

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

RAPHAEL ANDRETTA

**UM MODELO TERMODINÂMICO REVERSÍVEL DE DUAS
TEMPERATURAS PARA MOTORES STIRLING ALPHA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Guarapuava
2017

RAPHAEL ANDRETTA

**UM MODELO TERMODINÂMICO REVERSÍVEL DE DUAS
TEMPERATURAS PARA MOTORES STIRLING ALPHA**

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso, do Curso Superior de Engenharia Mecânica à Coordenação de Engenharia Mecânica – COEME – da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Christian Naaktgeboren.
Instituição: UTFPR.

Guarapuava
2017



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

*UM MODELO TERMODINÂMICO REVERSÍVEL DE DUAS TEMPERATURAS PARA
MOTORES STIRLING ALPHA*

por

RAPHAEL ANDRETTA

Este **Trabalho de Conclusão de Curso** foi apresentado às **10:00h** do dia **05/12/2017** como requisito parcial para a obtenção do título de **ENGENHEIRO MECÂNICO**, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho:

.....
(aprovado com louvor, aprovado, aprovado com restrições ou reprovado)

Professores Membros que compõe a Banca Examinadora:

Prof. Dr. Christian Naaktgeboren

UTFPR – Orientador

Prof. MSc. Renan Manozzo Galante

UTFPR – Banca

Prof^a. Dr^a. Raquel da Cunha Ribeiro da Silva

UTFPR – Banca

Prof. Dr. David Lira Nunez

UTFPR GP – Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

A Folha de Aprovação Assinada encontra-se na Coordenação do Curso – COEME

Aos meus pais, Elizabeth e Moacyr, os quais sempre me apoiaram, incentivaram e com muito amor não mediram esforços para que eu conseguisse chegar até aqui e concluir mais essa etapa em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão inicialmente é para Deus porque ele sempre esteve em meu caminho, sobretudo em momentos que eu mais necessitei. Ou seja, eu o agradeço pela sua compaixão, por sua graça, pela bondade e amor incondicional os quais serviram-me de apoio nos momentos mais difíceis durante minha jornada. O Senhor é a força que deu vida as minhas conquistas.

Agradeço a minha família por sempre acreditarem e me amarem. Isso porque em alguns momentos de nossas vidas a dedicação se torna a esperança que necessitamos para conseguirmos seguir em frente.

Agradeço ao Prof. Dr. Christian Naaktgeboren por sua amizade. Esse se tornou um companheiro de caminhada durante a minha graduação. Acredito que minha formação acadêmica e pessoal não teriam sido as mesmas sem a sua presença. Também lhe agradeço por sua sensibilidade como educador, o qual se dispôs a ajudar com a conclusão desse e de tantos outros trabalhos.

Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.(Silva, Ayrton Senna da, em entrevista ao jornalista João Dória Júnior, em 1994.)

RESUMO

ANDRETTA, Raphael. UM MODELO TERMODINÂMICO REVERSÍVEL DE DUAS TEMPERATURAS PARA MOTORES STIRLING ALPHA 2017. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2017.

O presente trabalho propõe desenvolver um modelo reversível para Motores Stirling Alpha, realizando a sua implementação computacional e validação. Dessa maneira, espera-se promover modelos termodinâmicos aperfeiçoados para Motores Stirling em relação ao clássico modelo de Schmidt. O modelo basei-se em termodinâmica de substâncias puras a nível de graduação no qual os parâmetros de entrada tenha clara relação com Motores Stirling Alpha. Com isto, deseja-se gerar um modelo de influência didática e alcance superior ao clássico ciclo idealizado de Stirling disponível em livros-texto de ciências térmicas para engenharia.

Palavras-Chave: Motor Stirling. Ciclo de Schmidt. Termodinâmica. Arranjo mecânico. Modelagem Computacional.

ABSTRACT

ANDRETTA, Raphael. A TWO-TEMPERATURE REVERSIBLE THERMODYNAMIC MODEL FOR STIRLING ALPHA ENGINES 2017. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2017.

The present work proposes to develop a model for Stirling Alpha Motors, realizing the its computational implementation and validation. In this way, it is hoped to promote thermodynamics for Stirling Motors over the classic Schmidt model. The model is based on thermodynamics of pure substances at the undergraduate level where such parameters have clear relationships with Stirling Alpha Motors. With this, it is desired to generate a model of didactic influence and reach superior to the classic idealized Stirling cycle available in thermal science textbooks for engineering.

Key-Words: Stirling engine. Schmidt cycle. Thermodynamics. Mechanical Arrangement. Computational modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Diagrama $P \times V$ do Ciclo de Carnot	6
Figura 2	– Ciclo Stirling	9
Figura 3	– Tipos de Motores Stirling	11
Figura 4	– Figura ilustrativa do motor Stirling Alpha	12
Figura 5	– Gráfico $P \times V$, Koichi Hirata	19
Figura 6	– Gráfico $P \times V$, Simulação da Teoria de Schmidt	20
Figura 7	– Ilustração do modelo Duas-Temperaturas	23
Figura 8	– Gráfico de comparação entre $\log \log P \times V$ e $P \times V$	33
Figura 9	– Gráfico $P \times V$: Teoria de Schmidt	35
Figura 10	– Gráfico $P \times V$: Modelo de Duas-Temperaturas	36
Figura 11	– Gráfico $P \times V$: Validação	36
Figura 12	– Gráfico Linha V: Teoria de Schmidt	37
Figura 13	– Gráfico Linha V em h: Modelo de Duas-Temperaturas	38
Figura 14	– Gráfico Linha V em c: Modelo Duas-Temperaturas	38
Figura 15	– Gráfico Linha V total: Modelo Duas-Temperaturas	39
Figura 16	– Gráfico $P \times \alpha \times P \times V$: Schmidt	39
Figura 17	– Gráfico $P \times \alpha \times P \times V$: Duas-Temperaturas	40
Figura 18	– Gráfico de projeção 3D para o Modelo Schmidt	41
Figura 19	– Gráfico de projeção 3D para o Modelo Duas-Temperaturas	41
Figura 20	– Linha de calor em H para o Modelo Duas-Temperaturas	43
Figura 21	– Linha de calor em C para o Modelo Duas-Temperaturas	43
Figura 22	– Linhas de calor para o Modelo Duas-Temperaturas	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 2 – Lista de Parâmetros da teoria de Schmidt	18
Tabela 3 – Simulação do Método de Schmidt	20
Tabela 4 – Resultado da simulação do Método de Schmidt	21

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEC	Ministério da Educação
MME	Ministério de Minas e Energia
DEA	Demanda de Energia
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia
UTFPR	Universidade Tecnológica Federal do Paraná
COEME	Coordenação de Engenharia Mecânica – Guarapuava

LISTA DE SÍMBOLOS

P	Pressão do motor	kPa	19-4
P_i	Pressão em $\alpha = i$	kPa	7-5
P_{i+1}	Pressão em $\alpha = i + 1$	kPa	10-5
P_{med}	Pressão média do motor	kPa	21-4
P_{min}	Pressão mínima do motor	kPa	23-4
P_{max}	Pressão máxima do motor	kPa	25-4
V_E	Volume de expansão	m ³	2-4
V_C	Volume de compressão	m ³	3-4
V_R	Volume do regenerador	m ³	4-4
V_{SE}	Volume no espaço de expansão	m ³	2-4
V_{SC}	Volume no espaço de compressão	m ³	3-4
V_{DE}	Volume morto de expansão	m ³	2-4
V_{DC}	Volume morto de compressão	m ³	3-4
V	Volume total	m ³	5-4
V_h	Volume no cilindro quente	m ³	3-5
V_r	Volume no regenerador	m ³	4-5
V_c	Volume no cilindro frio	m ³	5-5
m_t	Massa total do gás de trabalho	kg	4-4
m_h	Massa de gás no cilindro quente	kg	3-5
m_r	Massa de gás no regenerador	kg	4-5
m_c	Massa de gás no cilindro frio	kg	5-5
$m_{h,i}$	Massa de H em $\alpha = i$	kg	7-5
$m_{r,i}$	Massa de R em $\alpha = i$	kg	8-5
$m_{c,i}$	Massa de C em $\alpha = i$	kg	9-5
$m_{t,i}$	Massa total em $\alpha = i$	kg	13-5
$m_{h,i+1}$	Massa de H em $\alpha = i + 1$	kg	7-5
$m_{r,i+1}$	Massa de R em $\alpha = i + 1$	kg	8-5
$m_{c,i+1}$	Massa de C em $\alpha = i + 1$	kg	9-5
$m_{t,i+1}$	Massa total em $\alpha = i + 1$	kg	14-5
Δm	Variação de massa	kg	18-5
Δm_r	Variação de massa em R	kg	34-5
T_E	Temperatura na expansão	K	6-4
T_C	Temperatura na compressão	K	6-4
T_R	Temperatura no regenerador	K	4-4
T_h	Temperatura no cilindro quente	K	3-5
T_r	Temperatura no regenerador	K	4-5

T_c	Temperatura no cilindro frio	K	5-5
W_E	Trabalho de expansão	kJ	27-4
W_C	Trabalho de compressão	kJ	28-4
W_T	Trabalho Total	kJ	29-4
$W_{liq,ent,h}$	Trabalho liquido de entrada em H	kJ	24-5
$W_{liq,ent,c}$	Trabalho liquido de entrada em C	kJ	30-5
$Q_{liq,ent,h}$	Calor liquido de entrada em H	kJ	27-5
$Q_{liq,ent,c}$	Calor liquido de entrada em C	kJ	33-5
α	Angulo de fase	graus	2-4
β	Incremento do angulo de fase	graus	3-4

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	JUSTIFICATIVA	1
2	OBJETIVOS	3
2.1	OBJETIVO GERAL	3
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
3	FUNDAMENTAÇÃO I: TERMODINÂMICA	4
3.1	CICLO DE CARNOT	4
3.2	PRINCÍPIOS DE CARNOT	7
3.3	MÁQUINA TÉRMICA DE CARNOT	7
3.4	CICLO STIRLING	8
4	FUNDAMENTAÇÃO II: A TEORIA DE SCHMIDT	10
4.1	CLASSIFICAÇÃO DOS MOTORES STIRLING	10
4.2	AS HIPÓTESES DA TEORIA DE SCHMIDT	11
4.3	DIMENSIONAMENTO PARA MOTORES STIRLING ALPHA	12
4.4	EQUAÇÕES PARA A PRESSÃO MÍNIMA E MÁXIMA	16
4.5	EQUAÇÕES PARA O TRABALHO E EFICIÊNCIA	16
4.6	RESULTADOS DA TEORIA DE SCHMIDT	19
5	FUNDAMENTAÇÃO III: O MODELO DE DUAS-TEMPERATURAS	22
5.1	A REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO MODELO	22
5.2	O MODELO MATEMÁTICO	24
5.3	A EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO	25
5.4	BALANÇOS DE MASSAS EM H E C	27
5.5	BALANÇOS DE ENERGIA EM H E C	28
5.6	BALANÇO DE MASSA EM R	30
5.7	BALANÇO DE ENERGIA EM R	31
5.8	BALANÇO GLOBAL	32
5.9	VALIDAÇÃO DO MODELO DE DUAS-TEMPERATURAS	32
6	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	34
7	RESULTADOS	35
7.1	A RELAÇÃO ENTRE A PRESSÃO E O VOLUME	35
7.2	O TIPO DE MOVIMENTO CARACTERÍSTICO NOS MODELOS	36
7.3	A RELAÇÃO ENTRE A PRESSÃO, O ÂNGULO E O VOLUME	39

7.4	APRESENTAÇÃO DE GRÁFICOS EM 3D	40
7.5	A RELAÇÃO ENTRE A EFICIÊNCIA E O MODELO PROPOSTO	41
8	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICE A - PROGRAMA: PARÂMETROS GEOMÉTRICOS	49

1 INTRODUÇÃO

Robert Stirling (25 de outubro de 1790 – 6 de junho de 1878) foi um Pastor Escocês e também o inventor do Motor Stirling. Auxiliado por seu irmão, James Stirling, inventaram e patentearam esse motor de combustão externa que consiste na produção de trabalho através da variação da temperatura de um determinado fluido de trabalho, ou seja, desenvolvendo a expansão e compressão desse mesmo gás e conseqüentemente o movimento dos arranjos cilindro-pistão aonde ambos se encontram ligados a um eixo comum.

Foi Gustav Schmidt [17] quem desenvolveu a análise teórica para Motores Stirling. Em suas hipóteses, Schmidt propôs duas muito importantes: a primeira, que a expansão e compressão do fluido de trabalho fosse isotérmica e a segunda, foi proposto que o movimento dos pistões é do tipo senoidal.

Dessa forma, o desenvolvimento desse tipo de movimento característico torna possível computar a variação de volumes com base na geometria dos cilindros, com a vantagem do volume e pressão serem descritos ciclicamente.

A relevância dos Motores Stirling é tal que nos últimos anos muitos pesquisadores e empresas [18] tem demonstrado grande interesse em desenvolvê-lo. Algumas das justificativas incluem os seguintes motivos: sua simplicidade de construção, sua capacidade multicomcombustível e a possibilidade de alimentação por energia solar.

1.1 JUSTIFICATIVA

Gustav Schmidt foi pioneiro na análise teórica de Motores Stirling. Schmidt considerou o fluido de trabalho como um gás ideal não levando em consideração as respectivas informações calóricas sobre o mesmo. Realizou apenas a avaliação dos comportamentos da pressão, do volume e da temperatura ($P - v - T$).

A respeito do arranjo mecânico, uma grande vantagem em se admitir um movimento puramente senoidal é o comportamento cíclico para parâmetros de pressão. Porém, em um mecanismos biela-manivela esse tipo de caracterização implica que o comprimento da manivela tenda ao infinito. Assim, apesar dessa caracterização ser vantajosa, a mesma não condiz com a situação real tornando-se assim um parâmetro a ser aperfeiçoado para o desenvolvimento da relação desejada.

Em livros-texto de engenharia [24], normalmente o ciclo Stirling é apresentado como um ciclo que envolve processos isotérmicos de fornecimento e rejeição de calor diferindo do ciclo de Carnot através da regeneração a volume constante. Sabe-se que tais processos normalmente são idealizados. No entanto, há uma dificuldade em estabelecer relação entre o ciclo Stirling ideal e os processos que ocorrem em Motores Stirling.

Portanto, o presente trabalho propõe o desenvolvimento, implementação e validação de um modelo termodinâmico para motores stirling alpha de duas temperaturas que evidencie a relação com os principais parâmetros construtivos do motor com base em modernos conceitos de termodinâmica de engenharia, a exemplo de balanços de massa e energia, porém que preserve a simplicidade de modelagem do fluido de trabalho, um gás ideal de calores constante, e utilize processos internamente reversíveis.

2 OBJETIVOS

Os objetivos desse Trabalho de Conclusão de Curso são apresentados subsequentemente nos tópicos de Objetivos Geral e Específicos.

2.1 OBJETIVO GERAL

Desenvolvimento de um modelo termodinâmico moderno para Motores Stirling Alpha de duas temperaturas que apresente relação entre o ciclo termodinâmico e o arranjo mecânico do Motor Stirling Alpha.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Para que a natureza do presente seja alcançada e facilitando o que será desenvolvido, o Objetivo Geral do presente trabalho foi dividido em objetivos específicos, sendo eles:

1. Revisar o modelo de Schmidt;
2. Implementar o modelo de Schmidt;
3. Validar o modelo de Schmidt conforme a literatura disponível;
4. Desenvolver o modelo de Duas-Temperaturas;
5. Implementar o modelo de Duas-Temperaturas;
6. Validar o modelo Duas-Temperaturas a partir do modelo de Schmidt;
7. Realizar apresentação de resultados.

3 FUNDAMENTAÇÃO I: TERMODINÂMICA

O entendimento conceitual através da fundamentação teórica se torna praticamente governante para o desenvolvimento desse trabalho. O projeto da máquina térmica engloba conceitos térmicos e físicos muito importantes. Tratando-se de um motor, a Primeira lei da Termodinâmica ainda é incompleta do ponto de vista térmico porque a mesma não esclarece as possíveis reversibilidades e principalmente as irreversibilidades que envolvem as questões termodinâmicas a serem estudadas no tópicos subsequentes.

O simples fato da Primeira lei da Termodinâmica estar devidamente correta não implica ou acarretará que o processo irá de fato ocorrer ou acontecer. Por exemplo, um fluido imerso em um recipiente dentro de uma sala tende a igualar a sua temperatura a do meio em que ele se encontra porém, o inverso não acontece.

A apresentação da máquina térmica formal e, principalmente, dentro dos rigores e conceitos termodinâmicos bem definidos só pode ser feito com a introdução do conceito da Segunda lei da Termodinâmica. Portanto, a partir de agora os processos a serem estudados se procederão em uma determinada direção, sem jamais poderem acontecer no sentido oposto a ela. Dessa forma, com a apresentação desse novo conceito também é possível determinar a quantidade e a qualidade dessa energia que será estudada.

De acordo com o primeiro conceito apresentado, a conversão de trabalho em calor é fisicamente possível e muito desejada pela engenharia mas, como já foi mencionado, seu oposto ficou impossibilitado de acontecer. Logo, é possível apresentar uma definição muito clara e rigorosa da máquina térmica. Assim, se torna viável estudar o ciclo stirling e modelar o motor Stirling, foco principal desse trabalho de conclusão de curso.

3.1 CICLO DE CARNOT

Admitindo um motor térmico trabalhando entre ambos os reservatório térmicos quente e frio e operando segundo um ciclo aonde seus processos são reversíveis, Çengel [24] afirma se o que o ciclo também o é e se for invertido irá se tornar um refrigerador. Esse ciclo é dito **Ciclo de Carnot**, em homenagem ao engenheiro francês Leonard Sadi Carnot (1796 - 1836) o qual estabeleceu bases para a Segunda Lei da Termodinâmica em 1984, segundo [21].

Çengel [24] explica que motores térmicos são dispositivos cíclicos aonde o fluido de trabalho volta ao seu estado inicial e em determinadas partes do ciclo o fluido irá realizar trabalho e em outras partes trabalho é realizado sobre o fluido de trabalho. Essas partes são diferenciadas justamente pelo trabalho realizado pelo motor térmico e a eficiência do ciclo depende de como são executados esses processos individuais que compõem o ciclo.

Os ciclos reversíveis podem ser compreendidos como um ponto de partida para o

desenvolvimento dos ciclos reais e podem ser modificados conforme for necessário. O ciclo reversível mais conhecido é o ciclo de Carnot e a máquina que esteja operando segundo esse ciclo chama-se de Máquina de Térmica de Carnot. O Ciclo de Carnot [24] é composto por quatro processos reversíveis, sendo dois isotérmicos e dois adiabáticos, podendo ser executado por um sistema fechado ou com escoamento em regime permanente.

