequência para os dois casos de carregamento versus a variação da espessura da seção transversal da coluna ( $h_1$ ) estão ilustradas na Figura 35.



**Figura 35: Dependência da flambagem e da frequência com  $h_1$  para cada caso de carregamento da análise 2**

Pela análise da Figura 35 conclui-se que a flambagem para o CASO C de carregamento não é o critério dominante de projeto por não interceptar nenhuma das outras curvas em nenhuma configuração de espessura. Os três pontos de interseção entre as curvas são identificados na Figura 36.



**Figura 36: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 2**

Pela Figura 36 apenas dois são os possíveis pontos de projeto ótimo, pontos P1 e P2. O ponto P3 não é um candidato ao ponto ótimo, pois a frequência para o CASO C de carregamento tem um valor menor neste ponto. Assim, este ponto seria um caso particular de projeto em que dois critérios estão otimizados em prejuízo de um terceiro.

Ainda pela Figura 36 e considerando-se os dois casos de carregamento, até o ponto P1 o critério dominante é a frequência para o CASO D de carregamento; entre os pontos P1 e P2 a flambagem para o CASO D de carregamento torna-se o critério dominante; a partir do ponto P2 a frequência para o CASO C passa a ser o critério dominante. O ponto P2 é o ponto onde os critérios de flambagem para o CASO D e os de frequência para o CASO C apresentam os maiores valores sem prejuízo dos demais e, portanto, é o ponto no qual o processo de otimização deve encontrar o ótimo. Pelo gráfico, tem-se que  $h_1 \approx 0.068 \text{ m}$ .

Os resultados obtidos com o programa MATLAB estão resumidos na Tabela 7.

Tabela 7: Resultados do processo de otimização da análise 2

CASO C		CASO D		ESPESSURA		FLAMBAGEM	FREQUÊNCIA
P2 [kN]	P4 [kN]	P1 [kN]	P3 [kN]	h1 [m]	h2 [m]	$\lambda$	$\omega/\omega_0$
20	20	0	0	0.06788	0.02924	10.883	2.726
0	0	70	70			2.726	2.783

Portanto, as espessuras das seções transversais das colunas e da viga que maximizam simultaneamente a carga crítica de flambagem e a frequência fundamental são, respectivamente,  $h1 = 67.88 \text{ mm}$  e  $h2 = 29,24 \text{ mm}$ . O valor de  $h1$  obtido é bastante próximo ao que foi determinado pelo gráfico, o que confirma o ponto ótimo. A carga crítica de flambagem e a frequência neste ponto resultaram em  $\lambda = \omega/\omega_0 = 2.726$ .

### 5.2.3 Análise 3

Os dois casos de carregamento para a análise 3 estão ilustrados na Figura 37:

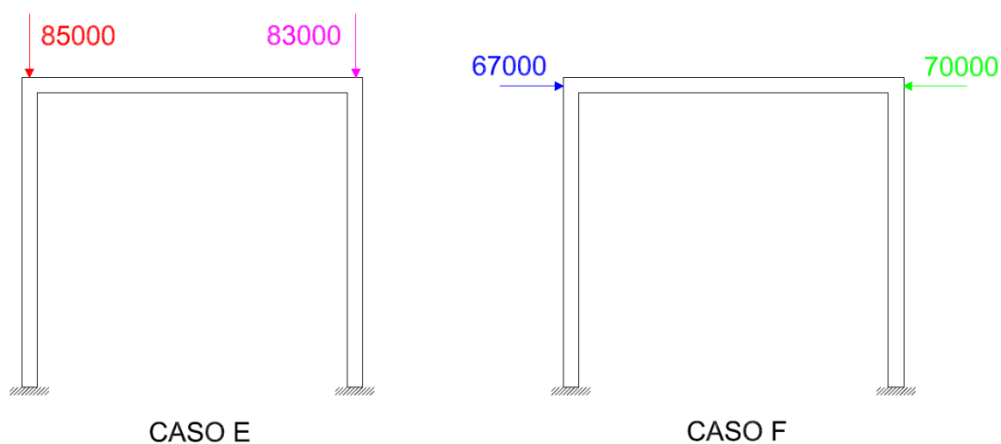


Figura 37: Casos de carregamento para a análise 3

Portanto, o CASO E consiste em uma força de 85000N e outra de 83000N, cada uma comprimindo verticalmente o pórtico e o CASO F consiste em uma força de 67000N e outra de 70000N comprimindo horizontalmente o pórtico.

