

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PEDRO MURILO SOUZA DE QUADROS

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS GEOMÉTRICOS
NAS TENSÕES DE FLEXÃO DE ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE
DENTES RETOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
(TCC 2 – Nº DE INSCRIÇÃO – 20)

CURITIBA

2015

PEDRO MURILO SOUZA DE QUADROS

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS GEOMÉTRICOS
NAS TENSÕES DE FLEXÃO DE ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE
DENTES RETOS**

Monografia de Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2 do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula Carvalho da Silva
Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva

CURITIBA

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio desse termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa "ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE PARÂMETROS GEOMÉTRICOS NAS TENSÕES DE FLEXÃO DE ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS", realizado pelo aluno Pedro Murilo Souza de Quadros, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Profa. Dra. Ana Paula Carvalho da Silva Ferreira
DAMEC, UTFPR
Orientadora

Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva
DAMEC, UTFPR
Coorientador

Prof. Adriano Gonçalves dos Passos
DAMEC, UTFPR
Avaliador

Prof. Dr. Cláudio Tavares da Silva
DAMEC, UTFPR
Avaliador

Curitiba, 17 de dezembro de 2015.

RESUMO

QUADROS, Pedro M. S. de. Análise da influência de parâmetros geométricos nas tensões de flexão de engrenagens cilíndricas de dentes retos. 2015. 78 f. Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015

O uso de engrenagens cilíndricas de dentes retos é de suma importância em sistemas mecânicos onde se deseja a transmissão de torque ou potência entre eixos. É importante realizar um bom projeto das engrenagens, pois a aplicação da carga entre elas pode gerar desgaste elevado nos dentes, como a crateração ou até mesmo a quebra dos dentes, fazendo com que seja necessária a troca do par engrenado. Os dois modos de falha mais comuns em engrenagens são a fratura na região da raiz por fadiga de flexão e a fadiga superficial da face dos dentes. Para minimizar essas falhas, é possível realizar uma mudança no material das engrenagens ou realizar mudanças geométricas no par engrenado, que é o objetivo desse trabalho. As engrenagens são modeladas no software SolidWorks, fazendo o uso da parametrização para a rápida geração de modelos com geometrias diferentes. Para que os modelos reflitam com a realidade de engrenagens fabricadas na prática, usam-se conceitos teóricos para a construção do perfil do dente. Um modelo analítico foi construído tendo como base a equação apresentada pela norma AGMA e a tensão de flexão proposta de Lewis. A equação resultante utilizada para realizar os cálculos de tensão na raiz do dente trata-se de uma modificação da equação de Lewis, visando melhorar o resultado final. É feito uso do ABAQUS para construção do modelo numérico e posterior validação com o modelo analítico. As principais etapas e melhorias realizadas no software são apresentadas e discutidas. Com os resultados gerados, nota-se a redução da tensão com o aumento do número de dentes, módulo e/ou ângulo de pressão. É visto também o comportamento semelhante da tensão na raiz do dente para todos os modelos estudados. Dessa forma, é possível avaliar qual a configuração geométrica ideal para que as ECDR sofram um esforço menor de tensão de acordo com as modificações que podem ser realizadas na geometria.

Palavras-chave: Engrenagens cilíndricas de dentes retos. Tensões de Flexão. Mudanças geométricas em engrenagens. Métodos analíticos. Método de Elementos Finitos.

ABSTRACT

QUADROS, Pedro M. S. de. Analysis of the influence of geometric variations on the bending stresses of cylindrical spur gears. 2015. 78 f. Monografia de Trabalho de Conclusão de Curso – Departamento Acadêmico de Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015

The use of spur gears is important to machine systems where torque transmission or power transmission between shafts it is needed. It is important to realize an effective project, because the application of load between a pair of gears can cause high wear on teeth, like pitting and even the breaking of teeth. This makes that it is necessary to change the pair. The two failures modes most common are fracture in the root region by bending stress and surface fatigue by contact stress. To reduce these failures, the change of the material or geometric variations can be done, and the last one is the goal of this paper. The gears are modeled using the software Solidworks, making use of features to accelerate the creation of several models with geometric variations. To make the models similar to the gears really manufactured, it is presented theoretical concepts related to the building of curves, which the gear profile has. An analytical method was constructed based on equations presented by AGMA Standard and the bending stress equation purposed by Lewis. The final equation used to perform the resulting bending stresses on the rooth tooth refers to a modified Lewis equation, which was made to improve the results. The numerical analysis are developed using the ABAQUS commercial pack and subsequent validation with the analytical model. The main improvements made on ABAQUS are showed and discussed. In the end, the generated results shown a decay of the bending stress with the increasing of teeth number, module and pressure angle. It is also shown that the gears has the same bending stress behavior on the rooth teeth. Therewith, it is possible to evaluate what geometry configuration is the best to spur gears, to avoid excessive bending stress according to the geometric variations.

Keywords: Spur Gears. Bending Stress. Geometric variations. Analytical methods. Finite Element method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Criação do perfil evolvente de uma circunferência	17
Figura 2 - Nomenclatura do dente de engrenagem	17
Figura 3 - Geometria de contato	20
Figura 4 - Perfis de dente de engrenagem com ângulos de pressão diferentes	20
Figura 5 - Definição do comprimento da linha de ação	21
Figura 6 - Construção das curvas cicloides	22
Figura 7 - Construção de uma epicicloide alongada	22
Figura 8 - Ferramenta do tipo <i>hob</i>	23
Figura 9 - Ferramenta do tipo <i>shaper</i>	24
Figura 10 - Forças no pinhão e na coroa em um par engrenado	25
Figura 11 - Raio de carga e ângulo de carga	28
Figura 12 - Linha de ação em plano transversal	29
Figura 13 - Método geométrico para obtenção do s_f e h_f	32
Figura 14 - Ponto do raio crítico obtido usando: (1) método da parábola de Lewis inscrita e (2) método ângulo 30°	33
Figura 15 - Perfil de um dente de engrenagem	37
Figura 16 - Tangente entre a evolvente e a trocoide - corte com hob	37
Figura 17 - Traçado da evolvente	38
Figura 18 - Trocoide primitiva e filete trocoidal	40
Figura 19 - Geração do filete trocoidal	41
Figura 20 - Detalhe do perfil do dente gerado no SolidWorks	48
Figura 21 - Engrenagem completa com 21 dentes, módulo de 5mm e ângulo de pressão de 20°	49

Figura 22 - Pinhão "2D" de 21 dentes, módulo de 5mm e ângulo de pressão de 20°	50
Figura 23 - Partições aplicadas no modelo	51
Figura 24 - Esquema padrão para criação de malha	51
Figura 25 - Malha gerada a partir do esquema padrão	52
Figura 26 - Detalhe do acoplamento utilizado na fixação da engrenagem	53
Figura 27 - Acoplamento para distribuição da força concentrada	53
Figura 28 - Componente tangencial aplicada para validação do modelo numérico ..	54
Figura 29 - Resultado da simulação para a partição definida.....	55
Figura 30 - Gráfico da análise de convergência	56
Figura 31 - Representação do carregamento com componentes tangencial e radial	57
Figura 32 - Área de trabalho da função <i>Tabela de projeto</i> do Solidworks.....	58
Figura 33 - Gráfico da tensão de flexão versus número de dentes para pinhão com m=5mm e i=1:1	60
Figura 34 – Gráfico da tensão de flexão versus módulo para pinhão com dp=120mm e i=1:1	61
Figura 35 - Não intersecção da evolvente e trocoide para uma engrenagem de m=2mm, z=50 dentes e $\phi=23,5^\circ$	62
Figura 36 - Não intersecção das curvas evolvente e trocoide para m=7,5mm, z=16 dentes e $\phi=20^\circ$	63
Figura 37 - Invólumetria do dente gerada pelo software <i>Progear</i>	64
Figura 38 - Pontos da malha escolhidos para medição da tensão	65
Figura 39 - Distribuição de tensão na raiz para quatro diferentes configurações.....	65
Figura 40 - Distribuição de tensão para configurações variando o ângulo de pressão	66
Figura 41 - Altura da parábola de Lewis e espessura do dente no ponto crítico variando o ângulo de pressão.....	67

Figura 42 - Relação entre tensão e raio de carga para $\phi=20^\circ$	68
Figura 43 - Relação entre tensão e raio de carga para $\phi=25^\circ$	68
Figura 44 - Contato dos dentes e <i>load-sharing ratio</i>	69
Figura 45 - Distribuição da tensão conforme muda-se a localização do carregamento	70
Figura 46 - Raio do ponto crítico conforme ocorre mudança na localização do carregamento.....	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais parâmetros avaliados.....	14
Tabela 2 – Segundo grupo de parâmetros avaliados.....	14
Tabela 3 - Dimensões padronizadas de dentes de engrenagens	19
Tabela 4 - Parâmetros geométricos das engrenagens.....	45
Tabela 5 - Valores relevantes do motor elétrico.....	46
Tabela 6 - Variáveis obtidos para o cálculo da tensão de flexão.....	46
Tabela 7 - Dados de entrada para determinação dos pontos das curvas evolvente e trocoide	47
Tabela 8 - Parâmetros constantes na mudança de pontos das curvas evolvente e trocoide	47
Tabela 9 - Cálculo das coordenadas da curva evolvente	47
Tabela 10 - Cálculo das coordenadas da curva trocoide	48
Tabela 11 - Resultados da análise de convergência.....	55
Tabela 12 - Resultado das simulações	59

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Distância entre centros
Z	Número de dentes
i	Relação de transmissão
m	Módulo
ϕ	Ângulo de pressão
d_p	Diâmetro primitivo
p_c	Passo circular de referência
d_p	Diâmetro primitivo
p_b	Passo de base
p_d	Passo diametral
d_c	Diâmetro de cabeça
h_c	Altura de cabeça
d_r	Diâmetro de raiz
h_r	Altura de raiz
d_b	Diâmetro de base
e	Espessura do dente no diâmetro primitivo
RC	Razão de contato
L_{ab}	Comprimento da linha de ação
r_{p1}	Raio primitivo do pinhão
r_{p2}	Raio primitivo da coroa
T_p	Torque
W	Força resultante
W_r	Força radial
W_t	Força tangencial
Z_1	Número de dentes do pinhão
R	Força resultante no eixo
$HPSTC$	Ponto máximo de contato de um único dente
σ_b	Tensão de flexão
F	Largura da face do dente
Y	Fator de forma de Lewis
J	Fator geométrico
K_a	Fator de aplicação
K_m	Fator de distribuição de carga
K_v	Fator dinâmico
K_s	Fator de tamanho
K_B	Fator de espessura de borda
K_I	Fator de ciclo de carga
r_{nL}	Raio de carga
ϕ_{nL}	Ângulo de carga
ϕ_{np}	Ângulo de pressão no raio onde ocorre contato entre dentes
ϕ_{nw}	Ângulo de pressão no ponto de aplicação de carga
r_{nb}	Raio de base virtual
R_{b1}	Raio de base do pinhão
S_n	Espessura do dente
C_4	Cota para obtenção do ponto HPSTC
R_{b2}	Raio de base da coroa

ϕ_r	Ângulo de pressão transversal de operação
C_6	Linha de ação entre os raios de base do pinhão e coroa
R_{o2}	Raio de cabeça da coroa
Y_A	Fator de forma da norma AGMA
C_ψ	Fator de distribuição helicoidal
m_N	Taxa de compartilhamento de carga
k_f	Fator concentrador de tensão para a raiz do dente
s_f	Espessura do dente no ponto crítico
h_f	Altura da parábola de Lewis
ρ_f	Raio mínimo de curvatura da curva do filete trocoidal
r''_n	Raio virtual de geração primitivo de uma ECDR
r''_{no}	Raio virtual de geração primitivo da ferramenta
r^s_{no}	Raio de posicionamento do centro do raio de ponta da ferramenta
r_t	Raio de ponta da ferramenta
b	Dedendo
$\sigma_{máx}$	Tensão de flexão de Lewis modificada
r_u	Raio de intersecção das curvas evolvente e trocoide
r_f	Raio primitivo
r_b	Raio de base
h_{kz}	Adendo da ferramenta geradora
r_k	Raio de ponta da ferramenta geradora
r_{nk}	Raio de fim de chanfro da engrenagem
r_x	Raio vetor para determinação da evolvente
a_t	Coordenada polar da evolvente
a_x	Coordenada polar da evolvente
φ	Ângulo para obtenção das coordenadas da evolvente
β	Ângulo de hélice sobre o diâmetro de referência
α_t	Ângulo de pressão transversal
x_{ev}	Coordenada cartesiana no eixo x da evolvente
y_{ev}	Coordenada cartesiana no eixo y da evolvente
h_k	Adendo da ferramenta geradora
r	Raio primitivo da engrenagem
r_r	Raio de raiz da engrenagem
d_u	Diâmetro de intersecção das curvas evolvente e trocoide
r_{tp}	Raios para obtenção da trocoide primitiva
c_v	Ordenada do centro do raio de crista até a linha primitiva do perfil de referência
Φ_{tp}	ângulo vetorial da trocoide primitiva
γ_{tt}	ângulo entre a tangente da trocoide primitiva e o raio vetor
r_{ft}	Coordenada polar do filete trocoidal
φ_{ft}	Ângulo polar do filete trocoidal
x_{ft}	Coordenada cartesiana em x do filete trocoidal
y_{ft}	Coordenada cartesiana em y do filete trocoidal
i_{rx}	Incremento utilizado para a distribuição dos raios da evolvente
r_{nk}	Raio externo da engrenagem
X	Incremento exponencial usado para os raios da trocoide
R_1	Raio primitivo do primeiro ponto da trocoide relacionado com r_u
R_n	Último raio da trocoide
ν	Coefficiente de Poisson

E	Módulo de elasticidade do material
F	Largura do dente
Z_p	Número de dentes do pinhão
Z_c	Número de dentes da coroa
N_p	Número mínimo de dentes para não haver interferência
k	Constante utilizada no equacionamento de N_p
n_{mot}	Rotação do motor elétrico
N_{mot}	Potência do motor elétrico
M_t	Torque do motor elétrico
σ'	Tensão de Von Mises obtida na raiz do dente

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	CONTEXTO DO TEMA	12
1.2	CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA	12
1.3	OBJETIVOS.....	13
1.3.1	Objetivo Geral.....	13
1.3.2	Objetivos Específicos	13
1.4	JUSTIFICATIVA.....	15
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	CONCEITOS BÁSICOS E TEORIA DO ENGRENAMENTO	16
2.1.1	Lei fundamental de engrenamento	16
2.1.2	Perfil evolvente	16
2.1.3	Nomenclatura do dente de engrenagem.....	17
2.1.4	Geometria de engrenamento	19
2.1.5	Ângulo de pressão.....	20
2.1.6	Razão de contato	21
2.1.7	Trocoide	21
2.2	PROCESSOS DE FABRICAÇÃO.....	23
2.2.1	Fresamento com ferramenta do tipo <i>hob</i>	23
2.2.2	Fresamento com ferramenta do tipo <i>shaper</i>	24
2.3	CÁLCULO ANALÍTICO DE ECDR	24
2.3.1	Carregamento em Engrenagens Cilíndricas Retas	25
2.3.2	Tensões de Flexão	26
2.3.3	Modificações realizadas no cálculo da tensão de flexão	27
2.3.3.1	Cálculo da força tangencial	27
2.3.3.2	Alterações na equação de tensão de flexão apresentada pela norma.....	31
2.3.3.3	Cálculo do coeficiente de concentração de tensão.....	33
2.4	CÁLCULO POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA	35
2.4.1	Método dos elementos finitos (MEF)	35
2.5	CONSTRUÇÃO DO PERFIL DO DENTE PARA A MODELAGEM NUMÉRICA.....	36
2.5.1	Construção do perfil evolvental.....	37
2.5.2	Construção do perfil trocoidal	39
2.5.3	Incrementos para obtenção dos raios das curvas evolvente e trocoide	42
3	METODOLOGIA.....	44
3.1	CONSTRUÇÃO DO MODELO ANALÍTICO	44
3.1.1	Dados de entrada	44
3.1.2	Cálculo das tensões de flexão	45
3.2	CONSTRUÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	46
3.2.1	Desenvolvimento do modelo numérico	49
3.2.2	Alterações no modelo numérico para a geração de resultados.....	56
4	RESULTADOS	59
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	72
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO DO TEMA

Engrenagens são elementos de máquinas utilizados na transmissão de movimentos rotativos entre eixos com uma relação de velocidades constante (SHIGLEY, MISCHKE, & BUDYNAS, 2005). São usadas quando se tem como requisito de projeto mudança de velocidade ou de torque entre eixos, inversão do sentido de rotação e sincronização de eixos.

Outros elementos de máquinas também se adequam a tal requisito, como rodas de atrito, correias e correntes. No entanto, para aplicações que requeiram transmissão de torque sem escorregamento, as engrenagens cumprem o papel de maneira mais eficaz.

A engrenagem cilíndrica de dentes retos (ECCR) é o modelo mais simples e um dos mais utilizados em baixas rotações, devido à sua facilidade de fabricação. Seus dentes são paralelos ao eixo da engrenagem e sua aplicação ocorre somente na transmissão entre eixos paralelos. Atualmente, as ECCR são essenciais para sistemas como redutores industriais.

Vale ressaltar a importância de um excelente projeto para a utilização no maquinário, pois a quebra dos dentes das engrenagens pode gerar uma parada imprevista, acarretando uma perda temporária de produção. Consequentemente, ocorre a redução de lucro nesse intervalo de tempo. Portanto, é necessário que o projeto das engrenagens apresente resistência mecânica para suportar os carregamentos que serão aplicados no sistema mecânico (NORTON, 2013). Estudar o comportamento das tensões na raiz do dente perante a modificações em sua geometria pode levar à proposição de configurações geométricas capazes de reduzir essas tensões e prolongar a vida útil ou evitar falha de engrenagens.

1.2 CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

Existem dois modos de falhas que afetam os dentes das engrenagens: fratura por fadiga e a fadiga superficial do dente. Esses dois modos de falha devem ser verificados quando está sendo realizado o projeto de engrenagens (NORTON, 2013). A fratura por fadiga ocorre devido às tensões alternadas de flexão na raiz do dente e

a fadiga superficial ocorre por repetição do contato entre dentes. A fadiga superficial acaba formando pequenas crateras na superfície do dente, quando as tensões máximas ocorrem abaixo da superfície. Daí o nome crateração para esse modo de falha sendo o de ocorrência mais comum.

Um dos estudos das tensões de flexão na raiz do dente de ECDR é iniciado no trabalho de Betim (2015). Nele, é desenvolvido e validado um modelo numérico e algumas variações geométricas são analisadas. Os resultados e análises de Betim (2015) mostram a necessidade de ampliar a pesquisa. Proposição de novas configurações geométricas, melhoria do custo computacional do modelo numérico e regressão das respostas em tensões são os principais itens observados como carentes de aprofundamento. A proposta do trabalho atual é, aproveitando o modelo numérico já validado, avançar nos resultados possibilitando novas conclusões e questionamentos.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Com um método numérico validado no trabalho realizado por Betim (2015), essa pesquisa tem como objetivo principal dar continuidade às alterações de geometria nas engrenagens e analisar as tensões aplicadas nos dentes. Além disso, pretende-se associar o comportamento das tensões de flexão com funções matemáticas, como polinomiais ou exponenciais.

1.3.2 Objetivos Específicos

As mudanças realizadas na geometria para geração dos resultados estão apresentadas na Tabela 1 e na Tabela 2. Os parâmetros das engrenagens apresentados são: distância entre centros a , número de dentes Z , relação de transmissão i , módulo m , o ângulo de pressão ϕ e diâmetro primitivo d_p .

Tabela 1 – Principais parâmetros avaliados.

N° da análise	Grupo	i	m (mm)	Engrenagem	Z	dp (mm)
1	m = 5 mm e $\phi = 20^\circ$	1:1	5	Pinhão	21	105
2				Pinhão	25	125
3				Pinhão	30	150
4				Pinhão	35	175
5	m = 5 mm e $\phi = 25^\circ$	1:1	5	Pinhão	21	105
6				Pinhão	25	125
7				Pinhão	30	150
8				Pinhão	35	175
9	dp = 120mm e $\phi = 20^\circ$	1:1	3	Pinhão	40	120
10			4	Pinhão	30	120
11			5	Pinhão	24	120
12			6	Pinhão	20	120
13			6.5	Pinhão	18	117
14			7.5	Pinhão	16	120
15	dp = 120mm e $\phi = 25^\circ$	1:1	3	Pinhão	40	120
16			4	Pinhão	30	120
17			5	Pinhão	24	120
18			6	Pinhão	20	120
19			6.5	Pinhão	18	117
20			7.5	Pinhão	16	120
21	dp = 100mm e $\phi = 20^\circ$	1:1	5	Pinhão	21	105
22		1:2		Pinhão	21	105
23		1:3		Pinhão	21	105
24		1:4		Pinhão	21	105
25	dp = 100mm e $\phi = 25^\circ$	1:1	5	Pinhão	21	105
26		1:2		Pinhão	21	105
27		1:3		Pinhão	21	105
28		1:4		Pinhão	21	105

Tabela 2 – Segundo grupo de parâmetros avaliados.

N° da análise	ϕ (graus)	i	m (mm)	Engrenagem	Z	a (mm)
29	20	"1:1"	5	Pinhão	21	105
30	21					
31	22					
32	23					
33	24					
34	25					

Em Betim (2015), é observado que ao se manter constante o módulo m do engrenamento e variar o número de dentes Z_1 , a distância entre centros a e a relação de transmissão i , o comportamento das tensões na raiz do dente é muito semelhante para o ângulo de pressão ϕ de 20° e 25° . O trabalho atual é realizado com novas combinações de parâmetros variáveis e constantes visando conclusões mais precisas sobre comportamento das tensões para ângulos de pressão diferentes.

Ainda no trabalho de Betim (2015) em um resultado referente ao pinhão de 21 dentes, ângulo de pressão de 20° e módulo de 5 mm observa-se que a distribuição da tensão de flexão na região da raiz do dente versus o raio medido a partir do centro da engrenagem é parabólica. É verificado se esse comportamento se repete para engrenagens com diferentes geometrias. Se confirmado, essa análise pode levar à proposição de funções parabólicas que descrevam o comportamento de tensões nas raízes de dentes de ECDR.

1.4 JUSTIFICATIVA

Como é apresentado na justificativa do trabalho de Betim (2015), avaliar as variações nas tensões, causadas pela modificação da geometria, pode ser muito importante para projetistas, que estão habituados a fazer a mudança no material da engrenagem, porém mantendo o padrão geométrico que se encontra disponível no mercado. Isso acaba gerando a união de engenheiros de duas grandes áreas da mecânica: área estrutural e área de materiais. Com o modelo numérico validado e os resultados obtidos, aumentam-se as informações disponíveis para projetistas escolherem qual configuração geométrica será mais adequada para o sistema. Esse trabalho pode ser avaliado como uma continuação daquele iniciado por Betim (2015), pois contém toda a informação principal utilizada para a realização do modelo numérico e apresenta uma série de resultados que não são abordados naquele trabalho.

Além disso, entendendo de que forma as tensões são minimizadas, é possível projetar engrenagens com uma vida de operação maior, visto que o desgaste sofrerá uma diminuição ao longo de sua operação e a troca de engrenagens irá ocorrer em intervalos maiores. Isso acaba gerando uma redução no custo para a empresa e o tempo útil de operação também aumenta.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 CONCEITOS BÁSICOS E TEORIA DO ENGRENAMENTO

Conforme é apresentado na Introdução desse trabalho, são apresentados aqui somente os conceitos necessários para o cálculo das tensões de flexão de ECDR. Esses conceitos e outros podem ser vistos com mais detalhes no trabalho de Betim (2015).

2.1.1 Lei fundamental de engrenamento

Somente com a criação das engrenagens modernas, com dentes cortados diretamente de um disco de metal que foi possível a utilização da lei fundamental do engrenamento, “que afirma que a razão de velocidade angular das engrenagens de um par de engrenagens deve manter-se constante durante o engrenamento” (NORTON, 2013). Para que essa lei seja verdadeira, os contornos dos dentes de engrenagens devem ser conjugados um ao outro, e a involuta de um círculo é a mais utilizada como forma de dente (NORTON, 2013).

2.1.2 Perfil evolvente

O perfil evolvente é um dos mais importantes no estudo de engrenagens, visto que ele é o principal elemento numa transmissão. Esse perfil acaba determinando a qualidade do dentado, o que por sua vez, determina a vida útil da engrenagem (MAZZO, 2013). Esse perfil evolvente (ou involuta) de um círculo é gerado desenrolando a linha esticada de uma circunferência, como mostra a Figura 1.