Para um sistema fechado composto de um gás dentro do arranjo cilindro-pistão adiabático aonde o isolamento do cabeçote é feito de tal maneira que o mesmo pode ser removido para colocar o cilindro em contato diferentes reservatórios para conseguir efetuar a troca de calor. Os quatro processos que compõem o Ciclo de Carnot, ver figura 1, são desenvolvidos e explicados em [24] da seguinte maneira:

1. **Expansão Isotérmica Reversível (Processo 1 – 2, $T_H = \text{Constante}$)** – No estado 1, a temperatura do gás é T_H e o cabeçote do cilindro está em contato com uma fonte a temperatura T_H . A expansão lenta do gás provoca trabalho sobre a vizinhança e a medida em que essa expansão acontece, a temperatura do gás irá diminuir. Porém, assim que a temperatura do gás começa a cair a uma quantidade infinitesimal dT , calor é transferido do reservatório para o gás e T_H consegue dessa forma se manter constante. O processo é do tipo reversível porque o valor da temperatura entre o gás e o reservatório nunca excedem a quantidade do valor infinitesimal dT . O processo irá continuar até que o pistão atinja a posição dois aonde o ocorre somatório do calor total transferido para esse gás em uma quantidade Q_H .
2. **Expansão Adiabática Reversível (Processo 2 – 3, a temperatura cai de T_H para T_L)** – No estado 2, o reservatório que estava em contato com o cabeçote do cilindro é removido e substituído por um isolamento para que dessa maneira o sistema se torne adiabático (idealização). O gás irá continuar a se expandir de forma lenta ainda realizando trabalho sobre a vizinhança até que sua temperatura diminua de T_H para T_L (aqui, temos a entrada do estado 3). Como se trata de um processo idealizado por questões de análise, o pistão é sem atrito e o processo é de quase equilíbrio, sendo reversível a adiabático.
3. **Compressão Isotérmica Reversível (Processo 3 – 4, $T_L = \text{Constante}$)** – No estado 3, o isolamento do cabeçote é removido e o cilindro entra em contato com um sumidouro que se encontra em uma temperatura T_L . Nessa situação, o pistão está sendo empurrado por uma força externa e dessa forma é realizado trabalho sobre o gás. No momento em que o gás é comprimido, sua temperatura tende a se elevar. Porém, assim que se eleva o equivalente a uma quantidade infinitesimal dT , por analogia ao estado 1, calor é transferido do gás para o sumidouro, fazendo com que a temperatura do gás retorne para T_L e a temperatura do gás permanece constante. Dessa forma, a diferença de temperaturas entre o gás e o sumidouro nunca excedem o valor de dT , esse processo de transferência de calor é reversível. Esse processo acontece até que o pistão atinja o estado 4 e aconteça a rejeição do somatório de todo o calor pelo gás a uma quantidade de Q_L .

4. **Compressão Adiabática Reversível (Processo 4 – 1, a temperatura eleva-se de T_L para T_H)** – No estado 4, quando o reservatório a baixa temperatura é removido e o isolamento é imediatamente recolocado no cabeçote do cilindro, a compressão reversível do gás irá de fato acontecer e o mesmo se encontrará mais uma vez em seu estado inicial completando dessa maneira o ciclo, mostrando que a temperatura irá subir de T_L para T_H .

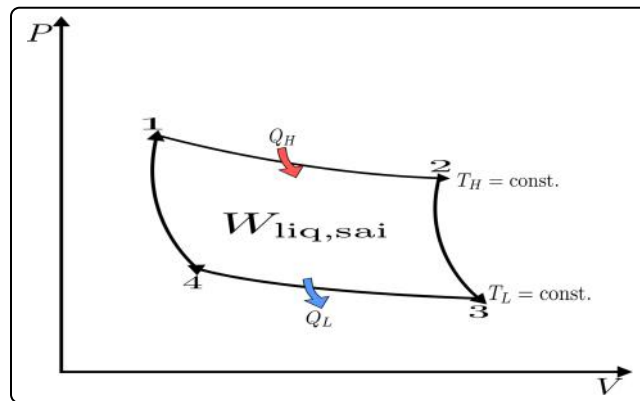


Figura 1: Diagrama $P \times V$ do Ciclo de Carnot

Fonte: O Autor.

O Ciclo de Carnot é um ciclo reversível sendo o mais eficiente quando se está operando entre dois reservatórios. O fato de que existem as irreversibilidades presentes durante os processos de engenharia torna impossível reproduzir esse ciclo na vida real. Porém, ao passo que os ciclos reais se aproximam de processos reversíveis é possível melhorar a eficiência dos ciclos reais ao aproximá-los do ciclo de Carnot.

Convém ressaltar que o Çengel [24] explica que em um diagrama $P - V$ a área sob a curva do processo que está sendo estudado representa o trabalho de fronteira para processos quase estáticos (internamente reversíveis). Portanto, a área sob a curva 2 – 3 – 4 representa o trabalho realizado pelo gás durante a expansão do ciclo e que a área sob a curva 4 – 1 – 2 representa o trabalho realizado sobre o gás durante a compressão do ciclo. Finalmente, a área compreendida entre ambas as curvas representa uma diferença de áreas e a sua contabilidade fornece o valor do trabalho líquido.

Convém observar, [24], que o ciclo de Carnot é um ciclo Reversível. Ou seja, todos os processos descritos nessa seção podem ser invertidos e nesse situação teríamos um ciclo de Carnot de Refrigeração. O ciclo é o mesmo, porém temos alterações nas direções do trabalho e na forma de interação do calor, que são invertidos. Ou seja, uma quantidade de calor Q_L é removida do reservatório a baixa temperatura e conseqüentemente uma quantidade de calor Q_H é rejeitada para um reservatório a alta temperatura sendo necessário trabalho líquido $W_{liq,ent}$ necessário para realizar o ciclo.

3.2 PRINCÍPIOS DE CARNOT

Sobre o ciclo de Carnot e também em conjunto com os enunciados de Kelvin-Plank e Clausius, existem dois teoremas relativos ao Ciclo de Carnot muito importante. Segundo [21], abaixo ambos os teoremas:

1. **Teorema 1** – É impossível construir um motor que opere entre dois reservatórios térmicos e que seja mais eficiente que um motor reversível operando entre os mesmos reservatórios;
2. **Teorema 2** – Todos os motores que operam segundo o Ciclo de Carnot e entre dois reservatórios de temperaturas constantes apresentam o mesmo rendimento.

Uma vez que a irreversibilidade está presente em praticamente todos os processos descritos pela ciência, especialmente os de engenharia, e como já foi mencionado anteriormente que não é possível eliminar as irreversibilidades que acompanham esses processo podemos concluir que esses princípios podem ser comprovados porque a violação de qualquer um de ambos implica na violação da Segunda Lei da Termodinâmica. A irreversibilidade presente na maioria dos processo é prova mais clara disso.

3.3 MÁQUINA TÉRMICA DE CARNOT

Uma máquina térmica hipotética que esteja operando mediante um ciclo reversível e Carnot é chamada de maquina térmica de Carnot e podemos utilizar que Q_H é o calor transferido para a máquina de um reservatório que se encontra a alta temperatura T_H e Q_L é o calor rejeitado pelo reservatório a baixa temperatura T_L . Se utilizarmos os valores absolutos de temperatura de ambos os reservatórios, temos que a eficiência de uma máquina de Carnot ou qualquer máquina térmica reversível será a expressão conhecida como **Eficiência de Carnot** [24]:

$$\eta_{t,rev} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (1-3)$$

A expressão da eficiência de Carnot fornece a mais alta eficiência que uma máquina térmica pode apresentar operando entre dois reservatórios de energia térmica a temperaturas T_L e T_H . Uma máquina térmica real não irá atingir esse valor máximo de eficiência teórica justamente por ser impossível de se eliminar por completo todas as irreversibilidades que sempre acompanham os ciclos reais.

As eficiências de máquinas térmicas reais e reversíveis operando entre os mesmos limites de temperatura podem ser comparadas da seguinte maneira [24]:

$$\eta_t = \begin{cases} < \eta_{t,\text{rev}} & \text{Máquina térmica irreversível} \\ = \eta_{t,\text{rev}} & \text{Máquina térmica reversível} \\ > \eta_{t,\text{rev}} & \text{Máquina térmica impossível} \end{cases} \quad (2-3)$$

3.4 CICLO STIRLING

O autor [24] completa que para que o ciclo de uma máquina térmica seja completamente reversível é necessário que a diferença de temperatura entre o fluido de trabalho e a fonte de calor (ou o sumidouro) nunca deva exceder uma quantidade diferencial dT durante qualquer processo de transferência de calor. Dessa maneira, ambos os processos, adição e rejeição de calor, durante o ciclo necessariamente devem ocorrer de forma isotérmica aonde um deles está acontecendo a uma temperatura T_H e o outro a uma temperatura T_L , ou seja, é dessa maneira que o ciclo de Carnot se comporta. A autor [24] ainda afirma que o Ciclo Stirling difere do ciclo de Carnot pois os processos isentrópicos são substituídos por dois processos de regeneração ¹ a volume constante. Isso pode ser observado com os diagramas $T - s$ e $P - v$ do ciclo Stirling que é composto por quatro processos totalmente reversíveis, ver figura 2, sendo eles:

- **Processo 1 – 2** Expansão a $T = \text{constante}$ com fornecimento de calor da fonte externa;
- **Processo 2 – 3** Regeneração a $v = \text{constante}$ com transferência de calor interna do fluido de trabalho para o regenerador;
- **Processo 3 – 4** Compressão a $T = \text{constante}$ com rejeição de calor para o sumidouro externo;
- **Processo 4 – 1** Regeneração a $v = \text{constante}$ com transferência de calor interna do fluido de trabalho para o regenerador de volta para o fluido de trabalho.

Çengel [24] ainda explica que o motor Stirling consiste em um cilindro com dois pistões em cada lado e um regenerador no meio. O regenerador é usado para o armazenamento temporário da energia térmica e a massa do fluido de trabalho que está contida no regenerador em qualquer instante pode ser considerada desprezível.

Segundo [24], inicialmente a câmara da esquerda abriga praticamente todo o fluido de trabalho (gás), o qual se encontra em alta pressão e temperatura. Durante o processo 1 – 2, calor é transferido para o gás a uma temperatura T_H de uma fonte T_H . A medida em que o gás começa a se expandir isotermicamente, o pistão que se encontra a esquerda irá se mover para fora desenvolvendo trabalho e consequentemente a pressão do gás diminuirá. Durante o

¹Regeneração: processo durante o qual calor é transferido para um dispositivo que armazena energia térmica (conhecido por regenerador) durante uma parte do ciclo, e é transferido de volta para o fluido de trabalho em outra parte de ciclo.

processo 2 – 3 ambos os pistões irão se deslocar para a direita sob a mesma velocidade para que dessa forma o volume seja mantido constante até que todo o gás seja forçado para a câmara da direita. A medida que o fluido de trabalho passa pelo regenerador, calor será transferido para o regenerador e a temperatura do gás cai de T_H para T_L .

Ainda, para que esse processo de transferência de calor seja reversível, a temperatura entre o gás e o regenerador não deverá exceder uma quantidade diferencial dT em nenhum ponto. Assim, a temperatura de regenerador será T_H na extremidade da esquerda e T_L na extremidade da direita do regenerador quando o estado 3 for atingido. Durante o processo 3 – 4, o pistão da direita irá se movimentar para dentro realizando a compressão do gás.

Calor também é transferido do gás para o sumidouro a temperatura T_L , para que a temperatura T_L do gás permaneça constante enquanto a pressão aumenta. Finalmente, durante o ultimo processo, ou seja, em 4 – 1 ambos os pistões iram se movimentar para esquerda justamente pelo mesmo motivo que no processo 2 – 3 afim de manter o volume constante forçando desse maneira todo o gás para a câmara da esquerda. Dessa forma a temperatura do gás se eleva de T_L para T_H quando ele passa através do regenerador e recolhe a energia térmica nele armazenada, resultante do processo 2 – 3, finalizando dessa forma o ciclo.

O autor Çengel, em seu livro [24], finaliza deixando a seguinte observação sobre o ciclo Stirling: o segundo processo que se desenvolve a volume constante ocorre a um volume menor que o do primeiro processo e que a transferência de calor líquida para um regenerador durante um ciclo é igual a zero. Portanto, a energia armazenada no regenerador durante o processo 2 – 3 é igual a quantidade recolhida pelo gás durante o processo 4 – 1. Finalmente, a eficiência do ciclo de Stirling pode ser calculada pela seguinte formula:

$$\eta_{t, \text{Stirling}} = \eta_{t, \text{Carnot}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} \quad (3-3)$$

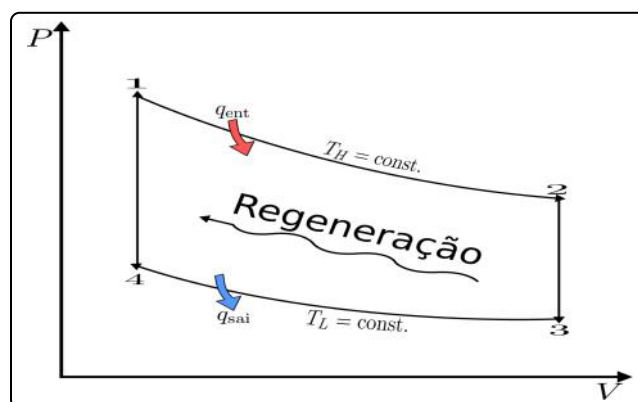


Figura 2: Ciclo Stirling

Fonte: O Autor.

4 FUNDAMENTAÇÃO II: A TEORIA DE SCHMIDT

A modelagem computacional é uma área do conhecimento que costuma tratar da aplicação dos modelos matemáticos utilizando de técnicas de computação e de análise. Dentro dessa situação esse momento servirá para selecionar apenas as equações, parâmetros e constantes agrupando-as de forma lógica e intuitiva afim de facilitar o raciocínio computacional. Cabe destacar que o presente trabalho avalia a necessidade de implementação computacional para o modelo teórico de Schmidt. Tal tarefa é de grande importância porque a implementação e consequentemente sua validação irão servir de base para realizar a validação do modelo termodinâmico computacional, o qual é o foco principal desse trabalho.

4.1 CLASSIFICAÇÃO DOS MOTORES STIRLING

Motores Stirling podem apresentar três tipos (vide figura 3) de classificações: configuração alpha, beta e gamma. Apesar de ambas as configurações apresentarem características mecânicas diferentes, é conveniente questionar que o ciclo termodinâmico é o mesmo para as três especificações. A configuração alpha, foco do presente trabalho, para Motor Stirling apresenta dois pistões, os quais são conhecidos por pistão a quente e pistão a frio em dois cilindros separados. Ambos os pistões servem para transportar o fluido de trabalho entre os cilindros. O Stirling alpha ainda apresenta a vantagem de interconectar o número de cilindros de forma que o espaço de compressão de um cilindro esteja conectado ao espaço de expansão do outro cilindro através de um refrigerador, regenerador e aquecedor conectados em série. Essa é uma grande vantagem porque a possibilidade de combinação dos cilindros oferece uma potência de saída alta podendo ainda, mas não comumente utilizado, ser empregado no segmento automotivo.

Na configuração mecânica do Stirling beta, o deslocador e o pistão de potência são acomodados em um único cilindro, onde o espaço entre as partes mecânicas configura a formação do espaço de compressão. O fluido de trabalho é movido pelo deslocador que se encontra entre os espaços frio e quente através do aquecedor, regenerador e resfriador.

Na configuração mecânica do Stirling gamma, é possível notar uma semelhança com a do Stirling beta. Então, a diferença apresentada por essa classificação é que o deslocador e o pistão de potência são mantidos em dois cilindros separados. Esses cilindros são conhecidos pelos nomes de cilindro de deslocamento (expansão) e cilindro de compressão. Ambos os cilindros são comunicados por intermédio de um refrigerador, regenerador e um aquecedor. Nessa situação, a vantagem mecânica é a presença de um pistão de dupla ação onde ainda é possível uma maior eficiência mecânica.

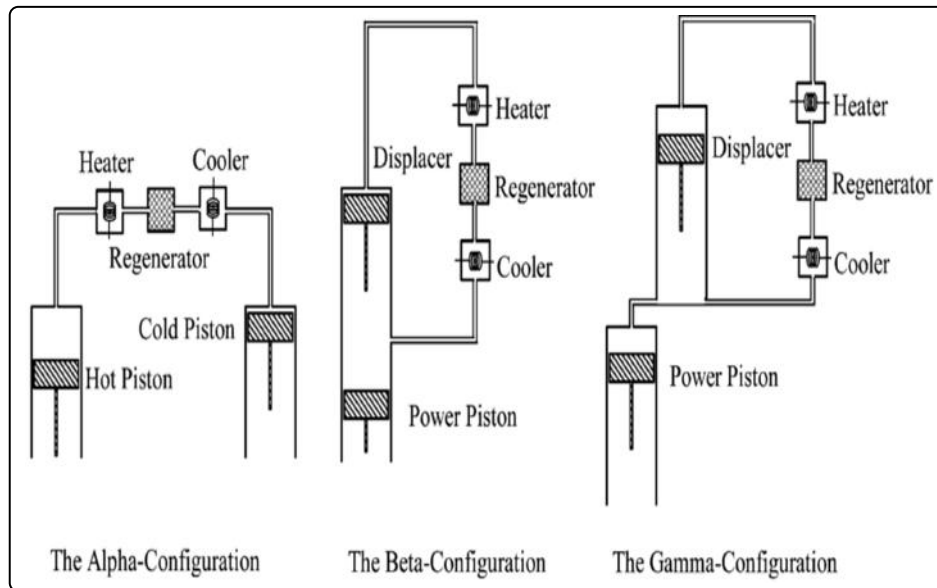


Figura 3: Tipos de Motores Stirling

Fonte: <https://i.pinimg.com/originals/53/0f/eb/530feb02b0484a4121a038efd6f4f87b.png>

Acessado em: 09/09/2017

4.2 AS HIPÓTESES DA TEORIA DE SCHMIDT

O desempenho de um motor, segundo Hirata [8], pode ser obtido através de um diagrama P - v. O volume no motor pode ser determinado utilizando a geometria do arranjo mecânico. Dessa maneira, quando o volume, a massa do fluido de trabalho e a temperatura são conhecidas, a pressão poderá ser calculada utilizando a equação do gás ideal, através da seguinte equação:

$$Pv = mRT \quad (1-4)$$

e utilizando as seguintes hipóteses (trabalho [8] e livro texto [12]) de Schmidt:

1. Não há perda de pressão nos trocadores de calor e também não há variação de pressão interna. Assim, o comportamento da pressão é uniforme.
2. Ambos os processos de compressão e expansão estão se desenvolvendo sob a forma isotérmica.
3. O fluido de trabalho se encontra dentro das condições de um gás ideal.
4. Existência de um processo regenerativo perfeito.
5. A temperatura do gás no regenerador é uma média das temperaturas de compressão e expansão.

6. Durante o desenvolvimento do ciclo, o espaço do volume morto de expansão manterá a temperatura do gás no momento da expansão. Analogamente, teremos a mesma situação no momento da compressão.
7. Movimento característico do tipo senoidal para a expansão e compressão.

A primeira análise desenvolvida para motores stirling foi realizada por Gustav Schmidt, de acordo com o livro [12]. Essa análise é de tal importância para a ciência que respeitosamente essa teoria herdou o seu próprio nome.

A análise feita por Schmidt contempla ambas as configurações alpha, beta e gamma para um motor stirling. Essa teoria é também um pouco idealizada pois admite como considerações: compressão e expansão isotérmica; regeneração perfeita.

Dessa forma, segue que a teoria de Schmidt é um método de cálculo isotérmico para motores stirling. No início de um projeto, seu valor é muito útil pois com essa teoria é possível uma prévia das dimensões necessárias para atender o projeto e assim simular construir o motor.

4.3 DIMENSIONAMENTO PARA MOTORES STIRLING ALPHA

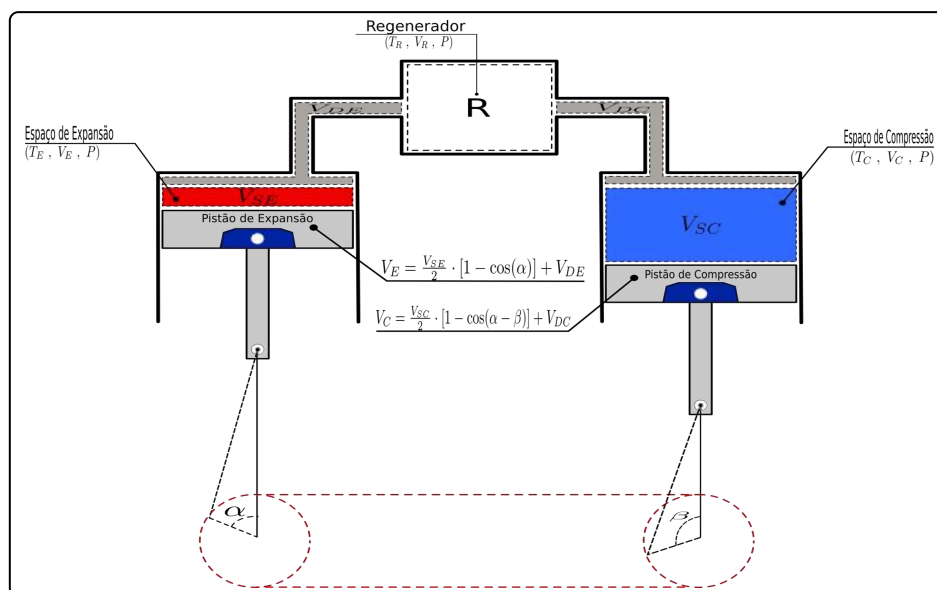


Figura 4: Figura ilustrativa do motor Stirling Alpha

Fonte: O Autor.