Diferentemente do que foi efetuado nas duas análises antecedentes, nesta é mostrada a dependência das curvas de flambagem e frequência variando-se a espessura da seção transversal da viga ( $h_2$ ). Esta dependência está representada na Figura 38.

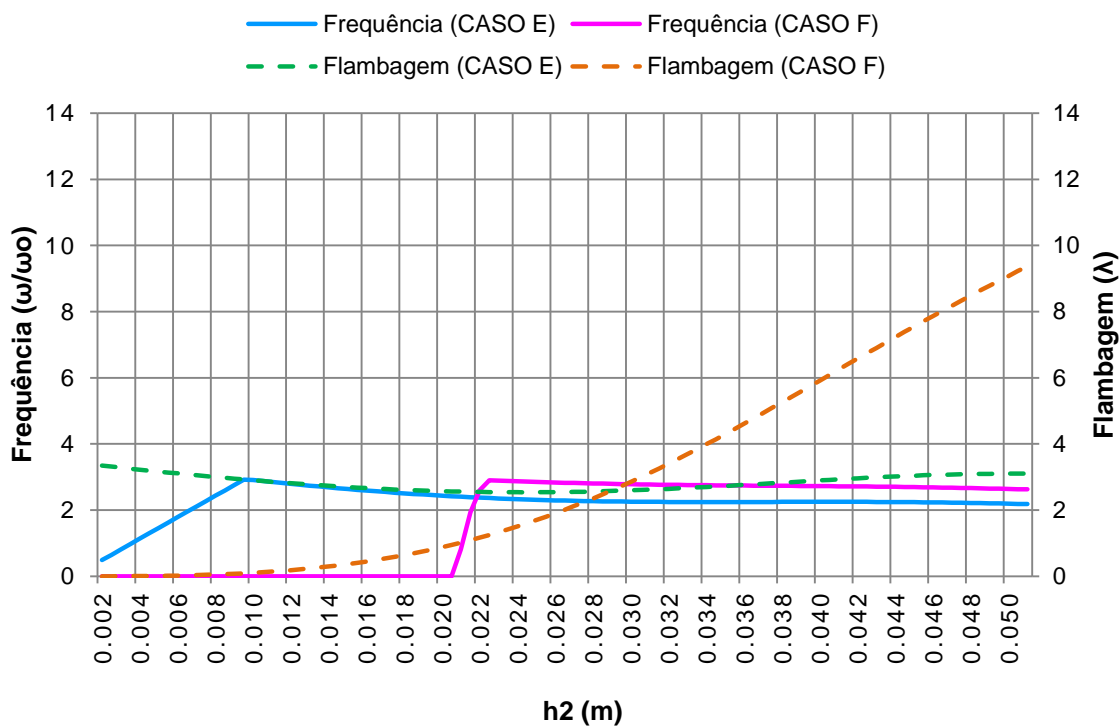
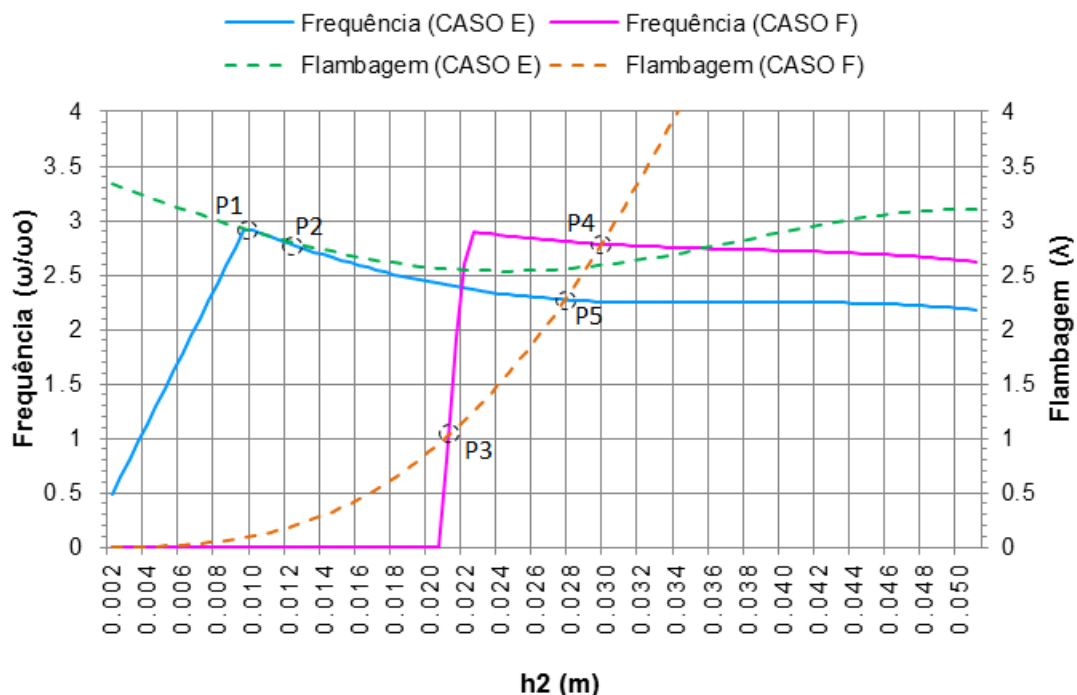