Segundo Norton (2013), algumas observações podem ser realizadas a respeito dessa curva:

1. A linha que gera a curva involuta é sempre tangente ao círculo base.
2. O centro de curvatura da involuta está sempre em um ponto de tangência da linha com o círculo de base.
3. Uma tangente à involuta é sempre normal à linha, portanto, é o raio instantâneo de curvatura do perfil evolvente.

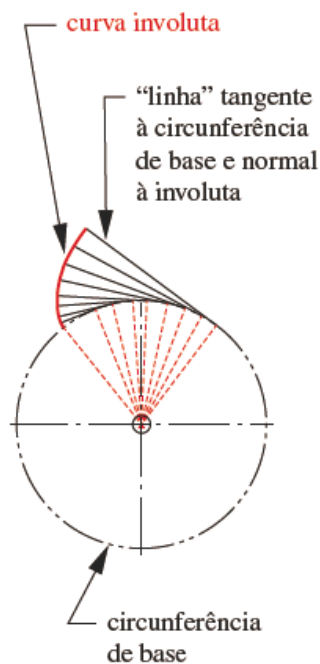


Figura 1 - Criação do perfil evolvente de uma circunferência (NORTON, 2013)

2.1.3 Nomenclatura do dente de engrenagem

Conhecer a nomenclatura usada em engrenagens é importante para facilitar o entendimento posterior das análises de tensão. Quando duas engrenagens estão instaladas juntas, a menor delas é chamada de pinhão e a outra é denominada coroa. A Figura 2 apresenta a nomenclatura padrão utilizada para cada engrenagem.

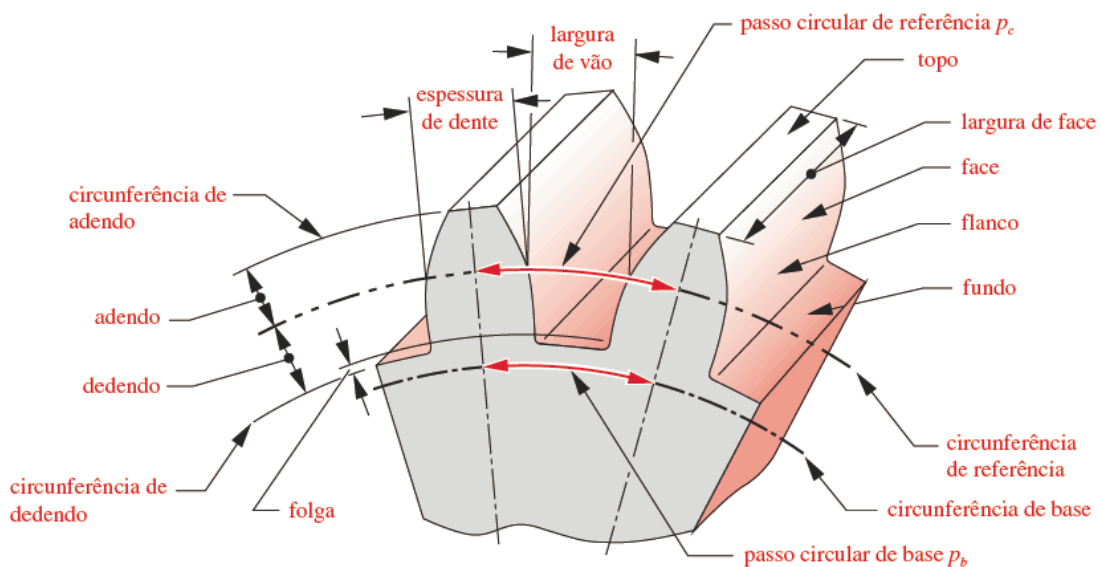


Figura 2 - Nomenclatura do dente de engrenagem (NORTON, 2013)

O adendo é definido como a altura do dente e o dedendo é definido como a altura de pé e ambos são referidos a partir da circunferência de referência (também conhecida como circunferência primitiva). O dedendo é ligeiramente maior que o adendo para obter um pouco de espaço entre a ponta do dente engrenado e o fundo do vão do outro. A espessura do dente e a largura do vão também são medidas no círculo de referência. A largura do vão é ligeiramente maior que a espessura, e essa diferença é chamada de folga de engrenamento. A largura da face do dente é medida ao longo do eixo. O passo circular de referência é o comprimento do arco de um ponto de um dente até o mesmo ponto no outro dente (NORTON, 2013). A definição desse passo é dada por:

$$p_c = \frac{\pi \times d_p}{Z} \quad (1)$$

onde d_p é o diâmetro primitivo e Z é o número de dentes. O passo do dente também pode ser medido ao longo da circunferência de base e então é chamado de passo de base p_b :

$$p_b = p_c \times \cos \phi. \quad (2)$$

onde ϕ é o ângulo de pressão. Para definir o tamanho do dente de uma maneira mais simples, relaciona-se diretamente ao diâmetro primitivo do círculo. Dessa forma tem-se o passo diametral:

$$p_d = \frac{Z}{d_p}. \quad (3)$$

Combinando as equações (1) e (3), obtém-se uma relação entre o passo circular e o passo diametral:

$$p_d = \frac{\pi}{p_c}. \quad (4)$$

Dessa forma pode-se definir um parâmetro chamado módulo (m), que é o recíproco do passo diametral com o diâmetro primitivo d (utilizado em milímetros), e parâmetro esse utilizado no Sistema Internacional (SI):

$$m = \frac{d}{Z}. \quad (5)$$

O módulo é um dos principais parâmetros usados para a determinação das dimensões principais. A Tabela 3 apresenta algumas dimensões de dentes padronizados.

Tabela 3 - Dimensões padronizadas de dentes de engrenagens

Parâmetro	Símbolo	Relação
Número de dentes	Z	-
Diâmetro primitivo	d_p	$Z \times m$
Diâmetro da cabeça	d_c	$d_p + (2 \times h_c)$
Altura de cabeça	h_c	m ou $1/p_d$
Diâmetro da raiz	d_r	$d_p - (2 \times 1,25 \times h_r)$
Altura de raiz	h_r	$1,25 \times m$ ou $1,25/p_d$
Diâmetro de base	d_b	$d_p \times \cos \Phi$
Espessura do dente no diâmetro primitivo	e	$(\pi \times m) / 2$
Distância entre centros	a	$(d_{p1} + d_{p2}) / 2$

Fonte: Adaptado de Betim (2015)

Para dentes de profundidade completa, tanto a relação que utiliza o passo diametral como a que usa o módulo são válidas para a altura de cabeça h_c e altura de raiz h_r (SHIGLEY, MISCHKE, & BUDYNAS, 2005). Para esse trabalho, essas variáveis foram calculadas utilizando o módulo m .

2.1.4 Geometria de engrenamento

Com o entendimento da nomenclatura dos itens de engrenagens, agora é possível visualizar a geometria de contato, conforme Figura 3. As circunferências onde as linhas são desenroladas são as circunferências de base, essas que são necessariamente menores que as circunferências primitivas. Percebe-se então que a parte do dente que está acima da circunferência primitiva é o adendo. Percebe-se que há uma tangente comum no ponto de contato das duas engrenagens, e há uma normal comum a essa tangente comum. Essa linha normal comum é chamada de linha de ação. A importância dessa linha é que ela sempre passa pelo ponto de referência primitivo da engrenagem. O ponto primitivo tem a mesma velocidade linear para o pinhão quanto para a coroa e o ângulo entre essa velocidade e a linha de ação é chamado de ângulo de pressão.

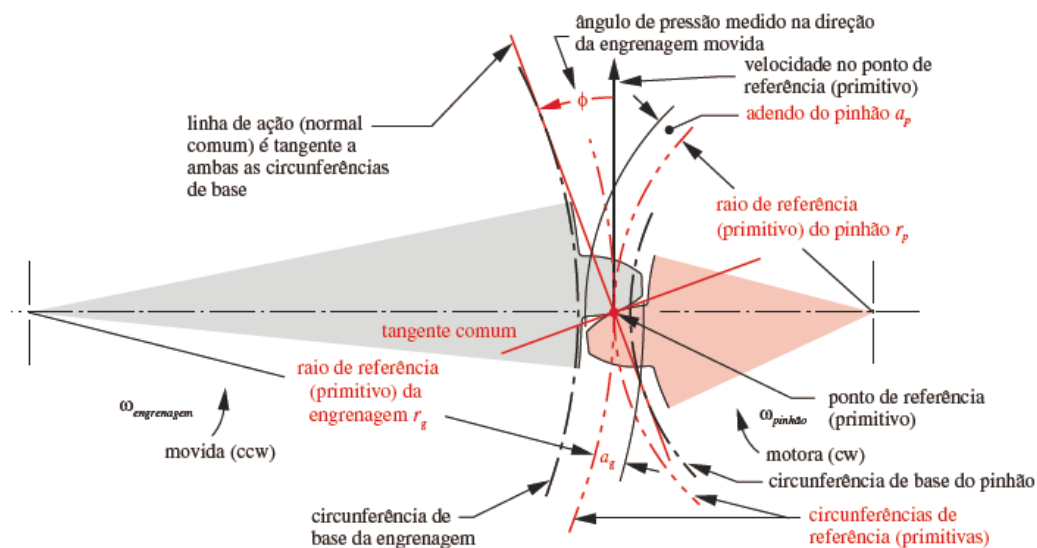


Figura 3 - Geometria de contato (NORTON, 2013)

2.1.5 Ângulo de pressão

O ângulo entre a velocidade no ponto de referência e a linha de ação é chamado de ângulo de pressão (ϕ). Esses ângulos de pressão são padronizados, sendo os de 20° e 25° mais utilizados atualmente. Para haver engrenamento, o pinhão e a coroa devem ser construídos com o mesmo ângulo de pressão. A Figura 4 mostra que quando o ângulo de pressão é maior, a distância entre os círculos de base e de referência (primitivo) também aumenta.

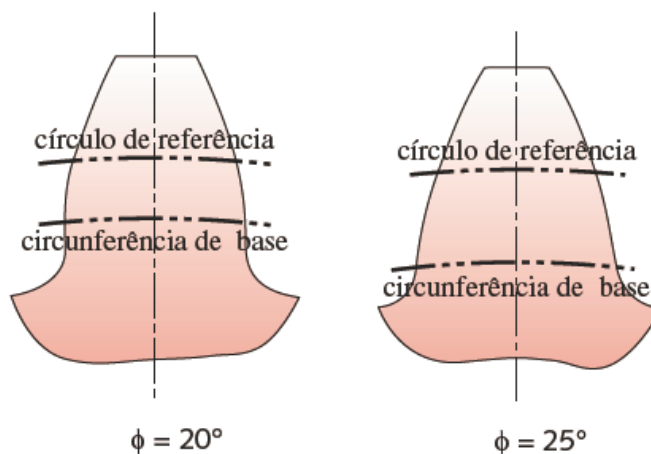


Figura 4 - Perfis de dente de engrenagem com ângulos de pressão diferentes (NORTON, 2013)

2.1.6 Razão de contato

A razão de contato mostra o número médio de dentes em contato durante o engrenamento. Segundo Shigley (2005), a razão de contato é calculada de acordo com a seguinte equação:

$$RC = \frac{L_{ab}}{m \times \pi \times \cos \phi} \quad (6)$$

onde L_{ab} é o comprimento da linha de ação. Esse comprimento, mostrado na Figura 5, é definido pela distância entre os pontos de entrada e saída de contato entre os dentes do par engrenado, medida na linha de ação. Esse valor pode ser determinado através da seguinte equação (NORTON, 2013):

$$L_{ab} = \sqrt{(r_{p1} + h_{c1})^2 - (r_{p1} \times \cos \phi)^2} + \sqrt{(r_{p2} + h_{c2})^2 - (r_{p2} \times \cos \phi)^2} - a \times \sin \phi \quad (7)$$

onde r_{p1} , r_{p2} , h_{c1} e h_{c2} são os raios primitivos e a altura da cabeça (adendo) dos dentes do pinhão e da coroa respectivamente e a é a distância entre centros das engrenagens.

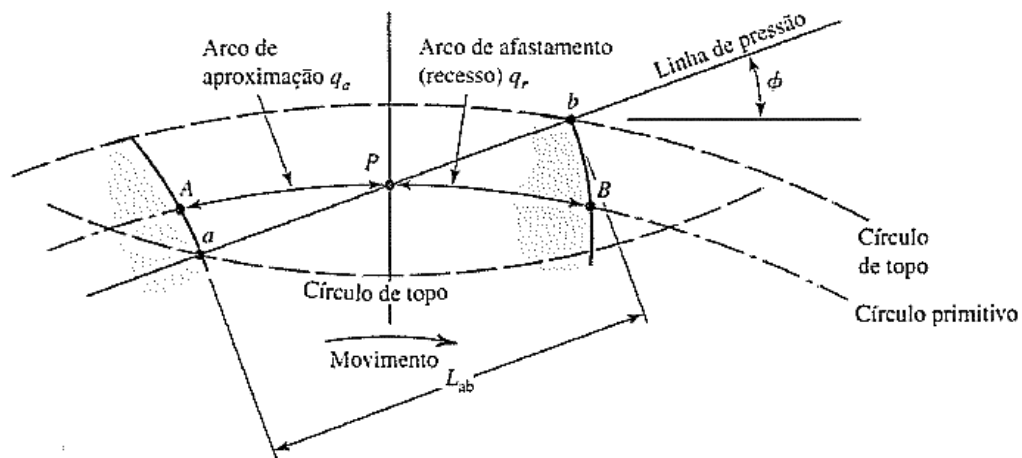


Figura 5 - Definição do comprimento da linha de ação (SHIGLEY, MISCHKE, & BUDYNAS, 2005)

2.1.7 Trocoide

O local onde as tensões de flexão são mais críticas é a região da raiz do dente. Desse modo se faz necessário conhecer como é o perfil dessa região para dados confiáveis serem utilizados na validação do modelo numérico.

A trocoide é a curva que faz a ligação entre o início da evolvente com o raio de pé do dente. A diferença da trocoide com a evolvente é que a primeira é um produto

da peça gerada, e a segunda é o perfil planejado na construção. A trocoide é geralmente uma epicloide alongada. De forma resumida, uma cicloide é a curva descrita por um ponto de uma circunferência (geratriz) que rola sem deslizar por uma linha reta (MAZZO, 2013) como pode ser visto na Figura 6. Quando a curva é descrita por um ponto fora da geratriz, dá-se o nome de trocoide. Quando a geratriz desliza sobre uma circunferência e não por uma linha reta, a curva gerada tem o nome de epicloide. Analogamente à cicloide, se a curva é descrita por um ponto fora da geratriz, tem-se uma trocoide (MAZZO, 2013). A Figura 7 mostra a construção de uma epicloide alongada, ou trocoide.

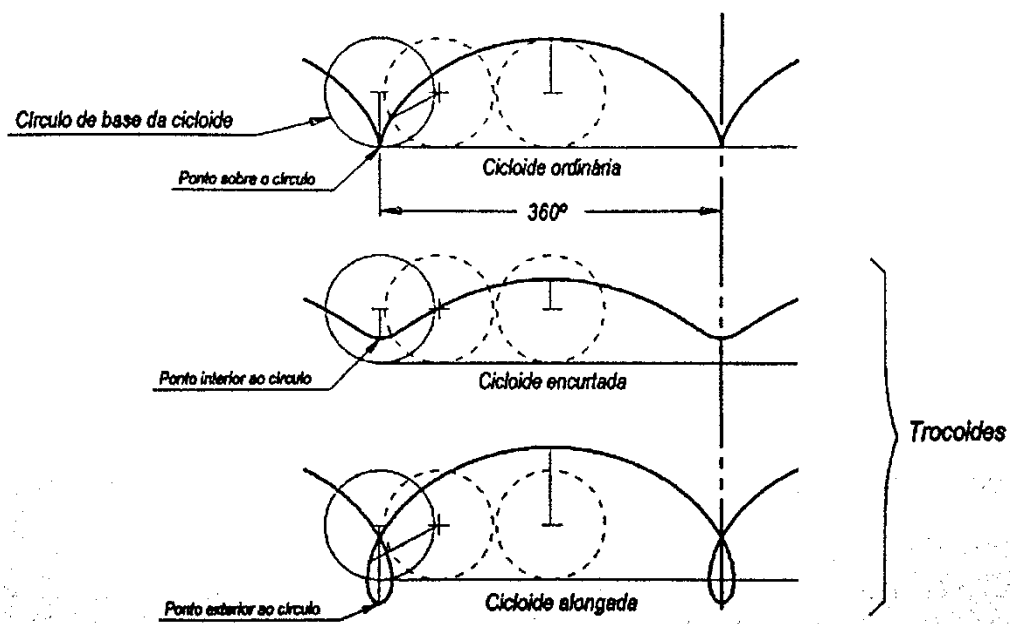


Figura 6 - Construção das curvas cicloides (MAZZO, 2013)

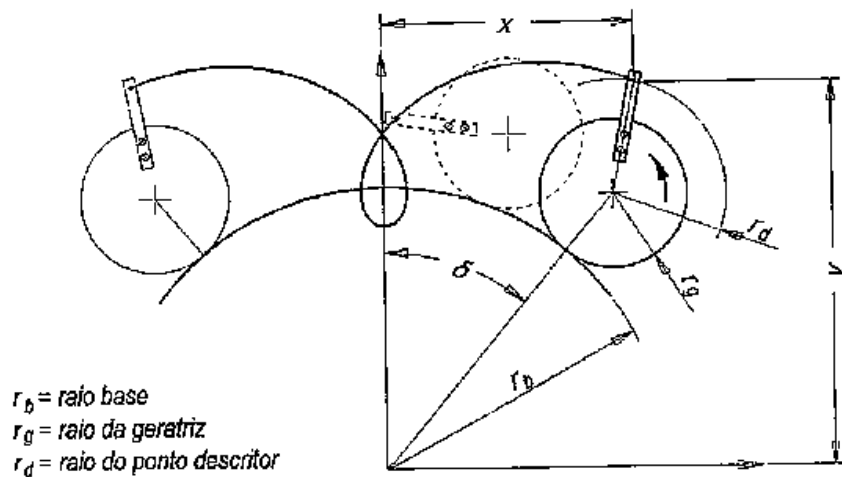


Figura 7 - Construção de uma epicloide alongada (MAZZO, 2013)

2.2 PROCESSOS DE FABRICAÇÃO

O processo de fabricação de uma engrenagem está diretamente relacionado com a geometria do dente que será obtida. As técnicas e equações utilizadas para geração do perfil do dente também são dependentes do processo de fabricação, e por isso é interessante conhecer diferentes maneiras de fabricação.

São vários processos diferentes e aqui pretende-se apenas apresentar somente os dois mais utilizados na indústria, em virtude da alta produtividade que proporcionam. Esses processos são o fresamento para ferramenta do tipo *hob* (caracol) e do tipo *shaper* (faca circular). Ambos são utilizados para geração de dentes retos e helicoidais.

2.2.1 Fresamento com ferramenta do tipo *hob*

Esse é o processo mais utilizado para gerar dentes externos de engrenagens cilíndricas retas e helicoidais (MAZZO, 2013). Nesse processo a ferramenta e a peça trabalham conjugadas uma à outra, onde a ferramenta é posicionada em um eixo perpendicular ao do disco da engrenagem. A ferramenta, como pode ser vista na Figura 8, gira continuamente, avançado sobre a peça e cortando os vãos entre os dentes. É considerado o método mais preciso, visto que não é necessário reposicionamento da ferramenta ou do disco durante sua geração (NORTON, 2013). Esse foi o processo escolhido para geração das engrenagens desse trabalho.

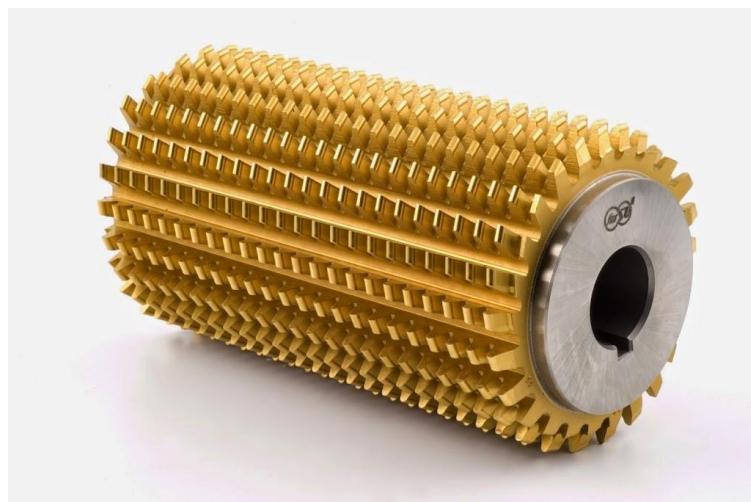


Figura 8 - Ferramenta do tipo *hob* (SU, 2015)

2.2.2 Fresamento com ferramenta do tipo *shaper*

Esse é o processo mais utilizado para geração de engrenagens cilíndricas externas e internas, retas e helicoidais, quando não é possível a utilização do *hob*, em razão da geometria da peça a ser cortada (MAZZO, 2013). Seu funcionamento ocorre com a movimentação axial do *shaper* para cima e para baixo através do disco para cortar os dentes, enquanto o disco roda ao redor da ferramenta. A precisão é boa, mas qualquer erro (inclusive em um dente do *shaper*) é transferido para a engrenagem (NORTON, 2013). Engrenagens internas também são geradas por esse método. A Figura 9 apresenta uma ferramenta desse tipo.



Figura 9 - Ferramenta do tipo *shaper* (SU, 2015)

2.3 CÁLCULO ANALÍTICO DE ECDR

Conforme é apresentado por Betim (2015), a metodologia mais usada para o dimensionamento de ECDR é aquela apresentada pela norma AGMA (*American Gear Manufacturers Association*), associação americana que se empenha no projeto e manufatura de engrenagens em aplicações de transmissão de potência. Essa norma aborda os cálculos realizados para a análise de tensão de flexão em cada dente de engrenagem e também para a tensão de contato do par engrenado. No entanto, muitos coeficientes usados nos cálculos são empíricos ou semi-empíricos, o que dificulta a validação de modelos numéricos por comparação com valores calculados

pelas equações da norma. Propõe-se então uma equação modificada em relação àquela utilizada pela AGMA para o cálculo das tensões de flexão.

2.3.1 Carregamento em Engrenagens Cilíndricas Retas

Antes da análise de tensões nas engrenagens, é necessário fazer uma análise dos carregamentos. A Figura 10 mostra um par engrenado que está de fato em contato, mas é apresentado separado para clareza no entendimento. No ponto de contato (chamado de ponto de referência na Figura 10 ou conhecido também como ponto primitivo), o torque T_p está sendo transmitido do pinhão para a coroa. Se desprezarmos o atrito, a única força atuante ao longo da linha de ação é a força W . Essa força pode ser desmembrada em duas componentes: W_r que atua na direção radial e W_t que atua na direção tangencial.

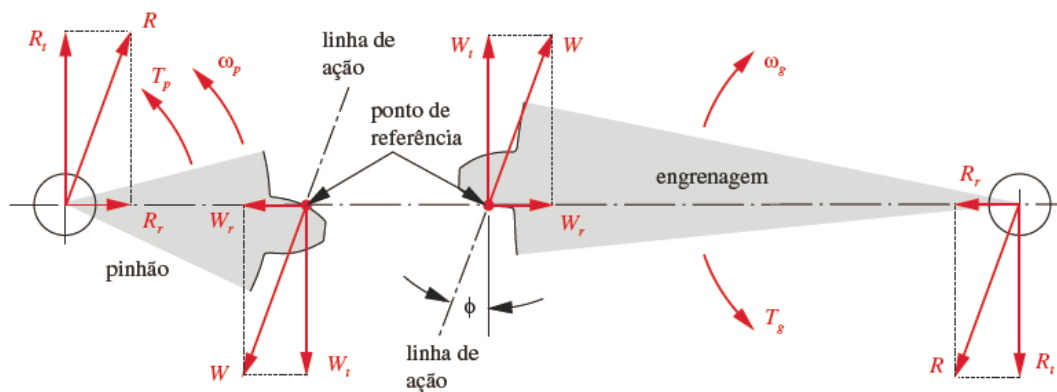


Figura 10 - Forças no pinhão e na coroa em um par engrenado (NORTON, 2013)

A força tangencial é determinada pela equação (8), adaptada de Norton (2013):

$$W_t = \frac{2 \times T_p}{m \times Z_1} \quad (8)$$

Utilizando trigonometria pode-se determinar a componente radial e a resultante, que são dadas respectivamente por:

$$W_r = W_t \times \tan \phi; \quad (9)$$

$$W = \frac{W_t}{\cos \phi} \quad (10)$$

O mesmo conjunto de equações pode ser usado para a coroa, pois a força W atua com mesma intensidade e sentido oposto. A força de reação no eixo R e suas

componentes também podem ser determinadas da mesma forma, visto que tem mesma intensidade, mas com sentido contrário ao carregamento W (BETIM, 2015).