O dimensionamento apresentado nessa seção (4.3) do presente trabalho foi baseado no estudo desenvolvido por Hirata [8] para motores stirling. Dessa forma, essa seção (4.3) inteira utilizou como fonte de estudo o trabalho desenvolvido por Hirata. Sua importância para o presente trabalho reside no interesse em desenvolver um modelo computacional a partir dos estudos de Hirata que se encontra baseado na teoria de Schmidt, validá-lo e utilizar o modelo

validado para validar o modelo que justifica esse trabalho. Todo o dimensionamento apresentado e desenvolvido por Hirata também apresenta como referência o livro [12].

Na figura 4 é possível visualizar um modelo esquematizado do motor stirling do tipo alpha. O valor numérico que compreende a fração do volume contido no interior do cilindro será definido em função do arranjo mecânico para a expansão e compressão. Dessa maneira, é possível trabalhar com a aplicabilidade do ângulo de fase α da manivela de modo que a expansão e a compressão se encontrem descritas e definidas. Quando o ângulo de fase da manivela assumir $\alpha = 0$ o pistão se encontrará em expansão, denotado por V_E , assumindo assim a sua posição mais alta que é conhecida como ponto morto superior.

O volume percorrido pelo pistão na expansão será indicado como V_{SE} , bem como o seu respectivo volume morto será conhecido por V_{DE} . Tal nomenclatura está em acordo com a hipótese 7 podendo ser calculado através da seguinte equação:

$$V_E = \frac{V_{SE}}{2} \cdot [1 - \cos(\alpha)] + V_{DE} \quad (2-4)$$

O volume de compressão denotado como V_C pode ser obtido pela equação 3-4. Assim como na expansão, o volume percorrido pelo pistão na compressão será indicado por V_{SC} e seu respectivo volume morto de compressão por V_{DC} . Dessa forma:

$$V_C = \frac{V_{SE}}{2} \cdot [1 - \cos(\alpha - \beta)] + V_{DC} \quad (3-4)$$

Utilizando as hipóteses 1, 2 e 3 é possível realizar o cálculo da massa total denotada por m_t utilizando a pressão P , a constante universal R dos gases juntamente com os volumes de expansão, compressão e do regenerador e respectivamente suas temperaturas indicadas por T_E , T_C e T_R através da seguinte equação:

$$m_t = \frac{PV_E}{RT_E} + \frac{PV_C}{RT_C} + \frac{PV_R}{RT_R} \quad (4-4)$$

O volume total indicado por V pode ser obtido como a soma dos volumes de expansão, compressão e do regenerador, ou seja:

$$V = V_E + V_C + V_R \quad (5-4)$$

As taxas, ou seja, as razões para a temperatura (t), para o volume percorrido (v) e para o volume morto podem ser escritas da seguinte maneira:

$$t = \frac{T_C}{T_E} \quad (6-4)$$

$$v = \frac{V_{SC}}{V_{SE}} \quad (7-4)$$

$$R_{DE} = \frac{V_{DE}}{V_{SE}} \quad (8-4)$$

$$R_{DC} = \frac{V_{DC}}{V_{SE}} \quad (9-4)$$

$$R_R = \frac{V_R}{V_{SE}} \quad (10-4)$$

A temperatura no regenerador será indicada por T_R podendo ser calculada como uma média aritmética entre T_E e T_C :

$$T_R = \frac{T_E + T_C}{2} \quad (11-4)$$

Quando a equação 4-4 é escrita utilizando as equações 6-4 e 11-4, segue que a massa total dos gases indicada por M_g é obtida através da equação:

$$M_g = \frac{P}{RT_C} \cdot \left[tV_E + \frac{2tV_R}{1+t} + V_C \right] \quad (12-4)$$

Utilizando as equações 2-4 e 3-4, é possível reescrever a equação 12-4 da seguinte maneira:

$$M_g = \frac{PV_{SE}}{2RT_C} \cdot [S - B \cdot \cos(\alpha - a)] \quad (13-4)$$

Os coeficientes S , B e a presentes na equação 13-4 representam as seguintes equações:

$$S = t + 2tR_{DE} + \frac{4tR_R}{1+t} + v + 2R_{DC} \quad (14-4)$$

$$B = \sqrt{t^2 + 2tv \cdot \cos(\beta) + v^2} \quad (15-4)$$

$$a = \arctan \cdot \left[\frac{v \cdot \sin(\beta)}{t + \cos(\beta)} \right] \quad (16-4)$$

$$c = \frac{B}{S} \quad (17-4)$$

A diferença entre α e a será conhecida por θ da seguinte maneira:

$$\theta = \alpha - a \quad (18-4)$$

Utilizando a equação 12-4 e isolando a variável de pressão P , fica definido uma equação para o cálculo da pressão no motor:

$$P = \frac{2M_gRT_C}{V_{SE} \cdot [S - B \cdot \cos(\alpha - a)]} \quad (19-4)$$

$$P = \frac{2M_gRT_C}{V_{SE} \cdot [S - B \cdot \cos(\theta)]} \quad (20-4)$$

A pressão média indicada por P_{med} pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_{med} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \oint P d\theta \\ &= \frac{2M_gRT_C}{V_{SE} \cdot [S^2 - B^2]} \end{aligned} \quad (21-4)$$

A partir da equações 20-4 e 21-4 é possível a seguinte equação para a pressão no motor com base na pressão média:

$$\begin{aligned} P &= \frac{P_{med} \cdot \sqrt{S^2 - B^2}}{S - B \cdot \cos(\theta)} \\ &= \frac{P_{med} \cdot \sqrt{1 - c^2}}{1 - C \cdot \cos(\theta)} \end{aligned} \quad (22-4)$$

4.4 EQUAÇÕES PARA A PRESSÃO MÍNIMA E MÁXIMA

Quando $\cos(\theta) = -1$ a pressão P do motor irá se tornar a pressão mínima P_{min} . Utilizando a equação 19-4, obtemos uma nova equação:

$$P_{min} = \frac{2MRT_C}{V_{SE} \cdot (S + B)} \quad (23-4)$$

A partir da equação da pressão média 21-4 a equação 23-4 pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P &= \frac{P_{min} \cdot (S + B)}{S - B \cdot \cos(\theta)} \\ &= \frac{P_{min} \cdot (1 + C)}{1 - C \cdot \cos(\theta)} \end{aligned} \quad (24-4)$$

Analogamente, quando $\cos(\theta) = 1$ a pressão do motor irá se tornar a pressão máxima P_{max} . Novamente, através da equação 19-4 obtemos mais uma nova equação:

$$P_{max} = \frac{2MRT_C}{V_{SE} \cdot (S - B)} \quad (25-4)$$

Utilizando a equação da pressão média 21-4 a equação 25-4 pode ser assim apresentada:

$$\begin{aligned} P &= \frac{P_{max} \cdot (S - B)}{S - B \cdot \cos(\theta)} \\ &= \frac{P_{max} \cdot (1 - C)}{1 - C \cdot \cos(\theta)} \end{aligned} \quad (26-4)$$

4.5 EQUAÇÕES PARA O TRABALHO E EFICIÊNCIA

Em um diagrama $P - v$ as áreas indicadas nos espaços de compressão e expansão podem ser calculadas analiticamente fazendo o uso das equações anteriormente desenvolvidas. O trabalho no momento da expansão será indicado por W_E e será levado em consideração as pressões média, mínima e máxima obtendo a seguinte equação 27-4

$$\begin{aligned}
W_E &= \oint P dv_E \\
&= \frac{P_{med} V_{SE} \cdot \pi \cdot c \cdot \sin(a)}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \\
&= \frac{P_{min} V_{SE} \cdot \pi \cdot c \cdot \sin(a)}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + c}}{\sqrt{1 - c}} \\
&= \frac{P_{max} V_{SE} \cdot \pi \cdot c \cdot \sin(a)}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - c}}{\sqrt{1 + c}}
\end{aligned} \tag{27-4}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, o mesmo pode ser feito para o trabalho W_C no momento da compressão obtendo as seguinte equação:

$$\begin{aligned}
W_C &= \oint P dv_C \\
&= -\frac{P_{med} V_{SE} \cdot t \cdot \pi \cdot c \cdot \sin(a)}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \\
&= -\frac{P_{min} V_{SE} \cdot t \cdot \pi \cdot c \cdot \sin(a)}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + c}}{\sqrt{1 - c}} \\
&= -\frac{P_{max} V_{SE} \cdot t \cdot \pi \cdot c \cdot \sin(a)}{1 + \sqrt{1 - c^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - c}}{\sqrt{1 + c}}
\end{aligned} \tag{28-4}$$

O Trabalho por ciclo do motor é calculado como a soma de W_E e W_C . Portanto:

$$\begin{aligned}
W_T &= W_E + W_C \\
&= \frac{P_{med} V_{SE} \cdot \pi \cdot c \cdot (1 - t) \cdot \sin(a)}{2} \\
&= \frac{P_{min} V_{SE} \cdot \pi \cdot c \cdot (1 - t) \cdot \sin(a)}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + c}}{\sqrt{1 - c}} \\
&= \frac{P_{max} V_{SE} \cdot \pi \cdot c \cdot (1 - t) \cdot \sin(a)}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - c}}{\sqrt{1 + c}}
\end{aligned} \tag{29-4}$$

As relações entre as pressões podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$\frac{P_{min}}{P_{med}} = \sqrt{\frac{1 - c}{1 + c}} \tag{30-4}$$

$$\frac{P_{max}}{P_{med}} = \sqrt{\frac{1 + c}{1 - c}} \tag{31-4}$$

O trabalho W_E referente a expansão significa a presença de um calor de entrada através

de uma fonte para o motor. Para a compressão W_C significa a rejeição desse calor através do resfriamento. Portanto, a eficiência térmica poderá ser calculada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\eta_t &= \frac{W_T}{W_E} \\ &= \frac{W_E + W_C}{W_C}\end{aligned}\quad (32-4)$$

Teoria de Schmidt: Parâmetros e Unidades de Medida		
Abreviatura	Descrição	Unidade
P	Pressão do motor	Pa
P_{med}	Pressão média	Pa
P_{min}	Pressão mínima	Pa
P_{max}	Pressão máxima	Pa
V_E	Volume de expansão	m^3
V_C	Volume de compressão	m^3
V_R	Volume do regenerador	m^3
V_{SE}	Volume no espaço de expansão	m^3
V_{SC}	Volume no espaço de compressão	m^3
V_{DE}	Volume morto de expansão	m^3
V_{DC}	Volume morto de compressão	m^3
V	Volume total	m^3
m_T	Massa total do gás de trabalho	kg
R	Constante dos gases	$J/kg \cdot K$
T_E	Temperatura na expansão	K
T_C	Temperatura na compressão	K
T_R	Temperatura no regenerador	K
n	Rotação do motor	Hz
η_t	Eficiência	—
t	Taxa/razão de temperaturas	—
v	Taxa/razão de volumes	—
R_{DE}	Taxa/razão de volume na expansão	—
R_{DC}	Taxa/razão de volume na compressão	—
R_R	Taxa/razão de volume no regenerador	—
W_E	Trabalho de expansão	J
W_C	Trabalho de compressão	J
W_T	Trabalho total	J
α	Ângulo de fase	graus
β	Incremento do Ângulo da Manivela	graus

Tabela 2: Lista de Parâmetros da teoria de Schmidt
Adaptado da Fonte: Koichi Hirata, Schmidt Theory for Stirling Engines, página 1

4.6 RESULTADOS DA TEORIA DE SCHMIDT

Para a apresentação dos resultados da teoria de Schmidt para Motores Stirling Alpha, foi realizado simulações computacionais embasadas no trabalho de Hirata [8] com o intuito de compreender o comportamento da pressão e volume do motor, confrontando-o verdadeiramente e verificando a veracidade do modelo. Para tanto, foi utilizado como parâmetro de simulação o valor de variação i para o angulo α (verificar as equações: 2-4, 3-4 e 22-4).

Na sequência, se encontra disponível duas tabelas: uma para os dados de entrada (parâmetros conhecidos) e outra para os dados de saída (parâmetros de saída/interesse). Para a validação do modelo desenvolvido, foi utilizado os seguintes argumentos:

1. Desenvolvimento de um modelo computacional a partir dos resultados de Hirata [8] em seu trabalho;
2. Após a compilação do programa, foi confrontado os resultados obtidos com os resultados de Hirata, onde foi obtido êxito;
3. Sequencialmente, foi feita a verificação gráfica do modelo desenvolvido comparando com o obtido por Hirata em seu trabalho.

Os principais resultados são os seguintes gráficos de validação:

1. Gráfico: $P \times V$ - obtido por Hirata;
2. Gráfico: $P \times V$ - teoria de Schmidt para Motores Striling α , desenvolvido nesse trabalho.

Ao final de seu trabalho, como resultado obtido Hirata apresenta o seguinte gráfico:

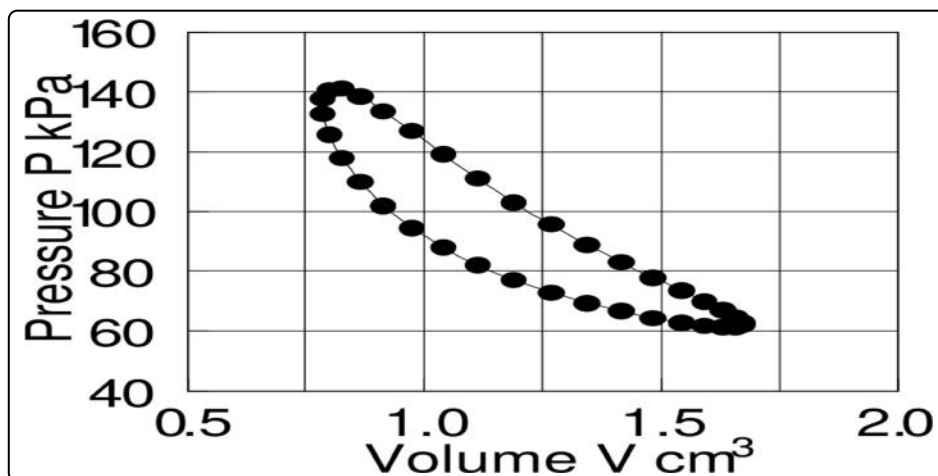


Figura 5: Gráfico $P \times V$, Koichi Hirata

Fonte: Koichi Hirata, Schmidt Theory for Stirling Engines, página 8

O resultado obtido através de desenvolvimento computacional é o seguinte gráfico:

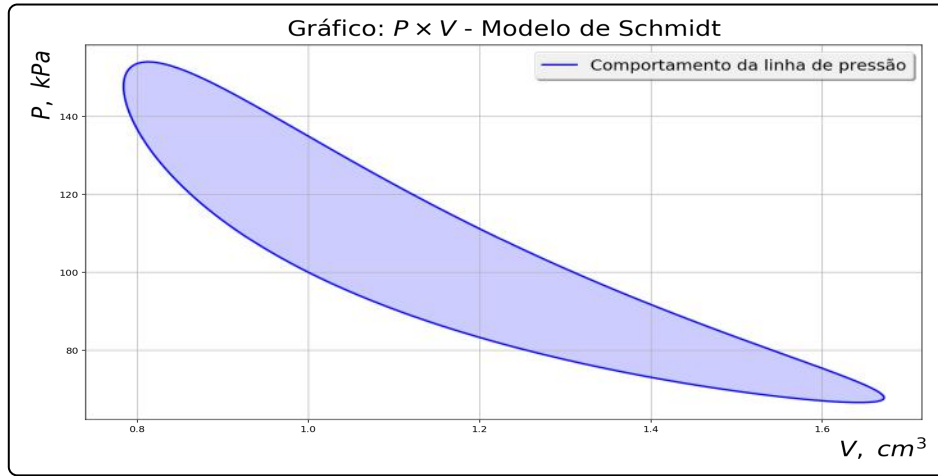


Figura 6: Gráfico $P \times V$, Simulação da Teoria de Schmidt

Fonte: O Autor.

Para o desenvolvimento da simulação, foram utilizados os seguintes dados de entrada apresentados na tabela 3.

Simulação do Método de Schmidt: Parâmetros de Entrada		
Parâmetro	Valor	Unidade
V_{SE}	0,628	cm^3
V_{SC}	0,628	cm^3
V_{DE}	0,200	cm^3
V_{DC}	0,200	cm^3
V_R	0,200	cm^3
T_E	400	$^{\circ}C$
T_C	30	$^{\circ}C$
β	90	degrees
P_{mean}	101,3	kPa
E_S	2000	rpm

Tabela 3: Simulação do Método de Schmidt

Fonte: O Autor.

Após o desenvolvimento da simulação, os resultados obtidos são apresentados na tabela

4.

Simulação do Método de Schmidt: Parâmetros de Saída		
Parâmetro	Valor	Unidade
P_{max}	154	<i>kPa</i>
P_{min}	67	<i>kPa</i>
V_{max}	1,030	<i>cm³</i>
V_{min}	0,200	<i>cm³</i>
V_E	0,200	<i>cm³</i>
V_C	0,514	<i>cm³</i>
t	0,450	—
V	1,000	—
R_{DE}	0,318	—
R_{DC}	0,318	—
R_R	0,318	—
a	65,75	degrees
S	2,769	—
B	1,096	—
c	0,396	—
W_E	37.617	<i>k/J</i>
W_C	-16.940	<i>k/J</i>
W_i	20.676	<i>k/J</i>
E	54.97	%
P	689.210	<i>kW</i>

Tabela 4: Resultado da simulação do Método de Schmidt

Fonte: O Autor.

5 FUNDAMENTAÇÃO III: O MODELO DE DUAS-TEMPERATURAS

Do ponto de vista termodinâmico, é possível expressar o princípio da conservação da energia através de um balanço de energia envolvendo a relação da variação líquida da energia total que representa o processo que se encontra em análise como uma igualdade entre a diferença da energia total que entra pela energia total que sai durante o processo [24].

Tal representação é de extrema importância para esta seção do trabalho pois é com essa que se torna possível compreender fisicamente o estudo do motor stirling alpha e dessa maneira realizar o desenvolvimento de um modelo matemático que compreenda corretamente o funcionamento do arranjo mecânico do motor com relação as variações de pressão, temperatura e consequentemente obtenção dos resultados termodinâmicos desejados.

Dessa maneira é muito conveniente explicar a situação ilustrada. Dentro desse contexto, temos a necessidade de um balanço de energia global composto por três balanços de energia e massa locais. Logo, é possível descrever, mas não de forma completa, a parte energética do modelo. Sua descrição completa deve contemplar o movimento do arranjo mecânico do motor para variações nos parâmetros de pressão e volume tornando possível expressar as quantidades de interesse para passos unitários com relação a revolução do arranjo mecânico, computando as propriedades desejadas.

Dando sequência ao trabalho, uma vez que o modelo referente a teoria de Schmidt para motores stirling alpha se encontra validado (ver seção 4.6), essa informação será utilizada para validar o modelo de Duas-Temperaturas. Sendo assim, será utilizada uma abordagem melhor para o movimento dos pistões: de puramente senoidal (Schmidt) para um movimento biela manivela com $x(\alpha)$ com memorando calórico para o modelo termodinâmico.

5.1 A REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DO MODELO

A figura 7 serve para ilustrar o modelo desenvolvido para o motor stirling alpha levando em consideração os seguintes pontos: estudo das propriedades termodinâmicas através do balanço de energia e de massa e variações na pressão e temperatura com relação a revolução do arranjo mecânico.

