

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MECÂNICA  
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

EDMILSON FELIPE NOVAK PINHEIRO DE FREITAS

**ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMOS PLANARES DE QUATRO  
BARRAS COM AUXÍLIO DE FERRAMENTA CAE**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO  
(Tcc2 - Nº de Inscrição - 49)

CURITIBA

2015

EDMILSON FELIPE NOVAK PINHEIRO DE FREITAS

**ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMOS PLANARES DE QUATRO  
BARRAS COM AUXÍLIO DE FERRAMENTA CAE**

Monografia do Projeto de Pesquisa apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso - Tcc2 do curso de Engenharia Industrial Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Paula C. S. Ferreira.

CURITIBA

2015

## TERMO DE APROVAÇÃO

Por meio deste termo, aprovamos a monografia do Projeto de Pesquisa " ANÁLISE DINÂMICA DE MECANISMOS PLANARES DE QUATRO BARRAS COM AUXÍLIO DE FERRAMENTA CAE ", realizado pelo aluno Edmilson Felipe Novak Pinheiro de Freitas, como requisito para aprovação na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Engenharia Industrial Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Profa. Dra. Ana Paula C. S. Ferreira.  
DAMEC, UTFPR  
Orientador

Prof. Dr. Carlos Henrique da Silva.  
DAMEC, UTFPR  
Avaliador

Prof. Pós-Dr. Marcio Henrique de Avelar Gomes  
DAMEC, UTFPR  
Avaliador

Curitiba, 17 de Dezembro de 2015.

## RESUMO

FREITAS, Edmilson Felipe Novak Pinheiro de. Análise dinâmica de mecanismos planares de quatro barras com auxílio de ferramenta CAE. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Industrial Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

O estudo de mecanismos em geral se limita ao ramo da cinemática, ou seja, ao estudo do movimento desses componentes. Quando o projeto envolve forças desconhecidas, mas sabidamente de baixa intensidade, e não há preocupação com superdimensionamento de elos, a análise cinemática é suficiente. No entanto, para aplicações com forças de maior intensidade e projetos mais eficientes, é necessário avançar a análise do mecanismo para o cálculo das forças. Fazendo o uso do programa computacional Matlab®, propôs-se realizar todas as etapas das análises cinemática e cinética em um estudo de caso para um mecanismo de quatro barras, de maneira a desenvolver uma metodologia de análise mais completa para tal tipo de estudo. Essa metodologia também foi validada através da reprodução do problema com uma análise numérica em uma ferramenta de CAE, visando possibilitar análises de mecanismos de geometrias mais complexas. Uma vez que a metodologia desenvolvida foi provada como confiável, elaborou-se um modelo numérico para uma aplicação mecânica de um mecanismo planar de quatro barras de maneira a se obter resultados de parâmetros como a aceleração, as forças e as tensões atuantes no sistema. Ao final dos estudos, teve-se como principais conclusões do trabalho tanto a alta confiabilidade mostrada pela metodologia desenvolvida quanto a boa aplicabilidade da mesma em problemas do cotidiano, apresentando assim grande praticidade e eficácia na obtenção de análises mais completas mesmo para projetos de maior complexidade.

**Palavras-chave:** Mecanismos. Mecanismos de quatro barras. Análise Cinemática. Análise Cinética. Modelo numérico.

## ABSTRACT

FREITAS, Edmilson Felipe Novak Pinheiro de. Análise dinâmica de mecanismos planares de quatro barras com auxílio de ferramenta CAE. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Industrial Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba, 2015.

The general study of mechanisms is usually limited to the kinematics area, i.e., the study of the movement of these components. When the project involves unknown forces but known to be of low intensity, and there is not a concern about sizing of links, the kinematic analysis is sufficient. However, for applications with forces of greater intensity and more efficient designs, it is necessary to make a deeper analysis of the mechanism for the calculation of forces. Making use of Matlab, that was proposed to carry out all stages of kinematic and kinetic analysis in a case study for four-bar linkages, the objective was to develop a more complete analysis methodology for this type of study. This methodology was also validated by reproducing the problem in a numerical model for a CAE analysis, aiming to work later with mechanisms of more complex geometries. Since this methodology has been proven as reliable, a numerical model for a mechanical application of a planar four-bar mechanism was developed in order to obtain results of parameters such as acceleration, forces and stresses acting on the system. At the end of the study, it can be considered as the main conclusions not only the high reliability shown by the developed methodology but also the applicability of it in everyday problems, thus presenting great practicality and efficiency in obtaining more complete analysis even for more complex projects .

**Keywords:** Mechanisms. Four-bar linkages. Kinematic analysis. Kinetic analysis. Numerical model.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Mecanismo para um relógio de bolso. ....	13
Figura 2 - Exemplo de máquina: guindaste. ....	13
Figura 3 - Exemplos de classificação de juntas. (a) Junta completa de rotação; (b) Meia junta com rotação e translação; (c) Junta de revolução de segunda ordem com dois GDL. ....	16
Figura 4 - Quatro movimentos permitidos para mecanismo atendendo à condição de Grashof. ....	17
Figura 5 - Exemplo de mecanismo de quatro barras. ....	20
Figura 6 - Análise vetorial do exemplo de mecanismo de quatro barras. ....	22
Figura 7 - Análise para um ponto de interesse no mecanismo de quatro barras. ....	25
Figura 8 - Aplicação de sistemas de eixos móveis em elo binário. ....	27
Figura 9 - Reprodução no programa SolidWorks® do mecanismo de quatro barras genérico estudado. ....	28
Figura 10 - Exemplo de malha de elementos finitos no cabeçote de um pistão. ....	32
Figura 11 - Problema proposto de exercício de mecanismo planar de quatro barras. ....	34
Figura 12 - Diagramas de corpo livre para o exemplo de mecanismo de quatro barras. ....	34
Figura 13 - Variação da velocidade angular ao longo de uma revolução completa do elo 2. ....	37
Figura 14 - Referências para os ângulos do mecanismo de quatro barras. ....	37
Figura 15 - Aplicação dos parâmetros de entrada em modelo do programa Ansys®. ....	38
Figura 16 – Unidade de bombeio mecânico com hastes para poços de petróleo. ....	40
Figura 17 - Reprodução em SolidWorks® de unidade de bombeio mecânico de petróleo. ....	40
Figura 18 - Parâmetros de entrada para análise da aplicação mecânica reproduzidos em Ansys®. ....	42

Figura 19 - Determinante da matriz Jacobiana durante a revolução do elo 2. ....	44
Figura 20 - Variação dos ângulos dos elos 3 e 4 em função da inclinação do elo 2. ....	45
Figura 21 - Acelerações dos CGs para os elos 2, 3 e 4 em Matlab®.....	46
Figura 22 - Acelerações dos CGs para os elos 2, 3 e 4 em Ansys®.....	46
Figura 23 - Torque T <sub>12</sub> na junta entre a manivela e sua fixação em Matlab®.....	47
Figura 24 - Torque T <sub>12</sub> na junta entre a manivela e sua fixação em Ansys®. ....	47
Figura 25 - Forças nas juntas do mecanismo ao longo da revolução da manivela em Matlab®.....	48
Figura 26 - Forças nas juntas do mecanismo ao longo da revolução da manivela em Ansys®.....	49
Figura 27 – Tensões de Von Mises presentes no elo 2 em sua posição crítica.....	50
Figura 28 - Tensões de Von Mises presentes no elo 3 em sua posição crítica.....	50
Figura 29 - Tensões de Von Mises presentes no elo 4 em sua posição crítica.....	51
Figura 30 - Acelerações dos CGs para os elos 2, 3 e 4 da bomba de petróleo em Ansys®.....	52
Figura 31 - Torque T <sub>12</sub> na junta da bomba de petróleo entre a manivela e sua fixação em Ansys®. ....	53
Figura 32 - Forças nas juntas do mecanismo da bomba de petróleo ao longo da revolução da manivela em Ansys®.....	53
Figura 33 - Tensões atuantes em elo acionador da bomba de petróleo. ....	55
Figura 34 - Tensões atuantes no elo de acoplamento da bomba de petróleo.....	55
Figura 35 - Tensões atuantes no elo seguidor da bomba de petróleo. ....	56

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados da análise cinemática para inclinação do elo de entrada de 60°.....	35
Tabela 2 - Resultados da análise dinâmica para inclinação do elo de entrada de 60°. .....	35
Tabela 3 - Propriedades de massa e de inércia para o modelo genérico em Solidworks®.....	36
Tabela 4 - Propriedades de massa e de inércia para o caso de aplicação em Solidworks®.....	41
Tabela 5 - Comparação de parâmetros cinemáticos entre exemplo e Matlab para os elos 3 e 4.....	43
Tabela 6 - Comparação de parâmetros cinéticos entre exemplo e Matlab. ....	44
Tabela 7 - Posições críticas e esforços incidentes no mecanismo.....	49



# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
1.1	Contexto do tema	8
1.2	Caracterização do problema	9
1.3	Objetivos	10
1.3.1	Objetivos gerais	10
1.3.2	Objetivos específicos	10
1.4	Justificativa	10
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>12</b>
2.1	Mecanismos	12
2.1.1	Mobilidade de mecanismos planares	13
2.1.2	Elos e juntas	15
2.1.3	A Lei de Grashof	16
2.2	Análise cinemática	18
2.3	Análise cinética	26
2.4	Programas SolidWorks® e Ansys®	31
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>33</b>
3.1	Mecanismo de quatro barras genérico	33
3.2	Caso de aplicação – Bomba de extração de petróleo	39
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>43</b>
4.1	Mecanismo de quatro barras genérico	43
4.2	Aplicação mecânica para mecanismo de quatro barras	51
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>57</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>59</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Contexto do tema

O início de estudos mais específicos de máquinas e mecanismos teve início em meados do século XVIII, com os primeiros trabalhos tanto no ramo da cinemática quanto distinguindo os conceitos de máquina e mecanismo. Com o surgimento da Revolução Industrial criou-se uma demanda por inovações tecnológicas nunca antes vista. Tendo como objetivo principal atender ou até mesmo superar a expectativa do cliente por seus produtos, as empresas se dedicam ao máximo para acompanhar o desenvolvimento de seus concorrentes, tentando realizar projetos de altíssima qualidade, garantindo a confiabilidade e a otimização de seu produto e, por consequência, utilizando máquinas e mecanismos em seu processo produtivo da maneira mais eficiente possível.

Identifica-se também que essa capacidade de melhoria por parte das empresas foi exponencialmente elevada com a revolução tecnológica provocada pela criação e pelo advento dos recursos computacionais. Ao se referir aos campos da cinemática e cinética de mecanismos e máquinas, verifica-se que durante um longo tempo as análises em projetos eram realizadas apenas para situações críticas de operação dos componentes, utilizando-se de análises gráficas ou analíticas que eram muitas vezes pouco flexíveis e que negligenciavam posições intermediárias devido à dificuldade de reprodução do movimento de um mecanismo. Sendo assim, os recursos digitais vêm atuar com o propósito de reduzir as dificuldades antes presentes em estudos que demandavam o cálculo iterativo, reproduzindo as situações-problema da maneira mais fiel possível, apresentando erros significativamente menores que os presentes em métodos de análise mais antigos e permitindo a criação de ambientes de realidade virtual, onde os erros podem ser detectados com maior facilidade.

No atual momento, análises relacionadas a mecanismos acompanham a demanda pela otimização desses sistemas através dos meios computacionais. Um projeto de mecanismos envolve grande interdisciplinaridade, relacionando desde as áreas de materiais e processos de fabricação até os conceitos de mecânica estrutural e elementos de máquinas. Dessa forma, se faz necessária a

implementação de uma ampla gama de parâmetros nos programas computacionais, no intuito de recriar os problemas e conseguir melhorias.

Alguns campos de estudo que estão em grande destaque atualmente envolvem os mecanismos flexíveis ou com mais de quatro barras. Outros campos de análise também muito presentes englobam a análise de vibrações, de comportamento sob fadiga estrutural e métodos analíticos de soluções.

Tem-se como exemplo desses estudos o trabalho de Yang e Sadler (1990), que estuda através da análise por elementos finitos o comportamento dinâmico de mecanismos flexíveis com grandes deslocamentos. Já o estudo de Yu e Cleghorn (2002) tem como foco a instabilidade na análise dinâmica para mecanismos de quatro barras flexíveis em alta velocidade.

Flores (2000) também faz a abordagem da análise cinemática e cinética de mecanismos, porém engloba casos mais específicos e utiliza programas com análises mais simplificadas e sem muita riqueza de detalhes. Por fim, Morishita (2015) envolve os mesmos conceitos iniciais do estudo aqui apresentado, porém tem como principal foco a otimização estrutural de mecanismos desse tipo.

## **1.2 Caracterização do problema**

O estudo de mecanismos na maioria dos casos costuma restringir-se ao estudo do movimento desses componentes, ou seja, ao ramo da cinemática. Esta limitação vem do fato de, apesar de mecanismos também serem capazes de transmitir forças através de seus elos, o principal foco de seu uso costuma ser realizar um movimento específico desejado para o sistema. Uma análise cinemática não tem como um de seus objetivos analisar as forças aplicadas no arranjo. O foco é o movimento e são deduzidas equações de posição, de velocidade e de aceleração, relativas ao mecanismo objeto de estudo.

Se apenas esse tipo de estudo fosse realizado ao longo de um projeto, as forças e tensões aplicadas acabariam sendo negligenciadas. A análise cinemática pode ser considerada como suficiente para o projeto quando, apesar de não se conhecer as forças atuantes, sabe-se que essas são de baixa intensidade e não existe a preocupação com superdimensionamento de elos. No entanto, para aplicações com forças de maior intensidade e projetos mais eficientes, é necessário

avançar a análise do mecanismo para cálculo das forças. Tal análise pertence à dinâmica, mais especificamente cinética.

Portanto, no intuito de compreender tais casos e atingir um completo dimensionamento de elos do sistema utilizam-se normalmente conhecimentos e recursos da mecânica estrutural para avançar esta análise e incluir o cálculo de todas as forças atuantes. Isso tem por objetivo conduzir a uma análise dinâmica muito mais rica e completa, além de garantir a confiabilidade desejada para o mecanismo.

### **1.3 Objetivos**

#### **1.3.1 Objetivos gerais**

Desenvolver uma metodologia de análise dinâmica de mecanismos de quatro barras incluindo a modelagem por elementos finitos, visando ainda possibilitar análises de mecanismos de geometrias mais complexas.

#### **1.3.2 Objetivos específicos**

- Desenvolvimento matemático de análises dinâmicas para um exemplo de mecanismo através de um programa computacional.
- Elaboração da análise numérica do problema e sua validação através do modelo matemático.
- Aplicação da metodologia em um problema do cotidiano para validação do método.

### **1.4 Justificativa**

Apesar do estudo de mecanismos usualmente se limitar à sua análise cinemática, uma vez que na grande maioria dos casos estes sofrem a ação de pequenas forças e velocidades, o desenvolvimento tecnológico e a demanda da indústria por sistemas mais eficientes torna a otimização de projetos e a melhoria no dimensionamento desses componentes essencial para as empresas se manterem competitivas no mercado. Com o grande número de mecanismos existentes nos mais variados equipamentos, verifica-se que a análise dinâmica desses sistemas

busca melhorias que, mesmo parecendo desprezíveis em uma primeira análise, tendem a gerar excelentes resultados ao serem implementadas em larga escala.

No entanto, evidencia-se que no ensino desse ramo ainda não foi possível incluir o conteúdo dos estudos cinéticos de mecanismos, considerando o fato de apenas o campo da cinemática já se tratar de um tema muito abrangente. Essa situação é identificada mesmo dentro do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Sendo assim, a proposta de elaborar uma metodologia simplificada que aborde tais conhecimentos apresenta grande potencial de melhoria para a busca de conhecimento do estudante de engenharia.

A proposta entra também como uma chance para o aprofundamento dos conhecimentos do profissional de engenharia através do auxílio de ferramentas computacionais, proporcionando uma excelente experiência e agregando valor para uma formação mais completa na área da mecânica estrutural. Muitas matérias ao longo do curso de engenharia já permitem que o estudante entre em contato com programas relacionados aos seus tópicos de ensino com o objetivo de consolidar o conhecimento abordado. Sendo assim, o uso de programas aplicados a esta análise, como no caso o Matlab<sup>®</sup> e ferramentas de CAE (*Computer-aided Engineering*) como Abaqus<sup>®</sup> e Ansys<sup>®</sup>, são importantes na preparação da pessoa para o mercado de trabalho, possibilitando o desenvolvimento da interdisciplinaridade ao envolver conceitos da ciência dos materiais, dos processos de fabricação, da análise de projetos e da mecânica estrutural.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

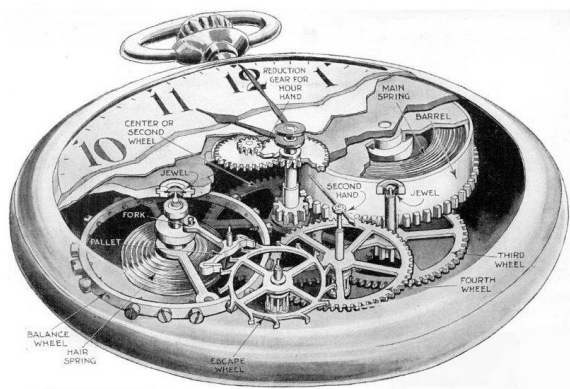
### 2.1 Mecanismos

Uma das primeiras iniciativas no intuito de distinguir os conceitos de máquina e mecanismo se dá logo no início do século XIX, quando Gaspard Monge (1746 – 1818) e seu colega Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 – 1834) criaram o curso de elementos de máquinas na École Polytechnique de Paris, França, com a função de classificar todos os mecanismos e máquinas criados pela humanidade até então. (NORTON, 2010, p. 25).

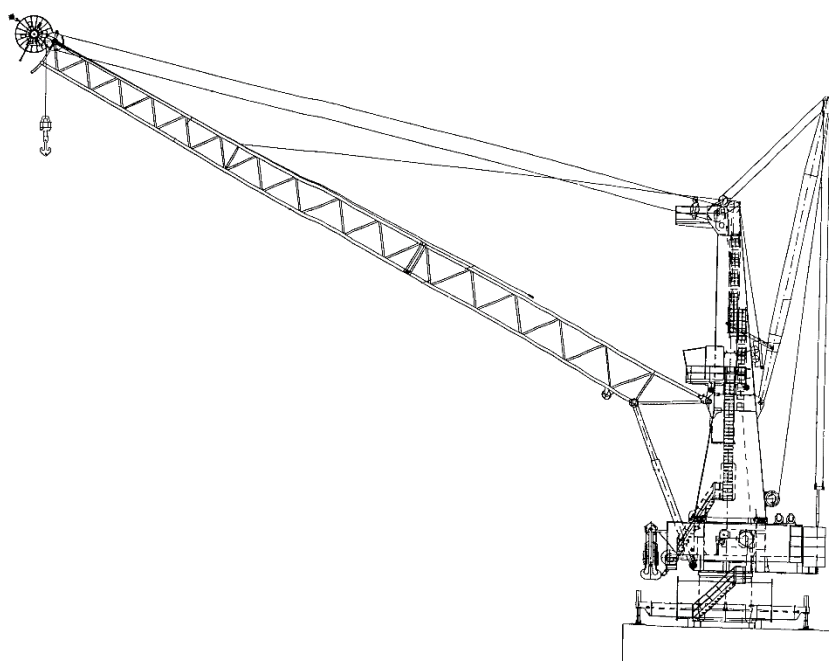
“Eles (máquinas e mecanismos) são diferenciados em grau, e não em tipo” (NORTON, 2010, p. 24). Este critério tende, portanto, a se basear nas forças e energias presentes nos sistemas, uma vez que um mecanismo estaria responsável pela transmissão de movimento de uma maneira pré-determinada e possuindo, normalmente, pequenas forças e velocidades. Esse também é um motivo de muitas vezes apenas a análise cinemática ser considerada nestes casos.