A razão de contato influencia a localização e magnitude da carga W aplicada no dente. Uma condição desfavorável de carregamento é obviamente na ponta, porquê acaba gerando o maior momento na raiz do dente. Para razões de contato maiores que 1, haverá um ponto máximo de contato de um único dente chamado HPSTC (*Highest Point of Single Tooth Contact*) em algum lugar abaixo da ponta, e que criará um momento fletor máximo no dente (NORTON, 2013).

2.3.2 Tensões de Flexão

A primeira equação usada para estimar a tensão de flexão em dentes de engrenagens foi apresentada por Wilfred Lewis em 1892. Nela, ele considerou que o dente é uma viga em balanço com seção crítica na raiz (NORTON, 2013). Assim, a equação final apresentada por ele é:

$$\sigma_b = \frac{W_t}{F \times m \times Y} \quad (11)$$

onde W_t é a componente tangencial da força aplicada ao dente, m é o módulo, F é a largura da face e Y é o fator de forma de Lewis. O fator de forma leva em conta a geometria do dente para determinar a resistência efetiva do mesmo no filete da raiz (NORTON, 2013).

Essa equação serviu como base para a equação definida pela AGMA. As principais diferenças são a adição de fatores modificadores e o fator de forma é substituído por um fator geométrico J , que inclui os efeitos da concentração de tensão na raiz do filete (que não havia sido descoberta na época de Lewis) e fazendo com que a equação de Lewis não seja mais utilizada em sua forma original. A equação AGMA é apresentada na equação (12):

$$\sigma_b = \frac{W_t}{F \times m \times J} \times \frac{K_a \times K_m}{K_v} \times K_s \times K_B \times K_I \quad (12)$$

onde K_a é o fator de aplicação, K_m é o fator de distribuição de carga, K_v é o fator dinâmico, K_s é o fator de tamanho, K_B é o fator de espessura de borda e K_I é o fator de ciclo de carga.

A equação (12) é válida somente com a aplicação de algumas hipóteses que são as seguintes (NORTON, 2013):

- a) A razão de contato está entre 1 e 2;
- b) Não há interferência entre as pontas e os filetes de raiz dos dentes acoplados e não há adelgaçamento dos dentes abaixo do início teórico do perfil ativo;
- c) Nenhum dente é pontudo;
- d) A folga de engrenamento não é nula;
- e) Os filetes da raiz são padronizados, supõe-se que sejam suaves, e são produzidos por um processo de geração;
- f) As forças de atrito são desprezadas.

2.3.3 Modificações realizadas no cálculo da tensão de flexão

No trabalho de Betim (2015), foi necessário realizar várias alterações na equação da tensão de flexão apresentada pela norma, para posterior comparação com o resultado da análise numérica. Essas alterações foram necessárias para tornar viável a validação do modelo numérico a partir de cálculos analíticos.

2.3.3.1 Cálculo da força tangencial

Como visto anteriormente, tanto Norton (2013) como outros autores apresentam que o ponto de aplicação da carga nos dentes de engrenagens ocorre no diâmetro primitivo. Porém, a norma AGMA determina que quando não ocorre carregamento na ponta, este ocorre em um local definido por um raio de carga r_{nL} e um ângulo de carga ϕ_{nL} , conforme pode ser visto na Figura 11. Também são apresentados na Figura 11 a involuta do ângulo de pressão no raio onde ocorre contato entre dentes ϕ_{np} , o ângulo de pressão no ponto de aplicação de carga ϕ_{nw} e o raio de base virtual r_{nb} .

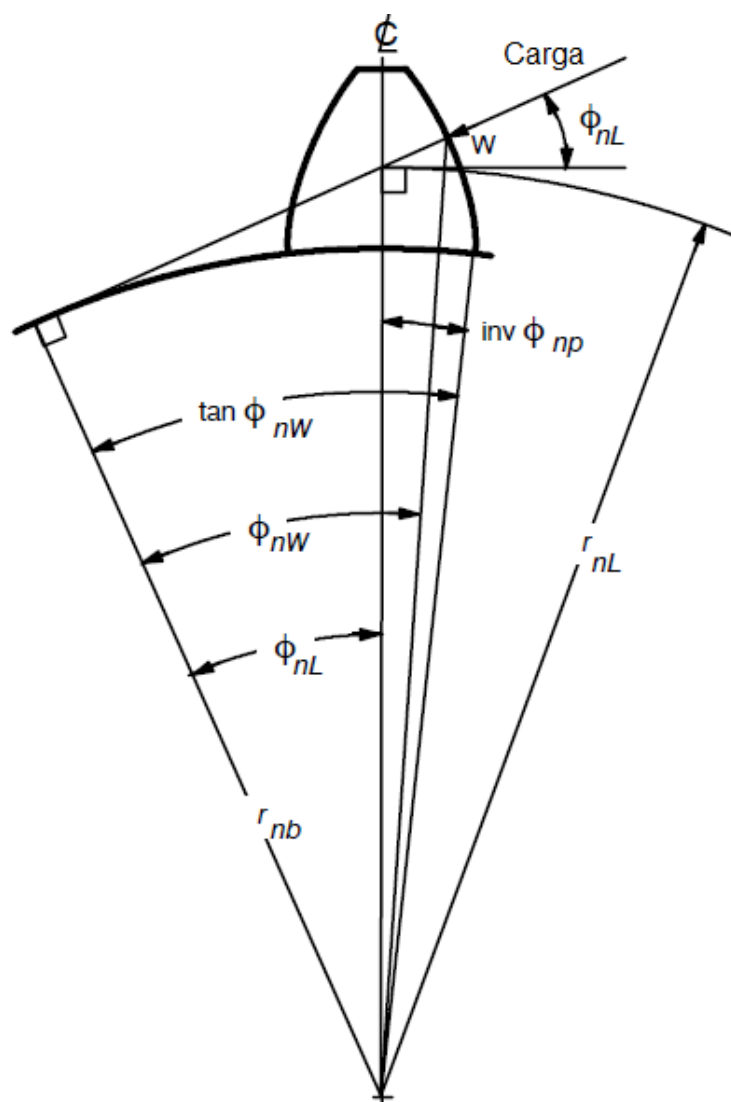


Figura 11 - Raio de carga e ângulo de carga (AGMA 908-B89, 1989)

Conforme analisado por Betim (2015), o raio e ângulo de carga estão relacionados com o ponto HPSTC. Ao traçar o raio e ângulo de carga em um dente, verifica-se que o ponto de intersecção entre a linha de ação da carga W com a curva evolutiva, coincide exatamente com o raio do ponto HPSTC. Isso deve-se ao fato de que as equações utilizadas para determinação, tanto do raio do ponto HPSTC quanto do raio de carga são interdependentes.

A equação (13) e equação (14) apresentam o cálculo do raio e ângulo de carga respectivamente, onde R_{b1} é o raio de base do pinhão e S_n é a espessura do dente. Na equação (14), o valor do ângulo de pressão ϕ apresentado isoladamente é inserido em radianos.

$$r_{nL} = \frac{R_{b1}}{\cos \phi_{nL}}; \quad (13)$$

$$\phi_{nL} = \tan \phi_{nW} - \tan \phi + \phi - \frac{S_n}{Z \times m}. \quad (14)$$

Para determinar os valores do raio e ângulo de carga, é necessário obter a localização do ponto HPSTC, pois o valor do ângulo de pressão no ponto de aplicação da carga ϕ_{nW} é dependente da cota desse ponto em uma linha de ação.

$$\tan \phi_{nW} = \frac{C_4}{R_{b1}}. \quad (15)$$

A norma apresenta uma maneira geométrica de determinar esses valores. A Figura 12 apresenta o plano transversal de visualização da linha de ação de duas engrenagens em contato. Nessa Figura, podemos perceber que é possível obter a localização dos pontos HPSTC e LPSTC, através de cotas na linha de ação. Todos esses pontos, tem origem na intersecção entre o raio de base do pinhão e a própria linha de ação. A cota C_4 , necessária para a equação (15), corresponde ao ponto HPSTC.

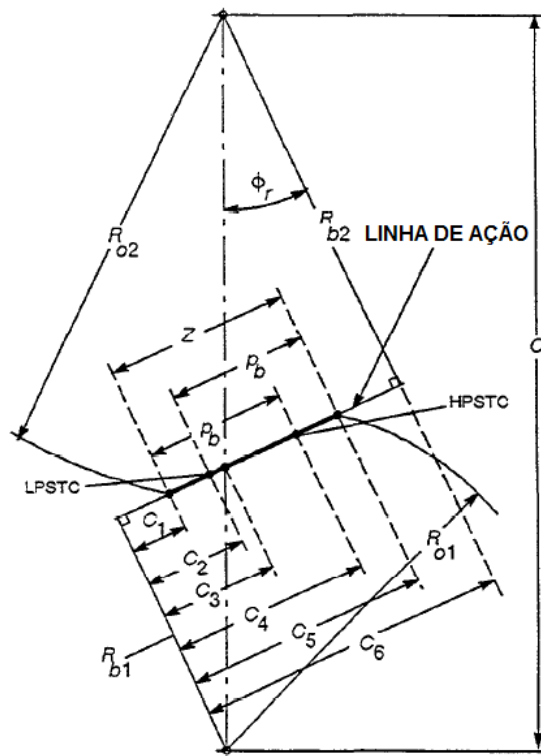


Figura 12 - Linha de ação em plano transversal (AGMA 908-B89, 1989)

Dessa forma, para obter o valor de C_4 , uma série de outros parâmetros devem ser calculados. Inicialmente, temos que os valores dos raios de base do pinhão R_{b1} e da coroa R_{b2} são:

$$R_{b1} = \frac{d_{p(\text{pinhão})}}{2} \times \cos(\phi); \quad (16)$$

$$R_{b2} = \frac{d_{p(\text{coroa})}}{2} \times \cos(\phi). \quad (17)$$

Com esses valores, pode-se obter o ângulo de pressão transversal de operação ϕ_r , apresentado anteriormente na Figura 12. Quando o engrenamento é externo, o sinal superior da equação deve ser utilizado.

$$\phi_r = \cos^{-1}\left(\frac{R_{b2} \pm R_{b1}}{a}\right). \quad (18)$$

Antes de determinar o valor da cota C_4 , é necessário determinar a cota C_6 , que corresponde ao comprimento da linha de ação entre os raios de base do pinhão e da coroa.

$$C_6 = a \times \sin \phi_r. \quad (19)$$

O valor da cota C_4 é obtido pela equação (20). As variáveis presentes nessa equação podem ser obtidas pelas equações (21) e (22)

$$C_4 = C_1 + p_b; \quad (20)$$

$$C_1 = \pm \left[C_6 - (R_{o2}^2 - R_{b2}^2)^{0,5} \right]; \quad (21)$$

$$p_b = \frac{2 \times \pi \times R_{b1}}{z_1}, \quad (22)$$

onde p_b é o passo de base transversal e R_{o2} é o raio de cabeça da coroa. Novamente, quando o engrenamento for externo, o sinal superior da equação (21) deve ser utilizado.

Dessa forma, é possível calcular os valores de ângulo e raio de carga. Obtidos esses valores, determina-se o valor da força tangencial correto. A utilização do raio primitivo se torna equivocada, visto que em carregamentos do tipo HPSTC, a aplicação ocorre no raio de carga encontrado. Assim, temos a nova equação para obtenção da força tangencial:

$$W_t = \frac{T_p \times 2}{2 \times r_{nL}}. \quad (23)$$

2.3.3.2 Alterações na equação de tensão de flexão apresentada pela norma

A intenção desse trabalho é somente avaliar a evolução das tensões envolvendo somente as características geométricas. Portanto, os modificadores presentes na norma não são considerados no cálculo de tensão e sendo assim temos somente:

$$\sigma_b = \frac{W_t}{F \times m \times J} \quad (24)$$

O fator geométrico J é importante pois é ele que reúne todas as informações relacionadas à geometria do dente da engrenagem (BETIM, 2015). A norma AGMA 908-B89 disponibiliza as tabelas para dentes padronizados com profundidade completa ou adendos alongados, carregamento HPSTC ou na ponta e ângulos de pressão diferentes. A norma também apresenta a equação em que é possível determinar esse fator J , como se segue:

$$J = \frac{Y_A \times C_\psi}{k_f \times m_N} \quad (25)$$

onde Y_A é o fator de forma da norma, C_ψ é o fator de distribuição helicoidal, m_N é a taxa de compartilhamento da carga (ambos com valor unitário para ECDR) e k_f é o fator concentrador de tensão para a raiz do dente de ECDR.

No trabalho de Betim (2015), inicialmente foram usados valores tabelados para obter o fator J , mas percebeu-se que havia uma grande diferença entre as tensões obtidas pelo modelo analítico e pelo modelo numérico. Esse erro pode ter ocorrido devido ao fato de que a geometria da engrenagem usada para a geração dos valores tabelados não foi a mesma utilizada por Betim (2015).

Após estudo da equação, Betim (2015) percebeu que as duas dimensões mais importantes para o cálculo do fator de forma são a espessura do dente medida no ponto crítico s_f e a altura da parábola de Lewis h_f . É utilizado um método geométrico (BROGHAMER & DOLAN, 1942) para a determinação dessas dimensões, conforme pode ser visto na Figura 13 e na sequência a seguir:

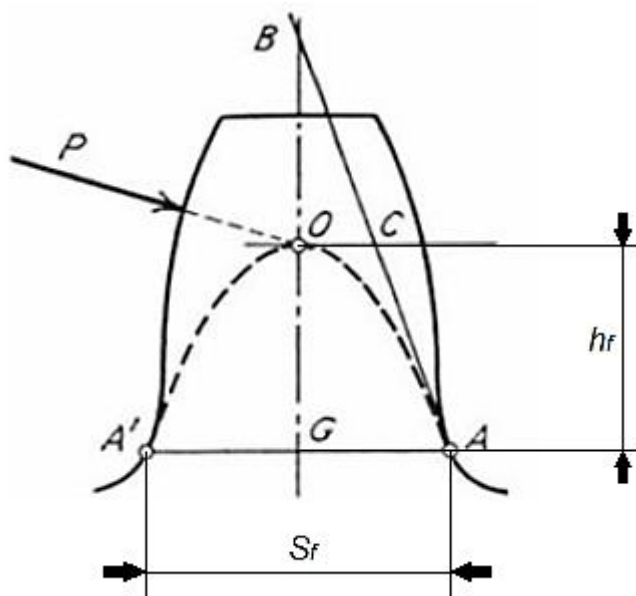


Figura 13 - Método geométrico para obtenção do s_f e h_f (BROGHAMER & DOLAN, 1942)

- 1) Através do dente, desenhar a linha OP na direção do ângulo de carregamento e normal a superfície do dente até interceptar a linha de centro BG ;
- 2) No ponto O desenhar a linha OC perpendicular à linha BG ;
- 3) Desenhar a linha AB com uma de suas extremidades tangente a curva trocoidal da raiz do dente e a outra coincidente com a linha de centro BG ;
- 4) Adicionar a relação de igualdade no comprimento das retas que compõem AB , ou seja, $BC = CA$. Assim, A é o ponto de tangência entre a curva da raiz do dente e a parábola de Lewis. Logo, desenhando AA' tem-se uma linha que une os dois pontos críticos.

Com as medidas s_f e h_f calculadas, é possível calcular o fator de forma Y_A pela equação (26). Para o cálculo do fator geométrico é necessário calcular também o fator concentrador de tensão k_f .

$$Y_A = \frac{s_f^2}{6 \times h_f} \quad (26)$$

O método da parábola de Lewis inscrita no dente é utilizado para obtenção do raio no ponto crítico. Porém, outro método também utilizado por outros autores é o ângulo 30° . Esse método consiste em selecionar o ponto de tangência com a trocoide, obtido usando um ângulo de 30° a partir de um ponto na linha de centro do dente. Esse método é melhor entendido visualizando a Figura 14.

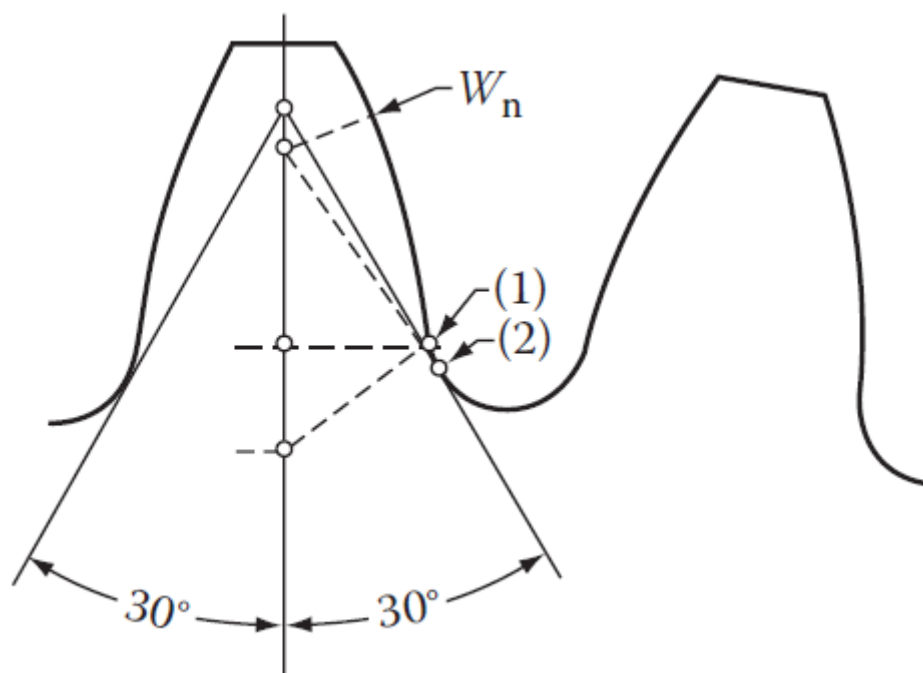


Figura 14 - Ponto do raio crítico obtido usando: (1) método da parábola de Lewis inscrita e (2) método ângulo 30° (RADZEVICH, 2012)

Radzevich (2012) apresenta uma discussão desses dois métodos. Segundo ele, a ISO (International Standards Organization) faz uso do método ângulo 30° e equações de concentração de tensão fazendo uso do método dos elementos finitos, enquanto a norma AGMA utiliza equações baseadas no trabalho de Lewis e Broghamer/Dolan.

Alguns autores, como os alemães, preferem utilizar o método do ângulo 30°, pois acreditam ser de mais fácil aplicação e que o resultado obtido por esse método é apropriado para utilização de projeto de engrenagens. Porém, percebe-se que o uso do método dos elementos finitos para obtenção dos valores para concentração de tensão apresenta resultados diferentes daqueles obtidos utilizando as equações de Broghamer/Dolan (RADZEVICH, 2012).

2.3.3.3 Cálculo do coeficiente de concentração de tensão

Para calcular o coeficiente de concentração de tensão, a norma apresenta a equação desenvolvida por Broghamer e Dolan (1942), durante seus experimentos fotoelásticos:

$$k_f = H + \left(\frac{s_f}{p_f}\right)^L \times \left(\frac{s_f}{h_f}\right)^M \quad (27)$$

onde os coeficientes H , L e M são dependentes do ângulo de pressão e p_f é o raio mínimo de curvatura da curva do filete trocoidal. Esses coeficientes podem ser calculados, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$H = 0,331 - 0,436 \times \phi; \quad (28)$$

$$L = 0,324 - 0,492 \times \phi; \quad (29)$$

$$M = 0,261 + 0,545 \times \phi; \quad (30)$$

$$p_f = r_t + \frac{(r_{no}'' - r_{no}^s)^2}{\frac{r_n'' \times r_{no}''}{r_n'' + r_{no}''} - (r_{no}'' - r_{no}^s)} \quad (31)$$

Na equação para determinação do p_f , r_n'' é o raio virtual de geração primitivo de uma ECDR, r_{no}'' é o raio virtual de geração primitivo da ferramenta e r_{no}^s é o raio de posicionamento do centro do raio de ponta da ferramenta identificada pela letra S (BETIM, 2015).

Segundo a norma AGMA, o processo de fabricação considerado para utilização do p_f é do tipo *shaper*, e que para um processo que usa a ferramenta do tipo *hob* (utilizada nesse trabalho), o número de dentes da ferramenta deve ser igual a 10000. Portanto, como pode ser visto, o raio de curvatura mínimo depende de várias informações da ferramenta de geração. Betim (2015), em seu trabalho, afirmou que isso pode ter sido a fonte de erros na determinação do concentrador de tensão.

Visando encontrar outra maneira de calcular o raio mínimo de curvatura da curva do filete trocoidal, o pesquisador Candee desenvolveu em 1941 a seguinte relação, entre o raio de curvatura mínimo p_f e o raio de ponta da ferramenta r_t (PILKEY, 1997):

$$p_f = \frac{(b - r_t)^2}{\frac{z}{2 \times p_d} + (b - r_t)} + r_t, \quad (32)$$

onde b é o dedendo e p_d é o passo diametral. Para esse caso, o p_d é considerado como

$$p_d = \frac{25,4}{m}. \quad (33)$$

O raio de ponta da ferramenta r_t , segundo o catálogo do fabricante, para uma ferramenta do tipo hob deve ser 30% do módulo (NACHI, 2015).

Dessa forma, essa foi a expressão utilizada para obter o valor de raio de curvatura mínimo. Com isso, finalizam-se todas as alterações necessárias na equação de tensão de flexão, e tem-se a seguir a equação utilizada nesse trabalho:

$$\sigma_{máx} = \frac{W_t}{F \times m \times Y_A} \times k_f \quad (34)$$

2.4 CÁLCULO POR SIMULAÇÃO NUMÉRICA

De forma geral podemos considerar que todo fenômeno da natureza pode ser descrito com ajuda das leis da física e elementos matemáticos. A descrição desse fenômeno ou de um processo é chamado de modelo matemático (REDDY, 2006). Na área da engenharia, os processos geralmente recaem em uma equação diferencial e/ou integral com domínios complexos, o que acaba dificultando a solução de forma analítica. Antigamente, sem o uso da tecnologia, esses modelos eram simplificados de maneira que pudessem ser resolvidos. Com o desenvolvimento da capacidade computacional, tanto em velocidade quanto em capacidade de armazenamento, foi possível o uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos. O uso de um método numérico e de um computador para avaliar um modelo matemático é denominado simulação numérica (REDDY, 2006).

As principais vantagens do uso do método numérico em comparação aos métodos analíticos ou ao uso da experimentação em laboratório são principalmente o baixo custo, a velocidade e a facilidade de fornecer informações completas e simular condições realísticas (FRANCO, 2010). O método dos elementos finitos (MEF) é um dos mais utilizados na área da mecânica estrutural para a análise de tensões, deformações e deslocamentos.

2.4.1 Método dos elementos finitos (MEF)

No método dos elementos finitos, um domínio é considerado como um conjunto de vários subdomínios e em cada subdomínio a equação governante é aproximada por qualquer método variacional tradicional. Um método variacional é uma ferramenta matemática usada para encontrar aproximações do valor real. Dessa forma, uma

equação complexa é representada como uma coleção de equações polinomiais simples, o que acaba sendo mais simples de representar e calcular (REDDY, 2006). O MEF apresenta três características importantes que acabam o diferenciando dos outros métodos:

- a) Um domínio geometricamente complexo é representado como uma coleção de subdomínios geometricamente simples chamados elementos finitos. Cada elemento finito é visto como um domínio independente, e o termo “domínio” se refere à região geométrica na qual as equações são resolvidas.
- b) Para cada elemento finito são desenvolvidas equações algébricas usando as equações que governam o problema.
- c) Os elementos são colocados em sua posição original usando certas relações entre eles. Esse agrupamento descreve de forma aproximada o domínio original.

De forma resumida, Reddy (2006) mostra que os passos fundamentais para a obtenção da solução utilizando o MEF são:

- 1) Discretização do domínio. Separação do todo em várias partes (elementos finitos);
- 2) Encontrar a equação que rege o elemento finito;
- 3) União dos elementos com suas respectivas equações em um único domínio e uma única equação;
- 4) Análise da convergência e estimativa do erro da aproximação encontrada.

2.5 CONSTRUÇÃO DO PERFIL DO DENTE PARA A MODELAGEM NUMÉRICA

Para a criação do modelo numérico, é necessário inicialmente realizar a modelagem da engrenagem em um software de CAD 3D, que nesse caso, será feito uso do SolidWorks.

Conforme visto anteriormente, o perfil do dente de uma engrenagem é composto de duas curvas: a evolvente, que faz a ligação entre a cabeça do dente até aproximadamente ao diâmetro de base e a trocoide, que se inicia ao final da evolvente e termina no diâmetro de raiz, ou diâmetro do pé. A trocoide é a curva mais importante nessa modelagem, pois é ela que define o perfil da raiz do dente, região onde ocorrem

as maiores tensões de flexão. A Figura 15 apresenta um perfil de um dente de uma ECDR.