Figura 38: Dependência da flambagem e da frequência com  $h_2$  para cada caso de carregamento da análise 3

Os pontos relevantes de interseção entre as curvas estão identificados na Figura 39.



**Figura 39: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 3**

Analisando-se a Figura 39 e o CASO E de carregamento isoladamente, percebe-se que até o ponto P1 a frequência é o critério dominante; entre os pontos P1 e P2 a flambagem e a frequência possuem aproximadamente os mesmos valores, tendo, portanto, o mesmo grau de dominância; de P2 em diante a frequência volta a ser o critério dominante. Agora, analisando-se o CASO F isoladamente, percebe-se que até o ponto P3 a frequência é o critério dominante; de P3 a P4 a flambagem passa a ser o critério dominante; por fim, a partir de P4, a frequência volta a ser o critério dominante. Considerando-se ambos os casos de carregamento, até P3 a frequência para o CASO F é o critério dominante; de P3 a P5 a flambagem para o CASO F passa a ser o critério dominante; a partir de P5 a frequência para o CASO E torna-se o critério dominante. O ponto P5 é o ponto onde os critérios atingem os maiores valores sem prejuízos dos demais, portanto, ele é o candidato ao ponto ótimo de projeto.

Os resultados obtidos com o programa de otimização implementado estão resumidos na Tabela 8.

Tabela 8: Resultados do processo de otimização da análise 3

CASO E		CASO F		ESPESSURA		FLAMBAGEM	FREQUÊNCIA
P2 [kN]	P4 [kN]	P1 [kN]	P3 [kN]	h1 [m]	h2 [m]	$\lambda$	$\omega/\omega_0$
85	83	0	0	0.06892	0.02716	2.558	2.273
0	0	67	70			2.273	2.809

Portanto, as espessuras das seções transversais das colunas e da viga que maximizam simultaneamente a carga crítica de flambagem e a frequência fundamental são, respectivamente:  $h1 = 68.92 \text{ mm}$  e  $h2 = 27,16 \text{ mm}$ . A carga crítica de flambagem e a frequência resultaram em  $\lambda = \omega/\omega_0 = 2.273$ .

#### 5.2.4 Análise 4

Os dois casos de carregamento para a quarta e última análise estão ilustrados na Figura 40.