Máquinas, por outro lado, são responsáveis pela transmissão de energias e esforços mais significativos. Ao início de uma análise, tanto elas quanto mecanismos que operam em velocidades maiores deverão ser estudados cinematicamente, ou seja, serão considerados puramente como mecanismos para a obtenção de suas velocidades e acelerações para, só então, uma análise cinemática ser efetuada.

Com o objetivo de esclarecer o conceito de diferença por grau e não por tipo, exibem-se aqui alguns exemplos de tal distinção para melhor compreensão do leitor. A Figura 1 exibe um relógio de bolso com parte de seu interior exposta, representando um clássico exemplo de mecanismo, uma vez que o principal objetivo é manter a sincronia do movimento do sistema, e não suportar elevadas cargas ou altas velocidades. Já a Figura 2 apresenta o guindaste como um representante da classificação de máquina devido às grandes forças a serem consideradas em sua operação.



**Figura 1 - Mecanismo para um relógio de bolso.**  
**Fonte: Lodge (1931, p.53).**



**Figura 2 - Exemplo de máquina: guindaste.**  
**Fonte: Franzen e Kröll (2000).**

### 2.1.1 Mobilidade de mecanismos planares

A mobilidade de um mecanismo, também conhecida como número de graus de liberdade, é definida por Shigley e Uicker (1981, p. 12) como o número de parâmetros de entrada (usualmente pares de variáveis) que precisam ser independentemente controlados com o objetivo de mover um dispositivo para uma posição particular. Desta maneira, salvo algumas exceções, é possível determinar a

mobilidade de um mecanismo através de seu número de elos e dos tipos de juntas envolvidos no sistema.

Para se obter o posicionamento de um elo no espaço se faz necessário definir os três tipos possíveis de movimento em relação a um referencial, sendo esses o de rotação, o de translação e o movimento complexo, que seria uma combinação simultânea entre os dois anteriores.

Tendo essas noções como base de seu estudo, Gruebler (1917) elaborou uma equação desprezando características geométricas de cada elo e capaz de definir facilmente a mobilidade de um mecanismo. A equação (1), ou “Equação de Gruebler”, é apresentada a seguir:

$$M = 3L - 2J - 3G \quad (1)$$

Em que:

$M$  = Mobilidade ou graus de liberdade

$L$  = Número de elos

$J$  = Número de juntas

$G$  = Número de elos fixados

Admitindo-se que cada elo livre em um plano possui três graus de liberdade (translação nos eixos paralelos ao plano e rotação em relação ao eixo perpendicular ao plano), cada união entre elos através de uma junta irá reduzir um pouco a mobilidade do sistema. Caso a junta seja do tipo completa, ou seja, que permite apenas um grau de liberdade entre os elos conectados, ela estará removendo dois graus de liberdade do sistema como um todo. Já a meia junta, que permite dois graus de liberdade, irá remover apenas um grau do sistema.  $J$  possuirá então o valor de 1 para o caso de junta completa e de 1/2 para a meia junta.

Para o caso de elos que sejam completamente fixados a uma estrutura de referência, tem-se, portanto, a perda de toda a sua mobilidade. Para esse caso, deve-se considerar que todos os elos aterrados compõem apenas um elo fixo, reformulando-se assim a equação (1) para a equação (2) apresentada:

$$M = 3(L - 1) - 2J \quad (2)$$



Para o caso especial de um mecanismo planar com 1 grau de liberdade, que será estudado ao longo desse trabalho, subentende-se que apenas a determinação de um único parâmetro será necessária para definir todo o movimento do conjunto.

### 2.1.2 Elos e juntas

Elos e juntas são os elementos mais básicos e fundamentais para a construção de um mecanismo. Para Norton (2010, p. 50), um elo seria “[...] um corpo rígido que possui ao menos dois nós que são pontos para se anexar aos outros elos.” Portanto, caso um elo contenha dois, três ou quatro nós, este receberá a denominação de elo binário, terciário e quaternário, respectivamente, e assim subsequentemente de acordo com o número de nós existentes.

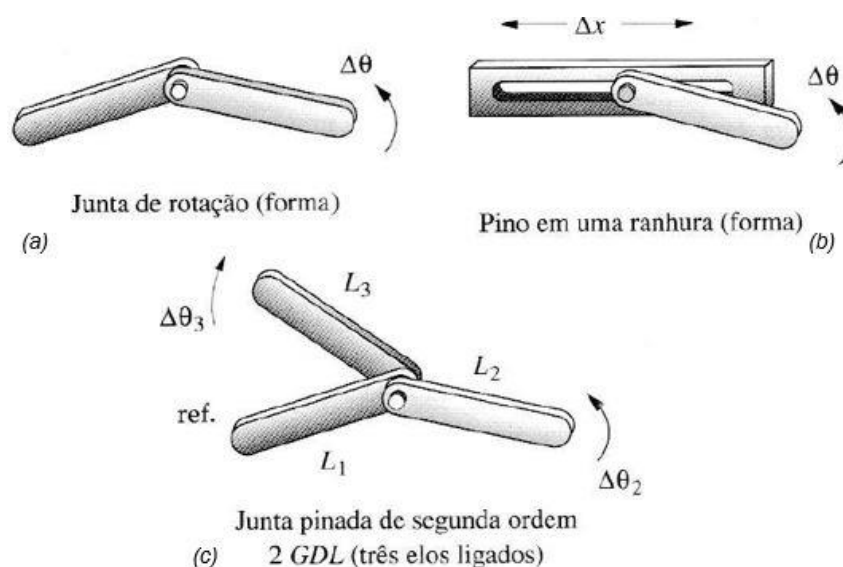
As juntas, por sua vez, são as conexões entre dois ou mais elos através de seus nós, possibilitando a transmissão total ou parcial de um movimento. Reuleaux (2012) criou o termo “par inferior” para designar a conexão efetuada através de uma superfície de contato e o termo “par superior” para o caso de apenas um ponto ou uma linha de contato entre elementos (como os rolos ou esferas em um rolamento). Todos estes pares cinemáticos também podem ser classificados de acordo com os seguintes critérios:

- Número de graus de liberdade permitidos na junta;
- Tipo de fechamento físico da junta, tanto em relação à força quanto à forma como foi fechada;
- Número de elos unidos (ordem da junta).

A classificação dos tipos de pares tem então por objetivo caracterizar e evidenciar as particularidades em relação à forma e aos movimentos permitidos pela junta, determinando assim a mobilidade não apenas do elo em si, mas do mecanismo como um todo.

A Figura 3 exibe alguns exemplos das classificações mencionadas: na Figura 3a apresenta-se uma junta completa de um grau de liberdade, considerado como par inferior; na Figura 3b um par superior caracterizado como uma meia junta, ou seja, que permite dois graus de liberdade; e na Figura 3c três elos conectados permitindo dois graus de liberdade. A ligação de três elos em um mesmo pino define

a junta como de segunda ordem, sendo a ordem da junta igual ao número de elos conectados menos um.



**Figura 3 - Exemplos de classificação de juntas. (a) Junta completa de rotação; (b) Meia junta com rotação e translação; (c) Junta de revolução de segunda ordem com dois GDL.**

Fonte: Norton (2010, P. 52)

### 2.1.3 A Lei de Grashof

Para movimentos de apenas um grau de liberdade, tem-se o mecanismo de quatro barras, ou seja, com quatro elos binários e juntas de primeira ordem pinadas, como o exemplo simples e de grande aplicação.

A grande simplicidade e versatilidade no uso desse sistema conduz para que ele seja sempre considerado como um bom exemplo para aplicação de metodologias de solução em qualquer problema de controle de movimento e, inclusive, justifica seu estudo neste trabalho.

Como normalmente esses mecanismos são acionados por motores, verifica-se a necessidade de definir previamente se o elo de entrada do movimento será ou não capaz de realizar uma rotação completa para acompanhar esse motor. Para isso, a Lei de Grashof define que, para um mecanismo de quatro barras planar, a soma do menor elo com o maior elo não deve ser maior que a soma dos dois restantes, caso a intenção seja possuir uma rotação relativa contínua entre dois membros (SHIGLEY e UICKER, 1981, p. 17).

Serão denominados assim o menor elo como  $S$ , o maior como  $L$  e os demais como  $P$  e  $Q$ , definindo assim a Equação (3) a seguir:

$$S + L \leq P + Q \quad (3)$$

Se essa desigualdade não for satisfeita, subentende-se que nenhum dos elos realizará uma rotação completa em relação aos demais. Percebe-se aqui também que essa definição não leva em consideração a geometria de cada elo ou a ordem em que a cadeia será montada, dependendo exclusivamente da distância entre os nós do membro. Outro fato é que a lei não define qual dos elementos está fixado na estrutura de referência. O movimento depende também de qual elo é definido como fixação, como mostra a Figura 4.

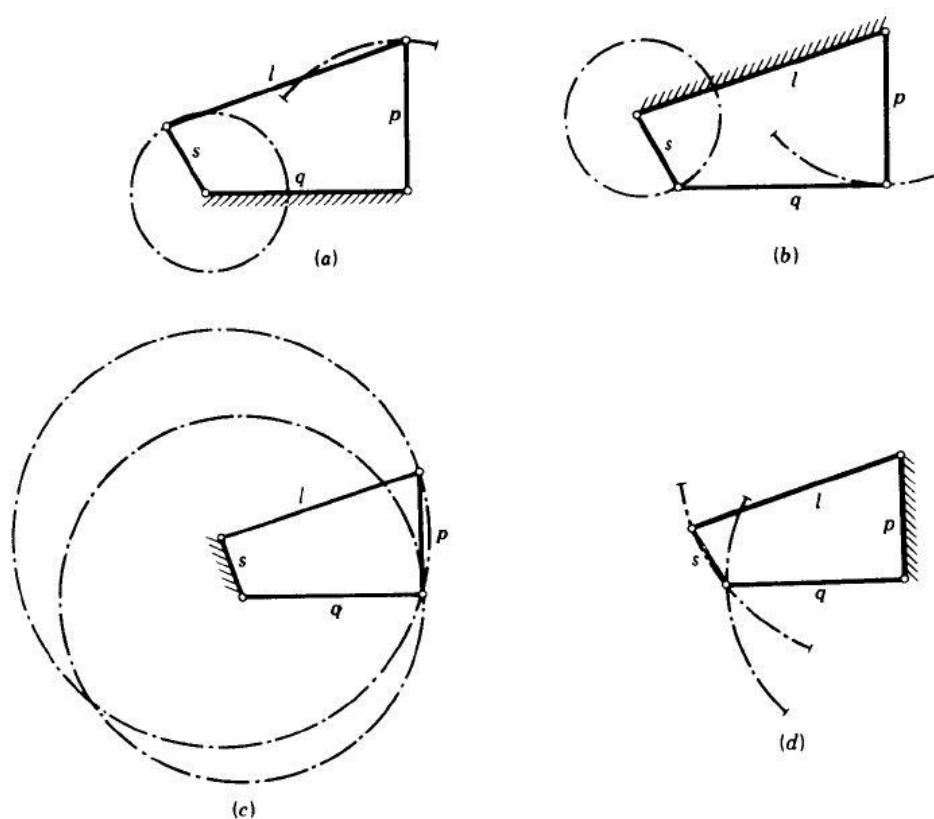


Figura 4 - Quatro movimentos permitidos para mecanismo atendendo à condição de Grashof.  
Fonte: Shigley e Uicker (1988, p. 17).

Tanto para a Figura 4a quanto para a Figura 4b realiza-se a fixação do elo adjacente ao menor elo, permitindo uma rotação completa do menor elemento e um movimento oscilante do elemento oposto a ele. Já na Figura 4c fixa-se o menor membro, conduzindo a uma rotação completa de seus dois elos adjacentes a

ele. Por fim, na Figura 4d, ao fixar o elemento oposto ao menor verifica-se que os dois elos adjacentes ao menor operam oscilando enquanto o menor componente rotaciona.

Tem-se um caso especial de Grashof quando é verificada a igualdade na equação (3). Quando isso ocorre, qualquer configuração da cadeia cinemática se comportará como dupla manivela ou manivela seguidor, apresentando pontos onde seus elementos ficarão posicionados colinearmente. Nesses pontos não é possível prever o comportamento da cadeia porque ela assume duas configurações ao mesmo tempo, determinando assim um ponto de transição que se revela a cada revolução da manivela de entrada (NORTON, 2010, p. 76).

Devido a essa imprevisibilidade do movimento apresentado por esses mecanismos, costuma-se evitar o ponto de transição ao limitar o movimento do sistema ou ao posicionar um elemento adicional defasado para evitar a mudança de configuração.

## **2.2 Análise cinemática**

Partindo da premissa de que os movimentos requisitados foram atendidos e que a configuração do mecanismo já foi determinada, resta seguir para uma análise das condições operacionais às quais ele será submetido. Conforme já comentado neste texto, entende-se como o principal foco da análise de mecanismos a cinemática atuante. Porém, para a aplicação do mecanismo deverão ser avaliadas as forças atuantes, por menores que sejam, de maneira a dimensioná-los para evitar qualquer situação crítica durante sua operação.

Entende-se, portanto, que nesta etapa forças estáticas e dinâmicas deverão entrar em questão e, para o caso dinâmico, considera-se essencial através da segunda lei de Newton o conhecimento das acelerações presentes, sendo para Norton (NORTON, 2010, p. 188) o principal objetivo da análise cinemática.

Para calcular as acelerações devemos, primeiro, encontrar a posição de todos os elos ou elementos no mecanismo para cada movimento de entrada; depois, derivar as equações de posição em relação ao tempo a fim de encontrarmos as velocidades; e, em seguida, derivar novamente e obter as equações para a aceleração. (NORTON, 2010, p. 188).

Várias maneiras costumam ser empregadas na obtenção desses dados, porém, entre elas, costumam ser destacados os métodos por solução gráfica e por solução algébrica. Conforme Shigley e Uicker (1981, p. 169), por mais distintas que sejam as metodologias para esses problemas, soluções para velocidade e aceleração são basicamente análises vetoriais. Cada método, porém, apresenta vantagens e desvantagens de acordo com o critério utilizado.

Historicamente verifica-se o uso da análise gráfica como mais predominante para sistemas cinemáticos planares, uma vez que sua aplicação permite fácil visualização do problema, traz soluções mais simplificadas para o caso de uma única posição de estudo e evita as complexidades matemáticas de problemas de ordem superior. Em contrapartida, aponta-se como revés desse método a sua acurácia, que pode ser influenciada diretamente pelas medições realizadas no sistema; sua eficácia apenas para problemas de poucas posições, uma vez que cada posicionamento da cadeia cinemática deverá ser estudado como um novo problema; e a dificuldade em encontrar condições críticas de operação do sistema, sendo esses dados muito significativos durante as etapas de projeto e que deverão ser estimados, considerando que apenas posições específicas são conhecidas.

O método algébrico é muitas vezes considerado mais trabalhoso que os demais, sendo seu sucesso dependente em grande parte do quão preciso o problema foi reproduzido matematicamente. Contudo, uma vez que essa reprodução foi satisfatória e erros matemáticos não foram cometidos, a solução algébrica passa a ser a mais indicada devido ao seu erro mínimo e à grande flexibilidade em seu uso.

Destaca-se como um importante marco na análise de mecanismos em geral o grande desenvolvimento tecnológico promovido pelos recursos computacionais nas últimas décadas, permitindo alcançar precisões e otimizações nos projetos de máquinas nunca antes imaginadas, seja através de programas computacionais dedicados a componentes específicos ou de programas com foco de análise mais generalizado.

Conforme já citado ao longo desse texto, independentemente da metodologia adotada para a solução de exercícios de estudos cinemáticos, a análise das posições, velocidades e acelerações de um mecanismo se trata, basicamente, de uma análise vetorial. Para apresentar da maneira mais didática possível as etapas

de cálculo para a obtenção de tais variáveis, optou-se aqui por utilizar um exemplo genérico para o mesmo caso que será investigado ao longo deste trabalho: o mecanismo planar de quatro barras.

A Figura 5 exibe o exemplo que será aplicado nesta demonstração.

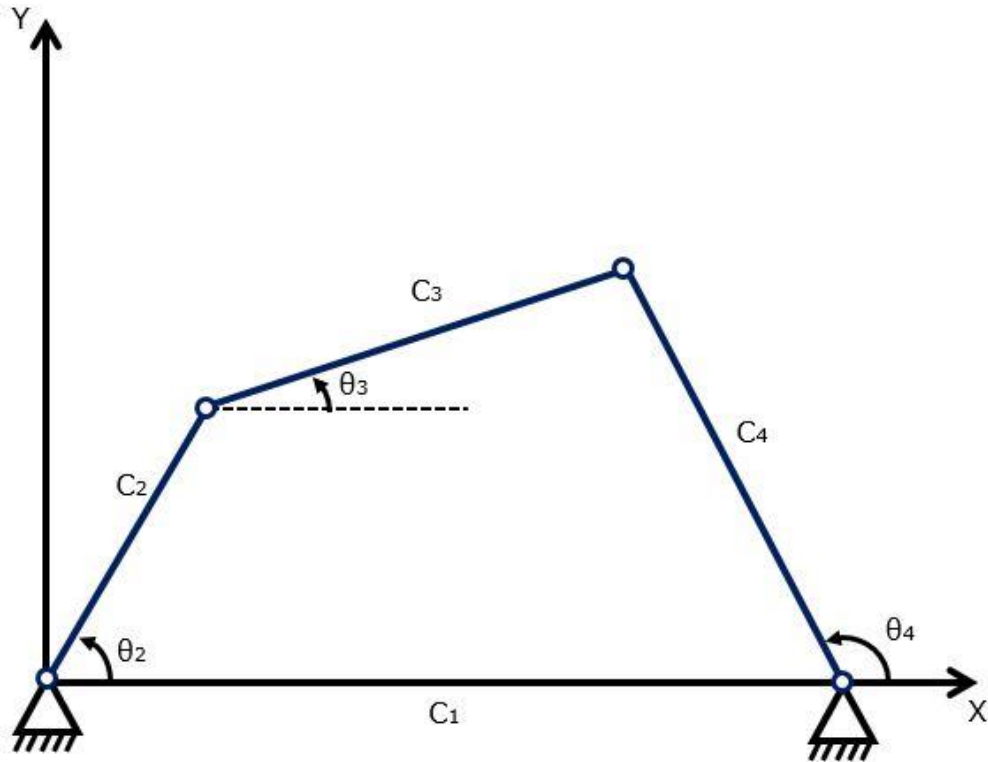


Figura 5 - Exemplo de mecanismo de quatro barras.