A área delimitada em retângulo vermelho tracejado representa a região de compressão e de elevada temperatura indicada como H . Nessa região também se encontra a massa de gás de trabalho m_1 . O número 1 retrata o máximo deslocamento que o pistão de compressão poderá percorrer, ou seja, 1 indica na realidade o início da região do regenerador denotada como R .

O movimento do pistão de compressão implica na diminuição do volume dentro cilindro e na transferência de parte da massa do gás de trabalho que se encontra nesse cilindro para o regenerador. Dentro desse esquema de funcionamento, segue que a massa do gás de sai de H é a

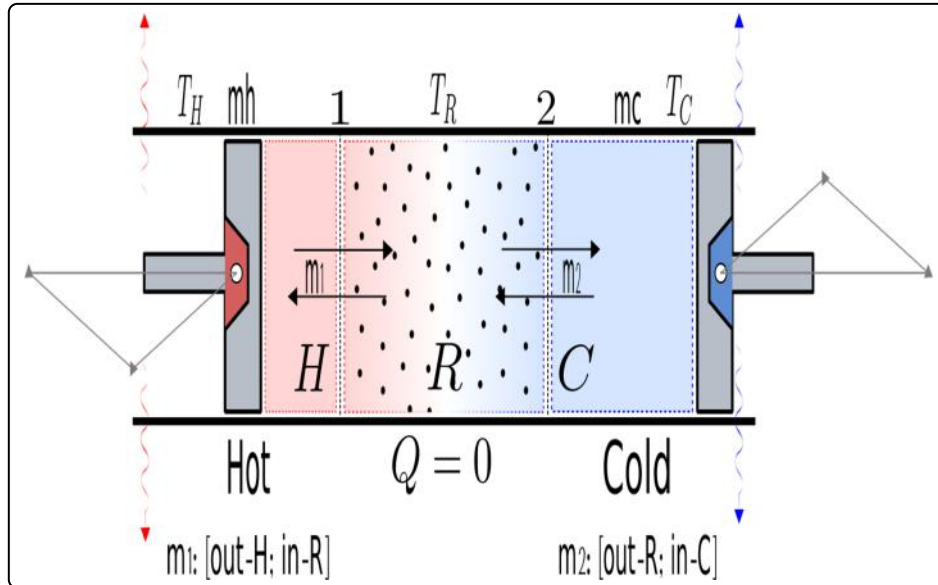


Figura 7: Ilustração do modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

massa de gás que entra em R .

Para a área retangular em azul tracejado, temos a representação da região de expansão e de baixa temperatura indicada por C . Analogamente, a massa do gás de trabalho é M_2 e o número 2 compreende o máximo deslocamento que o pistão de expansão poderá percorrer, ou seja, isso indica o termino do regenerador.

O movimento do pistão de compressão implica no aumento do volume em seu cilindro e também na transferência de parte da massa do gás de trabalho de R para C . Novamente, dentro dessa metodologia de funcionamento, a massa de gás que sai de R é a massa que entra em C no cilindro de compressão.

A área delimitada pelo retângulo vermelho/azul tracejado serve para representar o regenerador R do motor. A sua temperatura pode ser calcula como a média das temperaturas quente, T_H , e fria, T_C .

O ilustrado funcionamento deverá estar em acordo com o arranjo mecânico da seguinte maneira:

1. Conforme o pistão de compressão se movimentar, temos uma queda no volume, um aumento da temperatura e a transferência de massa do gás de trabalho para a região R . Ao alcançar 1, o cilindro de compressão indicará que foi transferido o máximo de massa do gás para o regenerador, cessando assim seu movimento compressivo;
2. Sequencialmente, o movimento de expansão apresenta um aumento no volume e diminuição na temperatura. Tal aumento no volume é proveniente da massa de gás vinda da região H . Quando o pistão de compressão atingir seu máximo em 1, o pistão de expansão atingirá seu mínimo com capacidade de volume máximo de massa de gás.

5.2 O MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático, desenvolvido utilizando termodinâmica moderna composta por análise através de balanços de massa e energia, e é uma representação física do problema para o motor stirling alpha. Tal formulação se baseia nos seguintes passos:

1. Desenvolvimento de uma expressão para o calculo da pressão: é necessário obter tal expressão já no inicio porque essa irá ser utilizada para as demais equações do modelo. Então, determiná-la já é muito útil e proveitoso;
2. Desenvolvimento de um balanço de energia global: Informação muito utilizado pois é possível contemplar a situação como um todo;
3. Fazer um balanço de massa em H : Uma vez que a equação da pressão está determinada (1) é possível o balanço obtendo a quantidade de interesse $m_{1,i}$;
4. Fazer um balanço de massa em C : Analogamente, uma vez que a equação da pressão está determinada (1) é possível o balanço obtendo a quantidade de interesse $m_{2,i}$;
5. Fazer um balanço de energia em H : Como a equação para valores de pressão e o balanço de massa em H já estão devidamente expressos (1) e (3), através desse balanço de energia é possível conhecer os valores para o trabalho e o calor de interesse em H ;
6. Fazer um balanço de energia em C : Analogamente, como a equação para valores de pressão e o balanço de massa em C já estão devidamente expressos (1) e (4), através desse balanço de energia é possível conhecer os valores para o trabalho e o calor de interesse em C ;
7. Fazer um balanço de massa em R : Uma vez que as equações de massas já estão definidas por causa do balanço de massa anteriormente realizado em H e C , esse calculo já é possível;
8. Fazer um balanço de energia em R : A partir dos balanços em H e C e juntamente com seus calores c_p e temperaturas T_H e T_C , é possível determinar o balanço de energia no regenerado do motor;
9. O Balanço Global: Quando os balanços locais estão previamente calculados, é viável determinar o balanço global que consiste em computar os balanços locais anteriormente explanados.

A representação física do problema incorporado pelo modelo matemático também assume as seguintes hipóteses:

1. Comportamento uniforme para a pressão, ou seja, não há perda de pressão nos trocadores de calor e também não há variação interna de pressão;

2. A temperatura no regenerador é a média das temperaturas de compressão, T_H , e expansão, T_C ;
3. O movimento característico é do tipo real para um biela-manivela onde temos $x(\alpha)$;
4. A atualização (*update*) dos termos de projeto se processa da seguinte maneira: $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$;
5. Para o projeto e cálculos, os valores de temperatura e pressão são conhecidos;
6. O volume do regenerador R é constante;
7. Utilizar a adição de um termo de calor em R para desenvolvimento e obtenção de identidade desejada. Dessa forma, conseguimos trabalhar com o hipótese do regenerador funcionar como um reservatório térmico. Apesar do mesmo tender a compressão isentrópico esse não a faz em virtude do contato térmico com a matriz sólida. Ainda admitindo que as paredes externas do regenerador sejam adiabáticas, é útil considerar a alta dissipação de calor pelos poros da matriz.

5.3 A EQUAÇÃO PARA A PRESSÃO

A partir da equação dos Gases e isolando o parâmetro de massa m , podemos obter os valores para m_h , m_r e m_c da seguinte maneira:

$$PV = mRT \quad (1-5)$$

$$m = \frac{PV}{RT} \quad (2-5)$$

Agora, atualizando essas informações para as quantidades de interesse a serem determinadas:

$$m_h = \frac{PV_h}{RT_h} \quad (3-5)$$

$$m_r = \frac{PV_r}{RT_r} \quad (4-5)$$

$$m_c = \frac{PV_c}{RT_c} \quad (5-5)$$

Dessa forma, podemos efetuar o calculo da massa total da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
m_t &= m_h + m_r + m_c \\
&= \frac{PV_r}{RT_r} + \frac{PV_h}{RT_h} + \frac{PV_c}{RT_c} \\
&= \frac{P}{RT_c T_h T_r} (T_c T_h V_r + T_c T_r V_h + T_h T_r V_c)
\end{aligned} \tag{6-5}$$

Agora, uma vez que as quantidades de interesse m_h , m_r e m_c estão determinadas e escritas em função da massa total m_t através da pressão e temperatura, podemos realizar a determinação dessas quantidades de forma atualizada (*updated*) levando em consideração o movimento de revolução do arranjo mecânico da seguinte maneira:

- $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$
- $P : P_i \rightarrow P_{i+1}$
- $m : m_i \rightarrow m_{i+1}$
- $V_h : V_{hi} \rightarrow V_{h,i+1}$
- $V_r : V_{Ri} \rightarrow V_{Ri}$
- $V_c : V_{ci} \rightarrow V_{c,i+1}$

Assim, podemos atualizar as equações das massas para um formato acompanhando o movimento i e $i + 1$ do arranjo mecânico, obtendo as seguintes equações:

$$m_{h,i} = \frac{P_i V_{h,i}}{RT_h} \tag{7-5}$$

$$m_{r,i} = \frac{P_i V_{r,i}}{RT_r} \tag{8-5}$$

$$m_{c,i} = \frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} \tag{9-5}$$

$$m_{h,i+1} = \frac{P_{i+1} V_{h,i+1}}{RT_h} \tag{10-5}$$

$$m_{r,i+1} = \frac{P_{i+1} V_{r,i}}{RT_r} \tag{11-5}$$

$$m_{c,i+1} = \frac{P_{i+1}V_{c,i+1}}{RT_c} \quad (12-5)$$

Finalmente, para o desenvolvimento da equação da pressão podemos expressar $m_{1,i}$ e $m_{1,i+1}$ em termos de massa total do tipo $m_{t,i}$ e $m_{t,i+1}$:

$$m_{t,i} = \frac{P_i V_{r,i}}{RT_r} + \frac{P_i V_{h,i}}{RT_h} + \frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} \quad (13-5)$$

$$m_{t,i+1} = \frac{P_{i+1} V_{r,i}}{RT_r} + \frac{P_{i+1} V_{h,i+1}}{RT_h} + \frac{P_{i+1} V_{c,i+1}}{RT_c} \quad (14-5)$$

Agora, igualando-as e resolvendo a variável desejada, ou seja:

$$\frac{P_i V_{r,i}}{RT_r} + \frac{P_i V_{h,i}}{RT_h} + \frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} = \frac{P_{i+1} V_{r,i}}{RT_r} + \frac{P_{i+1} V_{h,i+1}}{RT_h} + \frac{P_{i+1} V_{c,i+1}}{RT_c} \quad (15-5)$$

$$\frac{P_i}{RT_c T_h T_r} (T_c T_h V_{r,i} + T_c T_r V_{h,i} + T_h T_r V_{c,i}) = \frac{P_{i+1}}{RT_c T_h T_r} (T_c T_h V_{r,i} + T_c T_r V_{h,i+1} + T_h T_r V_{c,i+1}) \quad (16-5)$$

A equação para a pressão do modelo termodinâmico de Duas-Temperaturas:

$$\frac{P_{i+1}}{P_i} = \frac{m_{t,i+1} (T_c T_h V_{r,i} + T_c T_r V_{h,i} + T_h T_r V_{c,i})}{m_{t,i} (T_c T_h V_{r,i} + T_c T_r V_{h,i+1} + T_h T_r V_{c,i+1})} \quad (17-5)$$

5.4 BALANÇOS DE MASSAS EM H E C

O princípio da conservação da massa pode ser aplicado a volumes de controle. Dessa maneira, a relação entre a diferença da variação da massa que entra pela massa que sai é igual a variação da massa, constituindo o balanço de massa. Para o desenvolvimento dos balanços de massas necessários, devemos olhar para o esquema de funcionamento do Modelo Duas-Temperaturas na figura 7, destacando as seguintes informações:

1. m_1 : [out-H; in-R]
2. m_2 : [out-R; in-C]

Sendo assim, o balanço de massa para H :

$$\begin{aligned}
m_e - m_s &= \Delta m \\
-m_{1,i} &= (m_{i+1} - m_i)_h \\
-m_{1,i} &= -\frac{P_i V_{h,i}}{RT_h} + \frac{P_{i+1} V_{h,i+1}}{RT_h}
\end{aligned} \tag{18-5}$$

Portanto, a equação para o balanço de massa em H :

$$m_{1,i} = -\frac{1}{RT_h} (-P_i V_{h,i} + P_{i+1} V_{h,i+1}) \tag{19-5}$$

Analogamente, podemos fazer os cálculos do balanço de massa em C :

$$\begin{aligned}
m_e - m_s &= \Delta m \\
m_{2,i} &= (m_{i+1} - m_i)_c \\
m_{2,i} &= -\frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} + \frac{P_{i+1} V_{c,i+1}}{RT_c}
\end{aligned} \tag{20-5}$$

Portanto, a equação para o balanço de massa em C :

$$m_{2,i} = \frac{1}{RT_c} (-P_i V_{c,i} + P_{i+1} V_{c,i+1}) \tag{21-5}$$

5.5 BALANÇOS DE ENERGIA EM H E C

A figura 7 serve também para indicar a presença dos calores no modelo. Dessa forma, o balanço de energia em H é composto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
Q_{ent} + W_{ent} + m_e h_e &= Q_{sai} + W_{sai} + u_h \cdot (m_{i+1} - m_i)_h \\
Q_{ent} + W_{ent} - m_{1,i} c_p T_h &= Q_{sai} + W_{sai} + c_v T_h \cdot (m_{i+1} - m_i)_h \\
Q_{liq,ent} + W_{liq,ent} - m_{1,i} c_p T_h &= c_v T_h \cdot (m_{i+1} - m_i)_h
\end{aligned} \tag{22-5}$$

Olhando para o balanço de energia na equação 22-5, podemos notar que a presença de $Q_{liq,ent}$ e $W_{liq,ent}$. Inicialmente, será calculado o trabalho dessa forma:

$$W_{liq,ent} = - \int P d \tag{23-5}$$

Portanto, a equação para o trabalho em H :

$$W_{liq,ent,h} = \frac{1}{2} (P_i + P_{i+1}) (-V_{h,i+1} + V_{h,i}) \quad (24-5)$$

Olhando novamente para a equação 22-5, podemos notar a presença dos termos $-m_{1i}c_pT_h$ e $c_vT_h \cdot (m_{i+1} - m_i)_h$. Uma análise da equação 18-5, torna possível escrever esses termos como uma diferença e assim trabalhar algebricamente com a simplificação de c_p , c_v e T_H . Como o trabalho já está definido em 24-5, podemos rescrever o balanço de energia em H desse modo:

$$\begin{aligned} Q_{liq,ent} &= -W_{liq,ent} + [m_{1i}c_pT_h + c_vT_h \cdot (m_{i+1} - m_i)_h] \\ &= -W_{liq,ent} + [m_{1i}c_pT_h - m_{1i}c_vT_h] \\ &= -W_{liq,ent} + [m_{1i}(c_p - c_v)T_h] \\ &= -W_{liq,ent} + [m_{1i}RT_h] \end{aligned} \quad (25-5)$$

Utilizando as informações das equações 24-5 e 18-5, segue que:

$$Q_{liq,ent,h} = -RT_h \left(-\frac{P_iV_{h,i}}{RT_h} + \frac{P_{i+1}V_{h,i+1}}{RT_h} \right) - \frac{1}{2} (P_i + P_{i+1}) (-V_{h,i+1} + V_{h,i}) \quad (26-5)$$

Simplificando, a equação para o calor em H :

$$Q_{liq,ent,h} = \frac{1}{2} (P_i - P_{i+1}) (V_{h,i+1} + V_{h,i}) \quad (27-5)$$

Analogamente, em C podemos desenvolver a mesma linha de raciocínio. Começando com a equação do balanço de energia em C :

$$\begin{aligned} Q_{ent} + W_{ent} &= Q_{sai} + W_{sai} + m_s h_s + u_c \cdot (m_{i+1} - m_i)_c \\ Q_{ent} + W_{ent} &= Q_{sai} + W_{sai} - m_{2i}c_pT_c + c_vT_c \cdot (m_{i+1} - m_i)_c \\ Q_{liq,ent} + W_{liq,ent} &= -m_{2i}c_pT_c + c_vT_c \cdot (m_{i+1} - m_i)_c \end{aligned} \quad (28-5)$$

Olhando para o balanço de energia na equação 28-5, podemos notar que a presença de $Q_{liq,ent}$ e $W_{liq,ent}$. Analogamente, o calculo do trabalho:

$$W_{liq,ent} = - \int P dv \quad (29-5)$$

Assim, obtemos também uma equação para o trabalho em C:

$$W_{liq,ent,c} = \frac{1}{2} (P_i + P_{i+1}) (-V_{c,i+1} + V_{c,i}) \quad (30-5)$$

Analisando a equação 28-5, notamos a presença dos termos $-m_{2i}c_p T_c$ e $c_v T_c \cdot (m_{i+1} - m_i)_h$. Utilizando os resultados da equação 20-5, é possível escrever esses termos como uma diferença e assim trabalhar algebricamente com a simplificação de c_p , c_v e T_H . Como o trabalho já está definido em 30-5, podemos rescrever o balanço de energia em C:

$$\begin{aligned} Q_{liq,ent} &= -W_{liq,ent} - [m_{2i}c_p T_c - c_v T_c \cdot (m_{i+1} - m_i)_c] \\ &= -W_{liq,ent} - [m_{2i}c_p T_c - m_{2i}c_v T_c] \\ &= -W_{liq,ent} - [m_{2i}(c_p - c_v) T_c] \\ &= -W_{liq,ent} - [m_{2i}RT_c] \end{aligned} \quad (31-5)$$

Utilizando as informações das equações 30-5 e 20-5, segue que:

$$Q_{liq,ent,c} = -RT_c \left(-\frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} + \frac{P_{i+1} V_{c,i+1}}{RT_c} \right) - \frac{1}{2} (P_i + P_{i+1}) (-V_{c,i+1} + V_{c,i}) \quad (32-5)$$

Finalmente, simplificando a equação para o calor em C temos:

$$Q_{liq,ent,c} = \frac{1}{2} (P_i - P_{i+1}) (V_{c,i+1} + V_{c,i}) \quad (33-5)$$

5.6 BALANÇO DE MASSA EM R

Utilizando a imagem 7, o cálculo do balanço de massa no regenerador R pode ser feito da seguinte maneira, inicialmente trabalhando com o lado direito da equação:

$$m_e - m_s = \Delta m_r \quad (34-5)$$

$$\Delta m_r = (m_{i+1} - m_i)_h + (m_{i+1} - m_i)_c \quad (35-5)$$

Utilizando as equações 19-5 e 21-5 referentes aos balanços de massa em H e C podemos obter a seguinte equação:

$$\Delta m_{rhs} = \frac{P_i V_{h,i}}{RT_h} - \frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} - \frac{P_{i+1} V_{h,i+1}}{RT_h} + \frac{P_{i+1} V_{c,i+1}}{RT_c} \quad (36-5)$$

Agora, utilizando o lado esquerdo da equação para o balanço de massa em R:

$$m_e - m_s = \Delta m_r \quad (37-5)$$

$$\Delta m_r = -m_{1,i} - m_{2,i} \quad (38-5)$$

Analogamente, utilizando as equações 19-5 e 21-5 referentes aos balanços de massa em H e C:

$$\Delta m_{lhs} = -\frac{P_i V_{h,i}}{RT_h} + \frac{P_i V_{c,i}}{RT_c} + \frac{P_{i+1} V_{h,i+1}}{RT_h} - \frac{P_{i+1} V_{c,i+1}}{RT_c} \quad (39-5)$$

A obtenção da identidade $id = 0$ para o balanço de massa em R é possível fazendo a soma direta das equações 36-5 e 39-5, obtendo assim o resultado esperado.