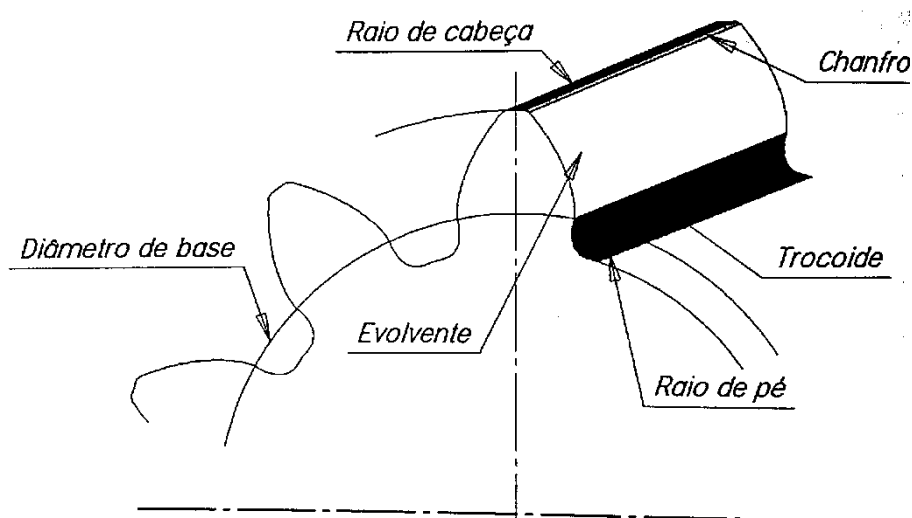


Figura 15 - Perfil de um dente de engrenagem (MAZZO, 2013)

2.5.1 Construção do perfil evolvental

A Figura 16 apresenta o raio r_u onde ocorre a intersecção das curvas evolvente e trocoide quando geradas por uma ferramenta do tipo *hob*. As outras dimensões apresentadas para a engrenagem são o ângulo de pressão α , o raio primitivo r_f e o raio de base r_b . Para a ferramenta, h_{kz} é o adendo e r_k é o raio de ponta.

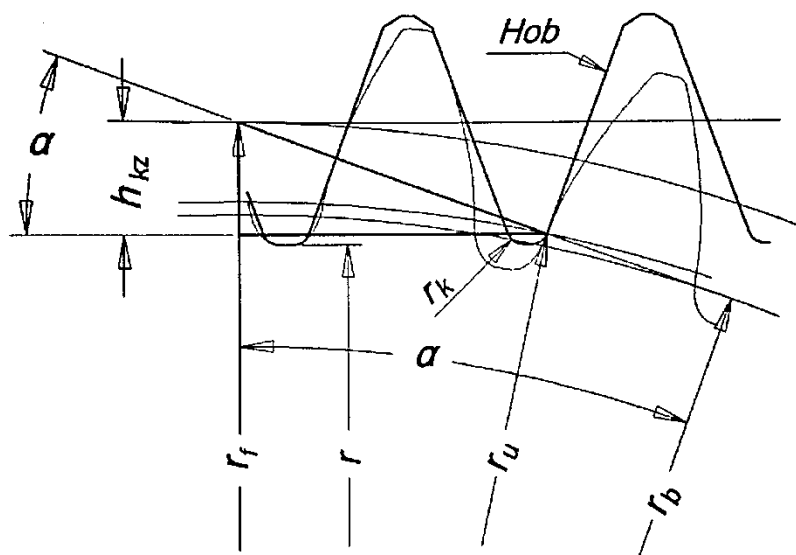


Figura 16 - Tangente entre a evolvente e a trocoide - corte com hob (MAZZO, 2013)

De acordo com Mazzo (2013), o perfil evolvental pode ser gerado pela união de vários pontos que descrevem a trajetória da curva, conforme apresentado à esquerda

da Figura 17. É possível visualizar que o raio r_{nk} representa o fim do chanfro que algumas engrenagens possuem na aresta da cabeça do dente. O trabalho atual não fará uso do chanfro, dessa forma o raio r_{nk} é igual ao raio externo da engrenagem.

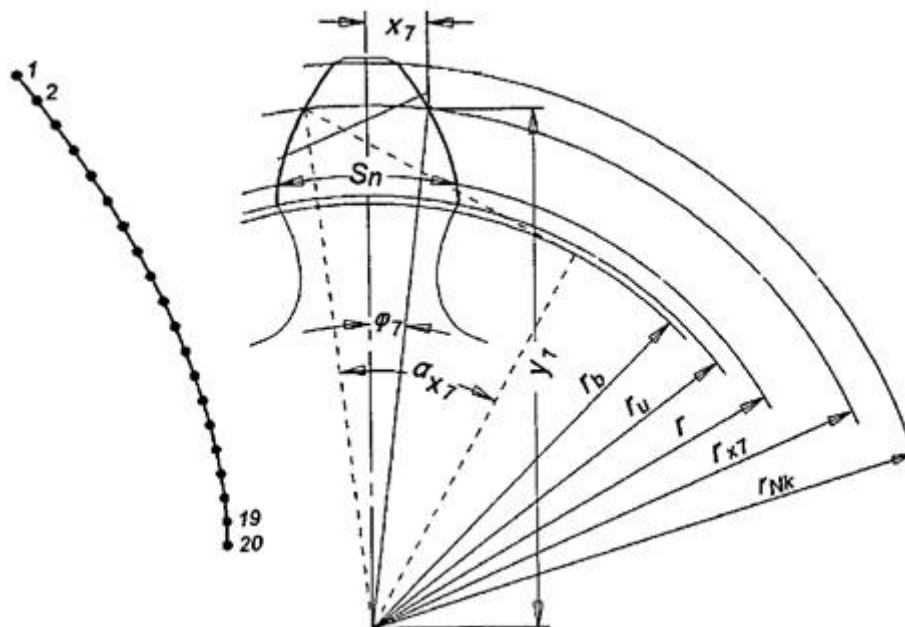


Figura 17 - Traçado da evolvente (MAZZO, 2013)

A evolvente pode ser traçada por meio de coordenadas polares para cada ponto. Essas coordenadas são definidas por um raio vetor r_x e um ângulo ϕ , conforme apresentado a seguir. A origem desse sistema fica localizada no centro da engrenagem (MAZZO, 2013).

$$a_t = \tan^{-1}\left(\frac{\tan \phi}{\cos \beta}\right); \quad (35)$$

$$a_x = \cos^{-1}\left(\frac{d_p \times \cos \alpha_t}{2 \times r_x}\right); \quad (36)$$

$$\phi = \frac{S_n}{d_p \times \cos \beta} + \text{inv}(\alpha_t) - \text{inv}(\alpha_x), \quad (37)$$

onde ϕ é o ângulo de pressão normal, β é o ângulo de hélice sobre o diâmetro de referência, α_t é o ângulo de pressão transversal e S_n é a espessura do dente. Para calcular a involuta de um ângulo qualquer, a equação (38) deve ser utilizada. As coordenadas cartesianas são obtidas utilizando as equações (39) e (40):

$$\text{inv}(\alpha) = \tan \alpha - \alpha; \quad (38)$$

$$x_{ev} = r_x \times \text{sen } \varphi; \quad (39)$$

$$y_{ev} = r_x \times \text{cos } \varphi. \quad (40)$$

A última característica a ser considerada para o desenvolvimento desse perfil evolvental diz respeito à crista da ferramenta geradora. Dependendo das características geométricas da engrenagem, essa crista poderá penetrar no perfil do dente e gerar uma depressão, e sua curva cruza com o perfil evolvente. Caso não penetre, o perfil trocoidal tangencia o perfil evolvente. Para esse trabalho, foi definido que a geração será realizada por uma ferramenta do tipo *hob* sem depressão, por ser a mais utilizada (BETIM, 2015). Com essa informação, é possível plotar os pontos de início e término da curva, de acordo com as seguintes equações:

$$h_k = r - r_r; \quad (41)$$

$$h_{kz} = h_k - \frac{r_k}{\text{cos } \beta} \times (1 - \text{sen } \alpha_t); \quad (42)$$

$$r_u = \sqrt{\left[r \times \text{sen } \alpha_t - \left(\frac{h_{kz}}{\text{sen } \alpha_t} \right) \right]^2 + r_b^2}; \quad (43)$$

$$d_u = 2 \times r_u. \quad (44)$$

Na equação (41), podemos verificar que o adendo da ferramenta h_k é igual ao dedendo da engrenagem que será gerada, pois r e r_r correspondem ao raio primitivo e raio de raiz da engrenagem. Lembrando que para qualquer ECDR, o adendo é numericamente igual ao seu módulo e o dedendo é 1,25 vezes o seu módulo (BETIM, 2015).

2.5.2 Construção do perfil trocoidal

Da mesma forma como foi para a evolvente, a trocoide também pode ter seu perfil calculado ponto a ponto por outro conjunto de equações. Aqui, é interessante afirmar que as ferramentas geradoras possuem um raio em sua crista, para reduzir o desgaste da ferramenta e também a concentração de tensões no pé do dente, devido ao fato de se obter um adoçamento maior (MAZZO, 2013). Conforme pode ser visto na Figura 18, a curva gerada pelo centro do raio da crista da ferramenta é a *trocoide*

primitiva e o perfil real gerado pela ferramenta é denominado *filete trocoidal*, esse que faz a ligação da evolvente ao raio de pé.

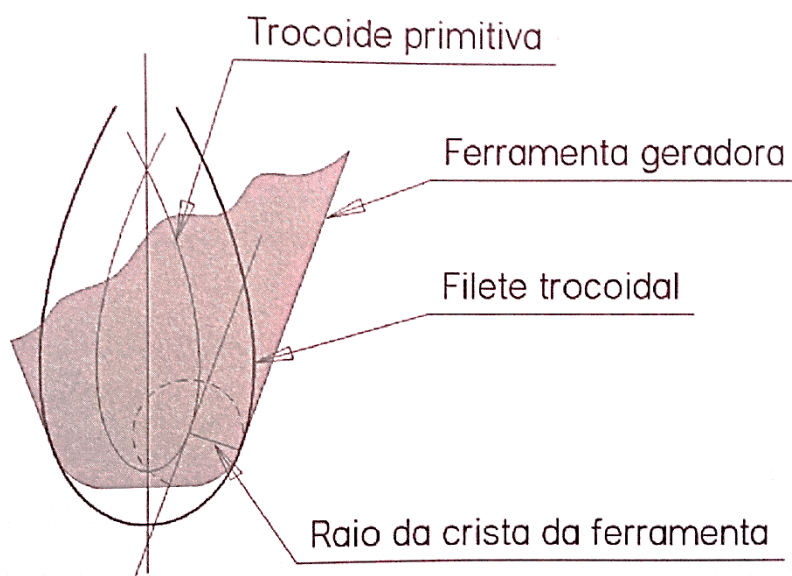


Figura 18 - Trocoide primitiva e filete trocoidal (MAZZO, 2013)

A trocoide primitiva pode ser traçada por meio de coordenadas polares ponto a ponto, atribuindo um raio vetor e calculando um ângulo. Para isso, é necessário fornecer uma série de raios r_{tp} que correspondem aos pontos da trocoide primitiva. Para cada ponto fornecido, pode-se determinar o ponto correspondente ao filete trocoidal, e dessa forma, obtendo a curva pela união desses pontos. A Figura 19 mostra a ferramenta com a porção do filete trocoidal que realiza a geração do perfil da raiz do dente.

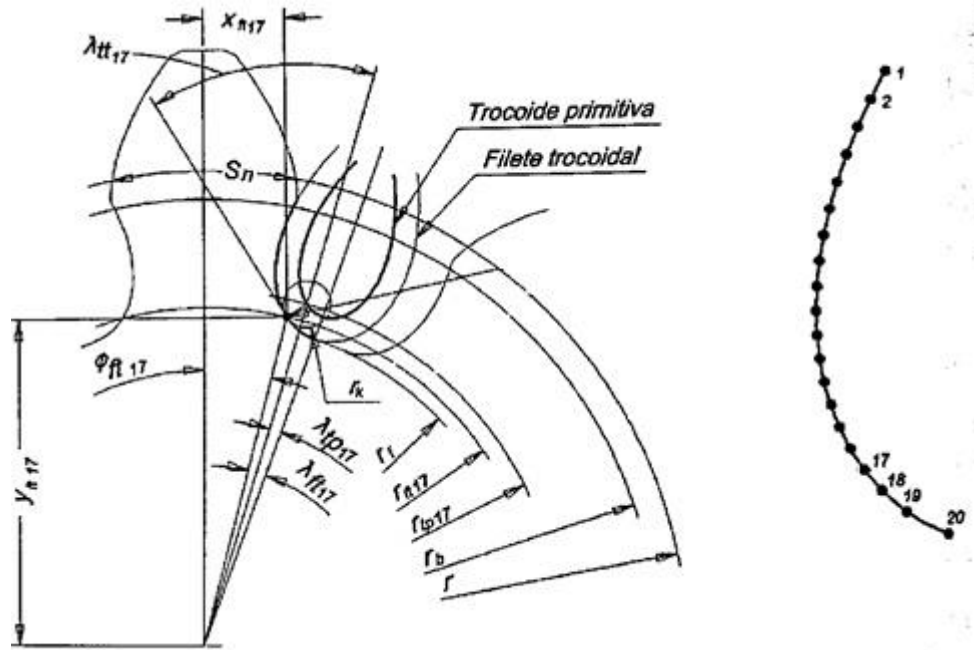


Figura 19 - Geração do filete trocoidal (MAZZO, 2013)

As equações a seguir devem ser utilizadas para a geração do perfil trocoidal. Alguns desses elementos estão representados anteriormente, na Figura 19.

$$c_v = r - r_r - r_k; \quad (45)$$

$$\alpha_v = \cos^{-1} \left(\frac{r - c_v}{r_{tp}} \right); \quad (46)$$

$$\varphi_{tp} = \frac{c_v \times \tan \alpha_v}{r} - \tan \alpha_v + \alpha_v; \quad (47)$$

$$c_p = \sqrt{r_{tp}^2 - (r - c_v)^2}; \quad (48)$$

$$\gamma_{tt} = \tan^{-1} \left(\frac{r - c_v - \frac{r_{tp}^2}{r}}{c_p} \right); \quad (49)$$

$$r_{ft} = \sqrt{r_{tp}^2 + r_k \times (r_k - 2 \times r_{tp} \times \text{sen}(\gamma_{tt}))}; \quad (50)$$

$$\gamma_{ft} = \tan^{-1} \left(\frac{\cos(\gamma_{tt})}{\frac{r_{tp}}{r_k} - \text{sen}(\gamma_{tt})} \right) + \varphi_{tp} [\text{rad}]; \quad (51)$$

$$T_1 = \left(\frac{d_p \times \pi}{z} - \frac{S_n}{\cos \beta} \right); \quad (52)$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2} - (r - r_f) \times \tan \alpha_t - \tan \left(45 - \frac{90 \times \tan \alpha_t}{\pi} \right) \times r_k; \quad (53)$$

$$\varphi_{ft} = \frac{180}{\pi} \times \left(\frac{\pi}{z} - \frac{T_2}{r} - \gamma_{ft} \right) [\text{graus}]. \quad (54)$$

Onde:

- c_v = ordenada do centro do raio de crista até a linha primitiva do perfil de referência;
- Φ_{tp} = ângulo vetorial da trocoide primitiva;
- γ_{ft} = ângulo entre a tangente da trocoide primitiva e o raio vetor.

As coordenadas polares do filete trocoidal são o raio r_{ft} e o ângulo φ_{ft} . As coordenadas cartesianas podem ser determinadas por:

$$x_{ft} = r_{ft} \times \text{sen } \varphi_{ft}; \quad (55)$$

$$y_{ft} = r_{ft} \times \text{cos } \varphi_{ft}. \quad (56)$$

2.5.3 Incrementos para obtenção dos raios das curvas evolvente e trocoide

Em ambos os processos de determinação de curvas, um raio deve ser atribuído para que posteriormente um ângulo seja calculado. Esses dois elementos definem a posição do ponto, e esse processo é repetido para uma quantidade pré-estipulada de pontos. É intuitivo perceber que com o aumento do número de pontos, o perfil da curva fica mais refinado (BETIM, 2015).

São definidos 20 pontos para o traçado de cada curva, e cada curva segue uma regra de distribuição de raios. Para a evolvente, foi definido o incremento i_{rx} que deve ser subtraído do raio a cada iteração:

$$i_{rx} = \frac{r_{nk} - r_u}{n - 1}, \quad (57)$$

onde r_{nk} é o raio externo da engrenagem, r_u é o raio de início da curva e n é o número de iterações (que é igual a 20 para esse trabalho).

Para a trocoide, é necessário o uso de uma distribuição de raios exponencial, visto que uma distribuição de raios linear, como foi na evolvente, prejudicaria a precisão do traçado na região próxima ao pé do dente, onde o raio de curvatura é menor (MAZZO, 2013). Dessa forma, tem-se o segmento exponencial X :

$$X = \frac{\ln(R_1 - R_n + 1)}{n - 1}, \quad (58)$$

onde R_1 é o raio primitivo do primeiro ponto da trocoide que está relacionado com r_u , R_n é o último raio, que tem o mesmo valor do raio de raiz e n também é o número de iterações. Com isso, é possível calcular o raio primitivo r_{ip} para cada ponto:

$$r_{ipi} = r_{ipn} + e^{(n-i) \times X} - 1, \quad (59)$$

onde os índices i e n representam a iteração vigente e o número de iterações respectivamente.

3 METODOLOGIA

A análise de tensões como é visto nas seções anteriores é dependente do formato geométrico das engrenagens. Com um modelo numérico já estabelecido por Betim (2015), esse trabalho dá continuidade ao modelo proposto por ele com uma série novos resultados que não puderam ser obtidos naquele trabalho.

Conforme visto na Tabela 1, alguns parâmetros são definidos para a realização dos resultados iniciais. O procedimento segue o utilizado por Betim (2015): com os dados de entrada já estabelecidos, é realizado a modelagem das engrenagens utilizando o software CAD SolidWorks. O modelo é transferido para o pacote comercial ABAQUS de simulação numérica por elementos finitos. Paralelamente, para comparação, é realizado o cálculo analítico para os mesmos dados de entrada estabelecidos, que como visto anteriormente, não utiliza os fatores modificadores e tem o fator geométrico J também calculado.

É realizada uma avaliação do erro obtido com os resultados do cálculo analítico e cálculo numérico e após isso, pode-se iniciar com a geração dos resultados.

3.1 CONSTRUÇÃO DO MODELO ANALÍTICO

3.1.1 Dados de entrada

Para iniciar a comparação dos modelos analíticos e numéricos, é necessário separar os dados de entrada a serem utilizados em ambos os modelos. Os dados iniciais utilizados para esse trabalho são os mesmos utilizados por Betim (2015), como segue:

- a) Pinhão e coroa são feitas de aço 4340 ($\nu = 0,29$ e $E = 205$ GPa);
- b) Largura do dente: $F = 1$ mm;
- c) Perfil do dente: profundidade completa;
- d) $Z_p = 21$, $Z_c = 35$, $m = 5$ mm e $\phi = 20^\circ$;
- e) Carregamento do tipo HPSTC;
- f) Motor elétrico: 10HP e rotação de 1800rpm.

A largura do dente é adotada como sendo unitária para aproximar a simulação como uma análise 2D, visto que o cálculo analítico é todo realizado em um sistema bidimensional.

3.1.2 Cálculo das tensões de flexão

Como é apresentado na fundamentação teórica, uma série de alterações tiveram que ser realizadas na equação de tensão de flexão apresentada pela norma. Antes desses cálculos serem apresentados, algumas considerações devem ser justificadas.

A primeira delas é a razão de contato que, segundo a norma, deve estar compreendida entre os valores de 1 e 2. Além disso, para determinar se ocorrerá adelgaçamento ou interferência no par engrenado é necessário determinar o número mínimo de dentes N_p que o pinhão deve ter, aplicando a equação (60) (SHIGLEY, MISCHKE, & BUDYNAS, 2005):

$$N_p = \frac{2 \times k}{(1 + 2i) \sin^2 \phi} (i + \sqrt{i^2 + (1 + 2i) \sin^2 \phi}), \quad (60)$$

onde k tem valor unitário para dentes de profundidade completa e 0,8 para os demais e i é a relação de transmissão, que pode ser determinada por:

$$i = \frac{Z_c}{Z_p}. \quad (61)$$

Esses valores e outros foram calculados e são apresentados na Tabela 4. Podemos perceber que o valor de N_p é menor que o número de dentes do pinhão, e que a razão de contato se situa entre o intervalo de 1 e 2.

Tabela 4 - Parâmetros geométricos das engrenagens

Z_p	Z_c	i	d_{pp} (mm)	d_{pc} (mm)	ϕ (°)	ϕ (rad)	m (mm)	a (mm)	L_{ab} (mm)	RC	k	N_p
21	35	1.667	105	175	20	0.349	5	140	24.029	1.628	1	14.719

Com as condições atendidas, foi calculado o momento torçor proveniente do motor elétrico. Esse é também o torque atuante no pinhão, e seu valor é obtido de:

$$M_t = \frac{N \times 30}{\pi \times n}, \quad (62)$$

onde N é a potência do motor (dada em W na equação) e n é a rotação do motor (dado em rpm). Dessa forma, a Tabela 5 apresenta o valor encontrado para o torque.

Tabela 5 - Valores relevantes do motor elétrico

n_{Mot} (rpm)	N_{Mot} (HP)	N_{Mot} (W)	M_t (N.m)
1800	10	7457	39.56

Para o cálculo tensão de flexão, é utilizada a equação (34). A Tabela 6 apresenta as variáveis obtidas de acordo com as equações apresentadas na fundamentação teórica. Aqui é importante ressaltar que os valores de h_f e s_f são obtidos pelo método geométrico apresentado na Figura 13. Foi criado um esboço em um modelo de engrenagem construído no SolidWorks para a obtenção desses pontos.

Tabela 6 - Variáveis obtidos para o cálculo da tensão de flexão

W_t (N)	h_f (mm)	F (mm)	s_f (mm)	k_f
760.9	4.95	1	9.54	1.67

Tem-se, portanto, a tensão de flexão para o modelo considerado. Na equação (63), o fator de forma Y_A foi desmembrado para melhor visualização:

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \times W_t \times h_f}{F \times s_f^2} \times k_f = \frac{6 \times 760,898 \times 4,9461}{1 \times (9,5357)^2} \times 1,671 = 415,0245 \text{ MPa} \quad (63)$$

3.2 CONSTRUÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Para a criação do modelo numérico, é necessário inicialmente realizar a modelagem da engrenagem em um software de CAD 3D, que nesse caso, é empregado o SolidWorks.

Todas as equações mencionadas no Capítulo 2 são colocadas em uma planilha do Excel para a realização dos cálculos. A seguir, nas Tabelas 7 a 10 são apresentados os resultados obtidos.