Fonte: Autoria própria.

Verifica-se nessa figura um exemplo simples de mecanismo de 4 barras, possuindo quatro juntas pinadas completas e tendo o elo  $C_1$ , adjacente ao menor elo  $C_2$ , como seu elo fixado. Os ângulos  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_4$  representam a inclinação de cada um dos elos moveis em relação ao eixo das abscissas do sistema global de coordenadas, sendo este sistema posicionado com sua origem coincidente com a junta entre os elos  $C_1$  e  $C_2$ .

Apesar de já se saber que esta cadeia cinemática possui apenas um grau de liberdade, será aplicado aqui o critério de Gruebler de maneira a reproduzir uma abordagem usual. Sendo assim, nota-se aqui a presença de quatro elos, ou seja,  $L=4$ , e quatro juntas completas,  $J=4$ . Desta maneira, tem-se a equação de Gruebler apresentada conforme a equação (4) a seguir:

$$M = 3(4 - 1) - 2(4) \quad (4)$$

Confirma-se assim para o mecanismo a mobilidade de  $M=1$  como esperado. Considerando que o movimento permitido pelas juntas pinadas é o de rotação dos elementos, define-se então o elo de acionamento de modo a ser tomado como entrada para o movimento do sistema. Neste caso, foi selecionado o elo  $C_2$  como o de acionamento, significando então que o ângulo  $\theta_2$  será o ângulo de entrada do movimento.

Uma outra análise prévia a ser realizada para o mecanismo é a do perfil de movimento permitido pelo comprimento de cada um de seus membros através da lei de Grashof. Uma vez que o objetivo aqui é o de se ater a uma solução analítica, verifica-se visualmente que o menor elemento  $S=C_2$  e o maior elemento  $L=C_1$ , substitui-se na equação da lei de Grashof para ser apresentada na forma  $C_1 + C_2 \leq C_3 + C_4$ . Caso a desigualdade seja confirmada, e devido ao elo adjacente ao menor elemento estar fixado, sabe-se, portanto, que esse menor elemento  $C_2$  irá operar como uma manivela ao realizar revoluções completas.

Se faz necessário agora tanto evidenciar quais são os dados conhecidos quanto expor as variáveis que deverão ser calculadas. Para o caso estudado, os comprimentos de cada um dos elementos serão considerados como as dimensões conhecidas do conjunto, o ângulo de inclinação  $\theta_2$  já foi definido como ângulo de entrada (também conhecido como variável primária), e as variáveis a serem calculadas, também nomeadas como variáveis dependentes ou secundárias, serão os ângulos de inclinação  $\theta_3$  e  $\theta_4$ . Uma vez que essa análise preliminar da cadeia cinemática foi efetuada, será possível avançar esse estudo para a determinação de suas equações de posição.

O primeiro passo a ser dado será o de reproduzir a configuração do mecanismo na forma de vetores, resultando assim em uma soma vetorial em que cada um dos vetores possuirá a mesma magnitude do seu elo correspondente, conforme mostrado pela equação (5) na Figura 6.

$$\vec{C}_2 + \vec{C}_3 = \vec{C}_1 + \vec{C}_4 \quad (5)$$

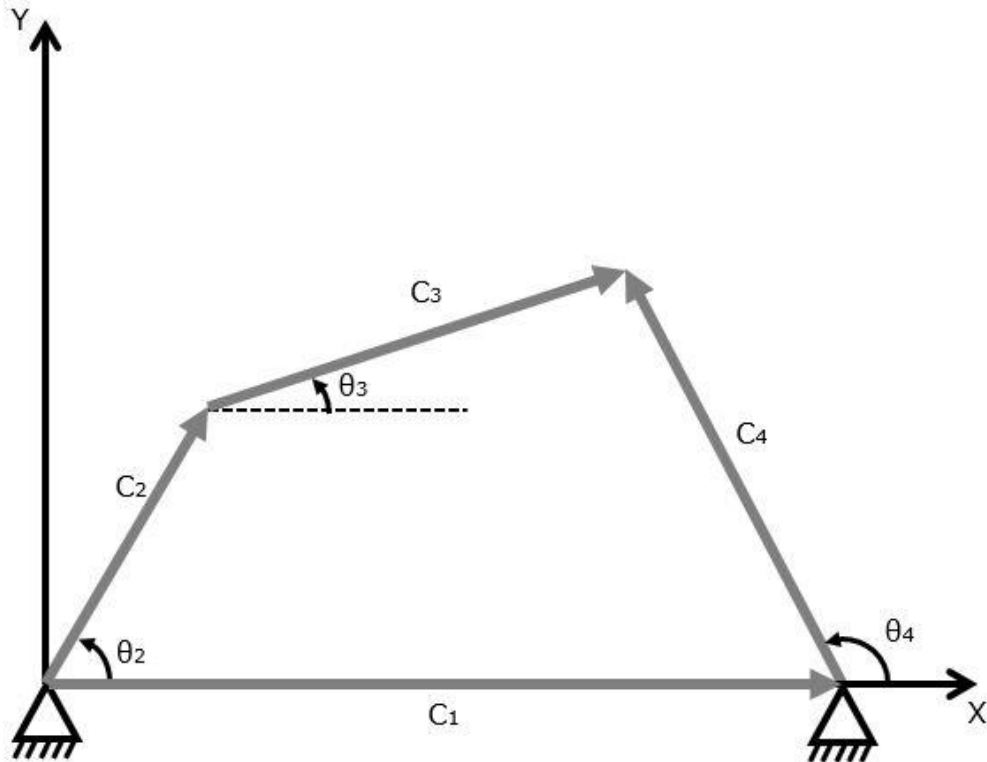


Figura 6 - Análise vetorial do exemplo de mecanismo de quatro barras.

Fonte: Autoria própria.

Para que a manipulação algébrica do problema seja mais simplificada, cada um dos vetores deverá ser decomposto em duas componentes relativas ao sistema de coordenadas global adotado, resultando assim em uma componente na direção do eixo X (como, por exemplo,  $C_{2x} = C_2 \cos \theta_2$ ), e uma na direção do eixo Y (no mesmo caso,  $C_{2y} = C_2 \sin \theta_2$ ). O somatório dessas componentes nas direções X e Y resultarão então nas equações de posição que descreverão o movimento completo da cadeia cinemática. Portanto, para este exemplo, as duas equações que definem essas posições serão os somatórios apresentados pelas equações (6) e (7):

Somatório das componentes em X:

$$f_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4) = C_1 - C_2 \cos \theta_2 - C_3 \cos \theta_3 + C_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (6)$$

Somatório das componentes em Y:

$$f_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4) = C_2 \sin \theta_2 + C_3 \sin \theta_3 - C_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (7)$$

Tem-se então duas equações que estão em função dos ângulos de inclinação de cada um dos elementos do mecanismo.  $\theta_2$ , a variável de entrada, deverá ter sido



previamente informada como dado de entrada do problema. O cálculo das variáveis secundárias é feito pela solução do sistema de duas equações não lineares, equações 6 e 7.

Um dos métodos de solução é o método de Newton-Raphson, que tem como objetivo aproximar o resultado após um palpite inicial ter sido escolhido para resolver o sistema de equações não lineares simultâneas. O método repete seu processo iterativo enquanto não atingir um valor de convergência que atenda ao nível de confiabilidade exigido pelo projeto, dependendo, portanto, de que o palpite de entrada esteja próximo do intervalo que contém a solução para uma maior eficácia na solução.

Ao ser encerrada a determinação de todos os parâmetros relativos ao estudo de posições, se torna possível obter as equações de velocidade, com a derivação das equações de posição em relação ao tempo, e subsequentemente as equações de aceleração do mecanismo, ao derivar as equações de velocidade em relação ao tempo. As equações (8a) e (8b) e as equações (9a) e (9b) apresentam as velocidades e acelerações do mecanismo em análise, respectivamente.

$$C_2\dot{\theta}_2\text{sen}\theta_2 + C_3\dot{\theta}_3\text{sen}\theta_3 - C_4\dot{\theta}_4\text{sen}\theta_4 = 0 \quad (8a)$$

$$-C_2\dot{\theta}_2\text{cos}\theta_2 - C_3\dot{\theta}_3\text{cos}\theta_3 + C_4\dot{\theta}_4\text{cos}\theta_4 = 0 \quad (8b)$$

$$C_2\ddot{\theta}_2\text{sen}\theta_2 + C_2\dot{\theta}_2^2\text{cos}\theta_2 + C_3\ddot{\theta}_3\text{sen}\theta_3 + C_3\dot{\theta}_3^2\text{cos}\theta_3 - C_4\ddot{\theta}_4\text{sen}\theta_4 - C_4\dot{\theta}_4^2\text{cos}\theta_4 = 0 \quad (9a)$$

$$-C_2\ddot{\theta}_2\text{cos}\theta_2 + C_2\dot{\theta}_2^2\text{sen}\theta_2 - C_3\ddot{\theta}_3\text{cos}\theta_3 + C_3\dot{\theta}_3^2\text{sen}\theta_3 + C_4\ddot{\theta}_4\text{cos}\theta_4 - C_4\dot{\theta}_4^2\text{sen}\theta_4 = 0 \quad (9b)$$

Outra forma muito comum de exibir tais equações é a matricial, isolando as variáveis secundárias para obter as velocidades secundárias e acelerações secundárias, conforme mostrado nas equações (10) e (11), respectivamente.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_3\text{sen}\theta_3 & C_4\text{sen}\theta_4 \\ C_3\text{cos}\theta_3 & -C_4\text{cos}\theta_4 \end{bmatrix}^{-1} C_2\dot{\theta}_2 \begin{Bmatrix} \text{sen}\theta_2 \\ -\text{cos}\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -C_3 \text{sen}\theta_3 & C_4 \text{sen}\theta_4 \\ C_3 \text{cos}\theta_3 & -C_4 \text{cos}\theta_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} C_2 \ddot{\theta}_2 \text{sen}\theta_2 + C_2 \dot{\theta}_2^2 \text{cos}\theta_2 + C_3 \dot{\theta}_3^2 \text{cos}\theta_3 - C_4 \dot{\theta}_4^2 \text{cos}\theta_4 \\ -C_2 \ddot{\theta}_2 \text{cos}\theta_2 + C_2 \dot{\theta}_2^2 \text{sen}\theta_2 + C_3 \dot{\theta}_3^2 \text{sen}\theta_3 - C_4 \dot{\theta}_4^2 \text{sen}\theta_4 \end{Bmatrix} \\
& \hspace{15em} (11)
\end{aligned}$$

Nas equações (10) e (11) é possível notar que a matriz de coeficientes das incógnitas é a mesma. Essa matriz de coeficientes também é a matriz jacobiana (derivadas parciais de primeira ordem das equações 6 e 7 em relação às variáveis dependentes  $\theta_3$  e  $\theta_4$ ). Essa matriz é encontrada tanto na equação de velocidade quanto na de aceleração. Se a matriz não for igual para as equações de velocidade e de aceleração identifica-se um problema nas etapas do estudo desenvolvido. É importante também que essa matriz seja inversível durante todo o movimento do mecanismo. Caso o cálculo de seu determinante resultar em zero, verifica-se que a cadeia cinemática encontra-se em um ponto de singularidade do movimento, necessitando assim de um tratamento especial.

Após determinadas todas as posições, velocidades e acelerações que definem a cadeia cinemática estudada como um todo, é necessário definir os procedimentos para a análise de um ponto de interesse no sistema. Essa análise será a última etapa da análise cinemática do sistema e é realizada com o intuito de verificar velocidades e acelerações em pontos críticos do arranjo, facilitando futuramente o cálculo das forças encontradas nesses pontos.

A Figura 7 mostra o mesmo exemplo aplicado anteriormente, porém dessa vez com o elo  $C_3$  prolongado de maneira a encontrarmos o ponto de interesse  $P$  do mecanismo. Dessa vez, será também necessária a determinação de um sistema de coordenadas locais  $(U, V)$  para a descrição do movimento. Assume-se que esse sistema local de coordenadas se movimenta com o mecanismo, logo as coordenadas locais do ponto de interesse têm valor constante. Assim, têm-se as coordenadas do ponto  $P$  em relação ao sistema local como  $U_P$  e  $V_P$ , sendo para este caso  $V_P=0$ ; e em relação ao sistema global como  $X_P$  e  $Y_P$ , conforme apresentado na Figura 7.

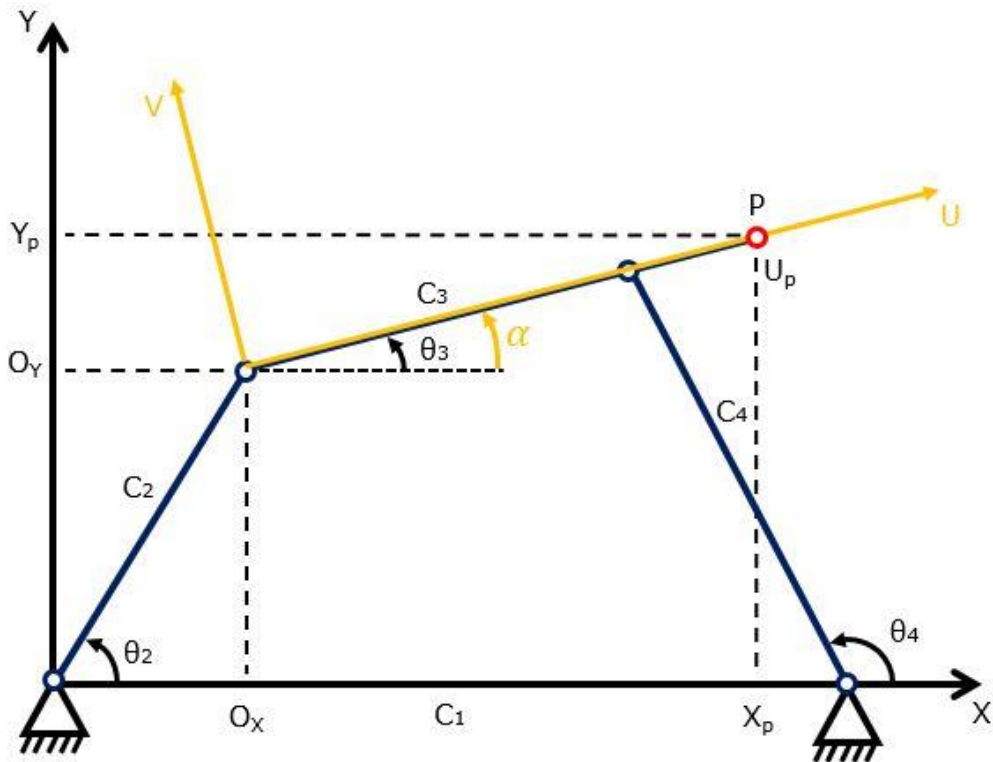


Figura 7 - Análise para um ponto de interesse no mecanismo de quatro barras.  
Fonte: Autoria própria.

Como a origem do sistema de coordenadas local não coincide com a origem do sistema global, define-se também as coordenadas  $O_X$  e  $O_Y$ , que apontam a posição da origem do sistema local em relação ao global. Com tais parâmetros definidos, será possível encontrar as equações de posição do ponto de interesse pela equação (12).

$$\begin{Bmatrix} X_P \\ Y_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} O_X \\ O_Y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_P \\ V_P \end{Bmatrix} \quad (12)$$

A matriz de senos e cossenos também é conhecida como matriz de rotação. Ela é responsável por rotacionar um vetor em coordenadas cartesianas sobre a origem em  $\alpha$  graus, porém sem modificar a sua magnitude. Se a rotação do sistema local for feita no sentido anti-horário,  $\alpha$  assumirá valores positivos; caso contrário,  $\alpha$  terá valores negativos.

Uma vez encontradas as posições para o ponto, serão utilizadas as mesmas etapas de derivação das funções em relação ao tempo para a obtenção das velocidades e das acelerações. Caso seja necessário encontrar a magnitude da velocidade ou da aceleração naquele ponto, deverão apenas ser calculados os módulos de cada vetor utilizando as componentes em X e em Y.

### 2.3 Análise cinética

Ao término da análise cinemática estão definidos todos os parâmetros relacionados ao movimento do mecanismo de maneira a atender ao perfil de deslocamento desejado previamente. Resta agora verificar se esse sistema suportará mecanicamente todas as acelerações e esforços aos quais está submetido.

É para esse propósito que se faz o uso da análise cinética, podendo ser aplicada através de vários métodos para encontrar as forças e torques, sejam eles os resultantes de um sistema cinemático ou até mesmo os requeridos pelo sistema. Será o foco de estudo neste trabalho a utilização do método de solução Newtoniana, sendo aquele que fornece mais informações sobre as forças internas do mecanismo ao aplicar apenas as leis de Newton em seu desenvolvimento (NORTON, 2010, p. 565).

Com esse princípio, nota-se que apenas aplicar o somatório de todas as forças e torques do sistema será suficiente para representar o estado do mecanismo. Lembrando que o caso estudado se refere a um mecanismo planar, verifica-se que todos os torques serão aplicados no eixo Z, sendo este perpendicular ao plano XY em que o sistema atua; e todas as forças serão decompostas em componentes dos eixos X e Y, gerando assim as três equações escalares que definirão um elo independente no plano. Essas três equações são apresentadas nas equações (13a), (13b) e (13c).

$$\sum F_x = ma_x \quad (13a)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad (13b)$$

$$\sum T = I_G \alpha \quad (13c)$$

Onde:

$F_x$  e  $F_y$  = Componentes da força em X e em Y;

$T$  = Torque aplicado;

$m$  = Massa do corpo;

$a_x$  e  $a_y$  = Componentes da aceleração em X e em Y;

$I_G$  = Momento de Inércia de massa em relação ao CG;

$\alpha$  = Aceleração angular.

O que isso quer dizer é que, independentemente do número de elos existentes no sistema em análise, deverão ser consideradas três equações para cada um dos membros, se tornando, portanto, um problema de sistema de equações que será resolvido matricialmente. Em relação à ação da gravidade, esta só será considerada caso a massa do mecanismo seja muito elevada ou suas acelerações tenham uma magnitude similar à da gravidade; caso contrário, ela será desprezada.

Como a obtenção das equações ocorre da mesma maneira para qualquer um dos elos escolhidos para estudo, basta replicar o procedimento de cálculo para cada membro no intuito de montar o sistema de equações que definirá as forças e torques atuantes no mecanismo.