5.7 BALANÇO DE ENERGIA EM R

A partir das seguintes equações:

$$m_e h_e = m_s h_s + u_R \cdot (m_{i+1} - m_i)_R \quad (40-5)$$

$$m_{1,i} c_p T_h = m_{2,i} c_p T_c + u_R \cdot (P_{i+1} - P_i)_R \quad (41-5)$$

E utilizando os balanços de massa em H e C, ver as equações 36-5 e 39-5, devemos levar em consideração seus valores c_p e temperaturas, de modo que o lado o lado direito da equação 41-5 fica:

$$Rhs_{reg} = -\frac{V_{r,i} c_v}{R} (P_i - P_{i+1}) \quad (42-5)$$

Dentro da mesma linha de raciocínio, podemos escrever o lado esquerdo da equação 41-5 dessa forma:

$$Lhs_{reg} = \frac{c_p}{R} (P_i V_{c,i} + P_i V_{h,i} - P_{i+1} V_{c,i+1} - P_{i+1} V_{h,i+1}) \quad (43-5)$$

Olhando para a figura 7, notamos que $Q = 0$. Ou seja, para que a identidade no balanço de energia do regenerador seja obtida, é necessário adicionar um termo de adição de calor da seguinte maneira:

$$Q_{liq,reg} = -\frac{1}{R} (P_i V_{c,i} c_p + P_i V_{h,i} c_p + P_i V_{r,i} c_v - P_{i+1} V_{c,i+1} c_p - P_{i+1} V_{h,i+1} c_p - P_{i+1} V_{r,i} c_v) \quad (44-5)$$

Dessa forma, ao desenvolvermos a soma de 42-5, 43-5 e 44-5, obtemos o resultado esperado.

5.8 BALANÇO GLOBAL

O cálculo do balanço global pode ser feito da seguinte maneira:

1. Cilindro de compressão (H): Utilizar a soma das equações 19-5 e 27-5;
2. Cilindro de expansão (C): Utilizar a soma das equações 21-5 e 33-5;
3. Região de regeneração (R): Utilizar os resultados obtidos levando em considerações as identidades.

Dessa forma, o cálculo do balanço global na realidade consiste em computarmos os balanços locais anteriormente calculados. Ao fazermos isso, obtemos a identidade esperada.

5.9 VALIDAÇÃO DO MODELO DE DUAS-TEMPERATURAS

Para a apresentação dos resultados da teoria referente ao modelo de Duas-Temperaturas para Motores Stirling Alpha, foi realizado duas simulações computacionais: primeiro, foi utilizado o formato simbólico para desenvolvimento das expressões desejadas. Dessa forma simbólica, é possível visualizar melhor os resultados acompanhando o procedimento computacional empregado; segundo: utilizando os mesmos dados de entrada do programa desenvolvido para a teoria de Schmidt, foi simulado um caso onde o limite com $L \gg R$, onde L é o comprimento da biela e R é o raio da manivela, resulta em $r \cdot (1 - \cos(\alpha))$. Dessa forma, como o modelo descrito pelo programa pelo novo programa (atual) é muito mais completo que os parâmetros utilizados por Hirata para a teoria de Schmidt, é necessário utilizar o limite com $L \gg R$ tornando assim o modelo atual um modelo de Schmidt e dessa forma é possível realizar a validação desejada [14].

Ou seja, uma vez que o modelo mais completo (Duas-Temperaturas) acaba se tornando o modelo mais simples (Schmidt), na realidade acabamos por ter um modelo de Schmidt. Dessa forma, se tornou conveniente que os resultados coincidam, fazendo sentido o procedimento de validação a partir da hipótese do limite. Para tal procedimento, foram utilizados os seguintes argumentos:

1. Desenvolvimento de um modelo computacional utilizando de movimento real para o mecanismo biela manivela;
2. Utilizar o limite com $L \gg R$ para os parâmetros geométricos;
 - (a) $x_h = L \left(-\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2(\alpha)} + 1 \right) + R(-\cos(\alpha) + 1)$;
 - (b) $x_c = L \left(-\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \sin^2(\alpha + \gamma)} + 1 \right) + R(-\cos(\alpha + \gamma) + 1)$;
 - (c) Fazendo o cálculo do limite com, obtemos os seguintes resultados:
 - (d) $x_h = R(-\cos(\alpha) + 1)$;
 - (e) $x_c = R(-\cos(\alpha + \gamma) + 1)$.
3. Após a compilação do programa, em conjunto com os resultados da seção 4.6, foi feita a verificação do procedimento afim de garantir o funcionamento do modelo implementando.

O principal resultado foi o seguinte gráfico de validação:

1. Graph: $P \times V$ e $\log \log P \times V$ - Schmidt \times Duas-Temperaturas;

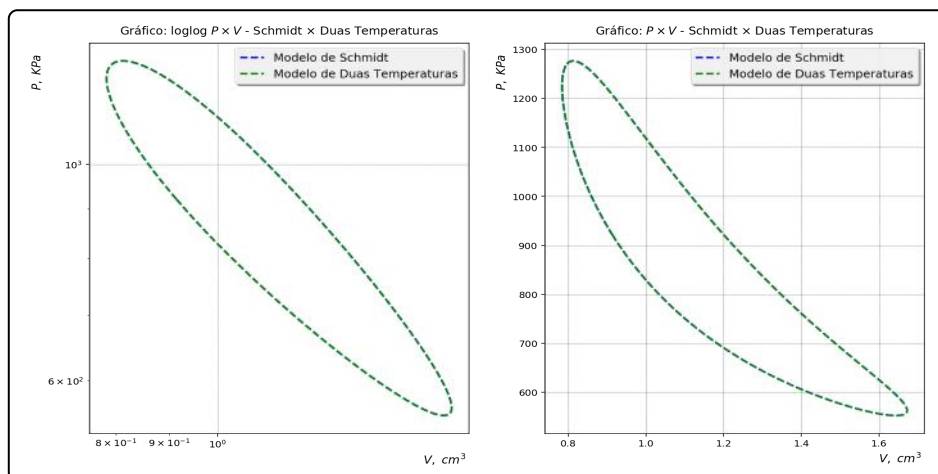


Figura 8: Gráfico de comparação entre $\log \log P \times V$ e $P \times V$

Fonte: O Autor.

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Preliminarmente, realizar o desenvolvimento da simulação da metodologia utilizada por Schmidt. A descrição do modelo significa explorar cientificamente a apresentação das hipóteses que contemplam tal modelo bem como o desenvolvimento e exposição das equações matemáticas que o governam.

Na sequência, fazer a implementação computacional do modelo proposto a partir do desenvolvimento de um modelo matemático para o motor Stirling alpha. Para tal tarefa, será utilizadas modernas técnicas de implementação do mesmo modo que será empregadas ferramentas e interfaces gráficas contemporâneas e *open source* para o devido desenvolvimento.

Uma vez que o modelo matemático está devidamente implementado, será necessário validá-lo. Para tanto, a elaboração de tais informações significa confrontá-las com aquelas disponíveis na literatura, validando assim o modelo.

Finalmente, uma vez que ambas as tarefas anteriormente reportadas estão precedidas de êxito, utilizar o modelo desenvolvido para a obtenção dos resultados de interesse.

7 RESULTADOS

Os Resultados desse Trabalho de Conclusão de Curso são apresentados sequencialmente nos sub-tópicos dessa seção.

7.1 A RELAÇÃO ENTRE A PRESSÃO E O VOLUME

Considerando que o fluido de trabalho se encontra em um cilindro hermético (não há perdas internas ou variação de pressão), é possível realizar trabalho nesse gás através do movimento cilindro pistão. Sendo assim, a forma mais conveniente de visualizarmos as variações na pressão e volume é justamente através de um gráfico $P \times V$ onde cada ponto do gráfico corresponde a um estado diferente para o gás, ou seja, enquanto o gás está passando por processos termodinâmicos essas informações serão apresentadas no gráfico conforme tal variação se desenvolva.

Em ambos os modelos desenvolvidos nesse trabalho é possível trabalhar com a pressão relacionando-a com o ângulo de simulação α . Porém, a grande diferença entre Schmidt e Duas-Temperaturas se encontra na relevância das informações presentes nas equações onde, em Duas-Temperaturas temos informações mais completas para a descrição da pressão.

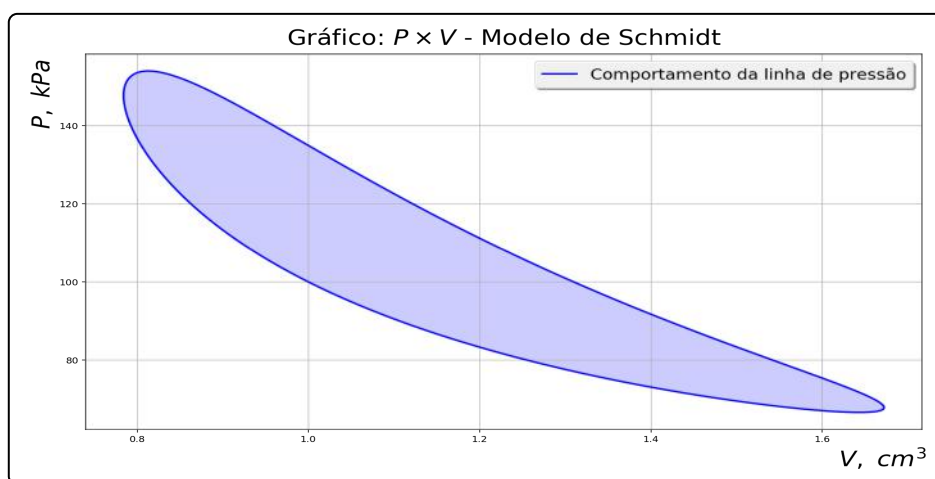


Figura 9: Gráfico $P \times V$: Teoria de Schmidt
Fonte: O Autor.

A quantidade de massa m do gás de trabalho é extremamente importante por dois motivos principais: um, é uma informação que implica diretamente no valor do cálculo da pressão; dois, um bom fluxo de massa influenciará positivamente, gerando uma boa transferência de calor. Dessa forma, uma vez que o modelo Duas-Temperaturas foi validado, o mesmo foi utilizado

levando em consideração o cálculo para a massa de gás e inclusive a constante do gás, ver figura 10. Quando esses dois valores são levados em consideração nas contas, obtemos variação na pressão e no volume.

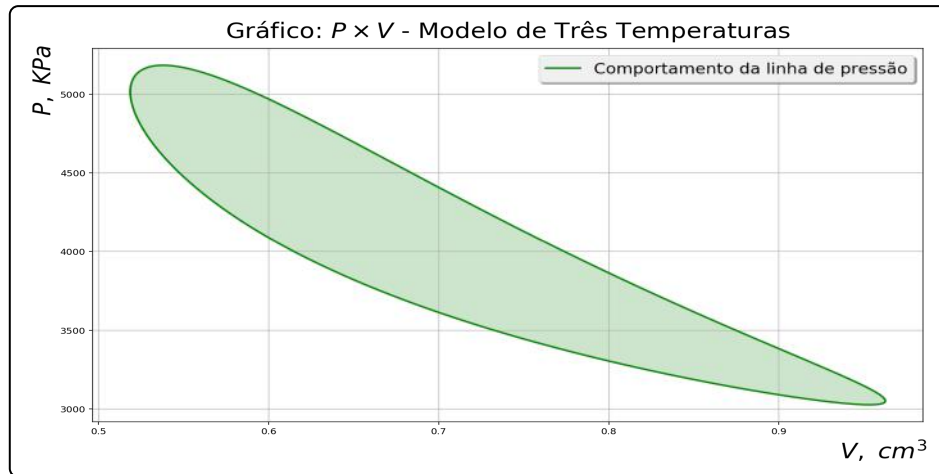


Figura 10: Gráfico $P \times V$: Modelo de Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

O gráfico $P \times V$ também pode ser expresso em termos de um gráfico logarítmico. Para tanto, foi desenvolvido um gráfico aonde é possível visualizar ambos os gráficos (normal e logarítmico) lado a lado conforme a figura 11.

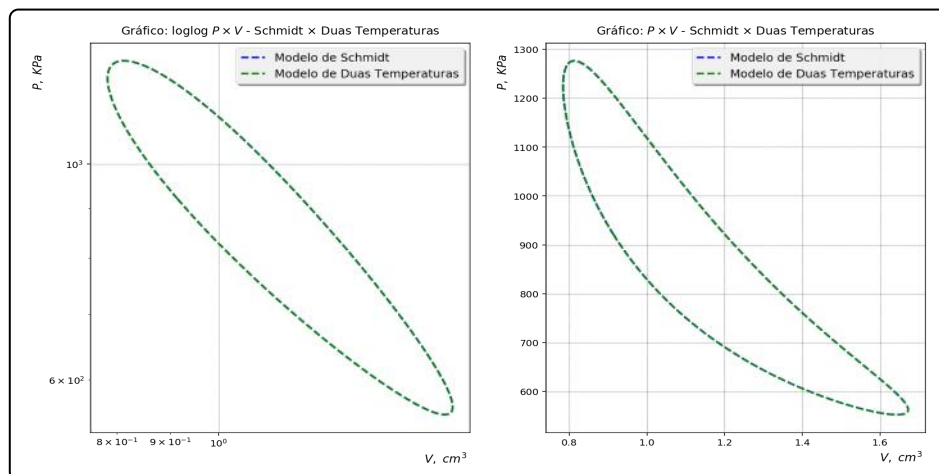


Figura 11: Gráfico $P \times V$: Validação
Fonte: O Autor.

7.2 O TIPO DE MOVIMENTO CARACTERÍSTICO NOS MODELOS

Dentro desse contexto, temos duas abordagens principais para a movimentação do arranjo mecânico: primeira, o modelo de Schmidt leva em consideração um movimento puramente

senoidal (ver figura 12) para o desenvolvimento e comportamento do volume com relação ao ângulo α ; segunda, o modelo de Duas-Temperaturas aborda um movimento real para o arranjo cilindro pistão segundo [3].

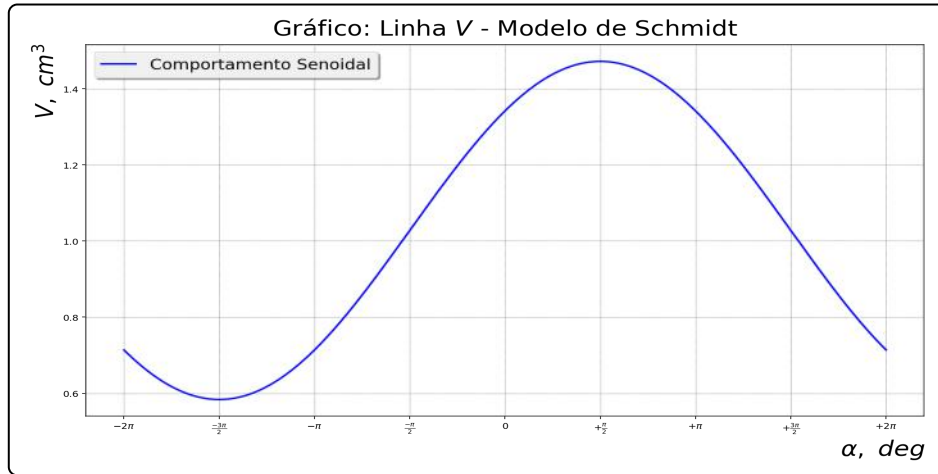


Figura 12: Gráfico Linha V: Teoria de Schmidt

Fonte: O Autor.

Apesar de parecer vantajoso contabilizar a variação de volume senoidalmente, isso de fato não é porque quando consideramos os parâmetros geométricos puramente trigonométricos, estamos deixando de contabilizar informações como: a massa do gás de trabalho, a constante do gás (responsável por relacionar a quantidade desse gás com a temperatura e pressão), o valor do diâmetro e inclusive o comprimento L da biela. Por esses motivos que o método de Schmidt acaba se tornando pobre quando desejamos realizar uma análise mais completa.

Para o modelo Duas-Temperaturas, foi calculado o limite utilizando $L \gg R$, reproduzindo assim o modelo Duas-Temperaturas em um modelo de Schmidt. Dessa forma conseguimos manter o movimento equivalente aquele enfatizado na teoria de Schmidt prosseguindo assim com a validação. Porém, esse tipo de movimento foi adotado para fazer valer a validação, logo, o movimento do modelo atual não é trigonométrico e para tanto, devemos levar em consideração variações de volume nos cilindro quente (hot - indicado pela linha vermelha) e frio (cold - indicado pela linha azul) com relação a α . A linha em preto representa o volume zero e o salto entre as curvas de volume a e linha de marcação indica o volume morto do cilindro, ou seja, 0.200 cm^3 .

Em H, o comportamento característico é do tipo compressivo e sua variação de volume se encontra em acordo com a sua acomodação no ponto morto superior. Após esse percorrer o caminho compressivo esse irá iniciar o caminho de expansão. Graficamente é possível observar isso através de sua variação de volume. Desse forma, seu ciclo irá finalizar novamente em seu ponto morto superior onde seu volume indicará o volume morto do cilindro quente. A figura 13 representa a variação de volume em H.

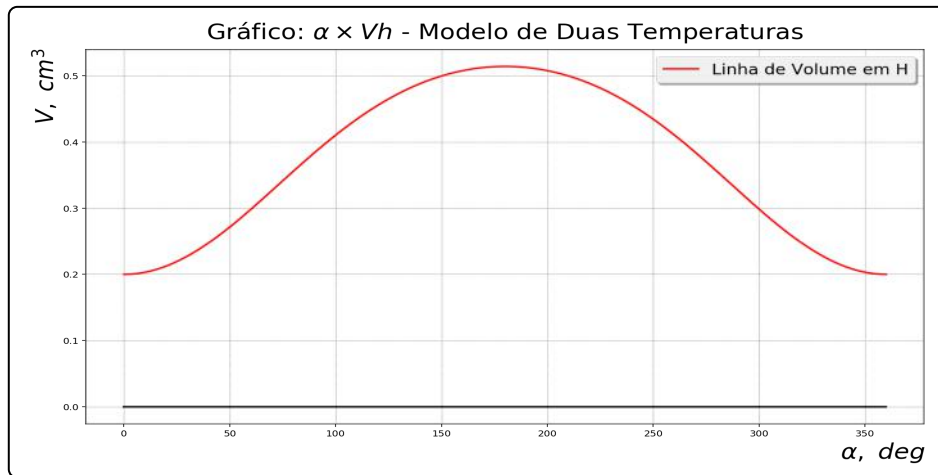


Figura 13: Gráfico Linha V em h: Modelo de Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

Em C, o comportamento característico é o de expansão e sua variação irá ser diferente do valor que representa o volume morto. Isso acontece porque enquanto H está em compressão, C estará em desenvolvimento de expansão. Após percorrer seu caminho de expansão, esse entrará em compressão apresentando uma diminuição do seu volume, o que é possível visualizar graficamente. Assim que o processo de compressão se encerrar, novamente a expansão irá predominar seguida pelo respectivo aumento do volume. A figura 14 representa a variação de volume em H.

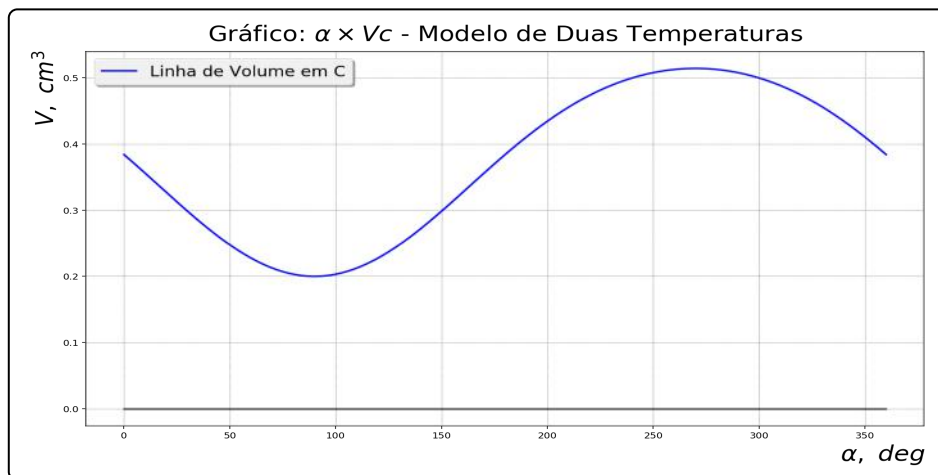


Figura 14: Gráfico Linha V em c: Modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

É possível contabilizar a variação dos volumes realizando suas somas obtendo assim o comportamento do volume no todo, através de um gráfico de volume total para a variação do parâmetro α , representado pela figura 15.