Tabela 7 - Dados de entrada para determinação dos pontos das curvas evolvente e trocoide

m (mm)	5.000
z	21.000
d_p (mm)	105.000
β	0.000
φ (°)	20.000
φ (rad)	0.349
inv φ	0.015
S_n (mm)	7.854
n	20.000
X	0.051
i_{rx}	0.426

Tabela 8 - Parâmetros constantes na mudança de pontos das curvas evolvente e trocoide

r_b (mm)	r_k (mm)	r (mm)	r_f (mm)	h_k (mm)	h_{kz} (mm)	r_u (mm)	r_{nk} (mm)	c_v (mm)	T_t (mm)	T_2 (mm)
49.334	1.500	52.500	46.250	6.250	5.263	49.401	57.500	4.750	7.8540	0.6184

Tabela 9 - Cálculo das coordenadas da curva evolvente

Ponto	r_x (mm)	α_t (rad)	α_x (rad)	inv α_x	inv α_t	ϕ (rad)	ϕ (°)	x_{ev} (mm)	y_{ev} (mm)
1	57.5000	0.3491	0.5395	0.0592	0.0149	0.0305	1.7455	1.7514	57.4733
2	57.0737	0.3491	0.5269	0.0548	0.0149	0.0349	1.9971	1.9890	57.0391
3	56.6474	0.3491	0.5138	0.0506	0.0149	0.0392	2.2433	2.2173	56.6040
4	56.2212	0.3491	0.5002	0.0464	0.0149	0.0433	2.4837	2.4363	56.1683
5	55.7949	0.3491	0.4860	0.0423	0.0149	0.0474	2.7180	2.6458	55.7321
6	55.3686	0.3491	0.4712	0.0383	0.0149	0.0514	2.9461	2.8457	55.2954
7	54.9423	0.3491	0.4558	0.0344	0.0149	0.0553	3.1674	3.0358	54.8584
8	54.5160	0.3491	0.4396	0.0307	0.0149	0.0590	3.3818	3.2158	54.4211
9	54.0897	0.3491	0.4225	0.0271	0.0149	0.0626	3.5886	3.3856	53.9837
10	53.6635	0.3491	0.4044	0.0236	0.0149	0.0661	3.7876	3.5449	53.5463
11	53.2372	0.3491	0.3853	0.0203	0.0149	0.0694	3.9781	3.6933	53.1089
12	52.8109	0.3491	0.3649	0.0171	0.0149	0.0726	4.1595	3.8306	52.6718
13	52.3846	0.3491	0.3430	0.0141	0.0149	0.0756	4.3312	3.9561	52.2350
14	51.9583	0.3491	0.3192	0.0113	0.0149	0.0784	4.4922	4.0695	51.7987
15	51.5321	0.3491	0.2931	0.0087	0.0149	0.0810	4.6415	4.1700	51.3631
16	51.1058	0.3491	0.2641	0.0063	0.0149	0.0834	4.7778	4.2567	50.9282
17	50.6795	0.3491	0.2310	0.0042	0.0149	0.0855	4.8993	4.3282	50.4943
18	50.2532	0.3491	0.1916	0.0024	0.0149	0.0873	5.0034	4.3828	50.0617
19	49.8269	0.3491	0.1408	0.0009	0.0149	0.0888	5.0859	4.4172	49.6308
20	49.4007	0.3491	0.0520	0.0000	0.0149	0.0897	5.1370	4.4232	49.2022

Tabela 10 - Cálculo das coordenadas da curva trocoide

Ponto	r_{tp} (mm)	α_v (rad)	Φ_{tp} (rad)	c_p (mm)	Y_{ft} (rad)	r_{ft} (mm)	Y_{ft} (rad)	Φ_{ft} (°)	Φ_{ft} (rad)	x_{ft} (mm)	y_{ft} (mm)
1	49.4007	0.2592	0.0180	12.6634	0.0996	49.2741	0.0483	5.1278	0.0895	4.4040	49.0769
2	49.2681	0.2489	0.0177	12.1360	0.1242	49.1049	0.0480	5.1439	0.0898	4.4026	48.9071
3	49.1422	0.2386	0.0174	11.6142	0.1496	48.9410	0.0477	5.1644	0.0901	4.4053	48.7424
4	49.0225	0.2283	0.0170	11.0971	0.1761	48.7821	0.0473	5.1892	0.0906	4.4121	48.5822
5	48.9089	0.2181	0.0165	10.5837	0.2037	48.6276	0.0467	5.2184	0.0911	4.4228	48.4260
6	48.8009	0.2079	0.0160	10.0730	0.2327	48.4769	0.0462	5.2522	0.0917	4.4376	48.2734
7	48.6983	0.1977	0.0155	9.5637	0.2633	48.3296	0.0455	5.2908	0.0923	4.4565	48.1237
8	48.6009	0.1874	0.0149	9.0545	0.2957	48.1851	0.0447	5.3346	0.0931	4.4798	47.9764
9	48.5083	0.1771	0.0143	8.5437	0.3304	48.0427	0.0439	5.3839	0.0940	4.5078	47.8308
10	48.4204	0.1666	0.0137	8.0294	0.3676	47.9018	0.0429	5.4396	0.0949	4.5409	47.6861
11	48.3368	0.1560	0.0130	7.5092	0.4080	47.7615	0.0418	5.5025	0.0960	4.5798	47.5414
12	48.2575	0.1452	0.0122	6.9802	0.4524	47.6210	0.0405	5.5742	0.0973	4.6256	47.3958
13	48.1821	0.1340	0.0114	6.4383	0.5016	47.4791	0.0391	5.6565	0.0987	4.6797	47.2479
14	48.1105	0.1225	0.0105	5.8784	0.5571	47.3345	0.0374	5.7524	0.1004	4.7443	47.0961
15	48.0424	0.1104	0.0096	5.2927	0.6210	47.1854	0.0354	5.8662	0.1024	4.8226	46.9383
16	47.9778	0.0975	0.0085	4.6698	0.6964	47.0297	0.0330	6.0053	0.1048	4.9202	46.7716
17	47.9164	0.0834	0.0074	3.9898	0.7888	46.8641	0.0299	6.1820	0.1079	5.0467	46.5915
18	47.8581	0.0672	0.0060	3.2143	0.9087	46.6841	0.0257	6.4215	0.1121	5.2212	46.3912
19	47.8026	0.0469	0.0042	2.2428	1.0827	46.4831	0.0193	6.7879	0.1185	5.4941	46.1573
20	47.7500	0.0000	0.0000	0.0000	1.5708	46.2500	0.0000	7.8965	0.1378	6.3540	45.8115

Com esses valores, é possível realizar a modelagem da engrenagem no SolidWorks. A Figura 20 mostra em detalhe o perfil do dente gerado com os 40 pontos. As linhas na cor rosa representam as cotas em x e y de cada ponto calculado.

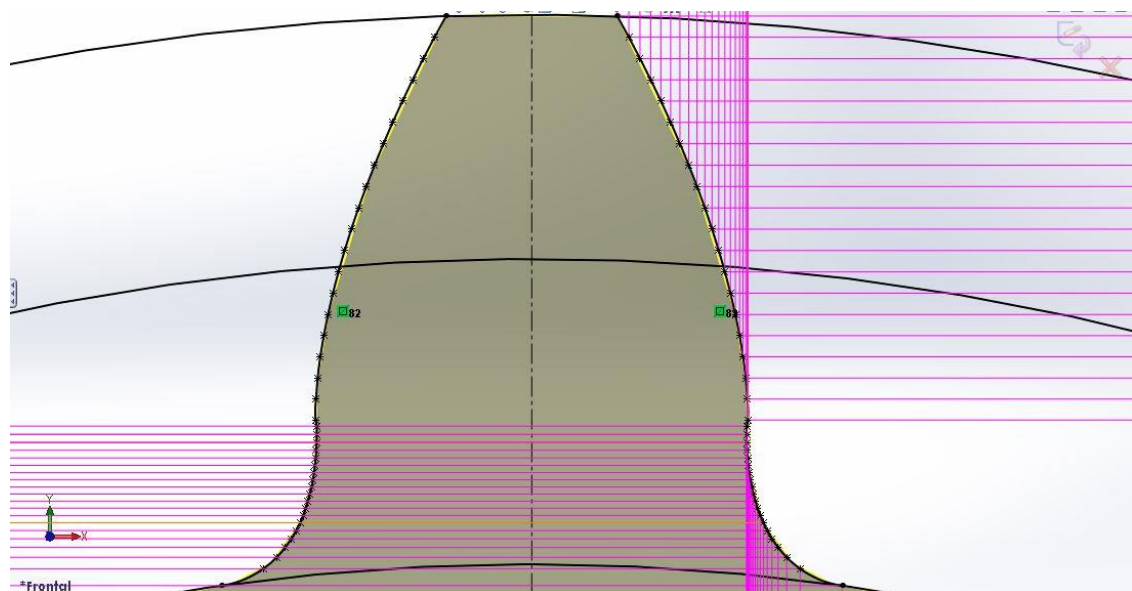


Figura 20 - Detalhe do perfil do dente gerado no SolidWorks

A Figura 21 apresenta a engrenagem completa gerada, já com os 21 dentes e com uma espessura de 10mm.

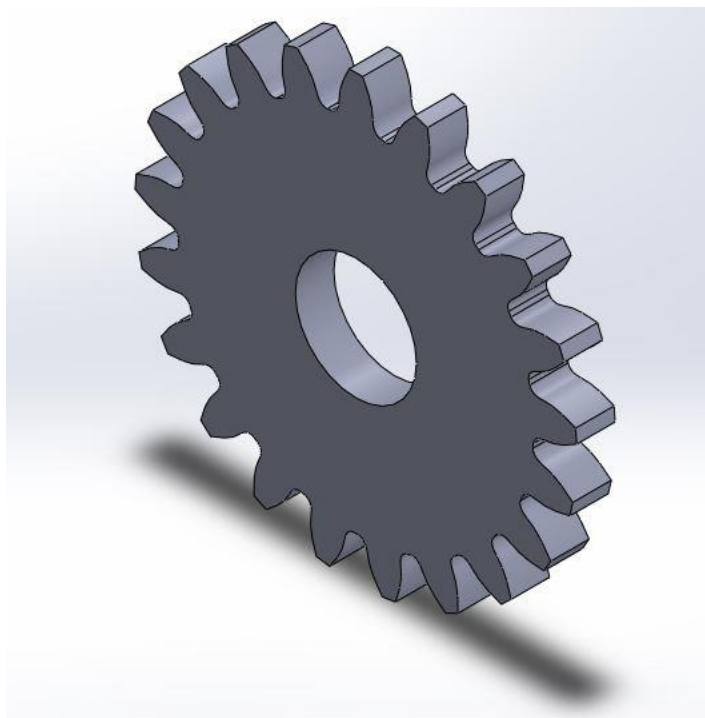


Figura 21 - Engrenagem completa com 21 dentes, módulo de 5mm e ângulo de pressão de 20°

3.2.1 Desenvolvimento do modelo numérico

Com a modelagem no SolidWorks finalizada, é dado início ao trabalho de simulação no ABAQUS. Nessa etapa, várias análises são realizadas para se obter o resultado esperado e conseqüentemente, a validação do modelo numérico. Todo o desenvolvimento apresentado aqui é o mesmo utilizado por Betim (2015), visto que naquele trabalho é obtido a validação do modelo numérico. Portanto, são apresentadas as principais modificações realizadas no modelo e no ABAQUS para o modelo numérico final.

A primeira mudança diz respeito ao modelo criado no SolidWorks. Em Betim (2015) identifica-se que o carregamento ocorre em apenas um dente, e dessa forma, a utilização dos demais dentes aumentava o tempo computacional. A espessura do pinhão também é alterada para 1mm, como uma forma de aproximação de uma análise 2D. Essa alteração é feita devido ao fato do modelo matemático representar um estado bidimensional de tensões. A Figura 22 apresenta o modelo utilizado nas simulações numéricas.

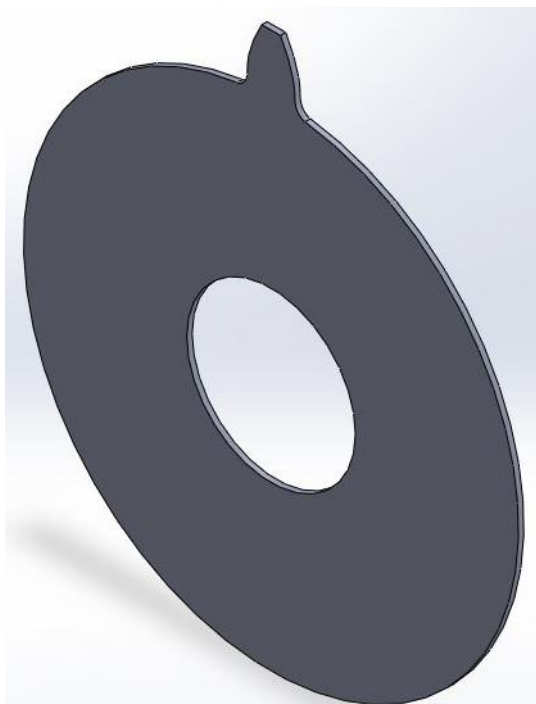


Figura 22 - Pinhão "2D" de 21 dentes, módulo de 5mm e ângulo de pressão de 20°

A primeira implementação realizada é a utilização de uma técnica muito comum em MEF, que é a criação de partições. As partições são interessantes pois possibilitam a criação de malhas diferentes entre regiões. Dessa forma, é possível ter uma malha mais refinada apenas em uma certa região de estudo, diminuindo o tempo computacional. As partições também possibilitam a criação de pontos e arestas no modelo aos quais deseja-se aplicar um determinado carregamento.

A Figura 23 apresenta as partições aplicadas no modelo. Nela, é possível perceber 3 cortes horizontais no dente: um no ponto de aplicação da carga, um na intersecção entre evolvente e trocoide (início da curva trocoidal) e o último no diâmetro de raiz (final da curva trocoidal). Além disso, é possível perceber na raiz, à direita da imagem, mais uma partição realizada para reduzir a região refinada. Os elementos da malha são definidos utilizando geometria de ordem quadrática (segunda ordem) para esse modelo.

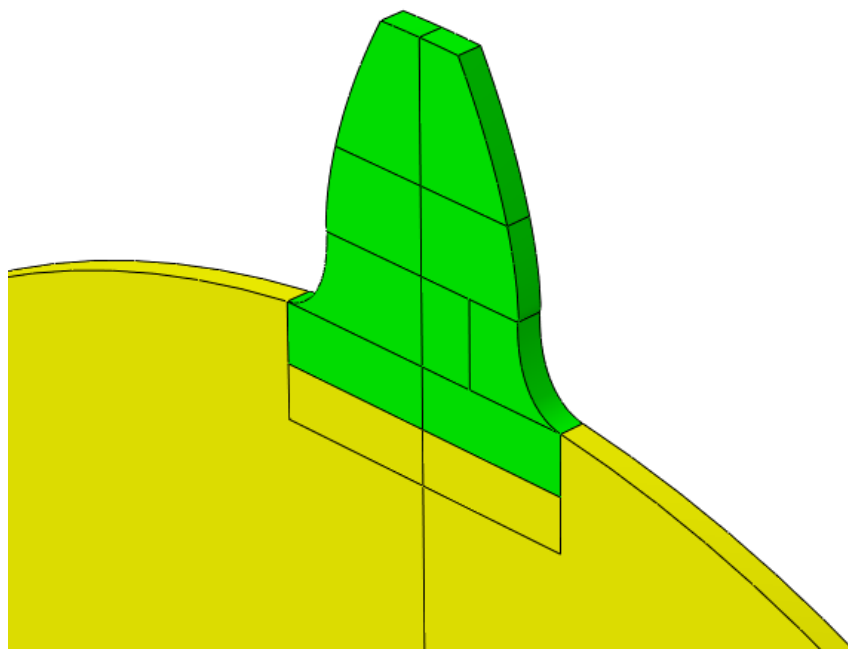


Figura 23 - Partições aplicadas no modelo

A Figura 24 apresenta a configuração da malha utilizada na validação do modelo. Nela, é possível perceber a região de maior refino na raiz, com uma malha de 0,1mm. A Figura 25 mostra a região do dente com suas partições e a malha gerada.

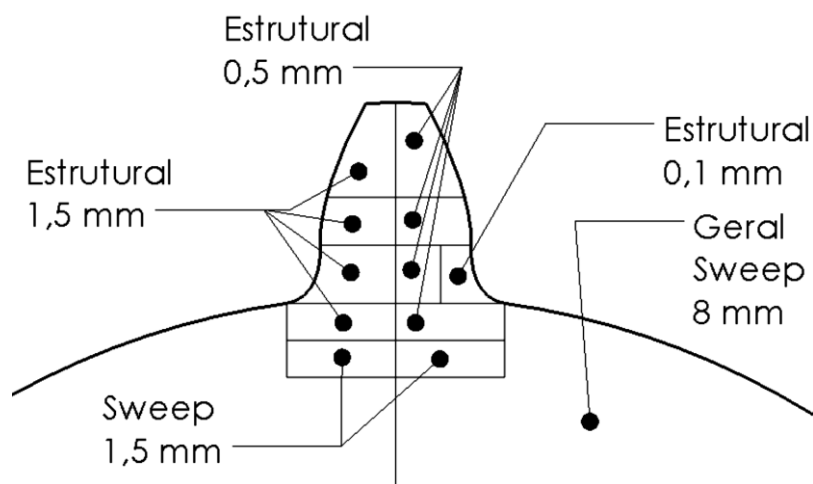


Figura 24 - Esquema padrão para criação de malha (BETIM, 2015)

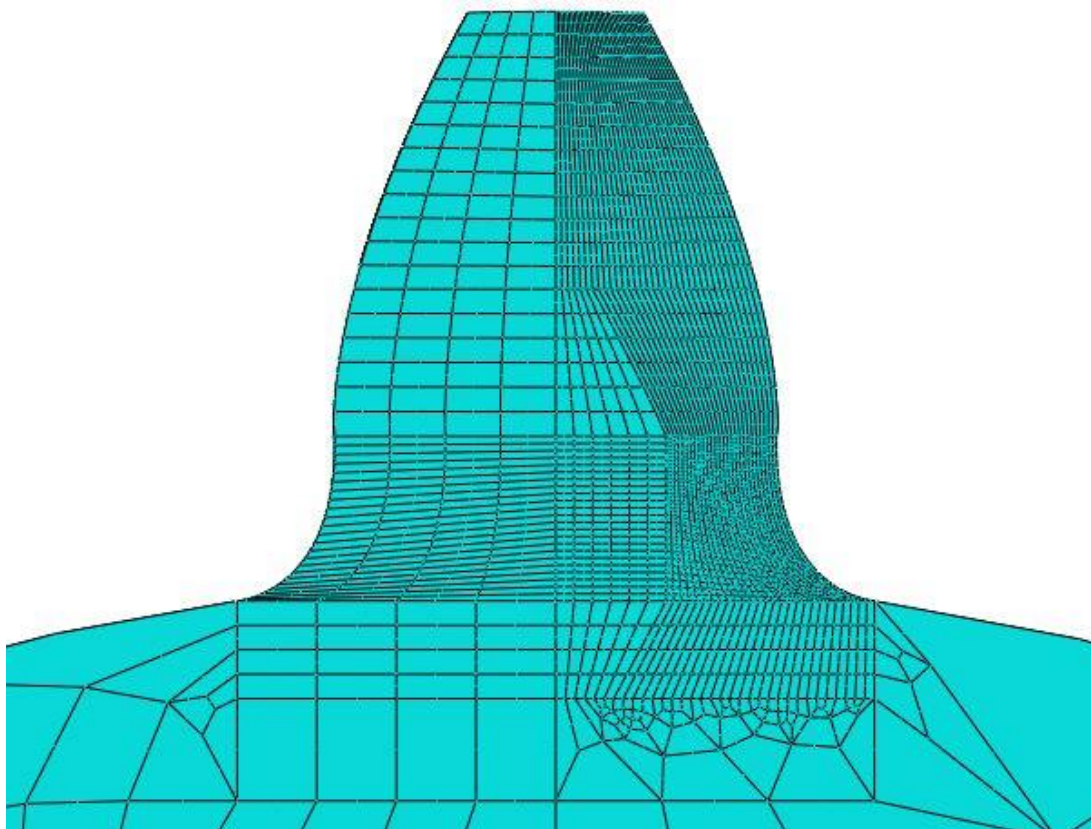


Figura 25 - Malha gerada a partir do esquema padrão

Após a partição do dente, são inseridas as propriedades do material. Como o ABAQUS não apresenta unidades, as informações devem ser inseridas com cuidado. Como as tensões devem ser apresentadas em MPa, e as dimensões da engrenagem são dadas em milímetros, é inserido um módulo de elasticidade com o valor de 205000 MPa, e um coeficiente de Poisson de 0,29. É considerado o material como sendo linear, elástico e isotrópico.

As últimas observações relevantes a serem consideradas se referem ao ponto de aplicação de carga e às condições de fixação do modelo. Betim (2015), apresenta dificuldades em encontrar uma maneira de representar essas informações. Após pesquisa, foi encontrado um trabalho que utiliza a ferramenta *acoplamento*, presente no módulo de interações do programa. Essa ferramenta permite que o ponto central da engrenagem fique ligado à face interna do furo. O ponto central é configurado para não ter nenhum grau de liberdade. Dessa forma, é possível representar no modelo como se a engrenagem estivesse fixada por um eixo (WRIGHT, 2013). A Figura 26 apresenta em detalhe o sistema de referência, com o ponto central *RP-1* e as linhas amarelas representam a ligação desse ponto com a face interna do furo.

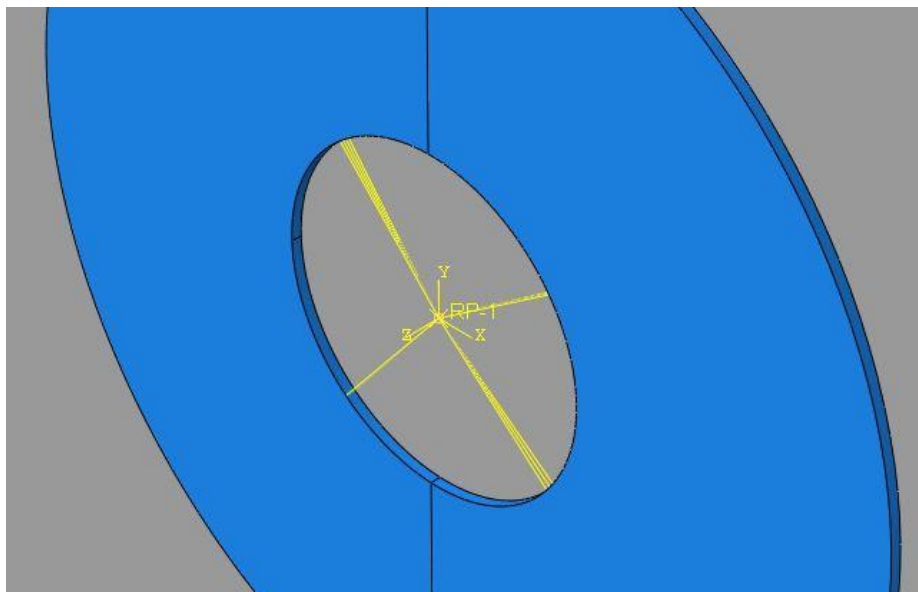


Figura 26 - Detalhe do acoplamento utilizado na fixação da engrenagem

A outra utilização do acoplamento é em relação à aplicação do carregamento no dente. Com essa ferramenta, é possível aplicar uma força concentrada em um ponto e distribuí-la por toda uma face, ou uma aresta. Esse é o motivo de ter sido criada uma partição exatamente no raio de carga, para realizar a aplicação do carregamento. A Figura 27 mostra o ponto *RP-2*, que é utilizado para aplicação do carregamento e a linha em amarelo representa a distribuição da força por toda essa aresta (WRIGHT, 2013).

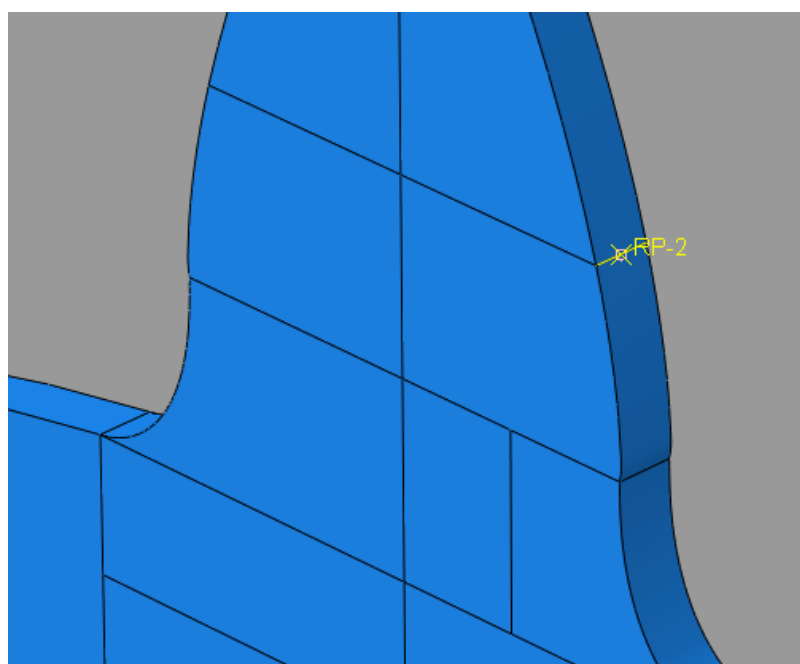


Figura 27 - Acoplamento para distribuição da força concentrada

A última consideração diz respeito ao sentido da força. Para realizar a validação do modelo numérico, é aplicada somente a componente tangencial, conforme mostra a Figura 28. Betim (2015) propõe inicialmente a aplicação do carregamento com o ângulo de carga, porém não foram obtidos resultados satisfatórios como dessa forma apresentada. Isso deve-se ao fato de que a aplicação da componente tangencial representa exatamente o que é aplicado no modelo analítico, tanto em módulo como na direção e sentido da força (BETIM, 2015).

Após várias análises, é possível obter um resultado satisfatório com o modelo de partição escolhido. A equação a seguir mostra o resultado obtido no modelo numérico incluído em uma fórmula para o cálculo do erro entre os resultados.

$$Erro(\%) = \frac{|\sigma_{numérico} - \sigma_{analítico}|}{\sigma_{analítico}} \times 100 = \frac{|411,924 - 415,022|}{415,022} \times 100 = 0,753\%. \quad (64)$$

A Figura 29 mostra como é apresentado, após o processamento, o resultado da tensão máxima.