Além do sistema de coordenadas global (SCG), dois referenciais que deverão ser considerados ao longo da análise devem ser aqui definidos. O primeiro será o sistema de coordenadas local e rotacionável (SCLR), sendo composto dos eixos  $x'$  e  $y'$ , com sua origem localizada na junta do elo e seu eixo  $x'$  colinear à linha de centros entre as juntas do elemento. Será a partir desse sistema que um vetor posição irá definir a posição do centro de gravidade (no caso,  $CG_2$ ) do elo que estiver sendo estudado. Sua aplicação pode ser compreendida observando-se a Figura 8.

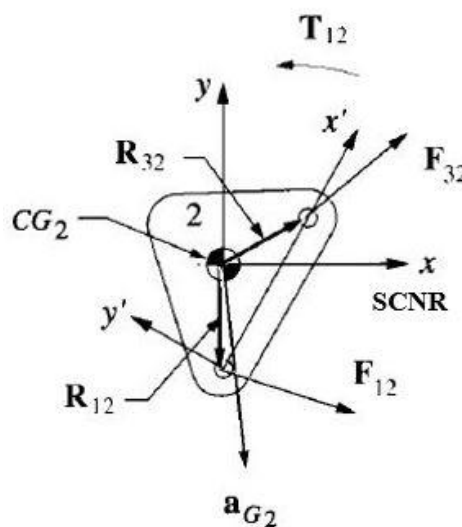


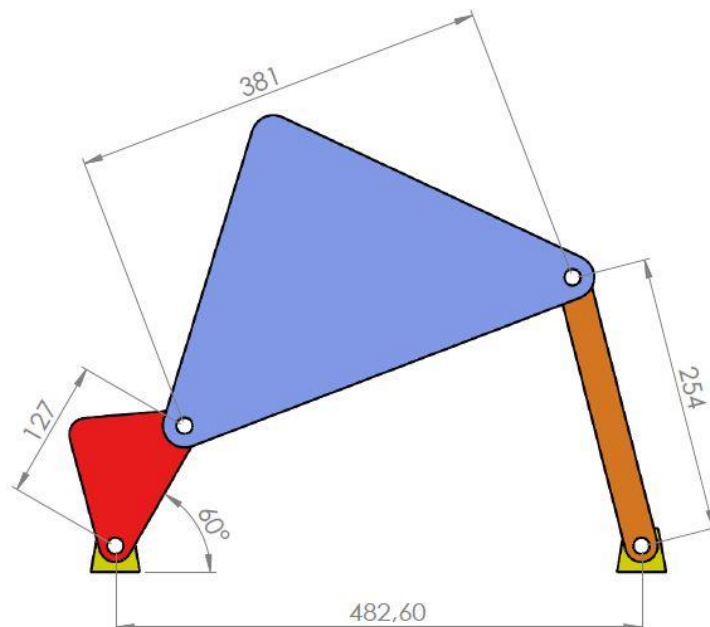
Figura 8 - Aplicação de sistemas de eixos móveis em elo binário.

Fonte: Norton (1999, p. 532).

Já o outro referencial a ser definido que também é exibido na Figura 8 é o sistema de eixos local e móvel, porém não rotacionável (SCNR). Ele será composto dos eixos x e y, criado através de uma translação do sistema de coordenadas global com sua origem coincidente com o centro de gravidade do elemento, e servirá como referencial para todos os parâmetros dinâmicos e para a força em cada elo.

Sendo assim, serão referenciados ao SCNR, conforme mostrado na Figura 8, os seguintes parâmetros: a aceleração linear do CG do elo 2 ( $a_{G2}$ ); o torque de acionamento do elo ( $T_{12}$ ); a força de atuação do elo 1 no elo 2 ( $F_{12}$ ) e a de atuação do elo 3 no elo 2 ( $F_{32}$ ); e, por fim, os vetores de posição  $R_{12}$  e  $R_{32}$ , que descrevem em relação ao CG as localizações das forças  $F_{12}$  e  $F_{32}$ , respectivamente. Os dois sistemas adicionais de coordenadas têm por objetivo padronizar a análise de maneira a reduzir a chance de erros de cálculo.

Uma vez que a Figura 8 faz parte do mecanismo de quatro barras básico que foi estudado com maior profundidade a partir da seção 3.1 deste trabalho, foi feito o uso do elo 2 exibido na figura juntamente com os demais elementos do problema para descrição da análise dinâmica. A reprodução do modelo realizada em SolidWorks® pode ser observada na Figura 9.



**Figura 9 - Reprodução no programa SolidWorks® do mecanismo de quatro barras genérico estudado.**

**Fonte: Autoria própria.**

Portanto, desenvolve-se para o elemento 2 as equações (14a), (14b) e (14c) de acordo com a solução Newtoniana.

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G2x} \quad (14a)$$

$$F_{12y} + F_{32y} = m_2 a_{G2y} \quad (14b)$$

$$T_{12} + (R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + (R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) = I_{G2}\ddot{\theta}_2 \quad (14c)$$

Tem-se  $m_2$  como a massa do elo e  $I_{G2}$  como o momento de inércia de massa do mesmo. Percebe-se ao longo do desenvolvimento das equações que a solução do sistema não seria possível caso todas as forças atuantes nos elementos fossem adicionadas como incógnitas do sistema, uma vez que haverá apenas nove equações para solucionar um sistema com o total de treze incógnitas (as componentes em x e y para cada uma das seis forças e o torque  $T_{12}$ ).

Faz-se, portanto, a manipulação das variáveis de acordo com as forças de ação e reação entre os elos. Para o caso do elo 3, ao realizar a substituição através da igualdade  $F_{23} = -F_{32}$ , obtém-se as equações (15a), (15b) e (15c) para o elemento.

$$F_{43x} - F_{32x} + F_{Px} = m_3 a_{G3x} \quad (15a)$$

$$F_{43y} - F_{32y} + F_{Py} = m_3 a_{G3y} \quad (15b)$$

$$(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}) - (R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}) + (R_{Px}F_{Py} - R_{Py}F_{Px}) = I_{G3}\ddot{\theta}_3 \quad (15c)$$

onde  $m_3$  é a massa do elo,  $I_{G3}$  é o momento de inércia de massa do mesmo e  $F_p$  é uma força externa conhecida aplicada ao elemento. Para o elo 4, a substituição necessária será feita através da igualdade  $F_{43} = -F_{34}$ . O sistema poderá então ser resolvido, considerando que quatro incógnitas foram removidas. As equações (16a), (16b) e (16c) serão então formuladas.

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{G4x} \quad (16a)$$

$$F_{14y} - F_{43y} = m_4 a_{G4y} \quad (16b)$$

$$T_4 + (R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}) - (R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}) = I_{G4}\ddot{\theta}_4 \quad (16c)$$

onde  $m_4$  é a massa do elo,  $I_{G4}$  é o momento de inércia de massa do mesmo e  $T_4$  é um torque externo conhecido aplicado ao elemento. Uma vez relacionadas todas as equações para o mecanismo, isolam-se as incógnitas do lado esquerdo da equação

para dar prosseguimento através da solução matricial do problema, conforme representado na equação (17).

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 F_{12x} \\
 F_{12y} \\
 F_{32x} \\
 F_{32y} \\
 F_{43x} \\
 F_{43y} \\
 F_{14x} \\
 F_{14y} \\
 T_{12}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_2 a_{G2x} \\
 m_2 a_{G2y} \\
 I_{G2} \ddot{\theta}_2 \\
 m_3 a_{G3x} - F_{P_x} \\
 m_3 a_{G3y} - F_{P_y} \\
 I_{G3} \ddot{\theta}_3 - R_{P_x} F_{P_y} + R_{P_y} F_{P_x} \\
 m_4 a_{G4x} \\
 m_4 a_{G4y} \\
 I_{G4} \ddot{\theta}_4 - T_4
 \end{bmatrix}
 \quad (17)$$

Para auxiliar na solução analítica tanto da análise cinemática quanto na cinética, fez-se o uso ao longo deste trabalho do programa Matlab®. Além desse *software* já ter sido utilizado ao longo de algumas disciplinas da graduação, sua interface simples e intuitiva contribui muito para uma maior facilidade na solução de problemas de características similares às abordadas neste trabalho.



## 2.4 Programas SolidWorks® e Ansys®

Com o objetivo de enriquecer as análises de projetos que antes eram muito prejudicadas pelas limitações de métodos ou pela complexidade de componentes, programas como o SolidWorks® surgiram favorecidos pelos avanços tecnológicos na área de computação.

Fazendo parte da família de sistemas de desenho auxiliado por computador (CAD), este programa permite a reprodução de peças e montagens em 2D ou 3D, facilitando muito a análise de equipamentos com grande diversidade de geometrias e possibilitando reproduções de modelos muito similares a componentes reais.

Teve-se a preferência pelo uso deste sistema ao longo do trabalho pelo seu ambiente simples e intuitivo oferecido, além do fato do programa fazer parte da ementa lecionada na disciplina de Desenho de Máquinas II e estar disponível para o uso pelos alunos do curso.

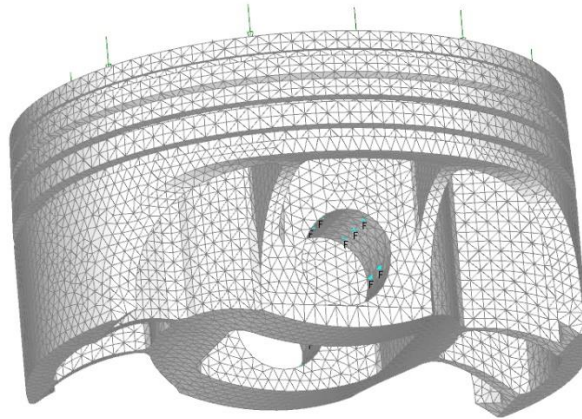
Apesar do SolidWorks® estar mais voltado para as ações de desenhos e montagens mecânicas, as evoluções de versão do programa permitiram estudos de projetos mais completos através de módulos de simulação que permitem análises dinâmicas, estudos estruturais e ensaios de fadiga. O módulo de estudo do movimento foi abordado nesta análise e teve alguns de seus resultados validados através da solução analítica desenvolvida no programa Matlab®.

Outro item que promove o uso desse *software* é a sua fácil integração com sistemas da engenharia auxiliada por computador (CAE), que engloba os sistemas CAD como um de seus subgrupos.

O programa do tipo CAE utilizado nesta análise é o Ansys®, devido à grande interatividade com o SolidWorks® para importação de geometrias e pela existência de seus módulos de dinâmica rígida e análise estrutural transiente, métodos utilizados com grande simplicidade e riqueza de detalhes para problemas como a análise cinética de mecanismos.

Ambos os módulos fazem uso da análise por elementos finitos (FEA), método que divide as geometrias analisadas em menores subdomínios chamados elementos. Para cada um dos nós que delimita esses elementos são calculados os deslocamentos e forças aplicados, propagando assim o resultado das ações das

forças ao longo de toda a geometria de estudo. Um exemplo para a construção desse tipo de malha está representado na Figura 10.



**Figura 10 - Exemplo de malha de elementos finitos no cabeçote de um pistão.  
Fonte: Siemens (2013).**

O número de elementos presentes no modelo deve ser definido de forma a se obter uma análise confiável. Isso é geralmente definido por uma análise de convergência, na qual o número de elementos é aumentado (refinamento da malha) até que a resposta da análise se estabilize. Em contrapartida, o aumento desse número de elementos acarretará em um maior tempo computacional para se atingir a solução, uma vez que mais cálculos e maiores matrizes de rigidez deverão ser solucionadas, o que eleva a exigência por recursos computacionais.

Para o módulo de dinâmica rígida do Ansys®, um ambiente de análise mais simples é apresentado para usuário, uma vez que ele não possui como foco o estudo da ação das forças ao longo de cada um dos elementos das peças que compõem o sistema, mas pretende sim apresentar as acelerações, forças e momentos resultantes nas juntas do sistema devido ao comportamento dinâmico da montagem ou da peça. Essa abordagem consegue consequentemente oferecer soluções mais rápidas e gerais por evitar o peso computacional gerado pelas malhas do problema.

De maneira a completar esta análise, faz-se uso do módulo de análise estrutural transiente para, agora sim, identificar os efeitos da propagação de forças nos nós de cada componente. Neste módulo, portanto, torna-se necessário editar a malha de maneira a equilibrar a qualidade dos resultados e o tempo computacional demandado.

### 3 METODOLOGIA

Com o objetivo de desenvolver uma metodologia mais completa para a análise dinâmica de mecanismo, optou-se por fazer um estudo de caso para validação desta abordagem. Fazendo o uso do programa computacional Matlab<sup>®</sup> propõe-se realizar todas as etapas das análises cinemática e cinética, já citadas ao longo deste texto, de maneira a solucionar um problema de mecanismo planar de quatro barras proposto no livro texto de Norton (2010).

Os resultados cinemáticos (posição, velocidade e aceleração) e cinéticos (forças e torque) obtidos analiticamente com auxílio do Matlab<sup>®</sup> serão comparados com os resultados adquiridos no módulo de dinâmica rígida do Ansys<sup>®</sup>. Isso valida o modelo numérico e traz maior entendimento do problema. O modelo é então importado para o módulo de análise estrutural transiente do Ansys<sup>®</sup>, onde se avança então para a análise de tensão nos elos.

Uma vez testada e consolidada, foi utilizada a mesma metodologia para a avaliação de uma aplicação em equipamentos no cotidiano e que fossem similares ao tipo de mecanismo estudado. Justifica-se, portanto, o estudo de caso de um mecanismo de quatro barras uma vez que este representa um caso simples de sistema de apenas um grau de liberdade, sendo assim amplamente utilizado nas mais diversas soluções mecânicas e permitindo o uso da metodologia desenvolvida neste trabalho em uma ampla gama de equipamentos.

#### 3.1 Mecanismo de quatro barras genérico

Utilizando como referência o problema proposto na literatura de Norton (2010, p. 578), será possível realizar uma análise completa, desenvolvendo tanto o estudo cinemático quanto o estudo cinético em um único exemplo, mostrado na Figura 11 e na Figura 12.

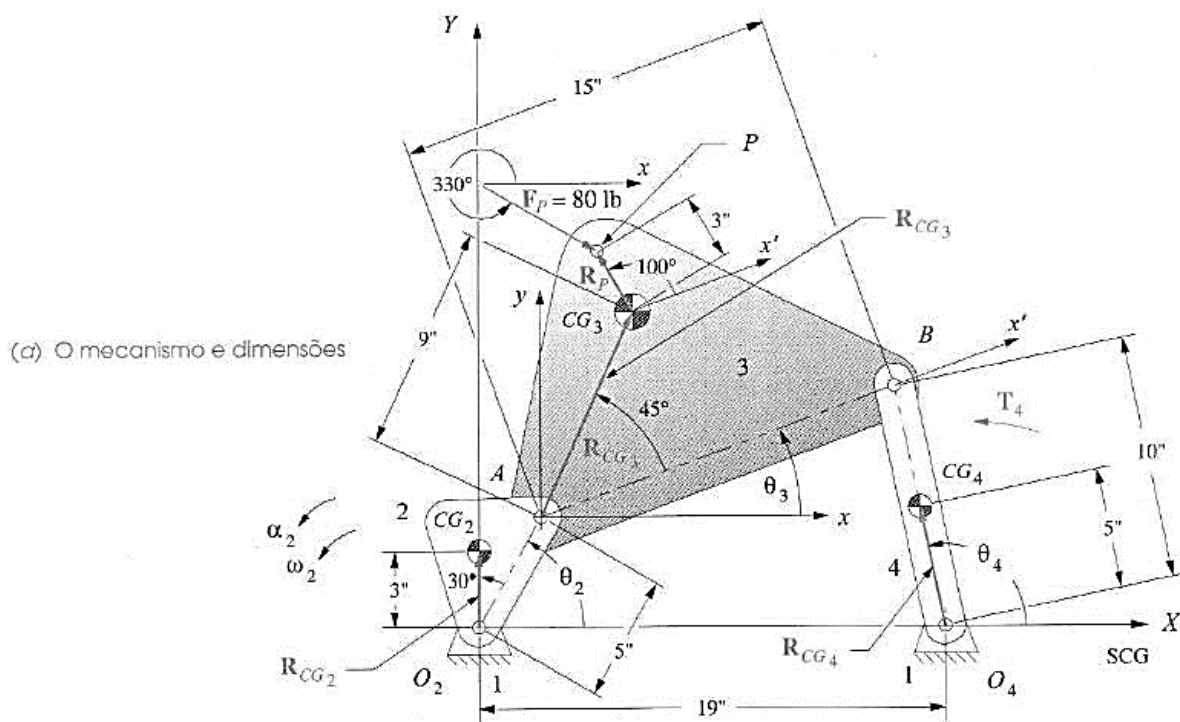


Figura 11 - Problema proposto de exercício de mecanismo planar de quatro barras.  
Fonte: Norton (2010, p. 576).

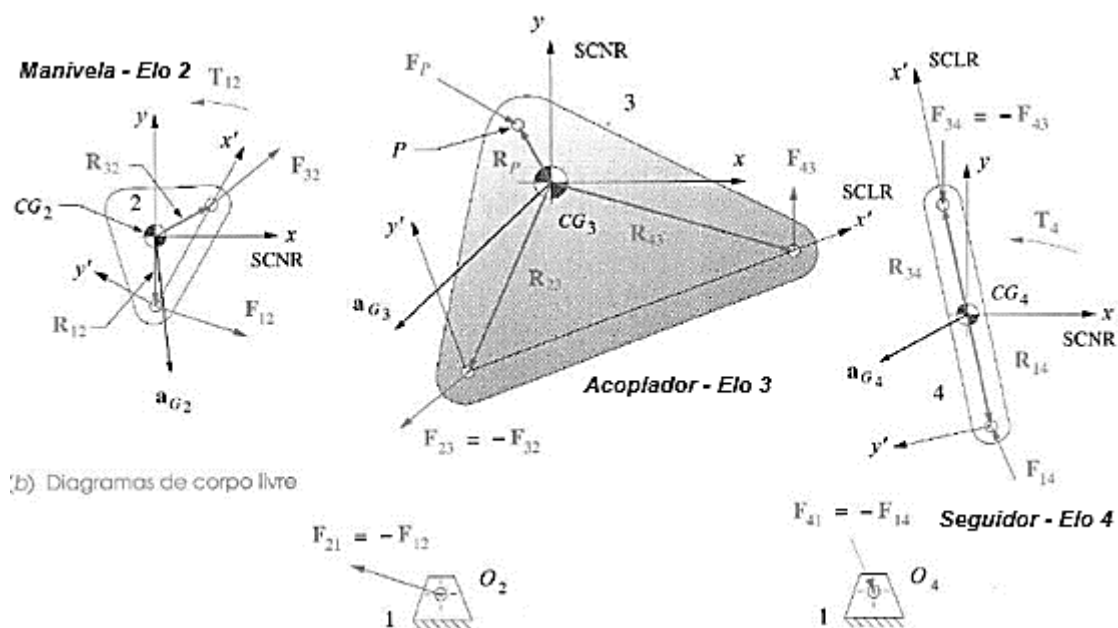


Figura 12 - Diagramas de corpo livre para o exemplo de mecanismo de quatro barras.  
Fonte: Norton (2010, p. 576).