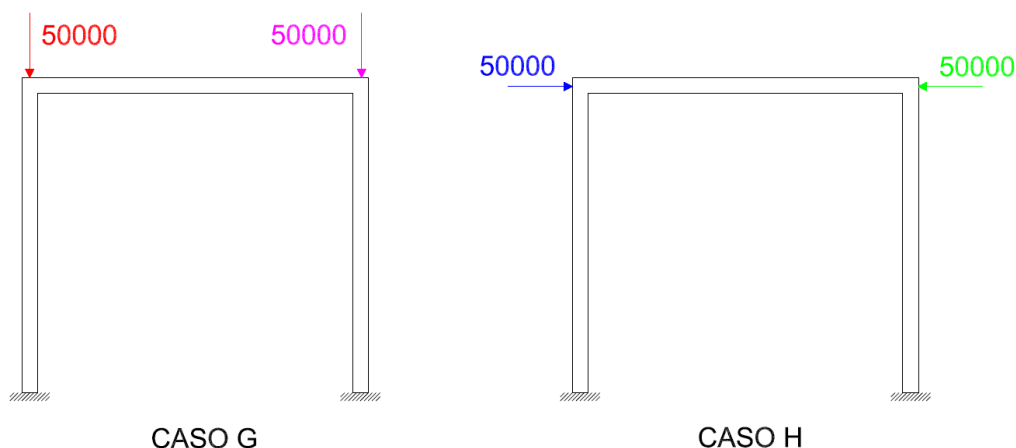
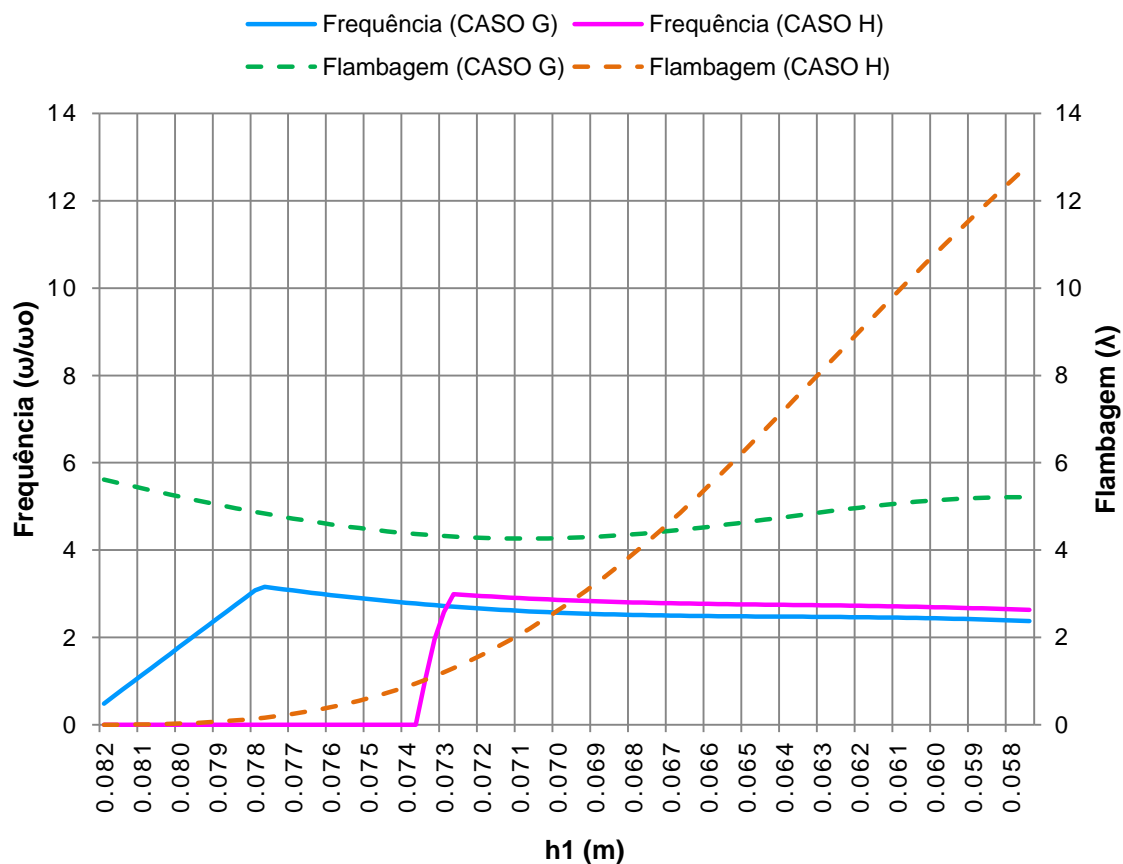


Figura 40: Casos de carregamento para a análise 4

Portanto, o CASO G consiste em duas forças de 50000N, cada uma comprimindo verticalmente o pórtico, e o CASO H consiste em duas forças de 50000N comprimindo horizontalmente o pórtico.