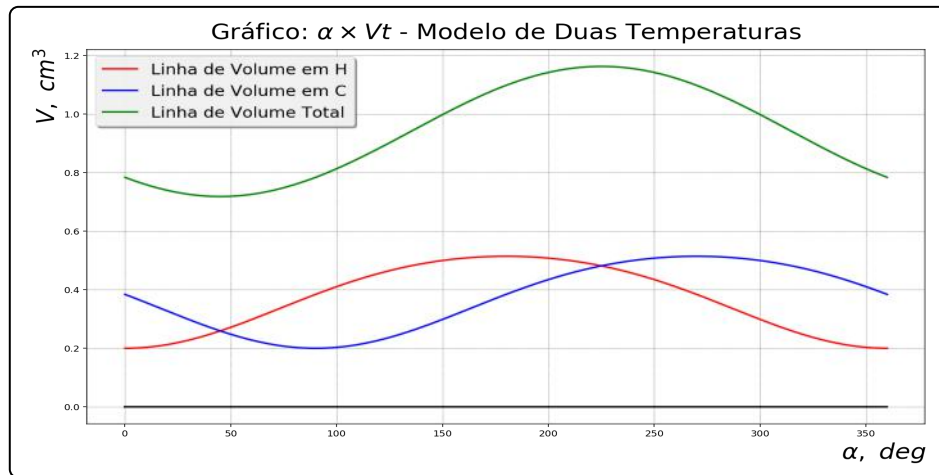


Figura 15: Gráfico Linha V total: Modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

7.3 A RELAÇÃO ENTRE A PRESSÃO, O ÂNGULO E O VOLUME

Pressão, a atuação de uma força em uma unidade de área, nos modelos é influenciada diretamente pela variação do ângulo e do volume. Logo, conforme o volume tende a diminuir no cilindro de compressão a sua pressão tende a aumentar. Analogamente, no cilindro de expansão a pressão será inferior porém o volume irá aumentar. Como já foi mencionado, em ambos os modelos é possível relacionar a pressão com o ângulo α de trabalho. Dessa forma, podemos trabalhar com as informações dos gráficos $P \times \alpha$ e $P \times V$ utilizando a mesma escala de pressão para a variação do ângulo α e do volume V .

Para o modelo simulado da teoria de Schmidt, temos o seguinte gráfico 16:

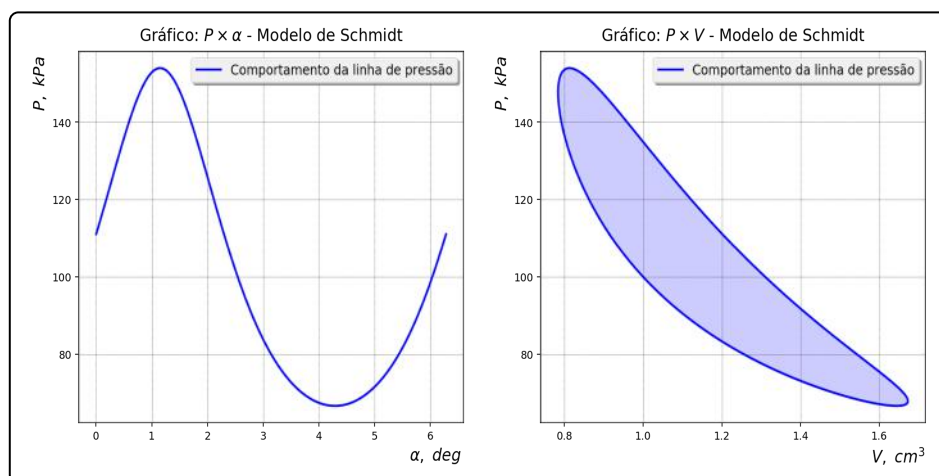


Figura 16: Gráfico $P \times \alpha \times P \times V$: Schmidt
Fonte: O Autor.

Desse forma, sempre que for desejado relacionar os valores do volume V e do ângulo α , podemos utilizar a disposição do array presente no eixo y , que para essa análise se tornou o representante da pressão P . Para o modelo de Duas-Temperaturas, temos o seguinte gráfico representado pela figura 17:

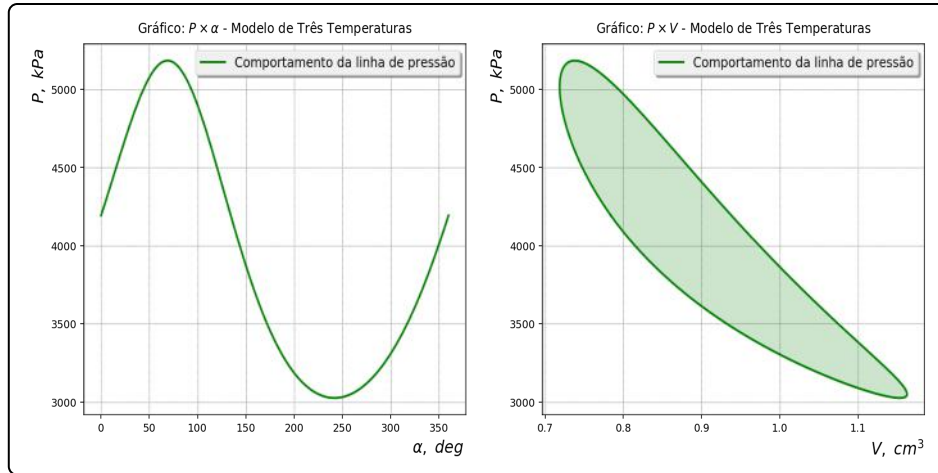


Figura 17: Gráfico $P \times \alpha \times P \times V$: Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

7.4 APRESENTAÇÃO DE GRÁFICOS EM 3D

A projeção em 3D foi feita com o objetivo de visualizar com mais facilidade a relação entre os parâmetros de variação do ângulo, do volume e da pressão. Seu desenvolvimento aconteceu da seguinte maneira: em uma matriz quadrada de tamanho dois por dois foi relacionado os gráficos: $P \times V$ (em cor azul), $P \times \alpha$ (em cor verde) e $V \times \alpha$ (em cor vermelha). Em cor preta é mostrado como resultado a projeção no 3D de ambos os gráficos. Os eixos x , y e z representam respectivamente: o ângulo $\alpha - deg$, o volume $V - cm^3$ e a pressão $P - kPa$. Desse forma, é possível relacionar os valores de interesse obtidos durante o desenvolvimento da simulação. A figura 18 representa a projeção 3D para o modelo de Schmidt:

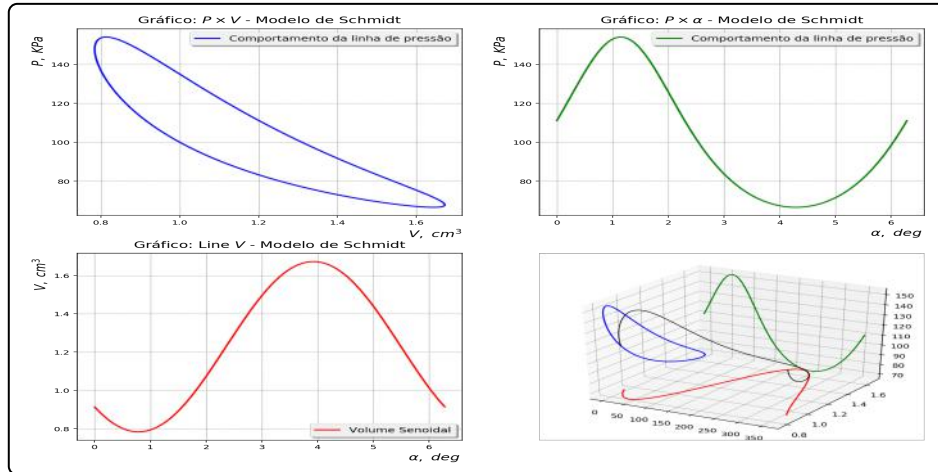


Figura 18: Gráfico de projeção 3D para o Modelo Schmidt
Fonte: O Autor.

Dessa maneira, sempre que necessário é possível relacionar graficamente esse três parâmetros e obter assim mais uma maneira de poder avaliar os valores desejados, ou seja, utilizando os valores dos eixos e cruzando-os dentro do gráfico desenvolvido. A figura 19 representa a projeção 3D para o modelo de Duas-Temperaturas:

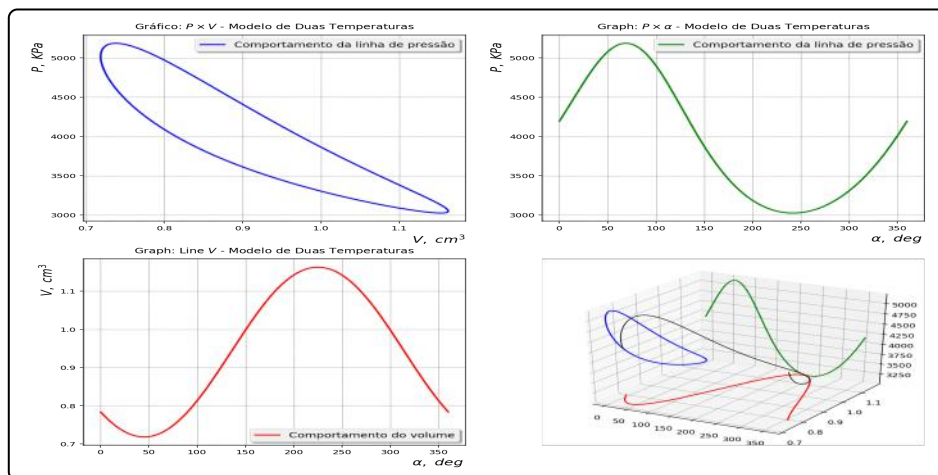


Figura 19: Gráfico de projeção 3D para o Modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

7.5 A RELAÇÃO ENTRE A EFICIÊNCIA E O MODELO PROPOSTO

Um dos objetivos do presente trabalho de conclusão de curso foi o de desenvolver um modelo matemático para motores stirling alpha. Assim, o modelo atual contabiliza explicitamente os detalhes internos do motor e é desenvolvido utilizando uma formulação moderna de termodinâmica, com balanços de massa e energia. Para tanto, foi utilizado as seguintes

formulações:

- Não há geração de entropia;
- Não há irreversibilidades por atrito;
- Todas as transferências de calor ocorrem com diferenças infinitesimais de temperatura, sendo, portanto, reversíveis.

A eficiência acabou por apresentar uma grande importância para o fechamento desse trabalho. Inicialmente, foi desenvolvido um modelo computacional em cima dos resultados de Hirata a partir da teoria de Schmidt. Porém, a teoria de Schmidt utiliza para o cálculo da eficiência a eficiência de Carnot, o que de fato Hirata o fez. Dessa forma, para o modelo matemático desenvolvido deve ser levado em consideração que tanto em H como em C o calor entra e sai alternadamente, logo, o ciclo de Stirling alpha pode ser considerado, em paralelo, como uma associação de uma máquina térmica reversível com uma bomba de calor reversível porque ambos estão trabalhando com temperaturas de operação entre os mesmos limites.

Uma vez que temos essa analogia qualitativa, foi admitido que o motor poderia ser considerado dotado de reversibilidade, porém ainda assim é necessário proceder com a validação desse argumento como prova matemática de que a analogia suposta está de fato correta. Cabe ressaltar, de forma argumentativa, que o sentido de rotação do motor está diretamente ligado a sua reversibilidade. Ou seja, em sentido normal o seu comportamento é de uma bomba de calor e ao se inverter o seu sentido de funcionamento esse se comporta como o motor de Stirling.

Para a validação do modelo, técnicas modernas de termodinâmica foram utilizadas. Ou seja, uma vez que o modelo de Duas-Temperaturas já se encontra validado, esse foi utilizado de posse das seguintes equações:

$$1. W_{liq,ent,h} = \frac{1}{2} (P_i + P_{i+1}) (-V_{h,i+1} + V_{h,i})$$

$$2. Q_{liq,ent,h} = \frac{1}{2} (P_i - P_{i+1}) (V_{h,i+1} + V_{h,i})$$

$$3. W_{liq,ent,c} = \frac{1}{2} (P_i + P_{i+1}) (-V_{c,i+1} + V_{c,i})$$

$$4. Q_{liq,ent,c} = \frac{1}{2} (P_i - P_{i+1}) (V_{c,i+1} + V_{c,i})$$

Onde o cálculo do trabalho foi realizado utilizando o trabalho líquido de entrada pelo calor líquido de entrada. Em seu trabalho, Hirata, como já foi comentado, utilizou para o cálculo da eficiência a eficiência de Carnot obtendo 54,97%. Para a validação do modelo atual, foi utilizado os mesmos parâmetros utilizados por Hirata porém em termos de termodinâmica moderna e portanto, a eficiência térmica para o modelo atual apresentou o valor de 54.9656%.

Dessa maneira, utilizando o princípio de Carnot que diz que quando máquinas térmicas reversíveis estão operando entre os mesmos limites de temperaturas essas devem ter a mesma eficiência, validando assim a reversibilidade do modelo proposto.

Dessa forma, o comportamento esperado para a máquina térmica em seu cilindro de compressão é que entre mais calor do que aquele que o está deixando. Isso realmente acontece e pode ser observado na seguinte figura 20. Inicialmente negativo, após passar pela posição de ponto morto superior e começar de fato a compressão sua temperatura tende a se elevar.

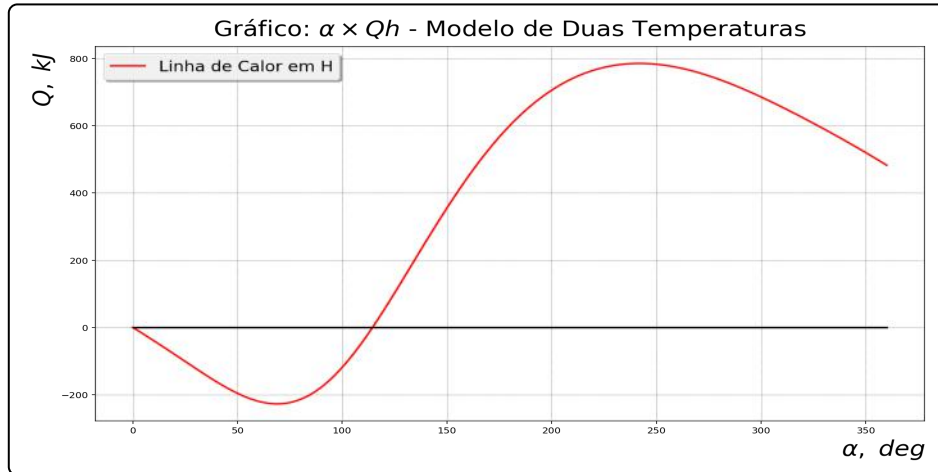


Figura 20: Linha de calor em H para o Modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

Na sequência do movimento do motor, no cilindro de expansão o comportamento desejado é aquele em que sai mais calor do que o que está entrando. É possível observar tal comportamento na figura 21. Isso é uma consequência do movimento de compressão em H, pois nesse momento C deverá estar em expansão e conseqüentemente em temperatura mais baixa que em H.

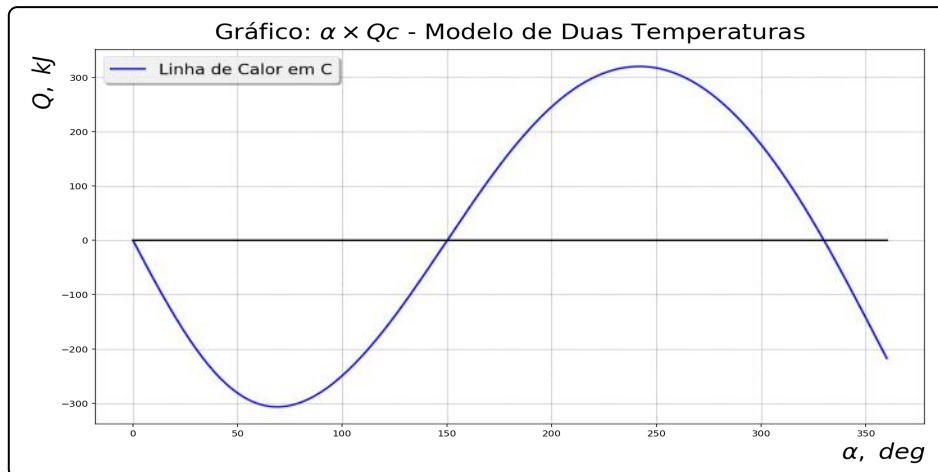


Figura 21: Linha de calor em C para o Modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

Finalmente, ao plotarmos ambos os gráficos em um única figura para facilitar a compreensão dos resultados, obtemos a seguinte imagem 22:

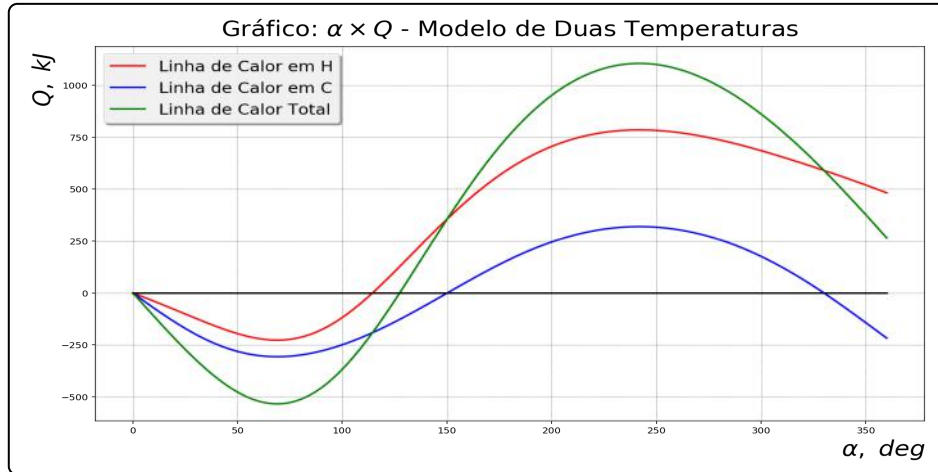


Figura 22: Linhas de calor para o Modelo Duas-Temperaturas
Fonte: O Autor.

8 CONCLUSÃO

O presente trabalho de conclusão de curso apresentou o desenvolvimento da simulação do modelo de Schmidt para motores stirling. Sua implementação se baseou no estudo desenvolvido por Hirata, o qual desenvolveu seu trabalho fundamentado nos estudos e hipóteses de Schmidt. Uma característica muito particular da teoria de Schmidt para motores stirling é o movimento do arranjo mecânico ser tratado puramente como senoidal para a avaliação da variação do volume em ambos os cilindros de compressão e expansão.

A simulação desse modelo computacional, após a implementação, foi validada com os dados presentes na literatura. Dessa forma, como resultado principal foi exibido um gráfico do tipo $P \times V$.

Um dos objetivos desse trabalho foi o de desenvolver também um modelo computacional moderno para motores stirling. Para tal tarefa, um novo programa foi desenvolvido levando em consideração parâmetros modernos em equações mais completas que aquelas utilizadas para a teoria da Schmidt. Dessa forma, uma característica marcante do modelo de Duas-Temperaturas é o fato do movimento do arranjo mecânico não ser puramente senoidal, mas sim um movimento real para $x(\alpha)$.

Comparando as equações presentes nos no modelo de Schmidt e no modelo proposto nesse trabalho, é possível notar que o modelo Duas-Temperaturas é mais completo que o modelo de Schmidt. Portanto, uma vez que Duas-Temperaturas é mais amplo quando comparado com Schmidt, a ideia por trás da segunda validação se baseou no seguinte: uma vez que dispomos de um modelo mais robusto e amplo em relação ao outro, ao desenvolvermos o limite com $L \gg R$ segue que o modelo de Duas-Temperaturas acaba por conseguir simular a teoria de Schmidt. Dessa forma prosseguiu a validação do modelo atual.