Todas as dimensões de comprimentos, posições, localizações de centros de gravidade, aceleração linear dos centros de gravidade, bem como os diagramas de

corpo livre de cada um dos elos do sistema juntamente com os sistemas de coordenadas aplicados estão representados.

Como parâmetros de entrada para o problema dinâmico, tem-se que: existe um torque externo aplicado no elo 4 de 13,558 Nm, em relação ao sistema de coordenadas globais; e existe uma força externa de 355,84 N a 330° que atua sobre o elo 3, também no sistema de coordenadas globais, aplicada no ponto P localizado a 76,2 mm e a 100° do centro de gravidade do elo 3 em relação ao sistema de eixos móvel e rotacionável.

Os resultados da análise cinemática para uma posição específica ( $\theta_2 = 60^\circ$ ), segundo Norton (2010), são apresentados na Tabela 1. Os resultados da análise dinâmica, também segundo Norton (2010), são apresentados na Tabela 2.

**Tabela 1 - Resultados da análise cinemática para inclinação do elo de entrada de 60°.**

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Elo 1 (Terra)	Elo 2 (Manivela)	Elo 3 (Acoplador)	Elo 4 (Seguidor)
Comprimento	C	mm	482,6	127	381	254
Massa	m	kg		0,68	3,493	2,631
Distância do CG p/ SCLR		mm		76,2	228,6	127
Ângulo do CG p/ SCLR		graus (°)		30	45	0
Momento de Inércia de Massa	$I_{CG}$	kg.m <sup>2</sup>		0,006	0,011	0,09
Ângulo de inclinação	$\theta$	graus (°)		60	<b>20,92</b>	<b>104,41</b>
Velocidade angular	$\omega$	rad/s		25	<b>-5,877</b>	<b>7,933</b>
Aceleração angular	$\alpha$	rad/s <sup>2</sup>		-40	<b>120,609</b>	<b>276,423</b>
Aceleração do CG	$a_{CG}$	m/s <sup>2</sup>		47,722 @ -86,34°	<b>92,602 @</b> <b>226,51°</b>	<b>35,987 @</b> <b>207,24°</b>

Fonte: Autoria própria.

**Tabela 2 - Resultados da análise dinâmica para inclinação do elo de entrada de 60°.**

Atuação entre elos	Símbolo	Torque (Nm)	Força (N)	Ângulo de atuação
Elo 1 no elo 2	$T_{12} / F_{12}$	33	685	218,72°
Elo 1 no elo 4	$T_{14} / F_{14}$		305	104,80°
Elo 3 no elo 2	$T_{32} / F_{32}$		667	36,44°
Elo 4 no elo 3	$T_{43} / F_{43}$		339	88,98°

Fonte: Autoria própria.

Para a Tabela 2, as forças estão apresentadas em coordenadas polares e a variável  $F_{12}$  significa a força do elo 1 atuando no elo 2, de forma análoga para  $F_{14}$ ,  $F_{32}$  e  $F_{43}$ .

Esses resultados serão usados como referência para o desenvolvimento de um programa em Matlab<sup>®</sup> que calcule todos os parâmetros cinemáticos e cinéticos do mecanismo para todas as posições, ou seja,  $\theta_2$  variando de 0 a 360°. Tal programa gerará então os resultados analíticos, que deverão ser comparados com os resultados numéricos gerados por elementos finitos.

A validação do modelo genérico ocorrerá em duas etapas, sendo a primeira realizada através da comparação entre os resultados obtidos no programa Matlab<sup>®</sup> e os propostos no livro texto para a posição do elo 2 a 60°. Na segunda etapa, após a modelagem do mecanismo em SolidWorks<sup>®</sup>, dados como a massa e o momento de inércia de massa obtidos do componente através do *software* serão iterados como parâmetros de entrada do Matlab<sup>®</sup>. Dessa forma Matlab<sup>®</sup> e Ansys<sup>®</sup> calculam o mesmo problema e devem apresentar mesmo resultado, uma vez que a geometria modelada em SolidWorks<sup>®</sup> será importada para o Ansys<sup>®</sup>. Os valores encontrados pelo SolidWorks podem ser observados na Tabela 3.

**Tabela 3 - Propriedades de massa e de inércia para o modelo genérico em SolidWorks<sup>®</sup>.**

Elos	Massa (kg)	Momento de Inércia de Massa (kg.m <sup>2</sup> )
Elo 2 - Manivela	0,157	2,97 E-4
Elo 3 - Acoplador	1,059	1,47 E-2
Elo 4 - Seguidor	0,126	7,65 E-4

**Fonte: Autoria própria.**

Como há uma aceleração angular, a velocidade não é constante e sua variação deve ser calculada. Como essa velocidade terá como referência o ângulo de inclinação e não o tempo, torna-se mais vantajoso utilizar a Equação de Torricelli para o Movimento Uniformemente Variado, apresentada na equação (18).

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_{20}^2 + 2\alpha(\theta_2 - \theta_{20})} \quad (18)$$

onde  $\theta_2$  é a inclinação final da manivela,  $\theta_{20}$  é a inclinação inicial,  $\omega_{20}$  e  $\omega_2$  são as velocidades angulares inicial e final do elo, respectivamente; e, por fim,  $\alpha$  é a aceleração angular constante presente neste movimento. Sendo assim, a velocidade angular do elo 2 para a posição de  $\theta_2 = 0^\circ$  foi de  $\omega_2 = 26,62$  rad/s, e o

comportamento da velocidade angular ao longo de uma rotação completa da manivela pode ser observado na Figura 13.

Apresenta-se também a Figura 14 para se estabelecer a posição da manivela em  $\theta_2 = 0^\circ$  e evidenciar a referência de ângulos do mecanismo.

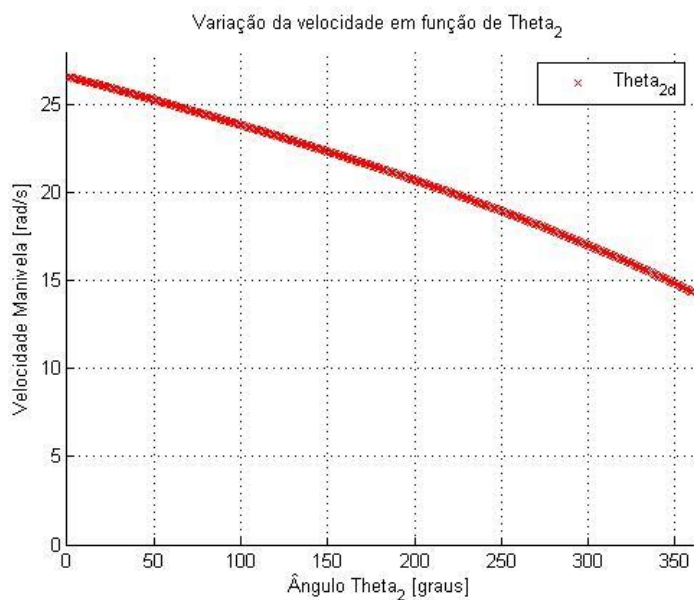


Figura 13 - Variação da velocidade angular ao longo de uma revolução completa do elo 2.  
Fonte: Autoria própria.

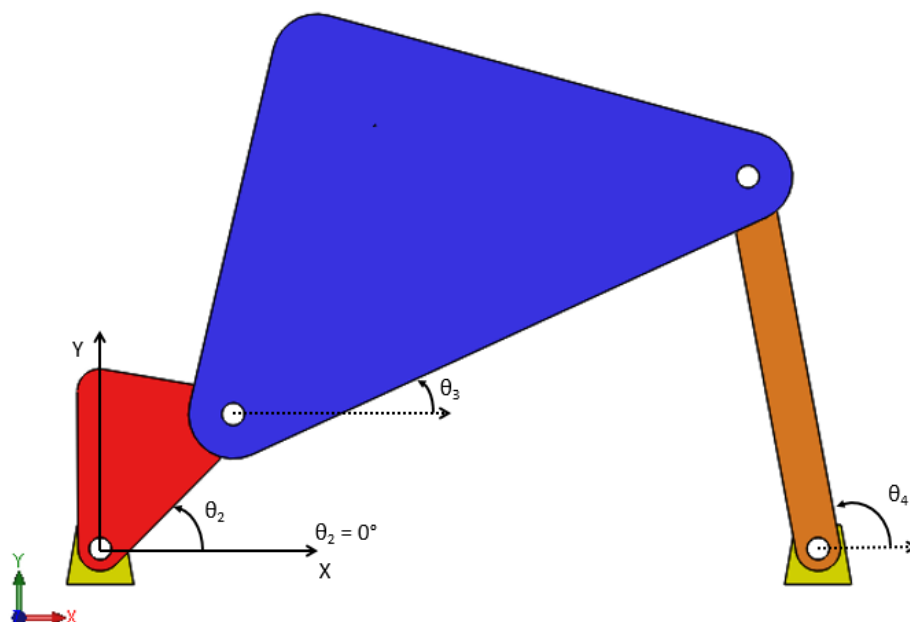
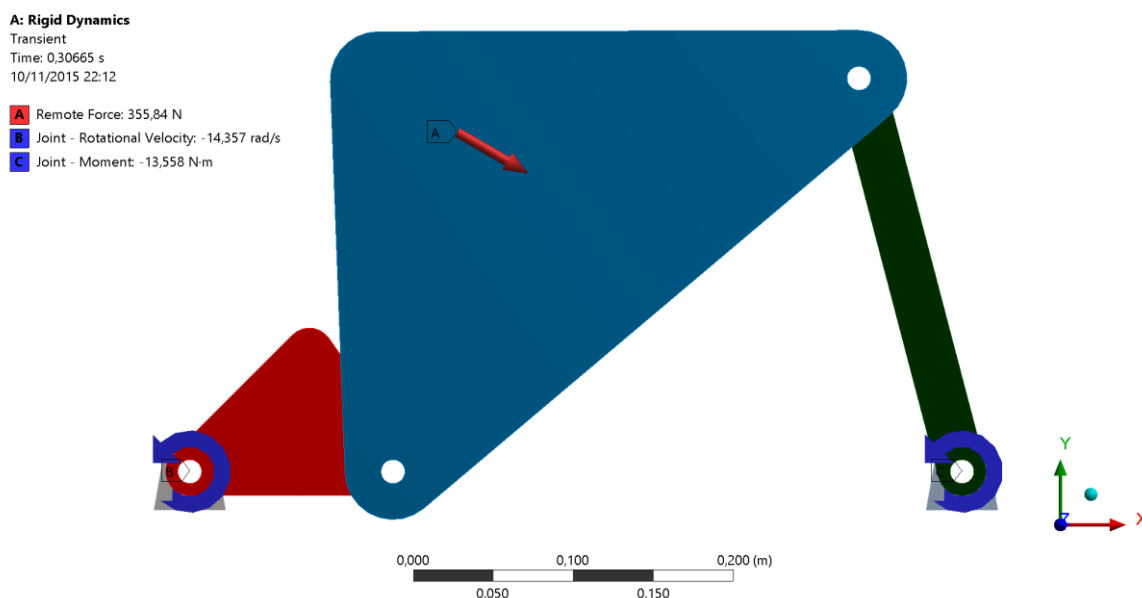


Figura 14 - Referências para os ângulos do mecanismo de quatro barras.  
Fonte: Autoria própria.

As soluções encontradas para os parâmetros de saída serão então comparadas com os comportamentos obtidos através das análises dinâmicas efetuadas em Ansys®.

Devem, portanto, ser determinados os parâmetros de comparação para as validações propostas, estando entre eles: as acelerações lineares do CG de cada elo, as forças resultantes nas juntas de revolução do sistema e o torque de acionamento presente no elo 2.

Representa-se na Figura 15 a disposição da aplicação de forças e parâmetros de entrada no modelo reproduzido no programa Ansys®.



**Figura 15 - Aplicação dos parâmetros de entrada em modelo do programa Ansys®.**  
**Fonte: Autoria própria.**

A análise em dinâmica rígida foi realizada para um intervalo de 0,3066 segundos, tempo necessário para a manivela completar uma revolução. Durante esse tempo, a força  $F_p$  terá suas componentes em X e Y sempre constantes e será aplicada no ponto A do elo 3 (em vermelho), respeitando as condições iniciais apresentadas no livro texto. A seta circular localizada no ponto B da figura (junta entre o elo 2 e sua fixação), representa a velocidade angular aplicada, e a seta na junta entre elo 4 e sua fixação representa o torque externo  $T_{14}$  atuante.

Uma vez validado o modelo numérico desse mecanismo de quatro barras genérico, foi desenvolvido então um modelo numérico de um mecanismo de quatro barras de aplicação real. A partir desse modelo numérico, o mecanismo pode ser



analisado quanto a forças e tensões atuantes, possibilitando verificar sub ou superdimensionamento ou até mesmo a proposição de configurações de elos mais eficientes.

Toda a metodologia foi elaborada com o objetivo de se obter um modelo numérico confiável de um mecanismo de quatro barras. O exemplo do livro texto valida os cálculos do Matlab® referentes ao modelo analítico. Por sua vez, o modelo analítico valida o modelo numérico.

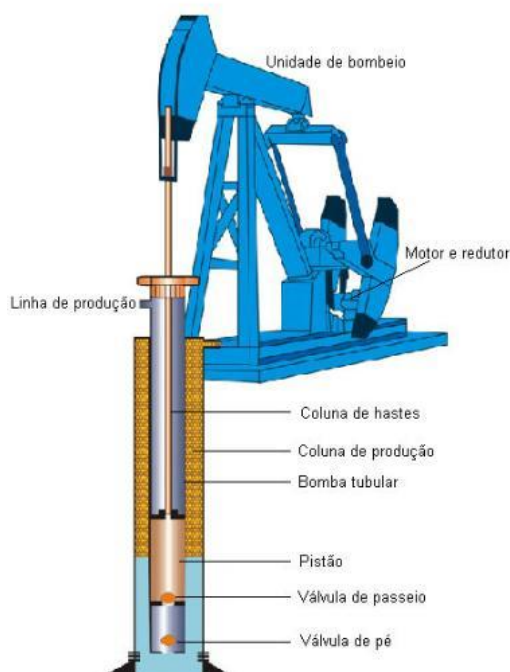
### **3.2 Caso de aplicação – Bomba de extração de petróleo**

Uma vez validado o modelo numérico de análise, torna-se possível uma avaliação de um caso real de maneira a aplicar a metodologia em situações de componentes com geometrias e configurações mais complexas.

Esta metodologia permite desenvolver um procedimento de análise completo e bem consolidado. Além disso, a extrapolação de um modelo numérico de um mecanismo de quatro barras genérico para mecanismo de quatro barras específico é uma tarefa simples, trazendo grande flexibilidade ao modelo sem denegrir sua confiabilidade.

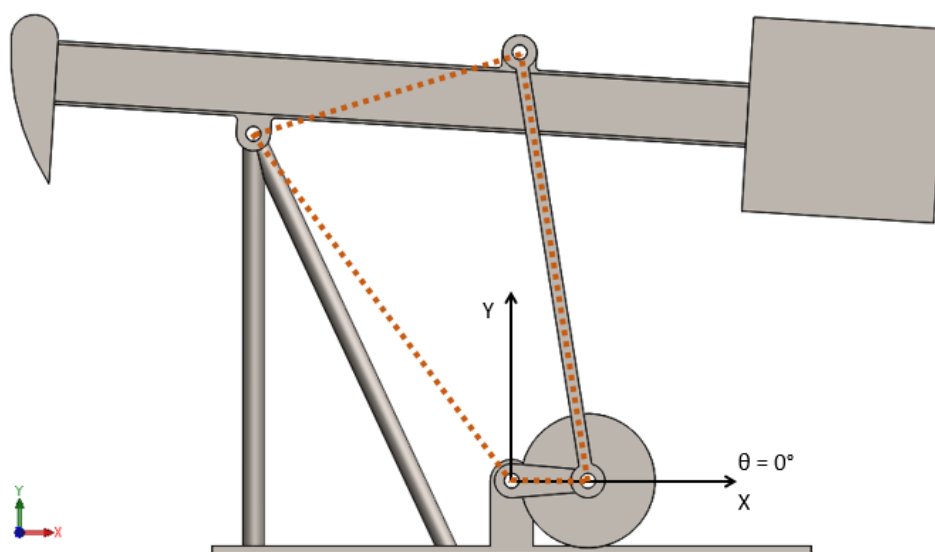
Sendo assim, foi escolhido para este trabalho o estudo para o caso de unidades de bombeio mecânico com hastes para poços de petróleo. O método de elevação por Bombeio Mecânico, segundo BARROS et al. (2013, p. 27), se trata do “primeiro método de elevação artificial que surgiu na indústria do petróleo e sua importância se reflete no número de instalações existentes, que correspondem a 80% dos poços produtores mundiais [...]”.

A fácil correlação dessa aplicação com o mecanismo de quatro barras estudado vem exatamente da simplicidade operacional do sistema, uma vez que tem-se uma atuação planar de uma manivela acionada por motor que provoca através de uma haste um movimento oscilatório no elo seguidor, conforme observado na Figura 16.



**Figura 16 – Unidade de bombeio mecânico com hastes para poços de petróleo.**  
**Fonte: Rossi (2003).**

Foram tomados como valores de referência para a geometria e para a atuação dinâmica do componente os dados descritos no problema 11-20 da literatura de Norton (2010, p. 610). Após a devida avaliação desses parâmetros, a geometria pôde ser reproduzida em SolidWorks® para futura análise no CAE, conforme a Figura 17.



**Figura 17 - Reprodução em SolidWorks® de unidade de bombeio mecânico de petróleo.**  
**Fonte: Autoria própria.**

O topo do elo oscilante deve ser projetado com o formato arredondado com o objetivo de o cabo flexível que está fixado a ele estar sempre posicionado sobre o cabeçote do poço. Desta maneira, a força atuante nesta extremidade assumirá dois valores distintos, um de 13211 N referente ao golpe de subida e outro de 10231 N para o golpe de descida. A manivela rotaciona a uma velocidade constante de 4 rpm e tem-se como comprimento efetivo dos elos 1, 2, 3 e 4 (ou seja, a distância efetiva entre juntas do elemento), os valores de 2024 mm, 356 mm, 2032 mm e 1302 mm, respectivamente. Para a análise foi adotado o aço estrutural ASTM A36, resultando nas propriedades conforme exibidas na Tabela 4.