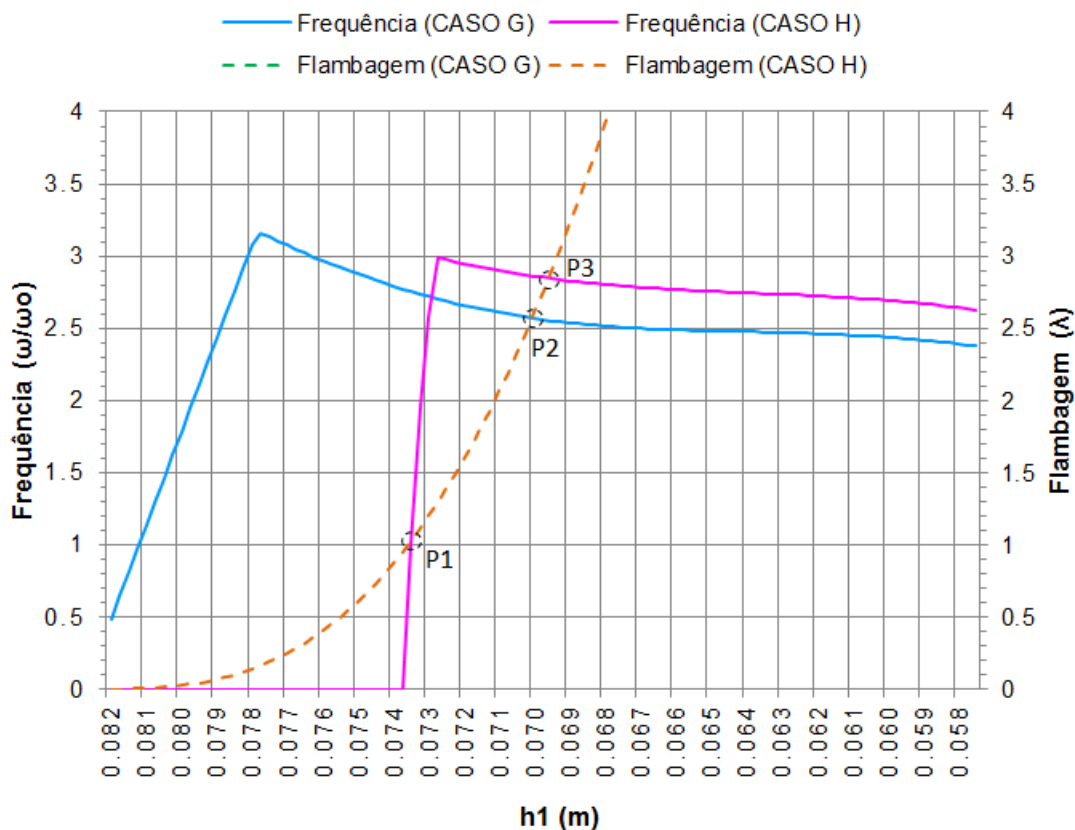
As curvas de flambagem e frequência para os dois casos de carregamento versus a variação da espessura da seção transversal das colunas ( $h1$ ) estão ilustradas na Figura 41.



**Figura 41: Dependência da flambagem e da frequência com  $h_1$  para cada caso de carregamento da análise 4**

Pela análise da Figura 41, conclui-se que são apenas dois os possíveis pontos de projeto ótimo e que a flambagem para o CASO G de carregamento não será o critério dominante em nenhum momento. Os pontos de intersecção entre as curvas de flambagem e frequência são identificados na Figura 42.





**Figura 42: Identificação dos pontos de interseção entre as curvas da análise 4**

Considerando-se os dois casos de carregamento, tem-se que até o ponto P1 a frequência para o CASO H de carregamento é o critério dominante de projeto; entre os pontos P1 e P2, a flambagem para o CASO H torna-se o critério dominante; do ponto P2 em diante a frequência para o CASO G de carregamento torna-se o critério dominante. Como o ponto P2 maximiza a frequência para o CASO G e a flambagem para o CASO H sem prejudicar a flambagem e nem a frequência dos CASOS G e H, respectivamente, este ponto é o candidato ao ponto ótimo global. Pelo gráfico pode-se dizer que  $h_1 \approx 0.070 \text{ m}$ .

Os resultados obtidos com o processo de otimização implementado estão resumidos na Tabela 9.