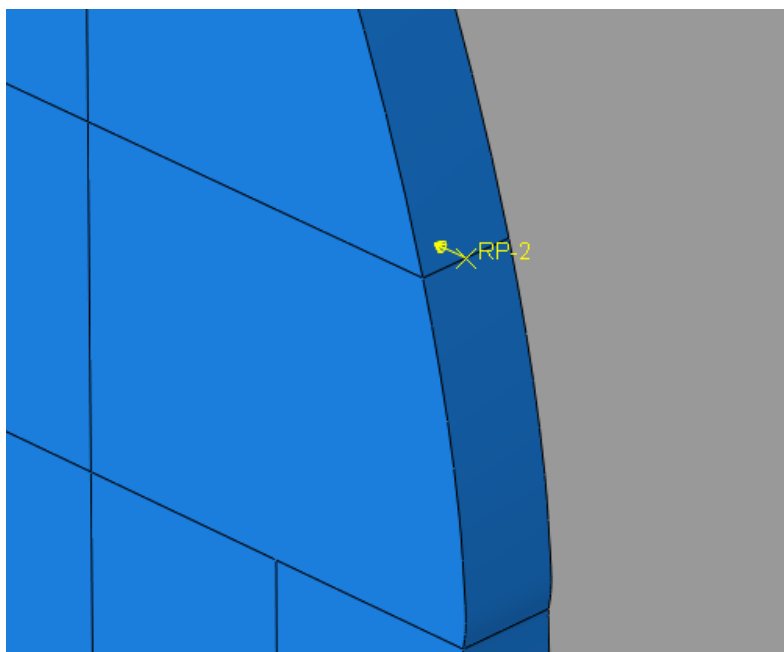


Figura 28 - Componente tangencial aplicada para validação do modelo numérico

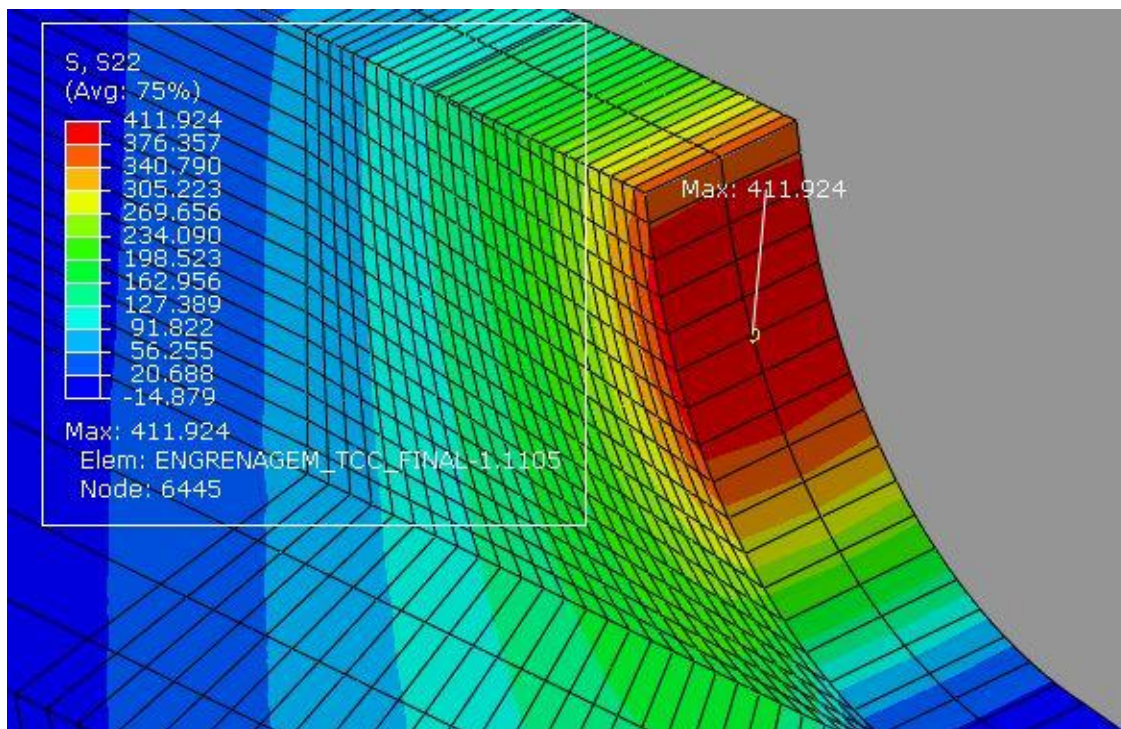


Figura 29 - Resultado da simulação para a partição definida

É realizada uma análise de convergência para verificar se o tamanho de malha escolhido é adequado. Essa mesma análise é realizada no trabalho de Betim (2015), e como esperado, conforme a região da raiz é mais refinada, menor é o erro se comparado ao resultado analítico. A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos conforme o refinamento da região da raiz era feito.

Tabela 11 - Resultados da análise de convergência

Iteração	Elemento (mm)	Tempo de análise	Tensão Máxima (MPa)	Erro da tensão (%)
1	2	9	436.759	4.98
2	1	9	424.523	2.24
3	0.5	11	415.667	0.15
4	0.25	11	410.704	1.05
5	0.125	18	412.156	0.70
6	0.1	21	411.924	0.75
7	0.075	23	412.052	0.72
8	0.05	24	411.958	0.74

Essa comparação também pode ser vista em forma de gráfico, conforme mostra a Figura 30. É possível perceber que de maneira geral as tensões encontradas se estabilizaram próximo ao valor analítico a partir do elemento de 0,125mm. Também é

possível perceber o aumento do tempo de processamento conforme se usa uma malha mais refinada.

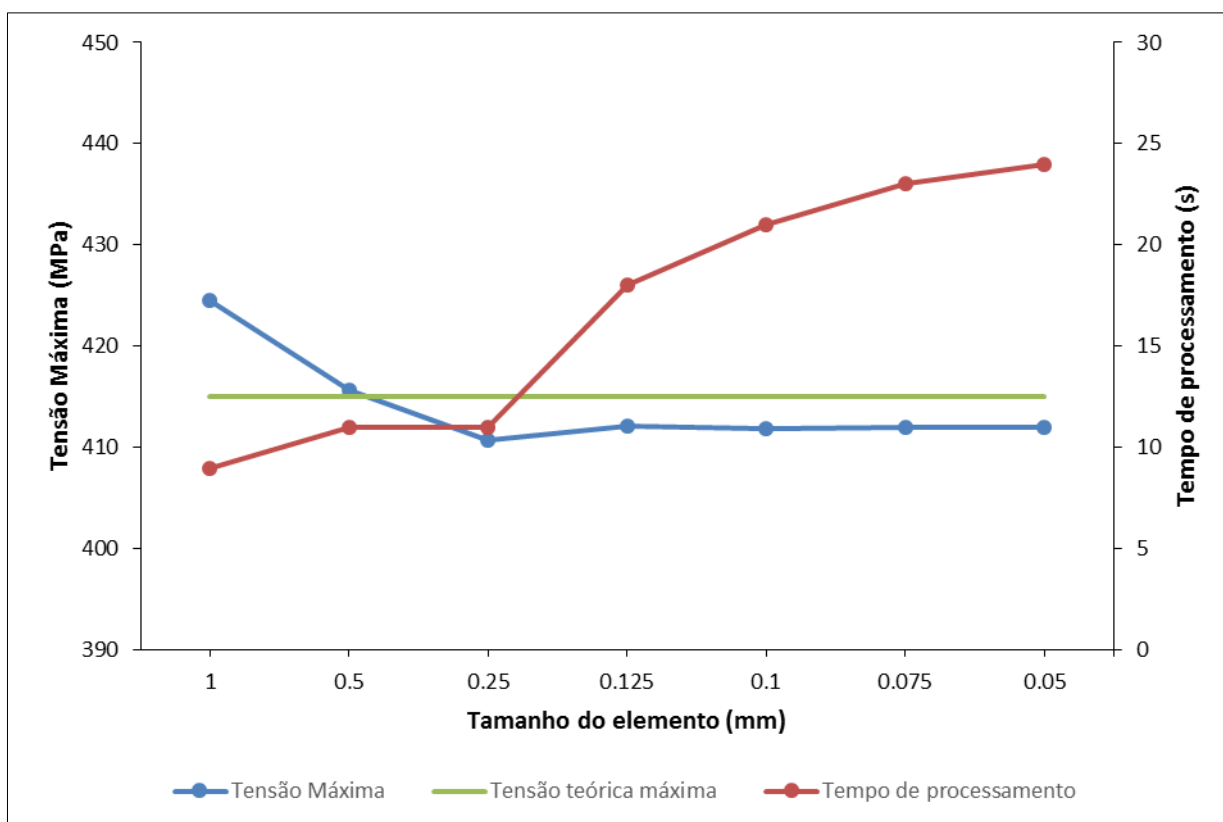


Figura 30 - Gráfico da análise de convergência

Dessa forma, é considerado que o resultado obtido é satisfatório e o modelo numérico é aprovado. Todas as condições utilizadas e impostas ao modelo estão corretas, podendo prosseguir agora para a geração de resultados.

3.2.2 Alterações no modelo numérico para a geração de resultados

Para a geração de resultados, é realizada mais uma alteração no modelo numérico, um acréscimo de um fenômeno que o modelo analítico não considera. Conforme pode ser visto na Figura 31, é adicionada a componente radial no ponto de aplicação de carga. Isso é acrescentado para representar a aplicação da resultante

da força que ocorre em cada carregamento, dessa forma, o resultado da análise numérica pode ser considerado em função da tensão de Von Mises.

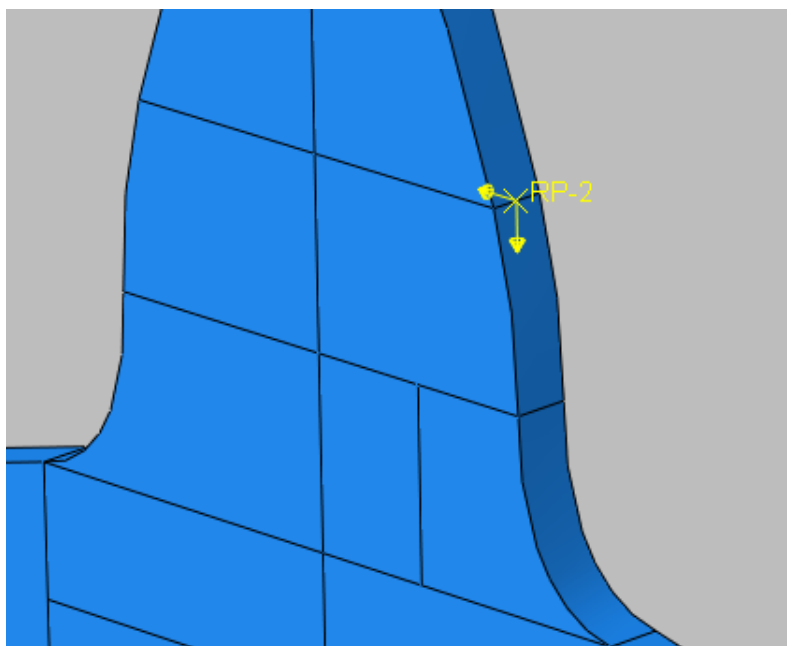


Figura 31 - Representação do carregamento com componentes tangencial e radial

Outra informação importante a ser comentada é a utilização de um modelo parametrizado no SolidWorks para a geração de diferentes geometrias de engrenagens. Essa parametrização permitiu de maneira rápida gerar as diferentes engrenagens utilizadas nesse trabalho. Isso é possível graças à função chamada *Tabela de Projeto*, que faz uma integração entre os dados de uma planilha do Excel com a modelagem do SolidWorks.

Na Figura 32 é possível visualizar a área de trabalho com a integração dos dois softwares. Na coluna *Dados de entrada* são mostrados os parâmetros necessários para realizar o cálculo da engrenagem. Como visto anteriormente, os principais parâmetros para a geometria de uma engrenagem são o módulo m , número de dentes z e ângulo de pressão ϕ , todos destacados em amarelo. Alterando esses valores, é

possível gerar novas geometrias rapidamente, sem a necessidade de adicionar todos os pontos das curvas manualmente no SolidWorks.

The screenshot displays the SolidWorks 'Tabela de projeto' (Project Table) for a configuration named 'pinhao-m5-z20-25graus'. The table is organized into three main sections: 'Dados de entrada' (Input Data), 'EQUAÇÕES P' (Equations), and 'dimensões constante' (Constant Dimensions). The 'Dados de entrada' section includes parameters like m (mm), z , dp (mm), β , ϕ (°), ϕ (rad), $inv \phi$, Sn (mm), n , X , irx , and $dfuro$. The 'EQUAÇÕES P' section lists points from 1 to 15 with their corresponding rx (mm) values. The 'dimensões constante' section lists rb (mm), rk (mm), and r (mm). The interface also shows a 3D model of a gear on the right and a 'Cálculos' (Calculations) tab at the bottom.

Dados de entrada		EQUAÇÕES P	
m (mm)	5.000	Ponto	rx (mm)
z	20.000	1	55.0000
dp (mm)	100.000	2	54.5308
β	0.000	3	54.0617
ϕ (°)	25.000	4	53.5925
ϕ (rad)	0.436	5	53.1233
$inv \phi$	0.030	6	52.6542
Sn (mm)	7.854	7	52.1850
n	20.000	8	51.7158
X	0.032	9	51.2467
irx	0.469	10	50.7775
$dfuro$	30	11	50.3083
dimensões constante		12	49.8391
rb (mm)	45.315	13	49.3700
rk (mm)	1.500	14	48.9008
r (mm)	50.000	15	48.4316

Figura 32 - Área de trabalho da função *Tabela de projeto* do Solidworks

4 RESULTADOS

A Tabela 12 apresenta a tensão máxima obtida na raiz do dente para as análises apresentadas nos objetivos. Todas as engrenagens utilizadas nas simulações são pinhões. A seguir, são apresentados os grupos de simulações em formas de gráficos, para melhor entendimento do fenômeno ocorrido na tensão quando há mudança de geometria.

Tabela 12 - Resultado das simulações

N° da análise	Grupo	i	m (mm)	Z	dp (mm)	σ' (Mpa)
1	m = 5 mm e $\phi = 20^\circ$	1:1	5	21	105	385.770
2				25	125	310.342
3				30	150	249.701
4				35	175	209.342
5	m = 5 mm e $\phi = 25^\circ$	1:1	5	21	105	337.538
6				25	125	272.599
7				30	150	221.093
8				35	175	187.144
9	dp = 120mm e $\phi = 20^\circ$	1:1	3	40	120	506.317
10			4	30	120	391.997
11			5	24	120	326.638
12			6	20	120	284.868
13			6.5	18	117	278.570
14			7.5	16	120	245.452
15	dp = 120mm e $\phi = 25^\circ$	1:1	3	40	120	464.709
16			4	30	120	346.596
17			5	24	120	286.622
18			6	20	120	248.977
19			6.5	18	117	243.017
20			7.5	16	120	213.361
21	dp = 100mm e $\phi = 20^\circ$	1:1	5	21	105	385.770
22		1:2		21	105	367.537
23		1:3		21	105	359.743
24		1:4		21	105	355.735
25	dp = 100mm e $\phi = 25^\circ$	1:1	5	21	105	337.538
26		1:2		21	105	322.443
27		1:3		21	105	316.249
28		1:4		21	105	312.892

A Figura 33 apresenta a variação na tensão de flexão para um grupo de engrenagens onde ocorre a variação no número de dentes. Pode ser verificado que conforme ocorre um aumento do número de dentes, a tensão de flexão diminui. Outra consideração que pode ser feita é que a tensão para engrenagens com ângulo de pressão de 25° é menor que se comparado a engrenagens com ângulo de pressão de 20°.

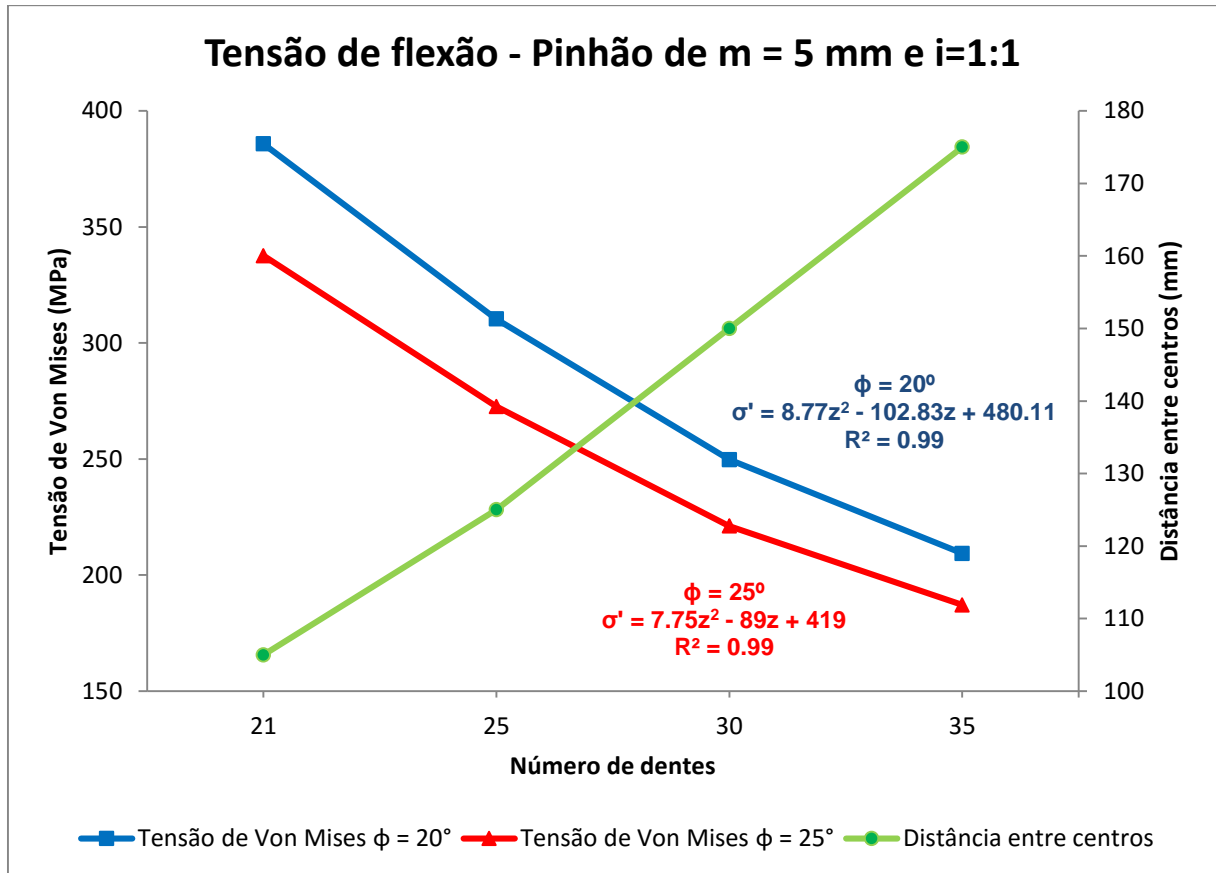


Figura 33 - Gráfico da tensão de flexão versus número de dentes para pinhão com $m=5\text{mm}$ e $i=1:1$

Conforme observado por Betim (2015) em seu trabalho, é interessante notar a curva que mostra o aumento da distância entre centros quando o número de dentes da engrenagem é maior. Essa informação é relevante para projeto de caixas de engrenagens, pois assim é possível obter as dimensões necessárias para fabricar essa caixa. O cruzamento dessa curva com as curvas de tensão representa um equilíbrio para um projeto, porque a tensão não é tão elevada e a caixa de engrenagens não é tão grande.

A Figura 34 apresenta a variação de tensão para um grupo de engrenagens com variação no módulo. Aqui, conforme o módulo aumenta, a tensão de flexão diminui para ambos os grupos com ângulos de pressão de 20° e 25°. Da mesma forma como na Figura 33, a tensão para engrenagens com ângulo de pressão de 25° é menor que se comparado às engrenagens com ângulo de pressão de 20°. A curva em verde mostra que o número de dentes diminui quando aumenta o módulo. Isso ocorre quando o diâmetro primitivo é fixo, pois tanto número de dentes quanto módulo estão diretamente ligados com essa equação.

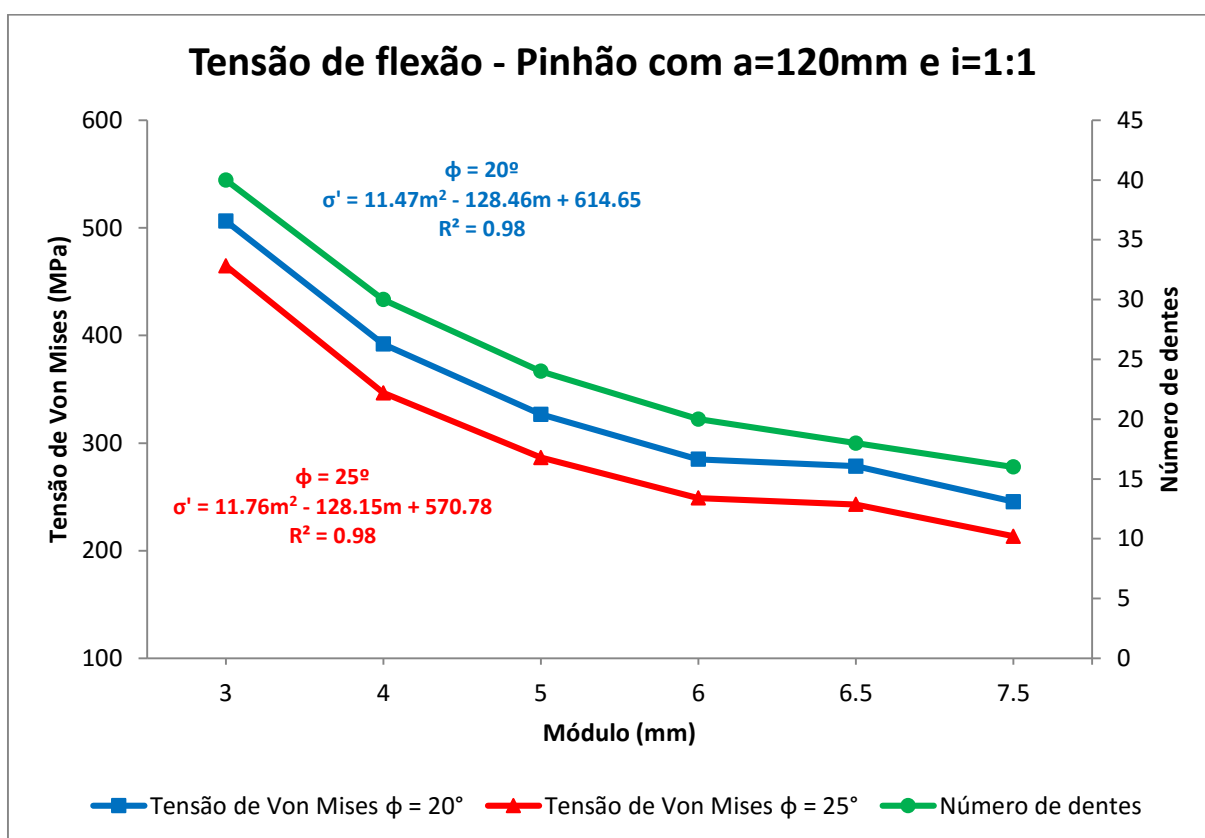


Figura 34 – Gráfico da tensão de flexão versus módulo para pinhão com $d_p=120\text{mm}$ e $i=1:1$

Aqui é interessante fazer algumas observações com relação aos resultados obtidos na Figura 34. Para todas as engrenagens geradas nesse trabalho, e inclusive no modelo utilizado para validação, não ocorre o encontro das curvas evolvente e trocoide. As Tabela 9 e Tabela 10 mostram que as coordenadas do último ponto da evolvente não coincidem com as do primeiro ponto da trocoide. Mesmo assim, é considerado como sendo uma diferença muito pequena e que não influenciaria para obtenção da tensão máxima da raiz.

Porém, essa diferença acaba sendo relevante para casos onde existe um módulo pequeno e um alto número de dentes. Quando o ângulo de pressão é maior, essa diferença também aumenta. A Figura 35 mostra uma engrenagem de $z = 50$, $m = 5\text{mm}$ e $\phi = 23,5^\circ$. As linhas em rosa representam as cotas dos pontos tanto da evolvente, quanto da trocoide e a região de incerteza não apresenta essas cotas. Em termos numéricos, é uma diferença de aproximadamente $0,5\text{mm}$ para esse caso, porém o dente tem altura aproximada de $4,5\text{mm}$, tornando uma diferença relevante. Além disso, pode ser visto que a raiz propriamente dita é muito pequena se comparada ao resto do dente, sendo difícil a geração de resultados confiáveis para esses casos.