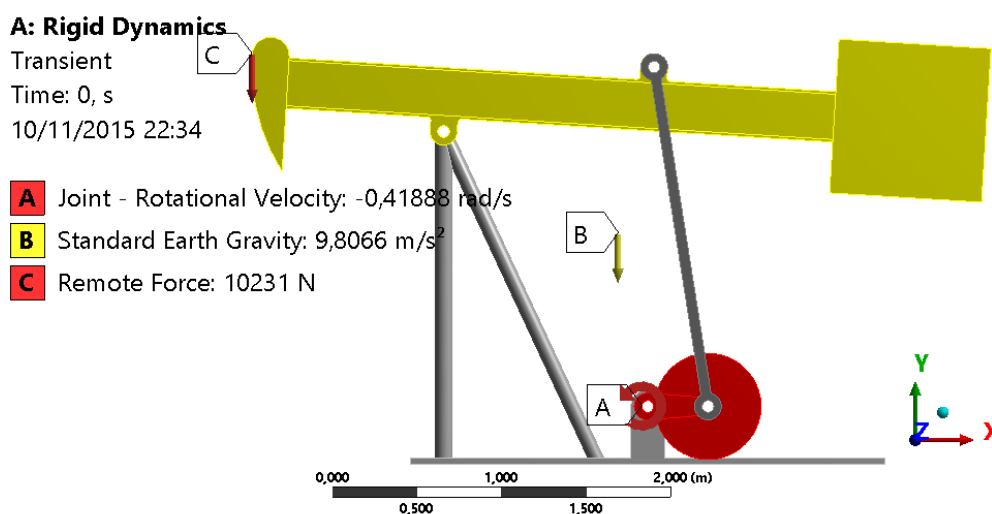
**Tabela 4 - Propriedades de massa e de inércia para o caso de aplicação em SolidWorks®.**

<b>Elos</b>	<b>Massa (kg)</b>	<b>Momento de Inércia de Massa (kg.m<sup>2</sup>)</b>
Elo 2 - Manivela	264,06	14,124
Elo 3 - Acoplador	48,97	22,523
Elo 4 - Seguidor	1226,44	1987,42

**Fonte: Autoria própria.**

Nota-se que para este problema, diferentemente do mecanismo genérico de quatro barras estudado que apresentava acelerações muito superiores à magnitude da aceleração da gravidade, a força peso deverá ser considerada. Esta será de grande influência nos cálculos de tensões devido à baixa velocidade de rotação presente na manivela e à robusta estrutura de construção do mecanismo, intensificada também pela presença de contrapesos.

A atuação das forças e acelerações às quais o equipamento está submetido foram reproduzidas no Ansys® e estão apresentadas na Figura 18. A simulação foi realizada para um período de 15 segundos, o que reproduz uma revolução completa do elo 2.



**Figura 18 - Parâmetros de entrada para análise da aplicação mecânica reproduzidos em Ansys®.**

**Fonte: Autoria própria.**

Conforme mencionado, a aceleração da gravidade está agora sendo considerada, indicada pela seta amarela no ponto B e com o sentido negativo da direção Y. As forças referentes ao golpe de subida e descida da bomba estão aplicadas no ponto C também no sentido negativo da direção Y. O último parâmetro atuante na junta entre a manivela e sua fixação é a velocidade angular constante com magnitude de 4 rpm (0,41888 rad/s).

Os resultados obtidos através da análise dinâmica irão oferecer importantes dados relacionados tanto ao comportamento do mecanismo como um todo sob a ação das forças geradas pelo movimento quanto à localização de pontos de maior fragilidade no sistema. Tais informações são de grande relevância quando tem-se como objetivo a busca pela maior eficiência em projetos.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Mecanismo de quatro barras genérico

Uma vez que o problema estiver modelado em Matlab®, será possível prosseguir nas etapas de avaliação para que, ao fim, tenha-se uma solução analítica confiável para a validação futura do modelo numérico.

Como primeira etapa desta análise, obteve-se a Tabela 5 e a Tabela 6 através da comparação entre os resultados apresentados no livro texto e no programa computacional. Na Tabela 5 identificam-se os parâmetros cinemáticos encontrados para o elo acoplador e para o elo seguidor (elos 3 e 4, respectivamente). Os ângulos de inclinação para tais elos possuem valores muito próximos ao comparar o programa com o exercício proposto, evidenciando a compatibilidade de cálculos dos dois modelos. Os demais dados de velocidades angulares, acelerações angulares e acelerações dos CGs dos elos também apresentam um erro menor que 1%, também sendo, portanto, validados.

**Tabela 5 - Comparação de parâmetros cinemáticos entre exemplo e Matlab para os elos 3 e 4.**

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Exemplo Elo 3	Matlab	Erro (%)	Exemplo Elo 4	Matlab	Erro (%)
Ângulo de inclinação	$\theta$	graus (°)	20,92	20,922	<b>0,01%</b>	104,41	104,406	<b>0,00%</b>
Velocidade angular	$\omega$	rad/s	-5,877	-5,869	<b>0,14%</b>	7,933	7,931	<b>0,03%</b>
Aceleração angular	$\alpha$	rad/s <sup>2</sup>	120,609	120,919	<b>0,26%</b>	276,423	276,299	<b>0,04%</b>
Aceleração do CG	$a_{CG}$	m/s <sup>2</sup>	92,602 @ 226,51°	92,614 @ 226,511°	<b>0,01%</b>	35,987 @ 207,24°	35,988 @ 207,23°	<b>0,00%</b>

**Fonte: Autoria própria.**

Já na Tabela 6 apresentam-se os parâmetros cinéticos dos estudos realizados. O torque atuante na junta entre o elo de acionamento e a fixação do sistema, também nomeado  $T_{12}$ , aponta uma diferença entre as soluções de aproximadamente 1%. Os demais dados identificados para as forças presentes nas juntas também convergem para a solução previamente apresentada. Considera-se que tais diferenças entre valores decorrem da consideração de casas decimais ou do procedimento de solução interna de cada *software*, fator que não foi de grande influência na modificação dos resultados, conforme apresentado.

A primeira etapa de validação está concluída e foi bem sucedida.

Tabela 6 - Comparação de parâmetros cinéticos entre exemplo e Matlab.

Parâmetro	Símbolo	Unidade	Exemplo	Matlab	Erro ( $\epsilon$ )
Torque Junta 1-2	T12	N.m	33	33,51	0,12%
Força Junta 1-2	F12	N	685 @ 218,72°	685,72 @ 218,71°	0,11%
Força Junta 3-2	F32	N	667 @ 36,44°	667,62 @ 36,42°	0,09%
Força Junta 4-3	F43	N	339 @ 88,98°	339,68 @ 88,92°	0,20%
Força Junta 1-4	F14	N	305 @ 104,8°	306,34 @ 104,71°	0,44%

Fonte: Autoria própria.

Prosseguindo com os estudos, dá-se início à segunda etapa de comparação através da reprodução da resolução em Matlab® para a rotação completa do elo de acionamento e da modelagem do mecanismo em SolidWorks® para posterior estudo dinâmico em Ansys®.

Um ponto ao qual é possível se dar atenção no intuito de garantir o deslocamento adequado na solução analítica do mecanismo é o monitoramento do determinante da matriz Jacobiana. Como esse determinante deve possuir valores diferentes de zero para garantir um deslocamento sem pontos de singularidade, obteve-se também a curva dos determinantes durante a revolução do elo 2. Esta curva comprova assim o movimento livre do sistema sem pontos de travamento, como pode ser observado na Figura 19.

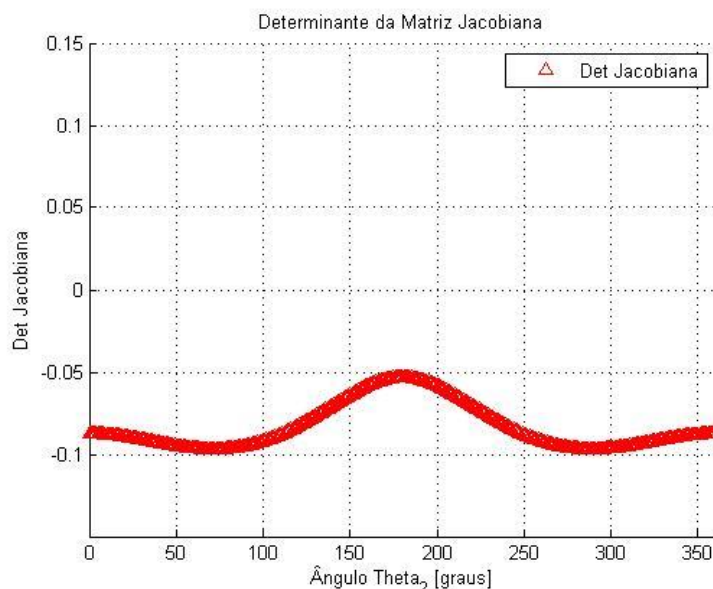
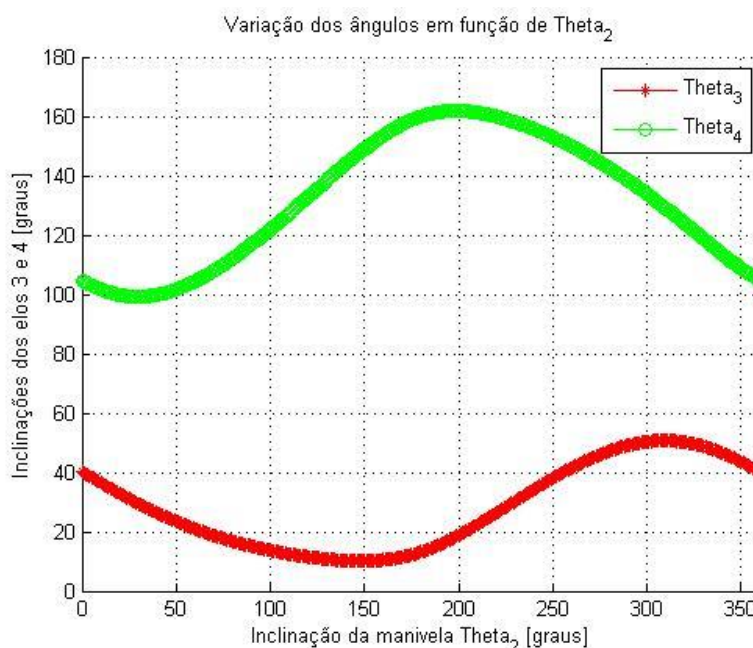


Figura 19 - Determinante da matriz Jacobiana durante a revolução do elo 2.

Fonte: Autoria própria.

Garantindo-se o livre deslocamento do sistema, é possível monitorar no próprio modelo em Matlab® o ângulo de inclinação de cada um dos elos em relação ao SCG. Os ângulos dos elos 3 e 4 em relação à variação da angulação do elo 2 estão relacionados na Figura 20. Tais inclinações poderão ser acompanhadas de uma maneira mais interativa ao longo da simulação no *software* CAE.



**Figura 20 - Variação dos ângulos dos elos 3 e 4 em função da inclinação do elo 2.**

**Fonte: Autoria própria.**

Como já mencionado neste texto, serão utilizados como parâmetros de comparação entre soluções as acelerações lineares dos CGs de cada elo, os torques presentes na junta entre manivela e fixação, também conhecido por  $T_{12}$ ; e as forças atuantes em cada uma das juntas de revolução do sistema.

Exibem-se, portanto, as acelerações lineares dos centros de gravidade de cada um dos elos na Figura 21 e na Figura 22, geradas pelos programas Matlab® e Ansys®, respectivamente. Os dados dinâmicos para o Ansys® foram obtidos através de seu módulo interno de dinâmica rígida. Nas figuras identifica-se um decréscimo linear da aceleração no CG do elo 2 devido à desaceleração constante apresentada como fator de entrada do problema, além de uma desaceleração do elo 4 com picos bem demarcados, provocados pelo seu movimento oscilante.

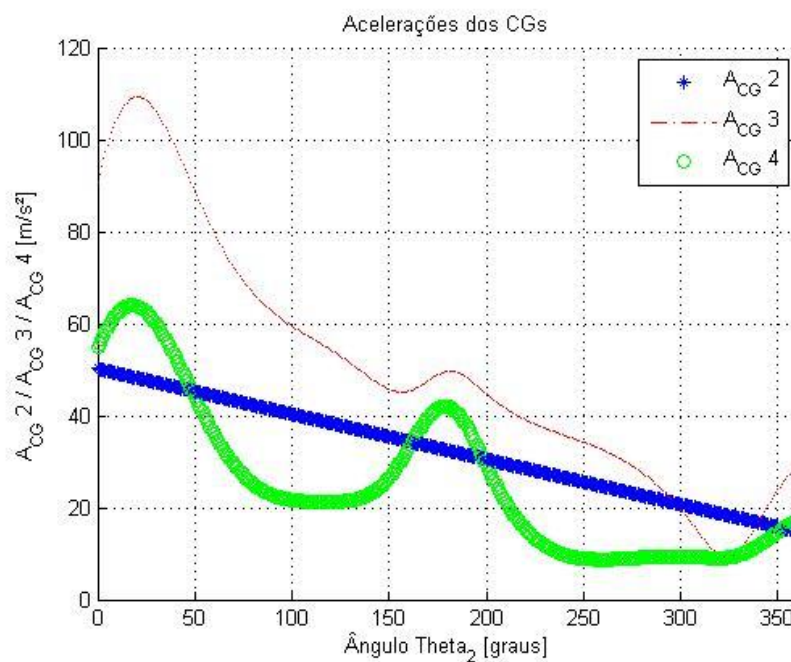


Figura 21 - Acelerações dos CGs para os elos 2, 3 e 4 em Matlab®.  
Fonte: Autoria própria.

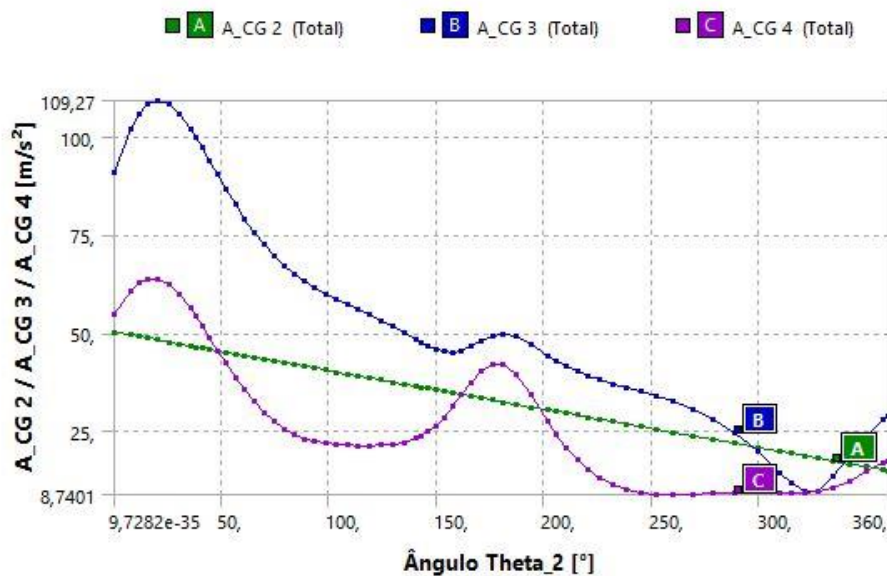


Figura 22 - Acelerações dos CGs para os elos 2, 3 e 4 em Ansys®.  
Fonte: Autoria própria.

Mostra-se também grande precisão e compatibilidade de resultados, uma vez que a aceleração máxima do CG do elo 3 foi de 109,3 m/s<sup>2</sup> para o modelo em Matlab®, enquanto que para o modelo em Ansys® foi de 109,27 m/s<sup>2</sup>. As acelerações, portanto, confirmam o primeiro parâmetro de validação.



A Figura 23 e a Figura 24 apresentam agora a atuação do torque  $T_{12}$  para cada uma das soluções. Além da coincidência de perfil apresentada nas curvas das figuras, percebe-se também grande proximidade no módulo máximo do torque, referente à inclinação de  $69^\circ$  do elo acionador. Para essa posição, os valores de 26,41 Nm e 26,37 Nm foram identificados para os programas Matlab® e Ansys®, respectivamente. Portanto, o segundo parâmetro para validação do modelo está confirmado.

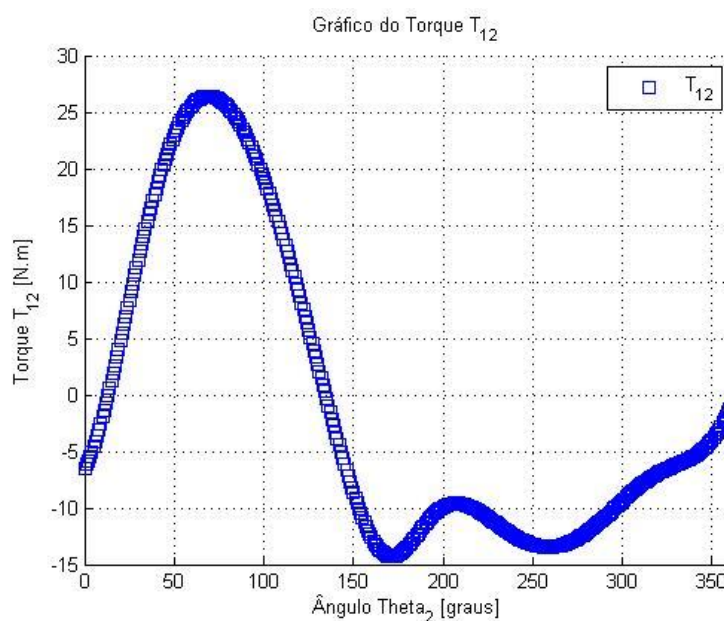


Figura 23 - Torque  $T_{12}$  na junta entre a manivela e sua fixação em Matlab®.  
Fonte: Autoria própria.

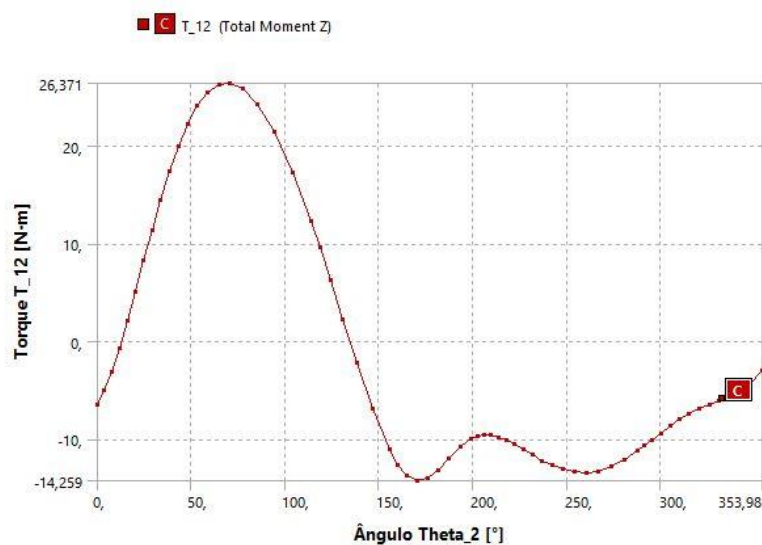
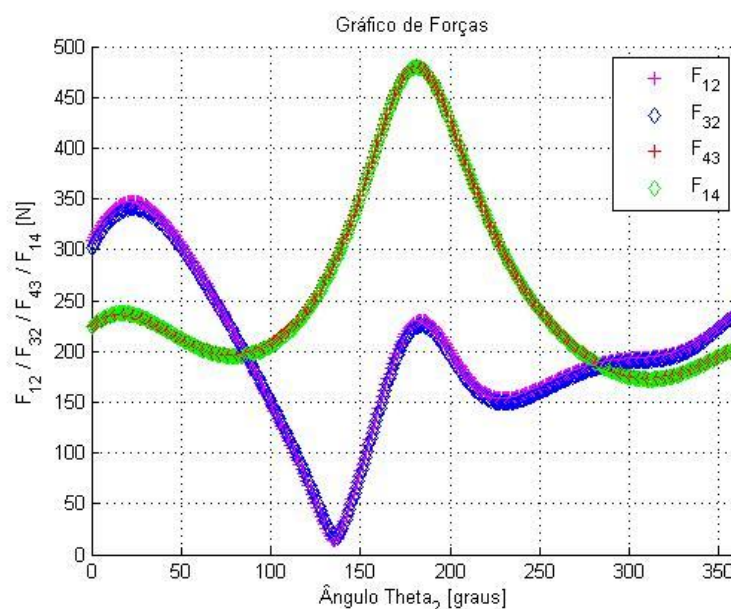


Figura 24 - Torque  $T_{12}$  na junta entre a manivela e sua fixação em Ansys®.  
Fonte: Autoria própria.