Tabela 9: Resultados do processo de otimização da análise 4

CASO G		CASO H		ESPESSURA		FLAMBAGEM	FREQUÊNCIA
P2 [kN]	P4 [kN]	P1 [kN]	P3 [kN]	h1 [m]	h2 [m]	$\lambda$	$\omega/\omega_0$
50	50	0	0	0.06982	0.02537	4.270	2.571
0	0	50	50			2.571	2.864

Portanto, as espessuras das seções transversais das colunas e da viga que maximizam simultaneamente a carga crítica de flambagem e a frequência fundamental são, respectivamente,  $h_1 = 69.82 \text{ mm}$  e  $h_2 = 25,37 \text{ mm}$ . A carga crítica de flambagem e a frequência resultaram em  $\lambda = \omega/\omega_0 = 2.571$ . Mais uma vez, os resultados obtidos confirmaram o candidato ao ponto ótimo pelo método da análise gráfica.

Algumas conclusões gerais podem ser feitas a partir dos resultados obtidos com as quatro análises realizadas:

- Nas configurações geométricas que resultaram em flambagem da estrutura ( $\lambda < 1$ ) a frequência fundamental correspondente é zero, confirmando a perda de estabilidade estrutural;
- O carregamento compressivo horizontal se mostrou mais crítico para o pórtico plano para configurações com  $h_1 > 0.07$ . Isto é coerente com a distribuição de espessuras visto que, devido à restrição de volume, uma redução em  $h_1$  resulta em um aumento em  $h_2$ . Dessa forma, a viga se torna menos suscetível a flambagem e o carregamento horizontal deixa de ser crítico.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo desenvolver um programa computacional baseado em um modelo matemático capaz de determinar as dimensões ótimas para um pórtico plano e de resistir aos carregamentos de flambagem e com frequência fundamental apropriada a aplicação.

Na etapa que antecede o processo de otimização, análise estrutural pelo Método dos Elementos Finitos, solucionaram-se as equações de autovalores e autovetores que regem tanto o problema de flambagem quanto o de frequência fundamental. O ambiente de programação escolhido para a análise estrutural foi o MATLAB, pois quando se trabalha com manipulações de matrizes a programação é bastante facilitada comparada com outras linguagens de programação. Para a validação dos resultados foi utilizado o programa ANSYS. Através da comparação dos resultados obtidos com ambos os programas concluiu-se que o programa de análise estrutural implementado estava correto.

A otimização da estrutura foi realizada no âmbito da otimização paramétrica, a qual altera apenas as dimensões da seção transversal. Por se tratar de duas funções objetivo, um método de otimização multicritério foi utilizado, e neste projeto o método de otimização escolhido foi a estratégia minimax. Esta estratégia permite obter a melhor estrutura para a pior condição de carregamento e é dividida em duas partes. A primeira parte da estratégia define a pior condição de carregamento para a configuração estrutural considerada, e a segunda otimiza a configuração para o carregamento definido.

Através das análises gráficas foi possível visualizar o comportamento da estrutura quanto à carga crítica de flambagem e frequência fundamental à medida que a espessura da seção transversal varia. Ainda, foi possível determinar até que ponto dentro do intervalo de espessuras o carregamento compressivo horizontal se mostrou como o mais crítico.

Os resultados obtidos com o processo de otimização implementado foram coerentes com os resultados obtidos pela análise gráfica, obtendo-se a validação do programa de otimização desenvolvido. Ainda, os resultados mostraram que a

estratégia de otimização adotada foi satisfatória, pois foi possível determinar a configuração de espessuras que resultasse em uma estrutura ótima onde um critério é otimizado sem detrimento de outro.

Por fim, como sugestão para trabalhos futuros, a metodologia utilizada neste projeto pode ser aplicada para a resolução de problemas que envolvam estruturas ou carregamentos mais complexos.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. C.; LIMA JUNIOR, J. J. de. **Comportamento dinâmico de uma viga de Euler-Bernoulli com apoios amortecidos e rigidez variável.** In: SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 9., 2010, São João Del-Rei.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE.** São Paulo: Érica, 2000.

ANSYS Inc., **Release 10.0 Documentation for ANSYS,** 2005.

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR., E. Russell. **Mechanics of Materials.** 5th. ed. McGraw-Hill, c2009.