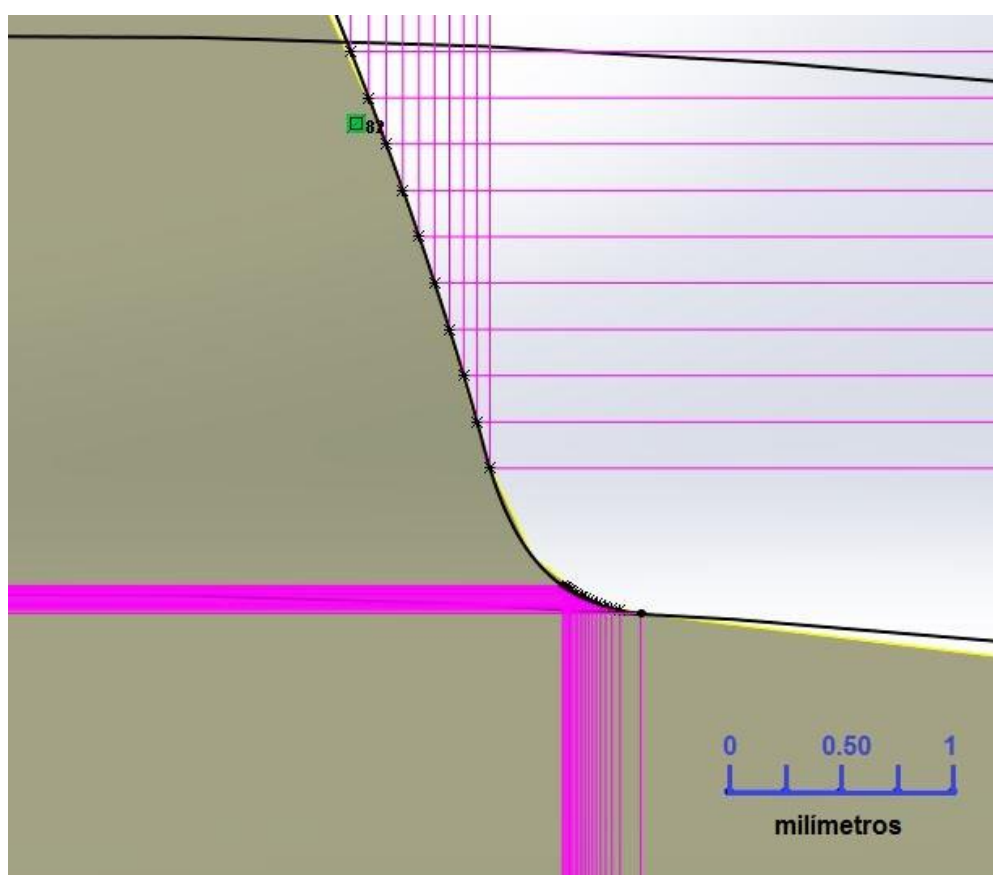


Figura 35 - Não intersecção da evolvente e trocoide para uma engrenagem de $m=2\text{mm}$, $z=50$ dentes e $\phi=23,5^\circ$

No outro extremo, outro erro acaba acontecendo quando os módulos são maiores que 7mm . A Figura 36 mostra que também não ocorre o encontro das curvas, mas agora devido ao fato do último ponto da evolvente (1) terminar após o início do primeiro ponto da trocoide (2). O perfil da Figura 36 é gerado automaticamente com o uso da função *spline*.

Não foi encontrado na literatura algum motivo que explicasse esses erros. Mazzo (2013) possui em seu site pessoal de consultoria o software *Progear*, que permite realizar projetos com a utilização de engrenagens. Uma das funções do software é a geração da involueta do dente com a inserção de alguns parâmetros de entrada.

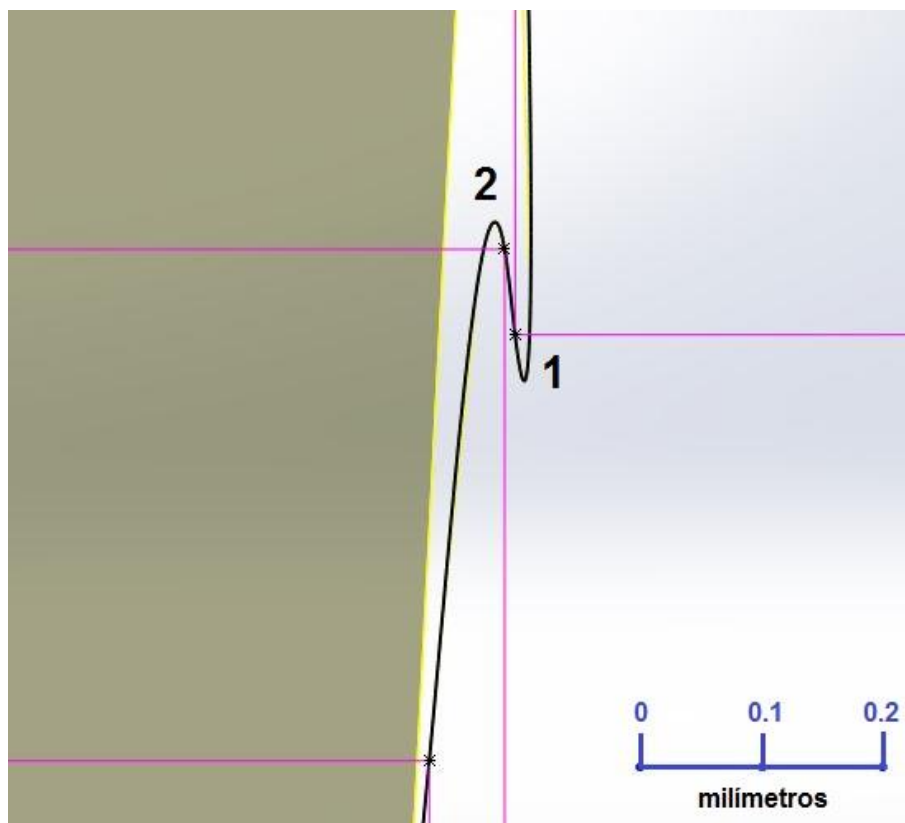


Figura 36 - Não intersecção das curvas evolvente e trocoide para $m=7,5\text{mm}$, $z=16$ dentes e $\phi=20^\circ$

A Figura 37 mostra a involueta gerada para uma engrenagem com $m=8\text{mm}$, $z=15$ dentes e $\phi=20^\circ$. Nessa imagem é possível perceber uma diferença de encontro entre as curvas próximo ao diâmetro d_u (representado na cor laranja), de forma que a trocoide inicia em um ponto mais afastado do que a evolvente termina, semelhante ao visto na Figura 36.

Dessa forma, focou-se apenas em gerar os resultados entre esses intervalos com modelos problemáticos, para garantir uma boa confiabilidade nos resultados. As análises 9 e 15 representam o limite para o último modelo confiável com um baixo módulo sem que haja uma diferença muito grande entre evolvente e trocoide e as análises 14 e 20 representam o limite do modelo geométrico para um módulo alto onde não há o encontro das curvas.

A última consideração importante diz respeito à engrenagem de módulo $m = 6,5\text{mm}$ e $z = 18$ dentes. Esse modelo possui um d_p diferente de 120mm , e é apresentado junto àquele grupo por ser o último modelo obtido sem o problema de encontro das curvas.

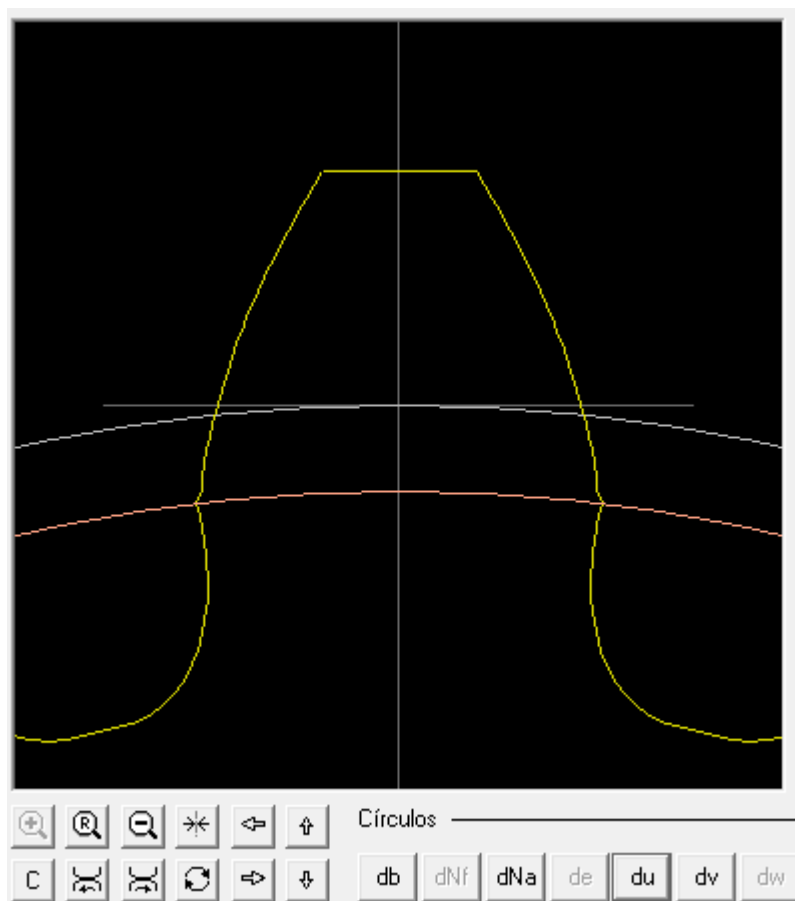


Figura 37 - Involutmetria do dente gerada pelo software *Progear*

Outra análise realizada é perceber como ocorre a distribuição de tensão na raiz do dente. Para isso, são definidos uma série de pontos nos nós da malha gerada no Abaqus, e sua tensão é retirada de cada um desses pontos. A Figura 38 mostra um exemplo desse procedimento que foi realizado para as análises 1 a 4, apresentadas na Tabela 12.

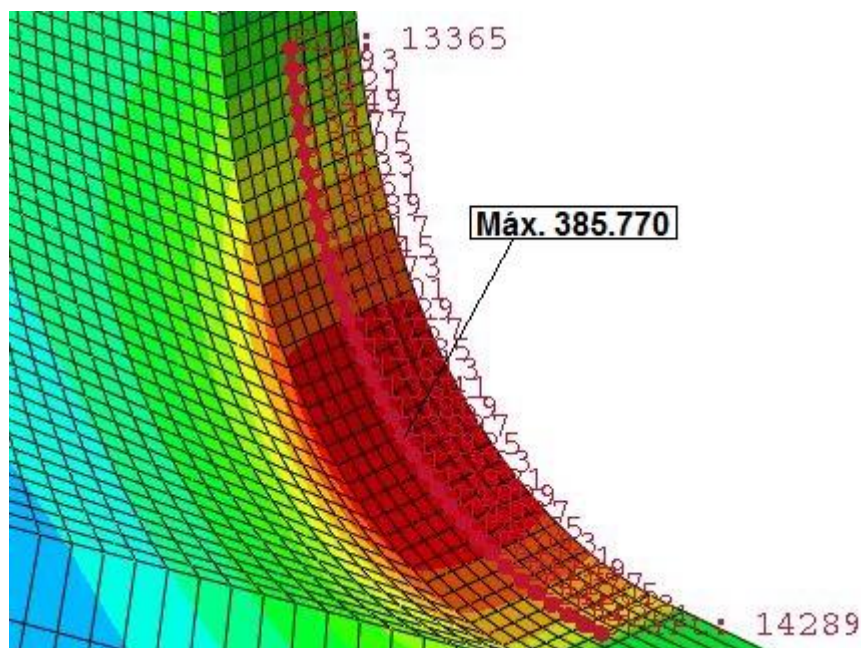


Figura 38 - Pontos da malha escolhidos para medição da tensão

A Figura 39 apresenta os pontos obtidos com essa distribuição de tensão para 4 diferentes configurações, variando apenas o número de dentes de cada modelo.

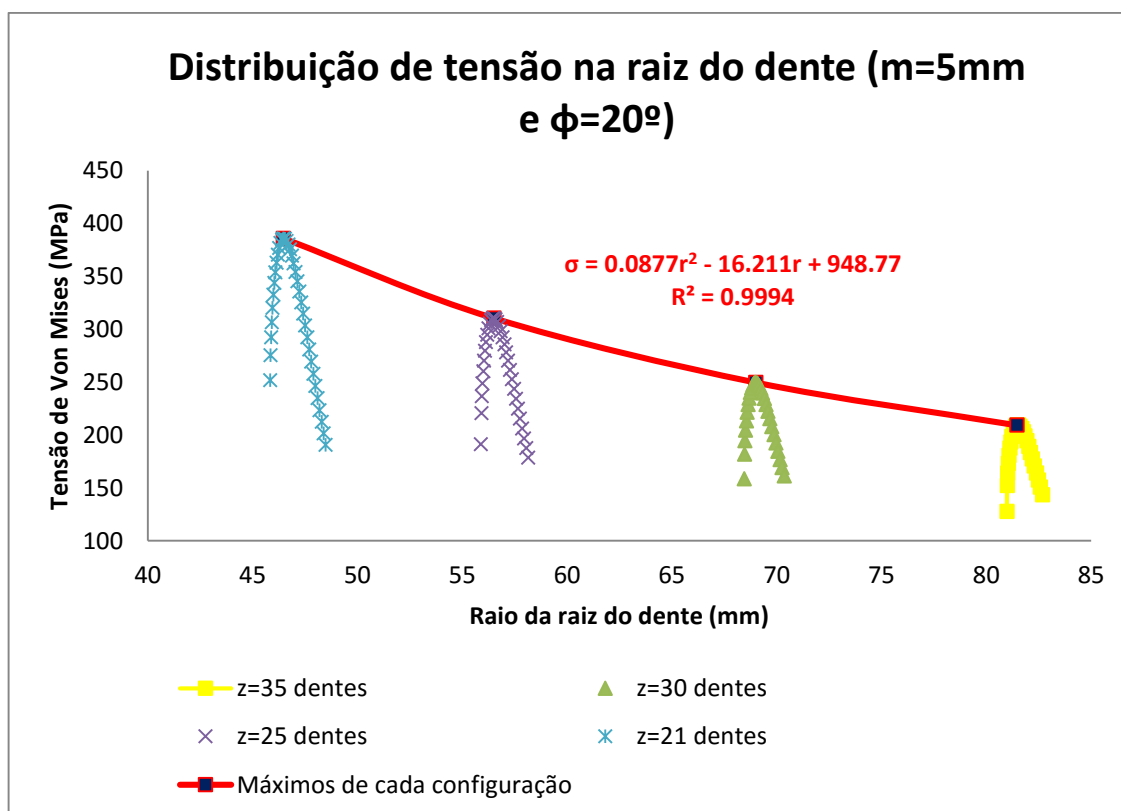


Figura 39 - Distribuição de tensão na raiz para quatro diferentes configurações

A curva em vermelho liga as tensões máximas de cada configuração. Uma informação interessante que é obtida é que uma curva de tendência polinomial de 2º grau se aproxima muito da curva original.

A Figura 40 mostra como a tensão se comporta em função do raio da raiz do dente, mas agora para duas configurações iguais, apenas com mudança no ângulo de pressão. Da mesma forma como anteriormente, quando o ângulo de pressão é maior a tensão é menor e o interessante desse gráfico é que a tensão se comporta de maneira muito semelhante para os dois casos.

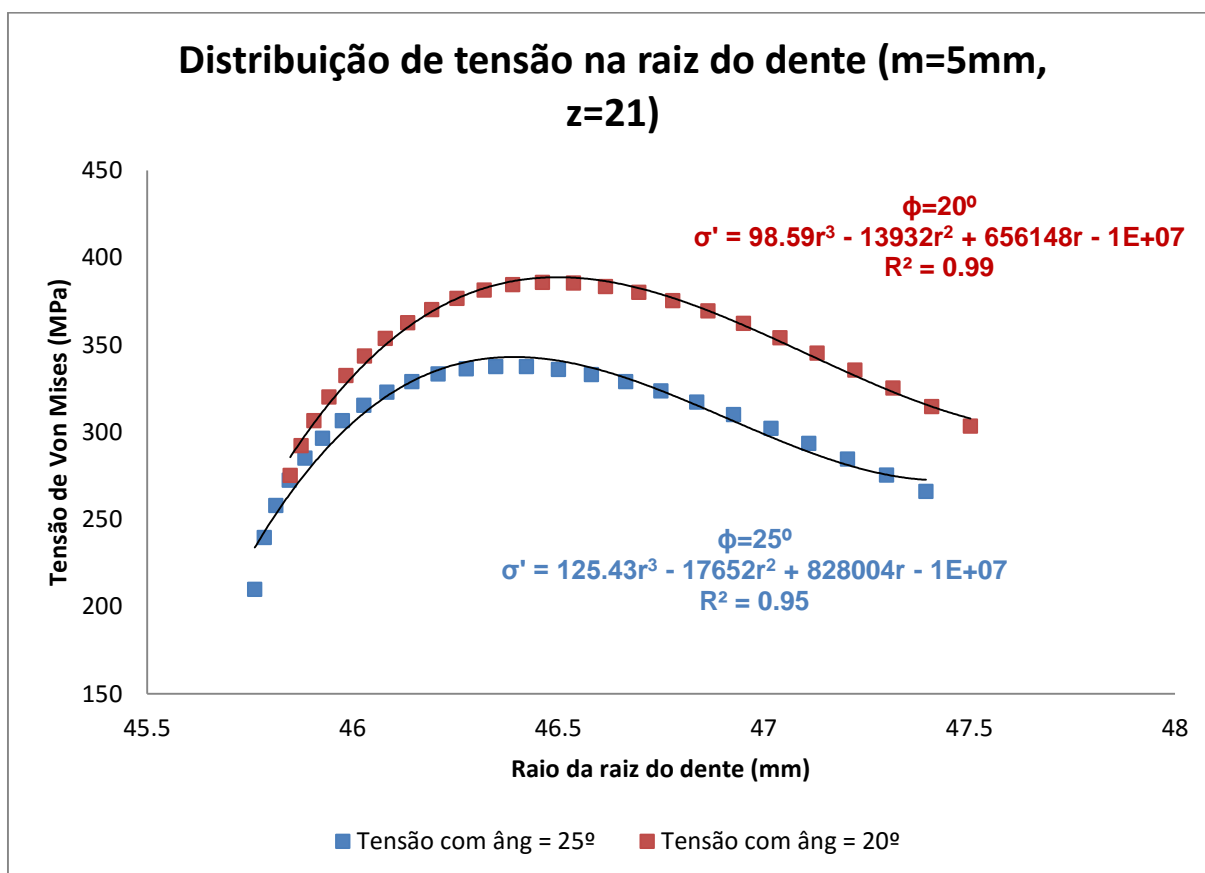


Figura 40 - Distribuição de tensão para configurações variando o ângulo de pressão

Procura-se também entender o que acontece especificamente com a espessura do dente no ponto crítico s_f e altura da parábola de Lewis h_f quando se aumenta o ângulo de pressão.

A Figura 41 mostra esse comportamento. É possível perceber que ambas as variáveis aumentam conforme o ângulo de pressão é maior e também que essa

variação se dá muito próxima de uma forma linear, como pode ser visto nas equações de linha de tendência.

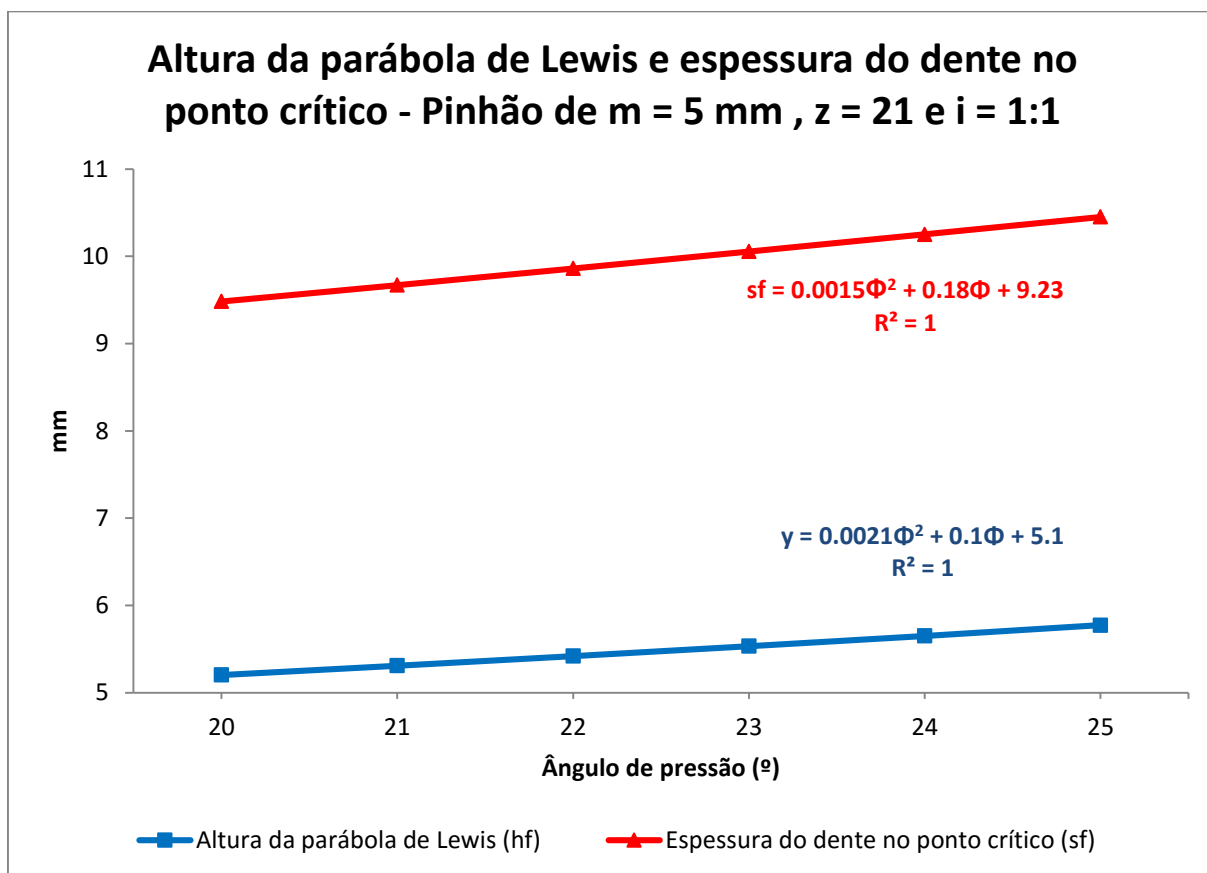


Figura 41 - Altura da parábola de Lewis e espessura do dente no ponto crítico variando o ângulo de pressão

Outras simulações são feitas modificando a relação de transmissão para uma engrenagem que contém as mesmas dimensões ($m=5\text{mm}$, $z=21$ dentes e $\phi=20^\circ$ e 25°). Observa-se então a variação da tensão e do raio de carga com o aumento da relação de transmissão. A localização do raio de carga r_{nL} e sua relação com o ponto HPSTC pode ser vista na Figura 11.

As Figura 42 e Figura 43 mostram esse comportamento para ϕ de 20° e 25° respectivamente. É possível notar que conforme a relação de transmissão aumenta, a posição do raio de carga diminui. Com o raio de carga mais próximo da raiz, isso também implica na tensão obtida ser menor. Nesses casos também é possível perceber que a tensão é menor para um ângulo de pressão maior.