Outro objetivo do presente trabalho é a sua abrangência e influência didática. Normalmente, os livros-texto de ciências térmicas para a engenharia mecânica são muito simples quando se trata de motores stirling, onde, na maioria das vezes não é comentado sobre a relação entre a termodinâmica e o arranjo mecânico. Também, não é feita menções sobre as diferenças entre o ciclo termodinâmico de stirling e o motor stirling.

Para tanto, um modelo matemático baseado em termodinâmica moderna foi desenvolvido utilizando os princípios e leis da termodinâmica. Sua influência didática vem para confrontar essa linha de raciocínio, onde esse trabalho deixou claro, de que existe relação entre o arranjo mecânico e a termodinâmica que abrange o motor stirling. Ou seja, quando a pressão está diretamente ligada a variação do ângulo α , isso significa que o comportamento de α pode induzir o comportamento da pressão e dessa forma influenciar no memorando calórico do fluido de trabalho.

Dentro da abrangência didática proposta, quando Hirata mostra a eficiência do seu

trabalho em termos de eficiência de Carnot e levando em consideração o sentido de rotação do arranjo mecânico, surgiu a oportunidade de realizar a segunda validação do presente trabalho. Utilizando termodinâmica moderna para tal tarefa e também o princípio de Carnot para máquinas térmicas que operam sob os mesmos limites de temperatura, a validação prosseguiu com sucesso pois os valores que o modelo atual propõem se encaixam naqueles obtidos por Hirata através da teoria de Schmidt.

Portanto, no presente trabalho foi apresentado o desenvolvimento de um modelo termodinâmico para Motores Stirling Alpha, onde:

1. É possível estabelecer relação entre o arranjo mecânico e o ciclo termodinâmico;
2. É possível trabalhar com propriedades de substâncias puras a nível de graduação;
3. É possível utilizar o modelo para projetos iniciais de motores stirling alpha;
4. É possível utilizar o modelo para ensino de máquinas de combustão externa reversíveis.

REFERÊNCIAS

- [1] Beautiful math in all browsers, 2017. A JavaScript display engine for mathematics that works in all browsers. No more setup for readers. It just works. For more information, visit: <https://www.mathjax.org/>.
- [2] Ian H. Bell, Jorrit Wronski, Sylvain Quoilin, and Vincent Lemort. Pure and pseudo-pure fluid thermophysical property evaluation and the open-source thermophysical property library coolprop. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 53(6):2498–2508, 2014. CoolProp is a C++ library.
- [3] Franco Brunetti. *Motores de Combustão Interna*. Number v. 1. Edgard Blucher.
- [4] H. de Brey, H. Rinia, and F. L. van Weenen. *Fundamentals for the Development of the Philips Air Engine*. Philips, 1 edition, 1947.
- [5] Rodger Dyson, Scottt Wilson, and Roy Tew. Review of computational stirling analysis methods. In *2nd International Energy Conversion Engineering Conference*, page 5582.
- [6] Theodor Finkelstein. *Theory of air cycles, with special reference to the Stirling cycle*. Imperial College London, 1953.
- [7] Robert W. Fox, Alan T. Mcdonald, and Pritchard Philip J. *Introdução À Mecânica dos fluidos*. John Wiley & Sons Inc, 6 edition, 2006.
- [8] Kiochi Hirata. Schmidt theory for stirling engines. <http://www.bekkoame.ne.jp/~khirata>. Acessado em: 25/07/2017.
- [9] Frank P. Incropera. *Fundamentals of heat and mass transfer*. Number v. 1 in Fundamentals of Heat and Mass Transfer. John Wiley, 6, illustrated edition, 2007.
- [10] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson, et al. SciPy: Open source scientific tools for Python, 2001–. [Online; accessed <today>].
- [11] Frank Kreith. *The CRC Handbook of Thermal Engineering*. Springer, 1 edition, 2013.
- [12] William R. Martini. *Stirling engine design manual*. US Department of Energy, Office of Conservation and Solar Applications, Division of Transportation Energy Conservation, 2 edition, July 1983. Martini Engineering (NASA-CR-158088).
- [13] Aaron Meurer, Christopher P. Smith, Mateusz Paprocki, Ondřej Čertík, Sergey B. Kirpichev, Matthew Rocklin, AMiT Kumar, Sergiu Ivanov, Jason K. Moore, Sartaj Singh, Thilina Rathnayake, Sean Vig, Brian E. Granger, Richard P. Muller, Francesco Bonazzi, Harsh

- Gupta, Shivam Vats, Fredrik Johansson, Fabian Pedregosa, Matthew J. Curry, Andy R. Terrel, Štěpán Roučka, Ashutosh Saboo, Isuru Fernando, Sumith Kulal, Robert Cimrman, and Anthony Scopatz. Sympy: symbolic computing in python. *PeerJ Computer Science*, 3:e103, January 2017.
- [14] Christian Naaktgeboren. An air-standard finite-time heat addition otto engine model. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, 45(2):103–119, 2017.
- [15] Fernando Pérez and Brian E. Granger. IPython: a system for interactive scientific computing. *Computing in Science and Engineering*, 9(3):21–29, May 2007. Ipython and Jupyter Notebook.
- [16] Ana Carolina Ávila Santos. Análise numérica de modelos adiabático e não adiabático em um motor stirling. 2016.
- [17] Gustav Schmidt. *Théorie der Geschlossenen Calorischen Maschine von Laubroy und Schwartzkopff in Berlin*. 1 edition, 1860. Den. Pol. Journ., Vol. CLX, p. 401, 1871 or Zeitschrift des Oster. In 9. Ver., p. 79, 1861.
- [18] Gustav Schmidt. *Fundamentals for the Development of the Philips Air Engine*. Philips, 1 edition, 1947.
- [19] Howard N. Shapiro and Michael J. Moran. *Princípios de Termodinâmica para Engenharia*. John Wiley & Sons Inc, 7 edition, 2013.
- [20] Robert Stirling. *Improvements for Diminishing the Consumption of Fuel and in Particular, an Engine Capable of Being Applied to the Moving of Machinery on a Principle Entirely New*. 1 edition, 1816. British Patent No. 4081.
- [21] G.J. Van Wylen and R.E. Sonntag. *Fundamentos da termodinâmica clássica*. Edgard Blucher, 4 edition, 1995.
- [22] G. Walker and B. Agbi. *Optimum Design Configuration Engines with Two-Phase Two-Component Working Fluids*. 1973. ASME PAPER No. 73-WA/FE-13, pp. I-8, 1973.
- [23] Y.A. Çengel and M. Boles. *Termodinâmica de Yunus A. Çengel*. McGraw-Hill College, 5 edition, 2006.
- [24] Y.A. Çengel and M. Boles. *Termodinâmica de Michael A. Boles e Yunus A. Çengel*. McGraw-Hill College, 7 edition, 2013.
- [25] Y.A. Çengel and M. Boles. *Thermodynamics: An Engineering Approach*. McGraw-Hill College, 7 edition, 2013.

APÊNDICE A - PROGRAMA: PARÂMETROS GEOMÉTRICOS

O desenvolvimento computacional desse programa tem como finalidade mostrar as equações utilizadas para os parâmetros geométricos do modelo Duas-Temperaturas, bem como a hipótese do limite com $L \gg R$.

A estrutura computacional do programa foi desenvolvida em linguagem *Python* dentro do ambiente *Jupyter Notebook*, onde foram utilizadas as seguintes bibliotecas:

- Numpy;
- Sympy;
- Math;
- Pylab;
- Matplotlib;
- Mathjax - Utilizada para a renderização das equações.

A Two-Temperature α Stirling Engine Model

```
In [1]: %pylab inline
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format='png'
%config InlineBackend.figure_format='retina'
```

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

```
In [2]: import scipy as sp
import sympy as sy
import numpy as np
import math as mt
import matplotlib.pylab as plb
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from __future__ import division
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
from IPython.display import display, HTML
```

```
In [3]: sy.init_printing(use_latex='mathjax')
```

Basic Parameters

- The Three Temperatures

```
In [4]: Th, Tr, Tc = sy.symbols('T_h T_r T_c')
```

- Stirling α -Engine parameters

```
In [5]:  $\alpha, \gamma, \omega, t = sy.symbols('alpha gamma omega t')$ 
L, R, D, V0h, V0c, Vr = sy.symbols('L R D V_{0h} V_{0c} V_r')
rh, rc, P, P0, Rg,  $\alpha\theta = sy.symbols('r_h r_c P P_0 R_g alpha\theta')$ 
#display((Th, Tr, Tc,  $\alpha, \gamma, \omega, t, L, R, D, V0h, V0c, Vr, rh, rc, P, P0, Rg, \alpha\theta$ ))
```

Relations

```
In [6]: rel = dict()
```

- Initial condition

```
In [7]: rel[' $\alpha\theta$ '] = sy.Eq( $\alpha\theta, -sy.pi$ )
#display(rel[' $\alpha\theta$ '])
```

Engine Geometry

```
In [8]: RL, SD = sy.symbols('r_{RL} r_{SD}')
```

```
In [9]: rel[' $\gamma$ '] = sy.Eq( $\gamma, sy.pi / sy.S(2)$ )
rel['RL'] = sy.Eq(RL, R / L)
rel['R'] = list()
rel['R'].append(sy.Eq(R, sy.solve(rel['RL'], R)[0]))
#display(rel[' $\gamma$ '], rel['RL'], rel['R'])
```

- Engine geometry - $[\text{sub,super}]$ - square

```
In [10]: rel['SD'] = sy.Eq(SD, sy.S(2) * R / D)
# D : D(SD)
rel['D'] = list()
rel['D'].append(sy.Eq(D, sy.solve(rel['SD'], D)[0]))
rel['D'].append(sy.Eq(D, sy.solve(rel['SD'], D)[0].subs({R: sy.solve(rel['RL'], R)[0]})))
#display(rel['SD'], rel['D'])
```

Displaced Volume

```
In [11]: Vdh, Vdc, Vd = sy.symbols('V_{dh} V_{dc} V_d')
```

```
In [12]: # Hot
rel['Vdh'] = sy.Eq(Vdh, R * sy.pi * D ** sy.S(2) / sy.S(2))
# Cold
rel['Vdc'] = sy.Eq(Vdc, R * sy.pi * D ** sy.S(2) / sy.S(2))
# Total
rel['Vd'] = sy.Eq(Vd, rel['Vdh'].rhs + rel['Vdc'].rhs)
#display(rel['Vdh'], rel['Vdc'], rel['Vd'])
```

Square Engine

- $R = D$

```
In [13]: # Hot
rel['Vdh1'] = sy.Eq(Vdh, D * sy.pi * D ** sy.S(2) / sy.S(2))
rel['Vdh2'] = sy.Eq(D, sy.solve(rel['Vdh1'], D)[0])
# Cold
rel['Vdc1'] = sy.Eq(Vdc, D * sy.pi * D ** sy.S(2) / sy.S(2))
rel['Vdc2'] = sy.Eq(D, sy.solve(rel['Vdc1'], D)[0])
#display(rel['Vdh1'], rel['Vdc1'], rel['Vdh2'], rel['Vdc2'])
```

Compression Ratio - Hot and Cold

```
In [14]: # Hot
rel['rh'] = sy.Eq(rh, ((V0h + rel['Vd'].lhs / sy.S(2)) / V0h).simplify())
# Cold
rel['rc'] = sy.Eq(rc, ((V0c + rel['Vd'].lhs / sy.S(2)) / V0c).simplify())
#display(rel['rh'], rel['rc'])
```

```
In [15]: # Compression Ratio - Hot
rel['rh.SD'] = sy.Eq(rel['rh'].lhs, rel['rh'].rhs.subs({Vd: rel['Vd'].rhs}).subs({D: rel['D'][1].rhs, R: rel['R'][0].rhs}).simplify(),)
# Compression Ratio - Cold
rel['rc.SD'] = sy.Eq(rel['rc'].lhs, rel['rc'].rhs.subs({Vd: rel['Vd'].rhs}).subs({D: rel['D'][1].rhs, R: rel['R'][0].rhs}).simplify(),)
#display(rel['rh.SD'], rel['rc.SD'])
```

L relations

```
In [16]: # L relations
rel['L'] = list()
rel['L'].append(sy.Eq(L, sy.solve(rel['rh.SD'], L)[0]))
rel['L'].append(sy.Eq(L, sy.solve(rel['rc.SD'], L)[0]))
#display(rel['L'])
```

Dead Volume - Hot and Cold

```
In [17]: xh, xc = sy.symbols('x_h x_c')
```

```
In [18]: # Hot
rel['V0h'] = sy.Eq(V0h, sy.solve(rel['rh'], V0h)[0])
rel['V0h1'] = sy.Eq(Vd, sy.solve(rel['V0h'], Vd)[0])
# Cold
rel['V0c'] = sy.Eq(V0c, sy.solve(rel['rc'], V0c)[0])
rel['V0c1'] = sy.Eq(Vd, sy.solve(rel['V0c'], Vd)[0])
#display(rel['V0h'], rel['V0h1'], rel['V0c'], rel['V0c1'])
```

- Hot and Cold Piston distances to TDC (Top dead Center):

```
In [19]: rel['xh'] = sy.Eq(xh, R * (sy.S(1) - sy.cos(alpha)) + L * (sy.S(1) - sy.sqrt(sy.S(1) - (sy.sin(alpha) * R / L) ** sy.S(2))))
rel['xh.RL'] = sy.Eq(rel['xh'].lhs, (rel['xh'].rhs.subs({R: sy.solve(rel['RL'], R)[0], L: sy.solve(rel['RL'], L)[0]})).simplify())
rel['xc'] = sy.Eq(xc, R * (sy.S(1) - sy.cos(alpha + gamma)) + L * (sy.S(1) - sy.sqrt(sy.S(1) - (sy.sin(alpha + gamma) * R / L) ** sy.S(2))))
rel['xc.RL'] = sy.Eq(rel['xc'].lhs, (rel['xc'].rhs.subs({R: sy.solve(rel['RL'], R)[0], L: sy.solve(rel['RL'], L)[0]})).simplify())
#display(rel['xh'], rel['xh.RL'], rel['xc'], rel['xc.RL'])
```

- When $L \gg R$

```
In [20]: rel['xhV'] = sy.Eq(rel['xh'].lhs, rel['xh'].rhs.subs({'L':0}))
rel['xcV'] = sy.Eq(rel['xc'].lhs, rel['xc'].rhs.subs({'L':0}))
#display(rel['xhV'], rel['xcV'])
```

Hot and Cold Piston volumes

```
In [21]: Vh, Vc = sy.symbols('V_h V_c')
```

```
In [22]: rel['Vh'] = sy.Eq(Vh, V0h + xh * sy.pi * D ** sy.S(2) / sy.S(4))
rel['Vh.xh'] = sy.Eq(rel['Vh'].lhs, rel['Vh'].rhs.subs({xh: rel['xh.RL'].rhs}))
rel['Vc'] = sy.Eq(Vc, V0c + xc * sy.pi * D ** sy.S(2) / sy.S(4))
rel['Vc.xc'] = sy.Eq(rel['Vc'].lhs, rel['Vc'].rhs.subs({xc: rel['xc.RL'].rhs}))
#display(rel['Vh'], rel['Vc'], rel['Vh.xh'], rel['Vc.xc'])
```

- When $L \gg R$

```
In [23]: rel['vhV'] = sy.Eq(rel['Vh'].lhs, rel['Vh'].rhs.subs({'x_h': rel['xhV'].rhs}))
rel['vcV'] = sy.Eq(rel['Vc'].lhs, rel['Vc'].rhs.subs({'x_c': rel['xcV'].rhs}))
#display(rel['vhV'], rel['vcV'])
```

Masses and Total Volume

```
In [24]: mh, mr, mc, m, V, V0, m0 = sy.symbols('m_h m_r m_c m V V_0 m_0')
```

```
In [25]: rel['mh'] = sy.Eq(mh, P * rel['Vh'].rhs / (Rg * Th))
rel['mr'] = sy.Eq(mr, P * Vr / (Rg * Tr))
rel['mc'] = sy.Eq(mc, P * rel['Vc'].rhs / (Rg * Tc))
rel['m'] = sy.Eq(m, rel['mh'].rhs + rel['mr'].rhs + rel['mc'].rhs)
#display(rel['mh'], rel['mr'], rel['mc'], rel['m'])
```

- Total System Volume:

```
In [26]: rel['V'] = sy.Eq(V, (rel['Vh'].rhs + Vr + rel['Vc'].rhs).simplify())
#display(rel['V'])
```

- When $L \gg R$

```
In [27]: rel['vV'] = sy.Eq(V, rel['V'].rhs.subs({'x_h': rel['vhV'].rhs, 'x_c': rel['vcV'].rhs})).factor()
#display(rel['vV'])
```

```
In [28]: # SUBS
SUBS = list()
SUBS.append({
    xh: rel['xh.RL'].rhs, xc: rel['xc.RL'].rhs, })
SUBS.append(SUBS[0])
# Initial System Volume
rel['V0'] = list()
rel['V0'].append(sy.Eq(V0, rel['V'].rhs.subs(SUBS[0])))
rel['V0'].append(sy.Eq(V0, rel['V'].rhs.subs(SUBS[1])))
#display(rel['V0'][0], rel['V0'][1])
```

```
In [29]: # SUBS
SUBS = SUBS[:2]
SUBS.append({'alpha': rel['a0'].rhs, y: rel['y'].rhs, RL: sy.S('1/3'), D: rel['D'][1].rhs, L: rel['L'][0].rhs, V0h: rel['V0h'].rhs,
    V0c: rel['V0c'].rhs})
SUBS.append({'alpha': rel['a0'].rhs, y: rel['y'].rhs, RL: sy.S('1/3'), D: rel['D'][1].rhs, L: rel['L'][1].rhs, V0h: rel['V0h'].rhs,
    V0c: rel['V0c'].rhs})
# Initial System Volume
rel['V0'] = rel['V0'][:2]
rel['V0'].append(sy.Eq(V0, rel['V0'][0].rhs.subs(SUBS[2]).expand()))
rel['V0'].append(sy.Eq(V0, rel['V0'][1].rhs.subs(SUBS[3]).expand()))
#display(rel['V0'][2], rel['V0'][3])
```

```
In [30]: # SUBS
SUBS = SUBS[:4]
SUBS.append({
    Vd: sy.S('1/1000'),
    Vr: sy.S('1/2000'),
    rh: sy.S(12),
    rc: sy.S(12),
})
SUBS.append({
    Vd: sy.S('1/1000'),
    Vr: sy.S('1/2000'),
    rh: sy.S(12),
    rc: sy.S(12),
})
SUBS.append({
    P: sy.S('1000'),
    Th: sy.S('1000'),
    Tc: sy.S('300'),
    Tr: sy.S('1300/2'),
    Rg: sy.S('8314/1000') / sy.S('1/44'), # C02
})
# 1-liter, 12:1 engine
rel['V0'] = rel['V0'][:4]
rel['V0'].append(
    sy.Eq(
        V0,
        rel['V0'][2].rhs.subs(SUBS[4]).simplify()
    )
)
rel['V0'].append(
    sy.Eq(
        V0,
        rel['V0'][3].rhs.subs(SUBS[5]).simplify()
    )
)
#display(rel['V0'][4], rel['V0'][5])
```

```
In [31]: # System Mass - From P0
rel['m0'] = list()
rel['m0'].append(
    sy.Eq(
        m0,
        rel['m'].rhs.subs(SUBS[0])
    )
)
rel['m0'].append(
    sy.Eq(
        m0,
        rel['m0'][0].rhs.subs(SUBS[2])
    )
)
rel['m0'].append(
    sy.Eq(
        m0,
        rel['m0'][1].rhs.subs(SUBS[4])
    )
)
rel['m0'].append(
    sy.Eq(
        m0,
        rel['m0'][2].rhs.subs(SUBS[6])
    )
)
)
```

```
In [32]: #display(rel['m0'][0])
```

```
In [33]: #display(rel['m0'][1])
```

```
In [34]: #display(rel['m0'][2])
```

```
In [35]: #display(rel['m0'][3])
```

```
In [36]: #rel['m0'][3].rhs.evalf(12)
```