Analisa-se então como último parâmetro de comparação as forças atuantes nas juntas de revolução dos sistemas, conforme mostrado na Figura 25 e na Figura 26. Mais uma vez os perfis dos gráficos são similares. As forças máximas resultantes do modelo em Matlab® possuem magnitude de  $F_{12} = 347,3$  N,  $F_{32} = 341$  N,  $F_{43} = 480,4$  N e  $F_{14} = 479,5$  N; enquanto para o programa Ansys® são de  $F_{12} = 346,18$  N,  $F_{32} = 340,02$  N,  $F_{43} = 480,27$  N e  $F_{14} = 479,41$  N. Mais uma vez verifica-se que os modelos possuem grande confiabilidade, uma vez que seus resultados diferem em não mais que 1%.

Caracteriza-se, portanto, o modelo numérico como validado, estando assim adequado para a próxima análise de suas posições críticas.



**Figura 25 - Forças nas juntas do mecanismo ao longo da revolução da manivela em Matlab®.**  
**Fonte: Autoria própria.**

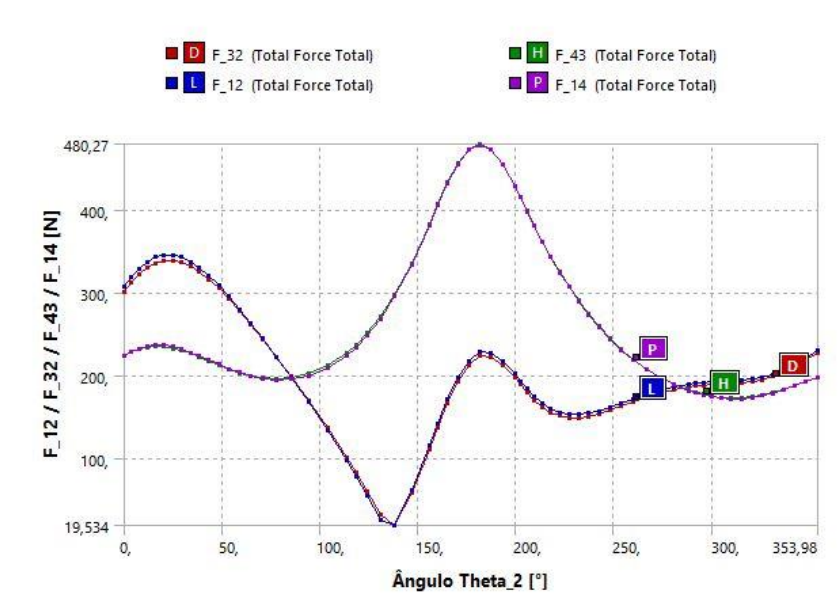


Figura 26 - Forças nas juntas do mecanismo ao longo da revolução da manivela em Ansys®.

Fonte: Autoria própria.

Serão identificadas como posições críticas do mecanismo as configurações que apresentarem as forças resultantes máximas nas juntas do sistema. Dessa maneira, os valores para a inclinação da manivela que retornam essas condições críticas são de  $\theta_2 = 23^\circ$  e de  $\theta_2 = 181^\circ$ , compondo assim a Tabela 7.

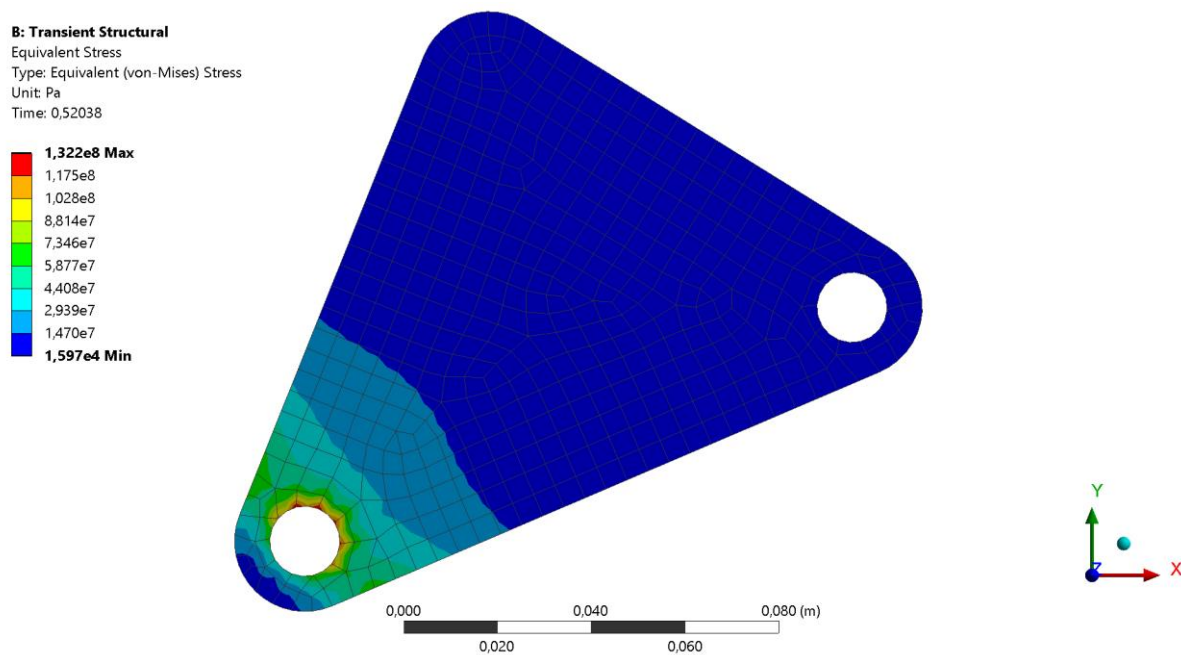
Tabela 7 - Posições críticas e esforços incidentes no mecanismo.

Elo	Inclinação da Manivela	Ângulo do Elo	Esforços
Elo 2	23°	23°	F_12 = 347,3N
			F_32 = 341N
			T_12 = 6,92N.m
Elo 3	181°	13,4°	F_23 = 224N
			F_43 = 480,4N
			F_P = 355,84N
Elo 4	181°	160,2°	F_14 = 479,5N
			F_34 = 480,4N
			T_4 = 13,56N.m

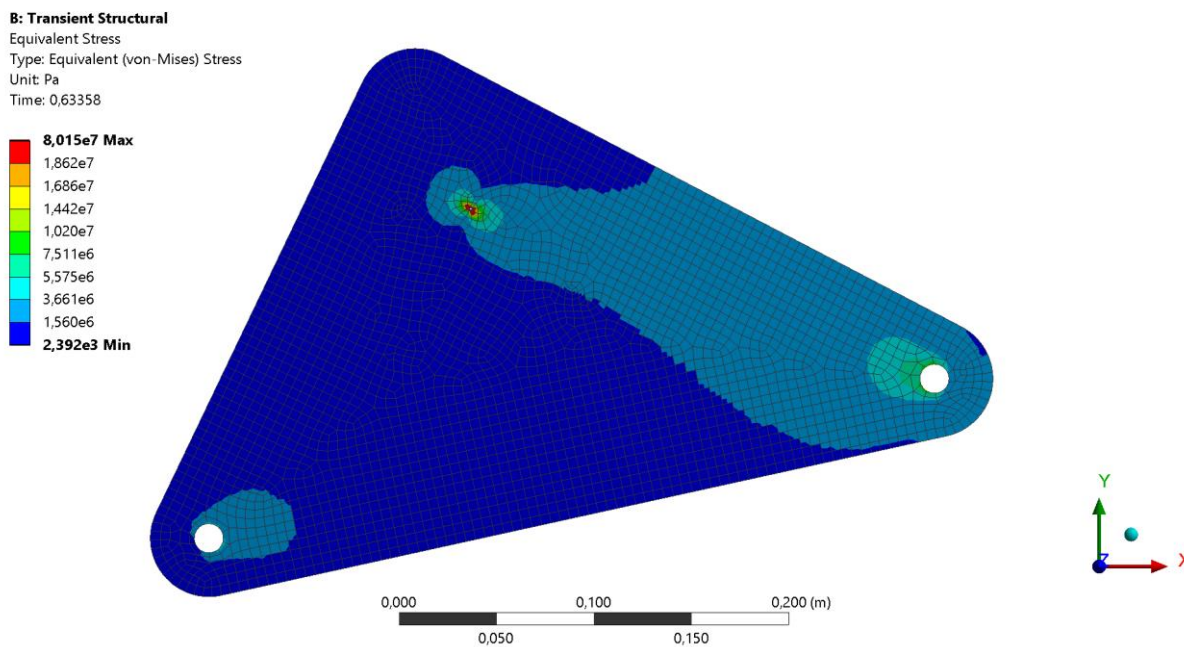
Fonte: Autoria própria.

Tendo as posições críticas mencionadas como referência para a análise, avança-se para o estudo de cada um dos elos pelo método dos elementos finitos através do módulo de análise estrutural transiente do Ansys®. As Figura 27, 28 e 29 exibem as tensões de Von Mises atuantes nos elos 2, 3 e 4, respectivamente, posicionados em suas configurações críticas. O programa realiza a avaliação das

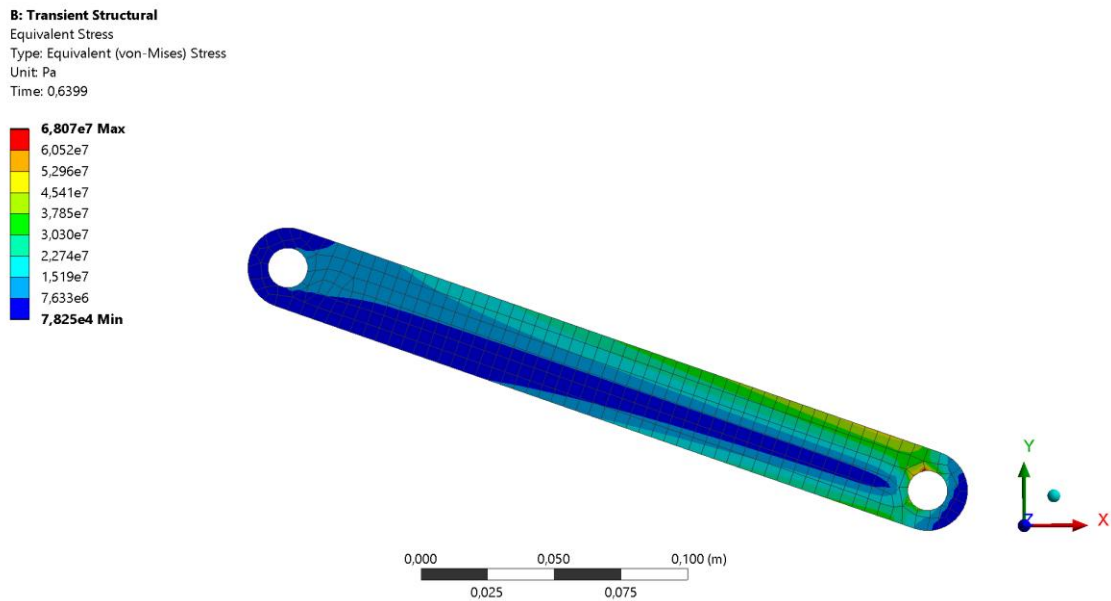
tensões para cada posição ao longo da revolução do elo de acionamento, sendo permitido ao usuário verificar facilmente os resultados para a inclinação requerida.



**Figura 27 – Tensões de Von Mises presentes no elo 2 em sua posição crítica.**  
 Fonte: Autoria própria.



**Figura 28 - Tensões de Von Mises presentes no elo 3 em sua posição crítica.**  
 Fonte: Autoria própria.



**Figura 29 - Tensões de Von Mises presentes no elo 4 em sua posição crítica.**

**Fonte: Autoria própria.**

Considerando que tem-se para o aço estrutural aplicado no Ansys® uma tensão de escoamento de  $\sigma_e = 250$  MPa, nota-se que todos os elos estão sob a atuação de tensões aceitáveis, uma vez que a maior tensão incidente encontrada para os pontos críticos estava localizada no elo de acionamento com uma magnitude máxima de 132,28 MPa.

A análise dinâmica realizada neste trabalho não envolve ensaios relacionados à fadiga do mecanismo, que apesar de fornecerem mais informações de modo a enriquecer a análise, não fazem parte do escopo deste estudo.

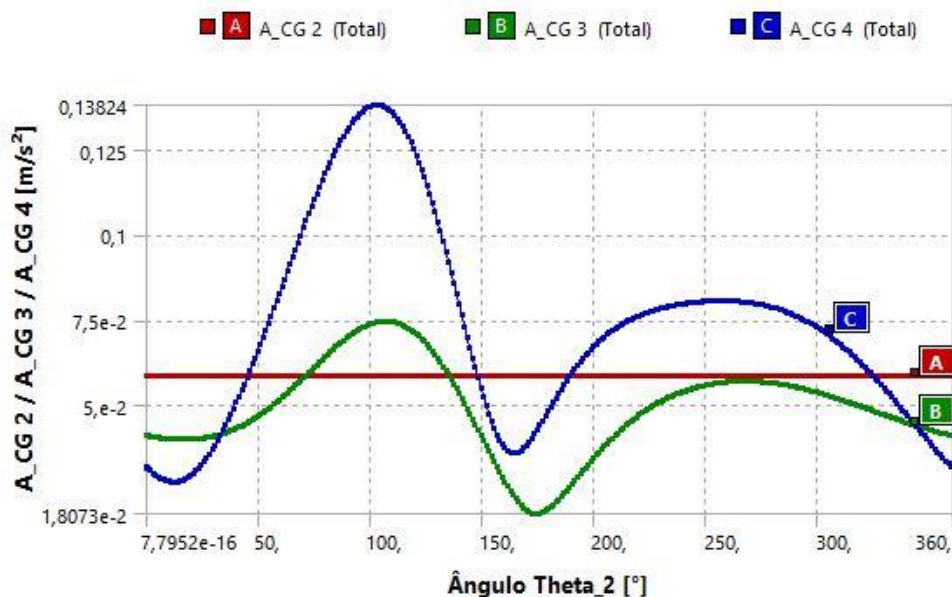
## 4.2 Aplicação mecânica para mecanismo de quatro barras

Ao considerar a metodologia de análise numérica validada através das soluções analíticas, torna-se possível prosseguir para o estudo de condições de aplicação mais reais e complexas usando diretamente o modelo numérico, desde que a abordagem da análise seja similar à utilizada anteriormente.

Seguindo com esse princípio, a avaliação da aplicação mecânica da bomba de petróleo foi realizada com o mesmo método do mecanismo genérico de quatro barras, iniciando-se pelos estudos dinâmicos através do módulo de dinâmica rígida

do Ansys® e sendo obtidos, em uma segunda etapa, as tensões atuantes em cada elo quando localizados em suas posições críticas.

Mais uma vez, tem-se como primeiro parâmetro de análise os módulos das acelerações lineares dos centros de gravidade de cada elo do sistema, exibidos na Figura 30. Devido à inexistência de uma desaceleração como a presente no mecanismo genérico avaliado, as acelerações possuem um comportamento periódico, ou seja, que irá se repetir a cada revolução da manivela.



**Figura 30 - Acelerações dos CGs para os elos 2, 3 e 4 da bomba de petróleo em Ansys®.**  
**Fonte: Autoria própria.**

Um fator de grande importância que deve ser destacado nessa figura é a magnitude das acelerações máximas. Ao verificar que a maior aceleração foi encontrada no CG do elo 4 com uma magnitude de 0,138 m/s<sup>2</sup>, tem-se que a aceleração da gravidade e, por consequência, os pesos de cada elo devem ser considerados ao longo da simulação dinâmica, uma vez que esses dados terão grande influência no resultado final.

Para o segundo parâmetro de avaliação tem-se o torque  $T_{12}$  incidente na junta entre o elo de acionamento da bomba e a fixação do sistema, apresentado na Figura 31. Percebe-se aqui a grande influência oferecida pelo peso dos elos do sistema, retornando um torque mais elevado e com valor máximo de  $T_{12} = 4516,2$  Nm.



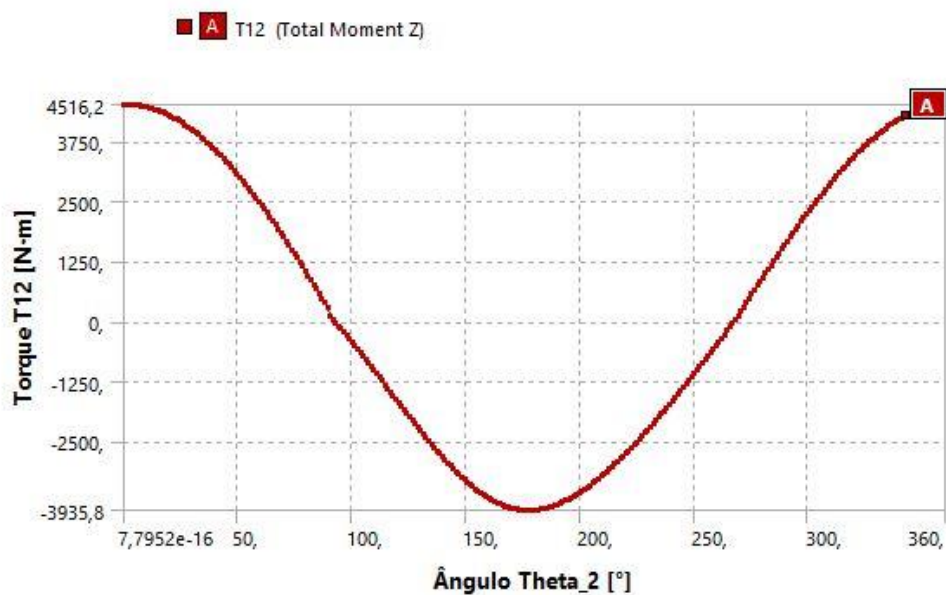


Figura 31 - Torque T\_12 na junta da bomba de petróleo entre a manivela e sua fixação em Ansys®.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 32 exibe os últimos parâmetros de estudo obtidos através da dinâmica rígida do programa Ansys®, ou seja, as forças atuantes nas juntas de revolução da bomba de petróleo.