BHATTI, M. Asghar. **Fundamental finite element analysis and applications: with MATHEMATICA and MATLAB computations.** Hoboken, NJ: J. Wiley, c2005. 700p.

BRANCO, A. L. L. V.. **Análise não linear de pórticos planos, considerando os efeitos de cisalhamento no cálculo dos esforços e deslocamentos.** 2002. 87 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

CHERKAEV, E; CHERKAEV, A.. **Minimax optimization problem of structural design.** International Journal of Computers and Structures, 2008, Vol.86/13-14, pp 1426-1435.

COOK, Robert Davis. **Finite element modeling for stress analysis.** New York, US: J. Willey, c1995.

COUTINHO, Karilany D.. **Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais.** 2006. 95 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

FARIA, Alfredo R. de; ALMEIDA, Sérgio Frascino M. de. **The maximization of fundamental frequency of structures under arbitrary initial stress states.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 65:445-460, 2006.

FERREIRA, Ana P. C. da S. **Projeto Aeronáutico Ótimo Simultâneo Sob Carregamentos Incertos**. 2010. 133 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica e Aeronáutica), Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2010.

FERREIRA, Ana P. C. da S.; de FARIA, Alfredo R. **Simultaneous Buckling and Fundamental Frequency Optimization of Frames under Uncertain Loadings**. J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng., Rio de Janeiro, v. 32, n. 1, mar. 2010. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1678-58782010000100010&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-58782010000100010&lng=pt&nrm=iso)>. Acesso em: 4 set. 2011.

HAFTKA, Raphael T.; GÜRDAL, Zafer. **Elements of structural optimization**. 3rd. rev. and expand. ed. Dordrecht : Kluwer Academic, c1992. 481 p.

HIBBELER, R. C. **Mecânica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 2 v.

HUGHES, Thomas J.R.. **The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. New York, NY: Dover, c2000. 682 p.

KOIDE, Rubem Matimoto. **Algoritmo de colônia de formigas aplicado à otimização de materiais compostos laminados**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 113 p.

LUERSEN, Marco Antônio. **Métodos Numéricos para a Engenharia: Introdução ao método dos elementos finitos – Fundamentos teóricos**. Curitiba: CEFET-PR, 2000, 77 p.

MOREIRA, Rui A. da S. **Análise do Comportamento Dinâmico de Placas com Tratamento Passivo por Amortecimento Viscoelástico**. 1996. 208 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade do Porto, Porto, 1996.

PEREIRA, J. T. **Otimização Topológica de Componentes Mecânicos com Restrições sobre o Critério de Falha do Material**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3rd ed. New York, NY: McGraw-Hill Higher Education, c2006. 766 p.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plate and Shells – Theory and Analysis**. 2<sup>nd</sup> ed. Boca Raton, Florida: CRC Press LLC, 2004.

REDDY, J. N. **On locking-free shear deformable beam finite elements**. Computer Methods in applied mechanics and engineering, Vol. 149, 1997, p. 113-132.

ROSSO, Silvana M. Versatilidade da Estrutura Metálica. **Revista AU - Arquitetura & Urbanismo**, [S.l.], nov. 2010. Disponível em: <<http://www.metlica.com.br/flexibilidade-metlica>>. Acesso em: 01 out. 2011.

SANT'ANNA, Hervandil M. **Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Tensão**. 2002. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

SEGERLIND, Larry J. **Applied finite element analysis**. 2<sup>nd</sup> ed. New York: J. Willey, c1984.

SILVA, E. C. N. Técnicas de Otimização Aplicadas no Projeto de Peças Mecânicas. **Revista Máquinas e Metais**, São Paulo, abr. 2002. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>. Acesso em: 02 set. 2011.

SILVA, Roberto Márcio da. **Análise Não-Linear de Pórticos Planos de Concreto Armado: Modelagem Numérica e Avaliação dos Métodos Aproximados**. 1996. 264 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

SOMMER, Rafael C. **Otimização de Estruturas por Algoritmos Genéticos Submetidas a Restrições de Flexibilidade e Flambagem**. 2010. 68 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

TIPLER, P. A. **Física: para cientistas e engenheiros**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995. 2 v.

VANDERPLAATS, Garret N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications**. New York: McGraw-Hill, 1984.