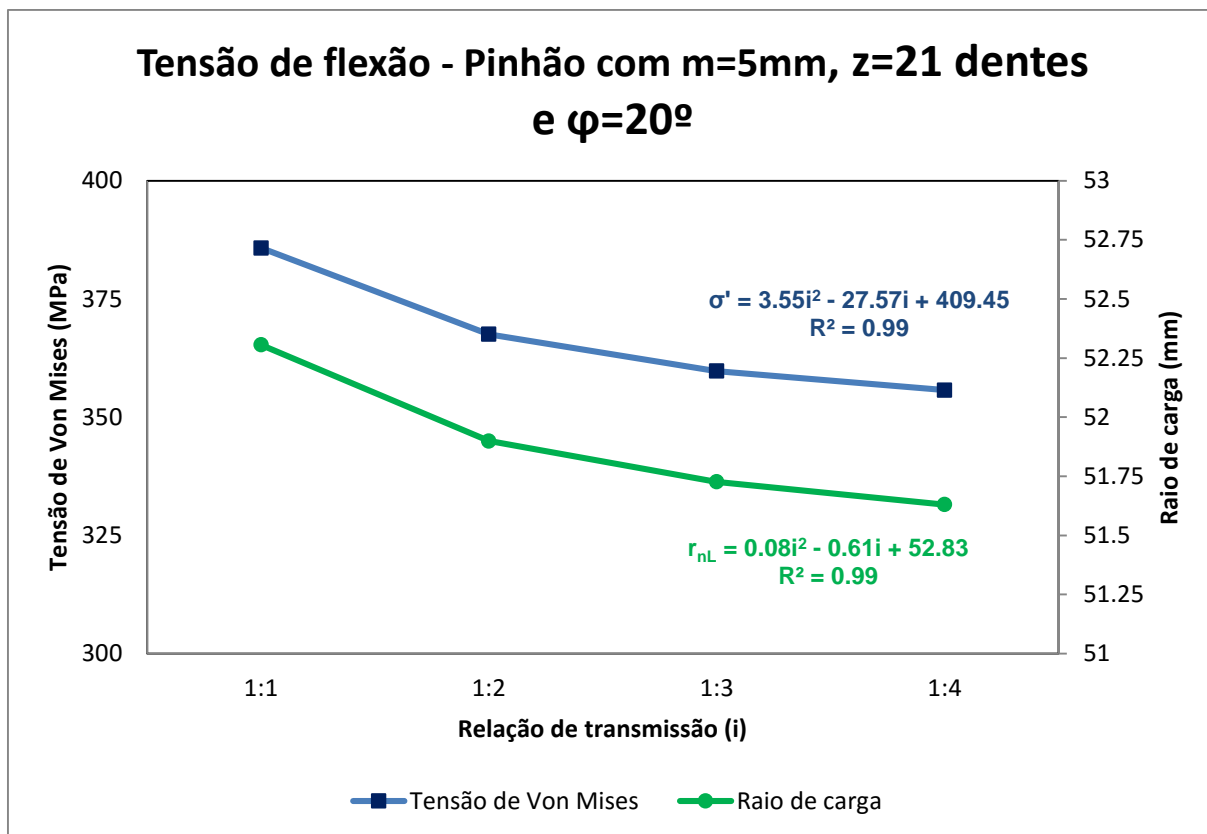


Figura 42 - Relação entre tensão e raio de carga para $\phi=20^\circ$

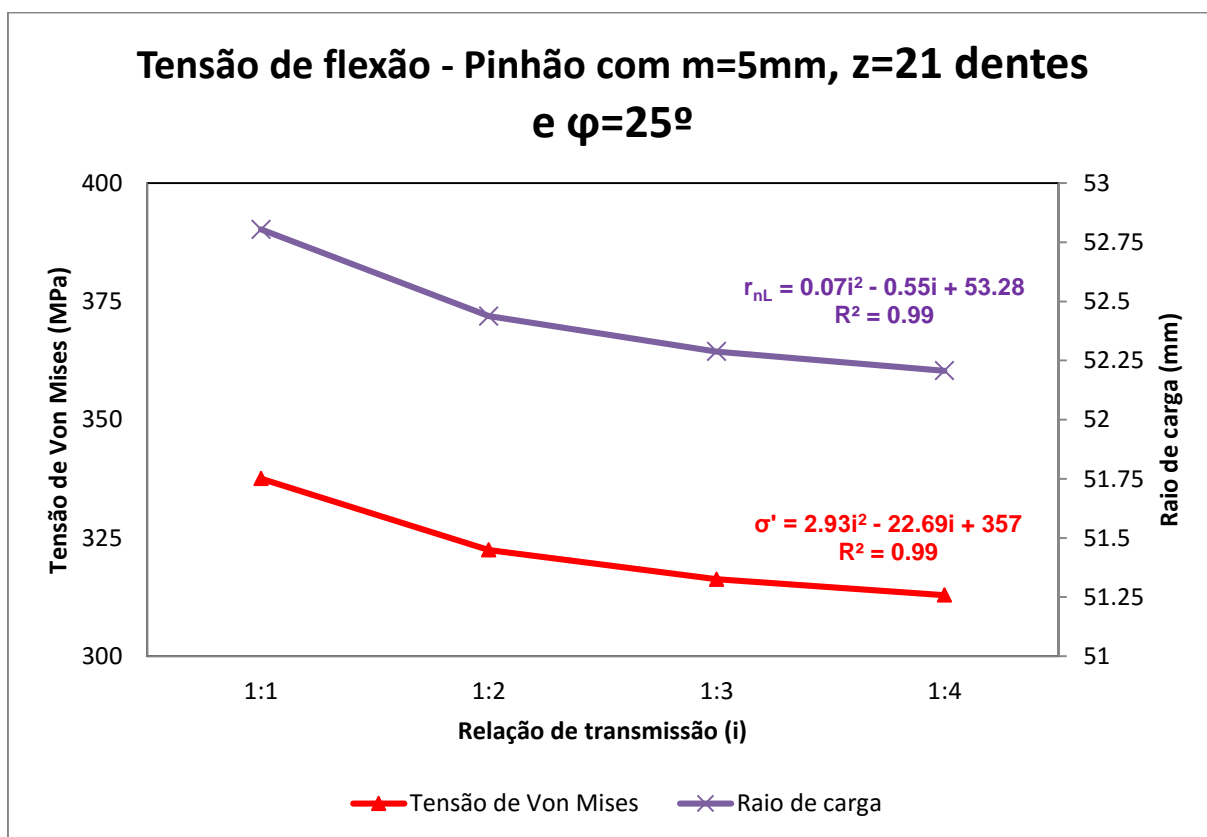


Figura 43 - Relação entre tensão e raio de carga para $\phi=25^\circ$

Um estudo também é realizado para entender o comportamento da tensão quando a posição do carregamento é alterada. Conforme visto anteriormente, para a maioria das engrenagens, a razão de contato tem um valor entre 1 e 2 e, para um caso de contato entre dois dentes, a distribuição da força durante a linha de ação não é constante.

Um dos estudos sobre esse assunto diz respeito ao *load-sharing ratio*, que avalia como a força se distribui conforme muda o ponto de aplicação, ou o ângulo de rotação para alguns casos. Um dos estudos, desenvolvido por Walker, mostra que o dente possui uma região intermediária onde existe somente um par de dentes em contato, e que essa região é compreendida entre os pontos LPSTC e HPSTC, conforme mostra a Figura 44 (IMREK, 2009). Dessa forma, quando mais de um par está em contato, a força é distribuída entre os pares.

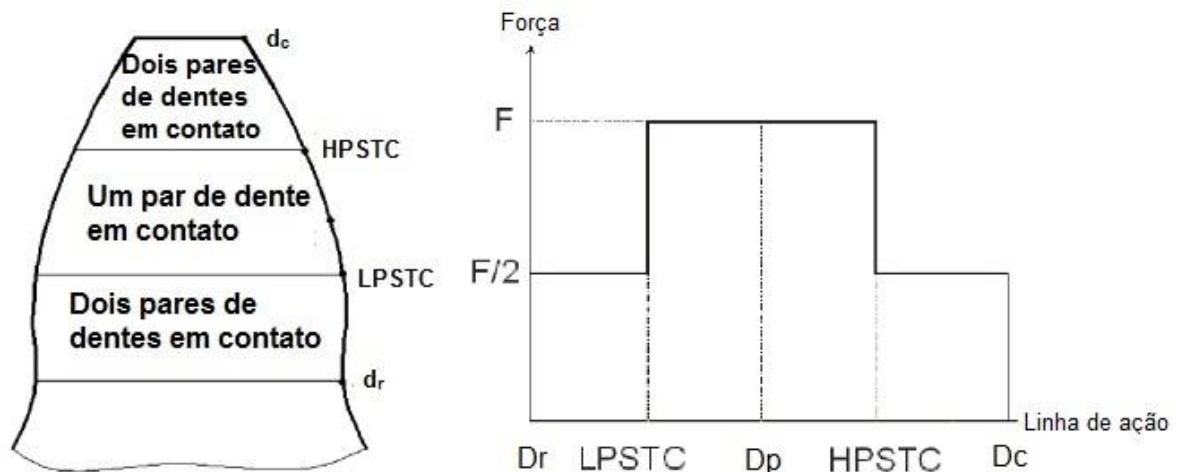


Figura 44 - Contato dos dentes e *load-sharing ratio* (IMREK, 2009)

Realizam-se simulações calculando o valor da tensão para diversos pontos ao longo da linha de ação, ou seja, variando a localização de aplicação da força. Nos pontos LPSTC e HPSTC é feita uma análise para carregamentos pela metade e inteiros. A Figura 45 mostra esse estudo.

Os pontos apresentados são diâmetro de cabeça d_c , diâmetro primitivo d_p , diâmetro de intersecção entre evolvente e trocoide d_u , pontos HPSTC e LPSTC além

de outras duas cotas que são intermediárias entre d_c e $HPSTC$ e a outra entre diâmetro de raiz d_r e $LPSTC$.

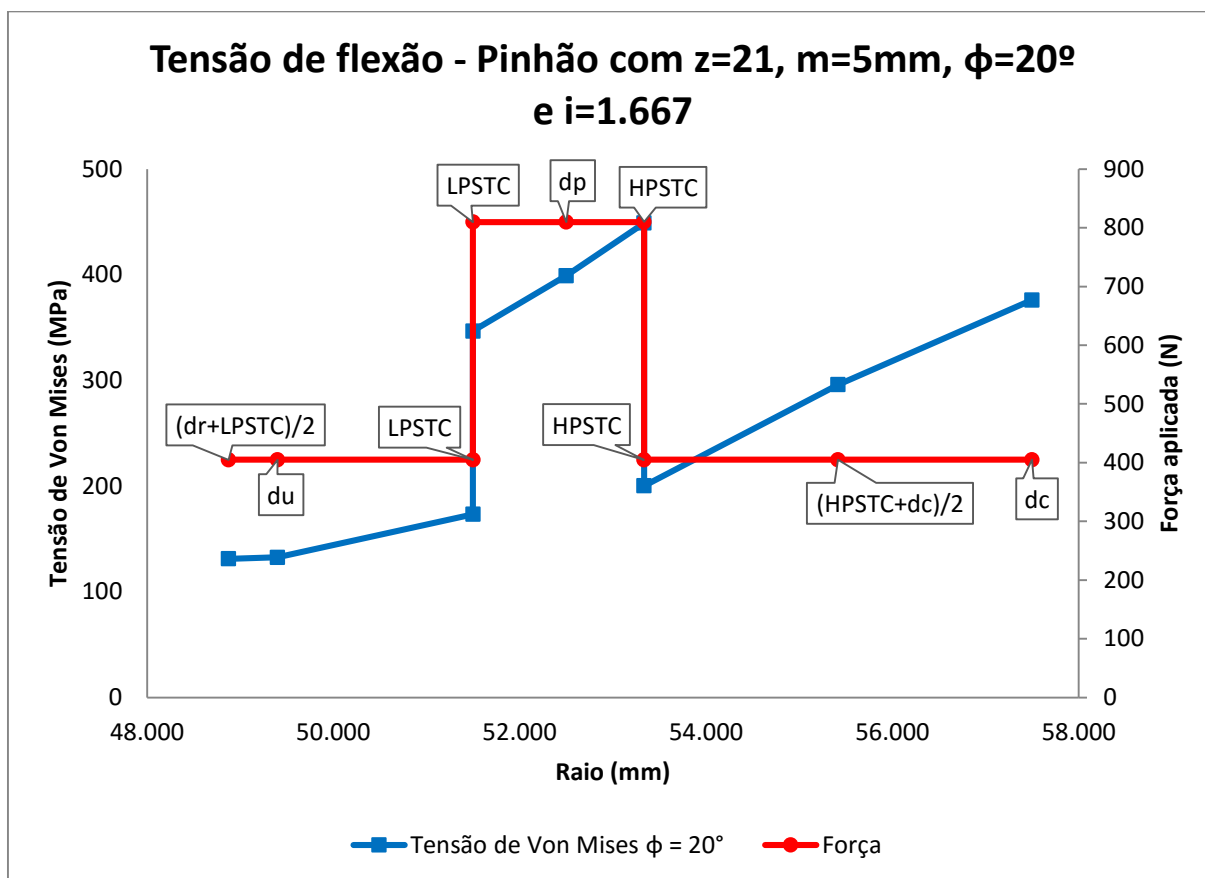


Figura 45 - Distribuição da tensão conforme muda-se a localização do carregamento

É intuitivo imaginar que o ponto de maior tensão seria obtido na localização do $HPSTC$, e isso pode ser observado na Figura 45, evidenciando a coerência do resultado obtido. Outro ponto interessante é notar que quanto mais longe da raiz o carregamento é aplicado, maior é a tensão.

Nota-se que não foram utilizados pontos próximos ao raio de raiz, que se dá no valor de 46,25mm. Isso deve-se a dificuldade de se obter a tensão máxima na raiz quando o carregamento ocorre próximo dessa região, pois como está sendo feito uma aproximação no software de força concentrada, todo o entorno dessa região possui valores elevados de tensão. Portanto, foram utilizados os pontos d_u , que é o diâmetro de intersecção entre evolvente e trocoide e a média entre diâmetro de raiz d_r e o ponto $LPSTC$ para representar a região abaixo do $LPSTC$.

A última análise realizada é verificar se o raio do ponto crítico da raiz (ponto com maior valor de tensão) varia conforme mudança de aplicação de força. A Figura 46 apresenta os resultados obtidos.

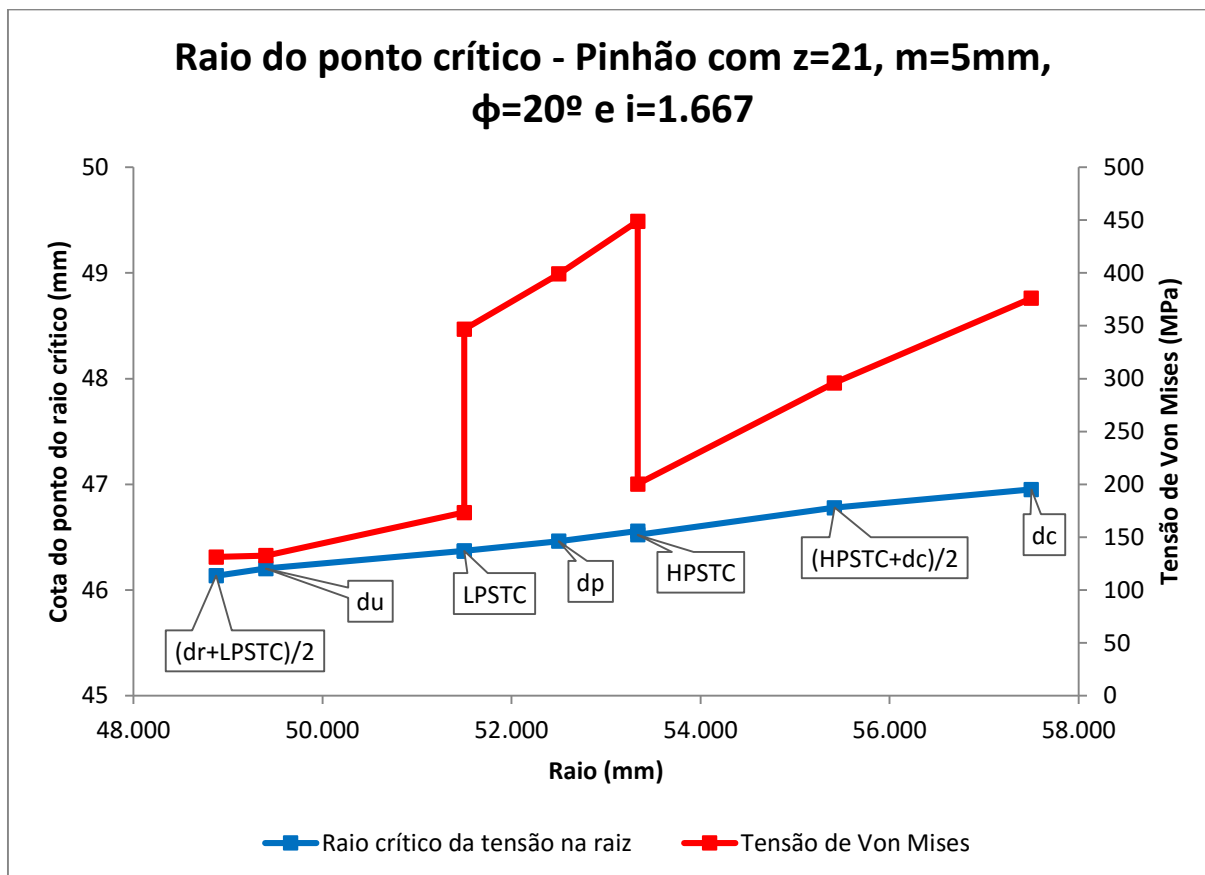


Figura 46 - Raio do ponto crítico conforme ocorre mudança na localização do carregamento

É possível perceber que o raio do ponto crítico aumenta quando a força é aplicada mais distante da raiz. Mesmo assim, os raios são muito próximos entre si, visto que a maior variação do ponto mais próximo da raiz até o ponto do d_c é de aproximadamente 0,9mm.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A falha por flexão, ocorrida quando a tensão máxima na raiz do dente excede a resistência ao escoamento é uma das causas mais comuns de falhas e quebras de dentes de engrenagens. Acabam ocorrendo paradas imprevistas em maquinários e conseqüentemente o aumento de prejuízos.

O trabalho atual tem como objetivo dar continuidade às modificações nas engrenagens realizadas por Betim (2015) para confirmar e obter novas informações de quais parâmetros são os mais relevantes para o projeto de um sistema mecânico. Modelos tridimensionais são criados para o desenvolvimento dos cálculos numéricos e comparação com o modelo analítico, obtendo a validação e aprovação do modelo numérico.

Conclui-se que a alteração no módulo, ângulo de pressão e número de dentes influencia de maneira significativa no valor de tensão de flexão. Tanto uma alteração no módulo quanto no número de dentes pode reduzir de maneira significativa a tensão. É visto que alterando o valor do módulo de 3mm para 6mm, a tensão tem uma redução de aproximadamente 40%. Para um aumento no número de dentes, pode ser obtido uma queda de até 45% na tensão de flexão.

É necessário considerar que haja espaço suficiente para alocar todos os componentes na caixa de engrenagem, visto que a alteração de alguns parâmetros influencia diretamente no tamanho das engrenagens, tanto do pinhão como da coroa.

Para todos os casos resolvidos, a tensão de flexão para engrenagens com 25° de ângulo de pressão sempre é menor para modelos com 20°. Mesmo assim, esse é o parâmetro que menos influencia se alterado, pois a maioria dos resultados apresentou uma queda de aproximadamente 15%.

A espessura do dente do ponto crítico, parâmetro inversamente proporcional à tensão, aumenta de forma praticamente linear conforme ocorre um aumento no ângulo de pressão. O fator concentrador de tensão, que é diretamente proporcional à tensão real de flexão tem seu valor reduzido também com ângulos de pressão maiores. Esses são alguns dos parâmetros que ajudam a explicar porque a tensão diminui quando o ângulo de pressão é maior.

O comportamento da tensão na raiz do dente das engrenagens, apesar de parecer ter um comportamento semelhante a uma polinomial de 2º grau, o que realmente mais se aproxima é uma polinomial de 3º grau, como foi observado na Figura 40. Apesar disso, é interessante observar que mesmo alterando o ângulo de pressão ou o número de dentes (e conseqüentemente o módulo), o comportamento da tensão na raiz é muito semelhante entre todos os casos.

O comportamento do polinômio de 2º grau para a variação de tensão máxima com a mudança de número de dentes é interessante pois pode facilmente ser usado para estimar os valores máximos de tensão para engrenagens de diferentes tamanhos.

Pode-se observar também que o aumento da relação de transmissão para um mesmo modelo de pinhão reduz a cota do raio de carga e conseqüentemente a tensão máxima obtida. Com um valor de raio de carga menor, a tensão máxima também é menor.

Com relação à execução do trabalho, durante o processo de validação do modelo numérico, é possível entender o quão importante é a colocação correta das variáveis de entrada e condições de contorno. Os problemas ocorridos antes de se obter a validação, se deram por causa do não entendimento de algum parâmetro do software ou quando o ponto de aplicação de carga era diferente daquele utilizado no modelo analítico. As partições são essenciais para obtenção do ponto exato de aplicação da carga e também para refino somente da região de estudo.

Um dos pontos que mais gerou ganho de tempo para geração dos resultados é a parametrização da geometria da engrenagem, com o auxílio do SolidWorks e Excel. É possível gerar qualquer geometria de engrenagem rapidamente, e isso ajudou a obter quais são os limites de modelos possíveis para o trabalho.

Dessa forma, pode-se afirmar que o objetivo principal do estudo é atingido. É melhor entendido como as variações geométricas influenciam na redução nas tensões de flexão e qual o nível de redução que elas proporcionam. Durante a geração dos resultados preliminares, foram descobertas novas questões a serem solucionadas, algumas apresentadas na seção final dos resultados.

A principal dificuldade observada nesse trabalho é o desencontro das curvas evolvente e trocoide. Esse problema também é observado no trabalho de Betim (2015), mas aqui buscou-se apresentar os resultados para os quais isso não fosse

relevante. O software *Progear*, desenvolvido pelo autor das equações utilizadas nesse trabalho para geração do perfil do dente, também apresenta problemas para geração de engrenagens a partir de uma certa configuração. A conclusão é que as equações apresentadas por Mazzo (2013) são aproximações de engrenagens reais, ou apenas uma maneira de representar as curvas de forma equacionada.

O estudo principal que deve ser realizado em trabalhos futuros é a busca por literaturas diferentes que apresentem a geração dos perfis evolvental e trocoidal do dente da engrenagem via equacionamento. Com uma nova literatura, é possível comparar modelos geométricos obtidos das diferentes literaturas e descobrir se há um conjunto de equações que gerem de maneira exata o perfil dos dentes.

Outra análise que pode ser realizada refere-se aos parâmetros dependentes da ferramenta geradora. Buscar entender de maneira exata como o perfil do dente de uma engrenagem é gerado pode ajudar a explicar os problemas obtidos nos modelos com baixo módulo e alto número de dentes. O estudo da tensão para as coroas não é realizado aqui devido ao problema do desencontro de curvas, visto que, na maioria das vezes, as coroas têm um elevado número de dentes.

REFERÊNCIAS

- AGMA 908-B89, A. G. (1989). **Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth**. Alexandria: AGMA.
- BETIM, V. T. (2015). **Análise da Relação Entre Tensões e Variações Geométricas em Engrenagens Cilíndricas de Dentes Retos Utilizando Método Analítico e Numérico**. 152. Curitiba, Brasil.
- BROGHAMER, E. L., & DOLAN, T. J. (24 de Março de 1942). **A Photoelastic Study of Stresses in Gear Tooth Fillets**. Engineering Experiment Station, pp. 24-39.
- FRANCO, A. T. (2010). **Métodos Numéricos Para a Engenharia**. Curitiba.
- IMREK, H. (2009). **Performance improvement method for Nylon 6 spur gears**. Tribology International, 503-510.
- MAITRA, G. M. (2001). **Handbook of Gear Design** (2ª ed.). New Delhi: Tata McGraw-Hill.
- MAZZO, N. (2013). **Engrenagens Cilíndricas: Da concepção à fabricação** (1ª ed.). São Paulo: Blucher.
- NACHI. (2015). **Gear Cutting Tools & Broaches**. Fonte: http://www.nachi.de/files/precision_tools-2_2.pdf.
- NORTON, R. L. (2013). **Projeto de Máquinas: Uma abordagem integrada** (4ª ed.). Porto Alegre: Bookman Editora.
- PILKEY, W. D. (1997). **Peterson's stress concentration factors** (2ª ed ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

- RADZEVICH, S. P. (2012). **Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture**. Boca Raton: CRC Press.
- REDDY, J. N. (2006). **An Introduction to the Finite Element Method** (3ª ed.). Nova York: McGraw-Hill.
- SHIGLEY, J. E., MISCHKE, C. R., & BUDYNAS, R. G. (2005). **Projeto de Engenharia Mecânica** (7ª ed.). Porto Alegre: Bookman Editora.
- SU, S. (16 de Novembro de 2015). **Catálogo das ferramentas geradoras de engrenagens**. Fonte: Site da Star SU: www.star-su.com
- WRIGHT, A. (2013). **A Comparison of the Tooth-Root Stress and Contact Stress of an Involute Spur Gear Mesh as Calculated by FEM and AGMA Standards**. Hartford: Rensselaer Polytechnic Institute.