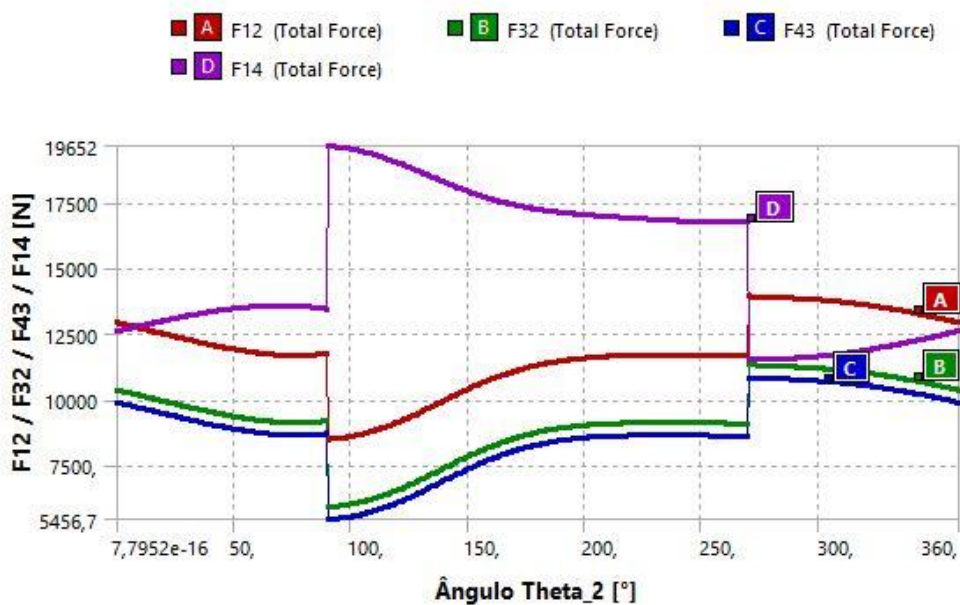


Figura 32 - Forças nas juntas do mecanismo da bomba de petróleo ao longo da revolução da manivela em Ansys®.

Fonte: Autoria própria.

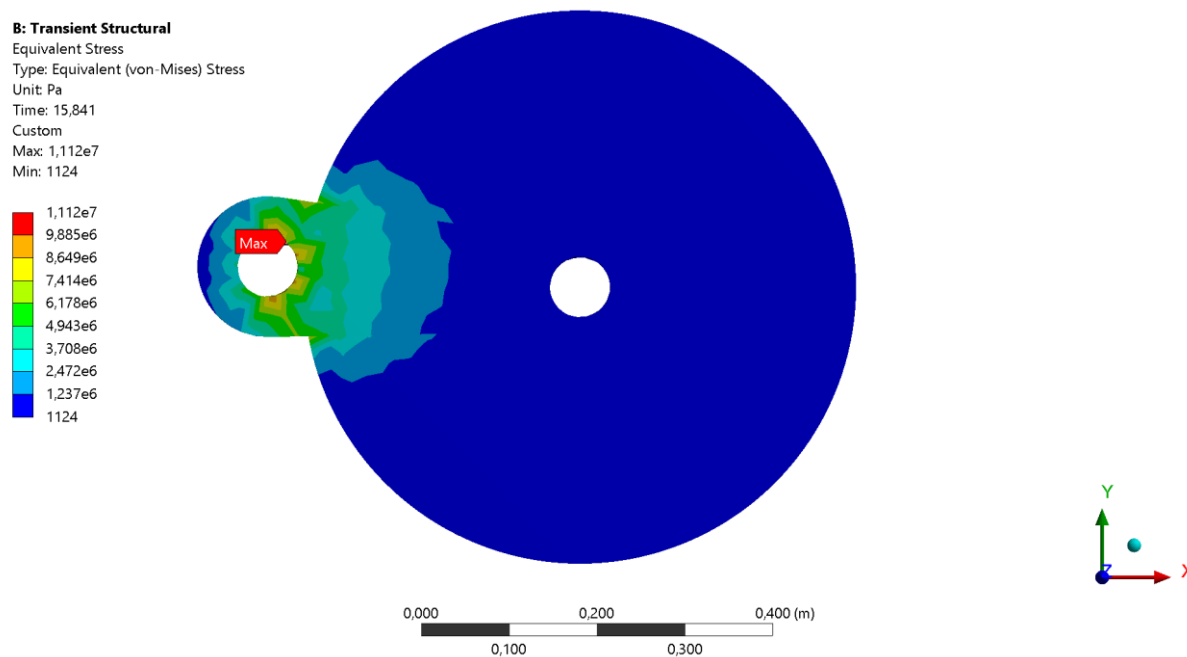
Os degraus apresentados para as posições da manivela de  $\theta_2 = 90^\circ$  e de  $\theta_2 = 270^\circ$  ocorrem devido aos golpes de descida e subida incidentes na cabeça do elo seguidor da bomba. Sendo assim, o movimento de subida da manivela até o ângulo de  $\theta_2 = 90^\circ$  promove o término do golpe de descida da cabeça do elo 4, iniciando-se assim o golpe de subida com uma força atuante maior até a descida completa da manivela no ângulo de  $\theta_2 = 270^\circ$ .

A junta de revolução entre a fixação e o elo 4 exhibe as forças de maior módulo do sistema, devido tanto ao peso mais elevado do elo como também às forças de tração proporcionadas pelo cabo da bomba na extremidade do mesmo componente. O valor dessa força mais elevada é de 19,65 kN.

Fez-se então o uso do módulo de análise estrutural transiente do Ansys® para prosseguir com a análise de tensões de cada elo em seus pontos críticos. Para o elo de acionamento da bomba identificou-se uma tensão máxima resultante de 11,12 MPa para a posição deste elo de  $\theta_2 = 356^\circ$ , conforme mostrado na Figura 33. Deve-se esclarecer aqui que, diferentemente da situação do mecanismo genérico de quatro barras, a identificação do ponto crítico não pode mais ser feita através do ponto de força máxima do gráfico de forças. Isso ocorre devido tanto às menores acelerações presentes neste modelo quando comparado ao sistema genérico quanto à consideração da gravidade e dos pesos dos componentes, o que faz com que o torque tenha grande representatividade no resultado final de tensões.

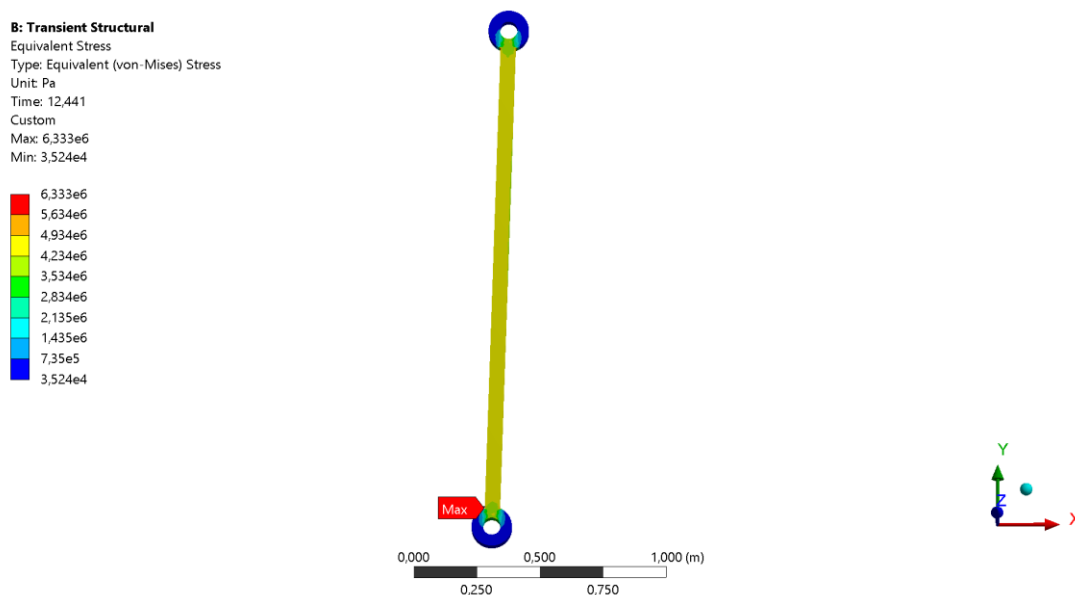
Sendo assim, foi definido que para a análise da aplicação mecânica seria mais sensato localizar os pontos críticos do movimento através das respostas obtidas na simulação. Tais respostas evidenciaram que as tensões ainda possuem valores muito menores se comparadas à tensão de escoamento do aço estrutural utilizado, sugerindo que o equipamento pode estar superdimensionado ou que ele opera com um Fator de Segurança mais elevado.





**Figura 33 - Tensões atuantes em elo acionador da bomba de petróleo.**  
**Fonte: Autoria própria.**

A Figura 34 apresenta os resultados de tensões de Von Mises para o elo de acoplamento da bomba em sua posição crítica. A tensão máxima de 6,33 MPa é identificada nessa configuração, que pode ser encontrada quando a posição da manivela está em  $\theta_2 = 275^\circ$ , ou seja, ao início do movimento de subida do elo 2.

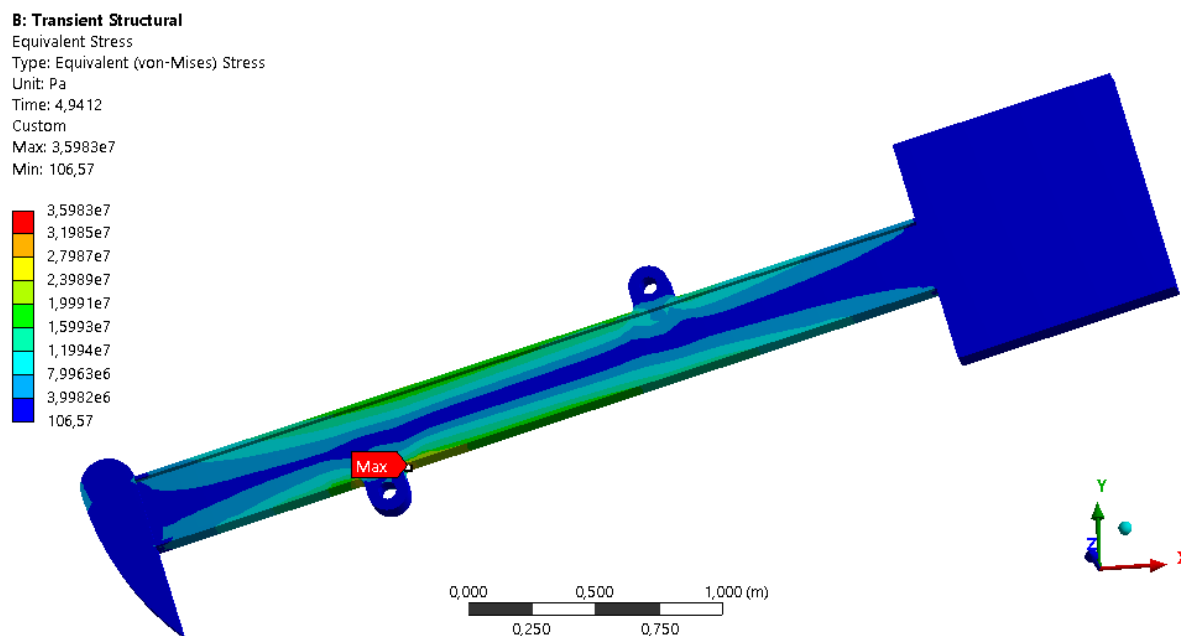


**Figura 34 - Tensões atuantes no elo de acoplamento da bomba de petróleo.**  
**Fonte: Autoria própria.**

Após a análise completa dos três elos, verificou-se que a tensão encontrada para o elo 3 foi a mais elevada entre todos os elos. Considerando que este seria, portanto, o elemento mais frágil do mecanismo, seria possível sugerir novas dimensões para este elo no intuito de avaliar o comportamento resultante das tensões em cada direção de atuação.

Por fim, avaliando as condições da atuação das tensões para o elo seguidor da bomba de petróleo, obtém-se a Figura 35. Para esta situação encontrada para um ângulo de inclinação da manivela de  $94^\circ$ , encontra-se ao início do golpe de subida da bomba uma tensão máxima de Von Mises de 35,98 MPa próxima à junta entre o elo 4 e sua fixação.

O perfil mais robusto deste elo, que inclusive é composto por uma viga de perfil I em sua seção intermediária, influencia em uma melhor distribuição das forças, mesmo sob a atuação das forças mais elevadas do sistema, conforme exibido na Figura 35.



**Figura 35 - Tensões atuantes no elo seguidor da bomba de petróleo.**

**Fonte: Autoria própria.**

O perfil de tensões apresentado pela Figura 35 também exibe características típicas da distribuição de forças em vigas, evidenciando a tração incidente na parte superior e a compressão na parte inferior.

## 5 CONCLUSÕES

Ao considerar a evolução tecnológica evidenciada na indústria e sua demanda por projetos com uma grande riqueza de detalhes e que possuam alta qualidade, enquanto são desenvolvidos em prazos cada vez mais reduzidos, evidencia-se que a elaboração de programas que favoreçam essa agilidade nas análises de mecanismos e que apresentem alto grau de confiabilidade e versatilidade em seu uso serão sempre bem vindos.

Desta maneira, verifica-se a viabilidade deste trabalho uma vez que atuou-se a favor do desenvolvimento tecnológico ao se desenvolver uma metodologia de análises cinemáticas e cinéticas para mecanismos que foi posta à prova por meio de validações pela solução analítica e posteriormente reproduzida na aplicação de um problema prático.

Ao fim das análises, teve-se a metodologia devidamente validada tanto através da comparação bem-sucedida entre a solução analítica e a solução do exemplo da literatura de Norton (2010, p.578), para o mecanismo genérico de quatro barras com a inclinação da manivela em  $60^\circ$ ; quanto pela conferência entre os resultados obtidos no modelo analítico desenvolvido em Matlab<sup>®</sup> e no modelo numérico solucionado no programa Ansys<sup>®</sup>, para a revolução completa da manivela do mesmo mecanismo.

A confiabilidade adquirida pela solução dos modelos foi muito satisfatória, uma vez que ao serem realizadas as comparações entre resultados, o erro obtido manteve-se menor ou igual a 1% entre os valores dos parâmetros. Tal confiabilidade apresentada permitiu que o estudo de uma aplicação mecânica prosseguisse com segurança.

Destaca-se também como grande fator de contribuição para o procedimento desenvolvido nesta metodologia a fácil integração entre programas de desenho auxiliado por computador e análises dinâmicas e de tensões (no caso, SolidWorks<sup>®</sup> e Ansys<sup>®</sup> respectivamente). A facilidade de importação e exportação de geometrias complexas entre os *softwares* permite que sejam aproveitadas as principais vantagens oferecidas por cada uma das ferramentas computacionais.

Um importante exemplo dessas vantagens foi o módulo de dinâmica rígida presente na ferramenta CAE. Além de apresentar um ambiente muito intuitivo para o usuário, permite que o tempo de solução para análises dinâmicas seja muito reduzido, encontrando-se assim resultados de forças e acelerações resultantes do movimento em apenas alguns segundos.

Um último fator que pode ser considerado como de grande contribuição para a análise foi a grande conveniência da aplicação mecânica selecionada. Por um lado tem-se a grande aplicação de métodos de bombeamento mecânico para o procedimento de extração de petróleo, o que garante uma grande relevância para o estudo. Já outro aspecto está na simplicidade de operação desse equipamento, adequando-se ao modelo estudado de mecanismo planar de quatro barras e possuindo as mesmas características de movimento que o caso genérico avaliado.

Por fim, sugere-se como possibilidade para trabalhos futuros a aplicação desta mesma metodologia aliada aos conhecimentos da otimização estrutural de componentes, permitindo-se assim partir para soluções qualitativas com maior profundidade. Outro aspecto do ramo estrutural que também poderia ser desenvolvido é o da análise do comportamento dos componentes sob condições de fadiga estrutural.

## REFERÊNCIAS

BARROS, Y. B. E. A. Aplicação do bombeio mecânico com hastes na elevação do petróleo. **Caderno de Graduação - Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIT**, v. 1, n. 3, p. 25-40, 2013.

DOUGHTY, S. **Mechanics of machines**. New York: Wiley, 1988.

FLORES, P. **Análise cinemática e dinâmica de mecanismos com recurso a meios computacionais**. Universidade do Minho. [S.l.], p. 120. 2000.

FRANZEN, H.; KRÖLL, J. **Mobile harbor crane for normal and heavy load operation**. US6499611 B1, 13 Setembro 2000.

GRUEBLER, M. **Getriebelehre**. Berlin: Springer, 1917.

LODGE, J. E. **Popular Science**. 6. Ed. New York: Popular Science Publishing Co., v. 119, 1931. p. 53.

MORISHITA, G. S. D. L. **Otimização topológica de mecanismos**. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba. 2015.

NORTON, R. L. **Design of machinery: An introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines**. 2nd. Ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 1999.

NORTON, R. L. **Cinemática e dinâmica dos mecanismos**. 1ª. Ed. Porto Alegre: ARTMED, 2010.

REULEAUX, F.; FERGUSON, E. S. **Kinematics of machinery: Outlines of a Theory of Machines**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

ROSSI, N. C. M. D. **Bombeio Mecânico: apostila Universidade Corporativa Petrobrás**. [S.l.]: [s.n.], 2003.

SHIGLEY, J. E.; UICKER, J. J. **Theory of machines and mechanisms**. Singapura: [s.n.], 1981.

SIEMENS PRODUCT LIFECYCLE MANAGEMENT SOFTWARE INC. Overcome FEA roadblocks new webinar series , Femap Symposium and more. **Siemens PLM Source for USA and Canada**, 08 Maio 2013. Disponível em: <<http://plmsource.industrysoftware.automation.siemens.com/us/2013/05/08/overcome-common-fea-roadblocks/>>. Acesso em: 08 Novembro 2015.

YANG, Z.; SADLER, J. P. Large-displacement finite element analysis of flexible linkages. **Journal of Mechanical Design**, v. 112, n. 2, p. 175-182, 1990.

YU, S. D.; CLEGHORN, W. L. Dynamic instability analysis of high-speed flexible four-bar mechanisms. **Mechanism and machine theory**, v. 37, n. 11, p. 1261-1285, 2002.