System Pressure - From Constant Total System Mass

```
In [37]: rel['P'] = sy.Eq(P, sy.solve(rel['m'], P)[0])
#display(rel['P'])
```

- When $L \gg R$

```
In [38]: rel['PV'] = sy.Eq(rel['P'].lhs, rel['P'].rhs.subs({'x_h': rel['xhV'].rhs, 'x_c': rel['xcV'].rhs}))
#display(rel['PV'])
```

- System Pressure - Expanded:

```
In [39]: rel['P.xhxc'] = sy.Eq(P, rel['P'].rhs.subs({'xh': rel['xh.RL'].rhs, 'xc': rel['xc.RL'].rhs}).simplify())
rel['P1'] = sy.Eq(P, rel['P'].rhs.subs(SUBS[0]))
#display(rel['P.xhxc'],
# rel['P1'])
```

```
In [40]: #display(rel['P'].rhs.subs(SUBS[0]).subs(SUBS[2]))
```

```
In [41]: #display(rel['P'].rhs.subs(SUBS[0]).subs(SUBS[2]).subs(SUBS[4]))
```

```
In [42]: #display(rel['P'].rhs.subs(SUBS[0]).subs(SUBS[2]).subs(SUBS[4]).subs(SUBS[6]))
```

```
In [43]: #display(rel['P'].rhs.subs(SUBS[0]).subs(SUBS[2]).subs(SUBS[4]).subs(SUBS[6]).subs({'m': rel['m0'][3].rhs}).simplify())
```

LaTeX Equations

```
In [44]: counter = 0
for i in rel:
    counter = counter + 1
    # print ('Equation number', counter, 'LaTeX cod is:', '\n', '$', sy.latex(rel[i]), '$', '\n', counter, display(rel[i]))
    # print ('=====')
```

Simulation of the A Three-Temperature α Stirling Engine Model

Input Parameters:

- $V_{SE} = V_{dh} = 0,628 \text{ cm}^3$
- $V_{SC} = V_{dc} = 0,628 \text{ cm}^3$
- $V_{DE} = V_{oh} = 0,200 \text{ cm}^3$
- $V_{DC} = V_{oc} = 0,200 \text{ cm}^3$
- $V_R = 0,200 \text{ cm}^3$
- $T_E = 400^\circ\text{C}$

- $T_c = 30^\circ C$
- Phase angle $\beta = \gamma = 90^\circ$
- $P_{avg} = 101,3 \text{ Kpa}$
- Engine speed = 2000 rpm

In [45]: `PREC = 17`

Calculation of updated interest amounts:

- Initial calculation parameters

In [46]: `D = rel['Vdh2'].rhs.subs({'V_{dh}':0.628}).evalf(PREC)
R = (D/2).evalf(PREC)
L = (3*R).evalf(PREC) #L/R = 3
Tc = 30 + 273.15
Th = 400 + 273.15
Tr = (Th + Tc)/2
#display(D, R, L, Tc, Th, Tr)`

- Engine geometry

In [47]: `r_RL = rel['RL'].rhs.subs({'R':R, 'L':L}).evalf(PREC)
r_SD = rel['SD'].rhs.subs({'R':R, 'D':D}).evalf(PREC)
#display(r_RL, r_SD)`

- Displaced Volume (identity with the Schmidt model)

In [48]: `vdh = rel['Vdh1'].rhs.subs({'D':D}).evalf(PREC)
vdc = rel['Vdc1'].rhs.subs({'D':D}).evalf(PREC)
#display(vdh, vdc)`

- Compression Ratio - Hot and Cold

In [49]: `v0h = 0.200
v0c = 0.200
v_r = 0.200`

In [50]: `r_h = rel['rh.SD'].rhs.subs({'L':L, 'r_{RL}':r_RL, 'V_{0h}':v0h, 'r_{SD}':r_SD}).evalf(PREC)
r_c = rel['rc.SD'].rhs.subs({'L':L, 'r_{RL}':r_RL, 'V_{0c}':v0c, 'r_{SD}':r_SD}).evalf(PREC)
#display(r_h, r_c)`

- Dead Volume - Hot and Cold

In [51]: `vdh = rel['V0h1'].rhs.subs({'V_{0h}':v0h, 'r_h':r_h}).evalf(PREC)
vdc = rel['V0c1'].rhs.subs({'V_{0c}':v0c, 'r_c':r_c}).evalf(PREC)
#display(vdh, vdc)`

- Equation for Compression and Expansion volumes

In [52]: `vh = rel['Vh.xh'].rhs.subs({'L':L, 'D':D, 'r_{RL}':r_RL, 'alpha':1*(sy.pi/180), 'V_{0h}':v0h}).evalf(PREC)
vc = rel['Vc.xc'].rhs.subs({'L':L, 'D':D, 'r_{RL}':r_RL, 'alpha':1*(sy.pi/180), 'gamma':90*(sy.pi/180), 'V_{0c}':v0c}).evalf(PREC)
#display(vh, vc)`

- System Pressure

In [53]: `P = rel['P1'].rhs.subs({'R_g':8.314, 'T_c':Tc, 'T_h':Th, 'T_r':Tr, 'm':1, 'D':D, 'L':L, 'r_{RL}':r_RL, 'alpha':1*(sy.pi/180),
'gamma':90*(sy.pi/180), 'V_{0h}':v0h, 'V_{0c}':v0c, 'V_r':0.200}).evalf(PREC)
#display(P)`

- TDC (Top dead center)

In [54]: `xh = rel['xh'].rhs.subs({'L':L, 'R':R, 'alpha':0*(sy.pi/180)}).evalf(PREC)
#display(xh)`

In [55]: `xc = rel['xc'].rhs.subs({'L':L, 'R':R, 'alpha':0*(sy.pi/180), 'gamma':90*(sy.pi/180)}).evalf(PREC)
#display(xc)`

- System mass

In [56]: `m = rel['m'].rhs.subs({'P':P, 'V_r':0.2, 'R_g':8.314, 'T_r':Tr, 'T_h':Th, 'T_c':Tc, 'V_{0h}':v0h, 'D':D,
'V_{0c}':v0c, 'x_h':xh, 'x_c':xc}).evalf(PREC)
#display(m)`

Simulation Start:

- Three-Temperature

```
In [57]: the_α = linspace(0, -360, 360)
#the_α
```

```
In [58]: lrA = list()
lrB = list()
for i in the_α:
    lrA.append(float(rel['xhV'].rhs.subs({'R':8.314, 'α':i*(sy.pi/180)})))
    lrB.append(float(rel['xcV'].rhs.subs({'R':8.314, 'α':i*(sy.pi/180), 'γ':90*(sy.pi/180)})))

lrA = array(lrA)
lrB = array(lrB)
```

```
In [59]: EngineP = rel['Pl'].rhs.subs({'R_g':8.314, 'T_c':Tc, 'T_h':Th, 'T_r':Tr,
                                     'm':m, 'D':D, 'L':L, 'r_{RL}':r_RL,
                                     'γ':90*(sy.pi/180), 'V_{0h}':v0h, 'V_{0c}':v0c,
                                     'V_r':0.200}).simplify()
#display(EngineP)
```

```
In [60]: P = list()
for i in the_α:
    P.append(float(
        EngineP.subs({'α': i*(sy.pi/180)}).evalf(PREC)
    ))
the_P = array(P)
```

```
In [61]: V_h = list()
V_c = list()
V_t = list()
for i in the_α:
    v_h = float(
        rel['Vh.xh'].rhs.subs({'L':L, 'D':D, 'r_{RL}':r_RL, 'α':i*(sy.pi/180), 'V_{0h}':v0h}).evalf(PREC)
    )
    v_c = float(
        rel['Vc.xc'].rhs.subs({'L':L, 'D':D, 'r_{RL}':r_RL, 'α':i*(sy.pi/180), 'γ':90*(sy.pi/180), 'V_{0c}':v0c}).evalf(PREC)
    )
    V_h.append(v_h)
    V_c.append(v_c)
    V_t.append(v_h + v_c + v_r)
# ----
theVh = array(V_h)
theVc = array(V_c)
theVt = array(V_t)
```

Calculation of the heat and Work in H:

- $W_{liq,ent,h} = \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1})(-V_{h,i+1} + V_{h,i})$
- $Q_{liq,ent,h} = \frac{1}{2}(P_i - P_{i+1})(V_{h,i+1} + V_{h,i})$

```
In [62]: Wleh = list()
Qleh = list()
WlehCum = [0]
QlehCum = [0]
for i in range(len(the_α)-1):
    Wleh.append(0.5 * (P[i] + P[i+1]) * (-V_h[i+1] + V_h[i]))
    Qleh.append(0.5 * (P[i] - P[i+1]) * (V_h[i+1] + V_h[i]))
    WlehCum.append(WlehCum[-1] + Wleh[-1])
    QlehCum.append(QlehCum[-1] + Qleh[-1])
# --- final do ciclo
WliqH = WlehCum[-1]
QliqH = QlehCum[-1]
```

Calculation of the heat and Work in C:

- $W_{liq,ent,c} = \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1})(-V_{c,i+1} + V_{c,i})$
- $Q_{liq,ent,c} = \frac{1}{2}(P_i - P_{i+1})(V_{c,i+1} + V_{c,i})$

```
In [63]: Wlec = list()
Qlec = list()
WlecCum = [0]
QlecCum = [0]
for i in range(len(the_α)-1):
    Wlec.append(0.5 * (P[i] + P[i+1]) * (-V_c[i+1] + V_c[i]))
    Qlec.append(0.5 * (P[i] - P[i+1]) * (V_c[i+1] + V_c[i]))
    WlecCum.append(WlecCum[-1] + Wlec[-1])
    QlecCum.append(QlecCum[-1] + Qlec[-1])
# --- final do ciclo
WliqC = WlecCum[-1]
QliqC = QlecCum[-1]
```

Validation of reversibility by efficiency calculation:

```
In [64]: WStLiqSai = -WliqH - WliqC
QStLiqEnt = QliqH
EffTherSt = WStLiqSai / QStLiqEnt
display(WStLiqSai, QStLiqEnt, EffTherSt*100)

265.21379812604107
482.50858521022235
54.96561227205752
```

- Results for maximum and minimum database

```
In [65]: display(HTML('<font face = Nimbus size = 3> $Pmax$ = {0:.6f} $kPa$'.format(max(the_P))))
display(HTML('<font face = Nimbus size = 3> $Pmin$ = {0:.6f} $kPa$'.format(min(the_P))))
display(HTML('<font face = Nimbus size = 3> $\Delta P$ = {0:.6f} $kPa$'.format(max(the_P) - min(the_P))))
```

$P_{max} = 5183.901520 \text{ kPa}$

$P_{min} = 3026.416385 \text{ kPa}$

$\Delta P = 2157.485135 \text{ kPa}$

```
In [66]: display(HTML('<font face = Nimbus size = 3> $Vmax$ = {0:.6f} $cm^3$'.format(max(theVt))))
display(HTML('<font face = Nimbus size = 3> $Vmin$ = {0:.6f} $cm^3$'.format(min(theVt))))
display(HTML('<font face = Nimbus size = 3> $\Delta V$ = {0:.6f} $cm^3$'.format(max(theVt) - min(theVt))))
```

$V_{max} = 1.162567 \text{ cm}^3$

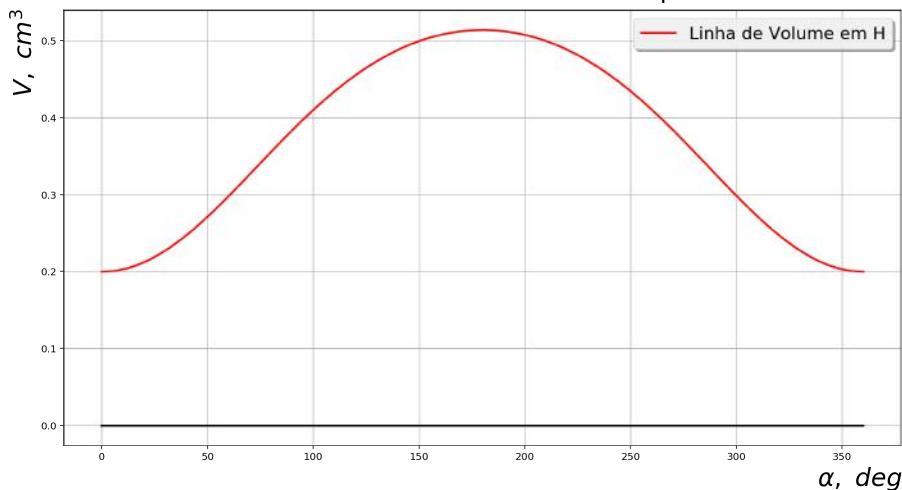
$V_{min} = 0.718510 \text{ cm}^3$

$\Delta V = 0.444058 \text{ cm}^3$

- Graphic: $\alpha \times V$

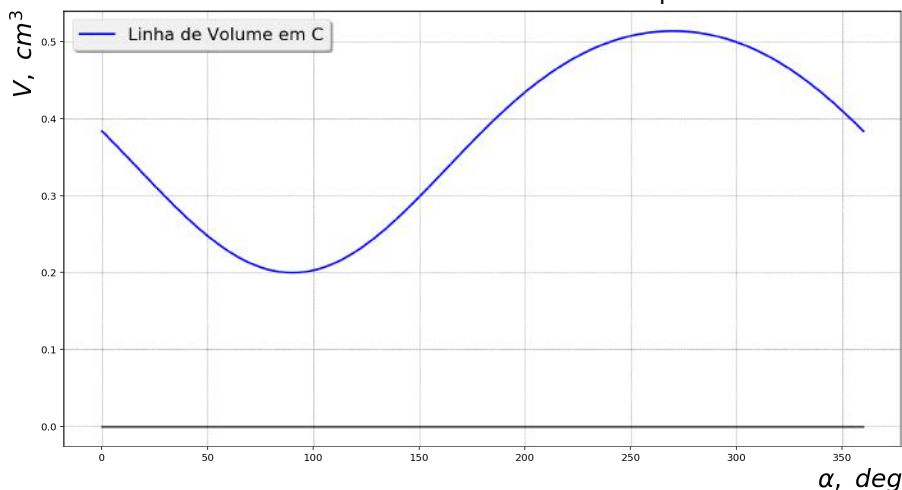
```
In [67]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, theVh, 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume em H')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('$\alpha$, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$V$, \ cm^3$', x=0.00, y=0.80, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $\alpha \times Vh$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper right', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

Gráfico: $\alpha \times Vh$ - Modelo de Duas Temperaturas

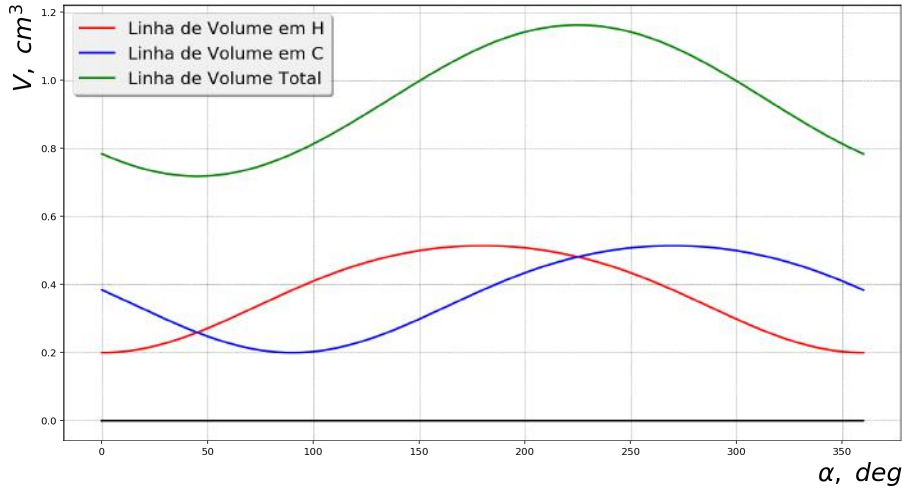


```
In [68]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, theVc, 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume em C')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('$\alpha$, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$V$, \ cm^3$', x=0.00, y=0.80, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $\alpha \times Vc$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

Gráfico: $\alpha \times Vc$ - Modelo de Duas Temperaturas

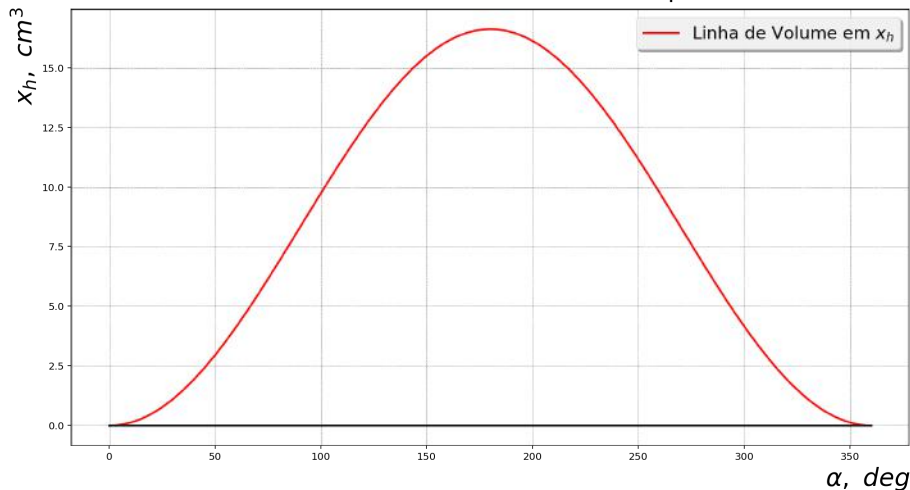


```
In [69]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, theVh, 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume em H')
plb.plot(-the_α, theVc, 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume em C')
plb.plot(-the_α, theVt, 'g-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume Total')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$V, \ cm^3$', x=0.00, y=0.80, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: \alpha \times Vt - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

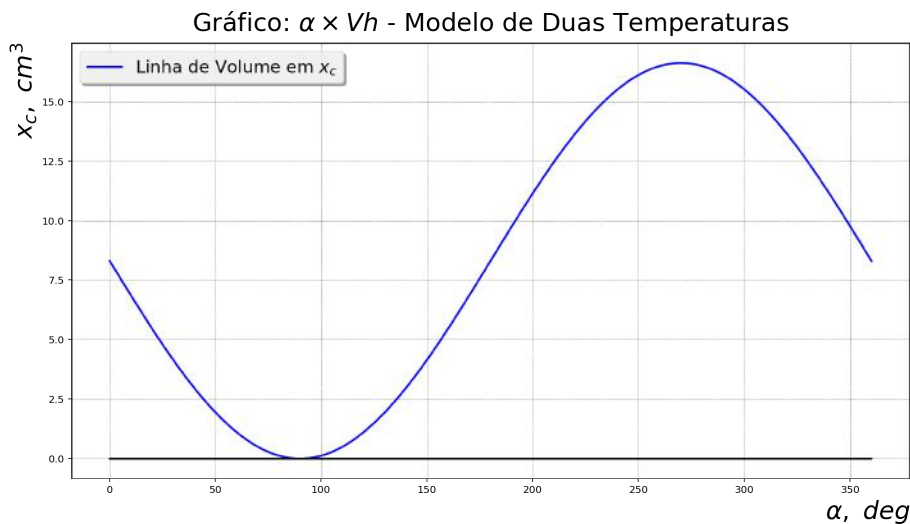
Gráfico: $\alpha \times Vt$ - Modelo de Duas Temperaturas

- Graphic: $\alpha \times x_h - \alpha \times x_c$.

```
In [70]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, lra, 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume em $x_h$')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$x_h, \ cm^3$', x=0.00, y=0.78, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: \alpha \times Vh - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper right', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

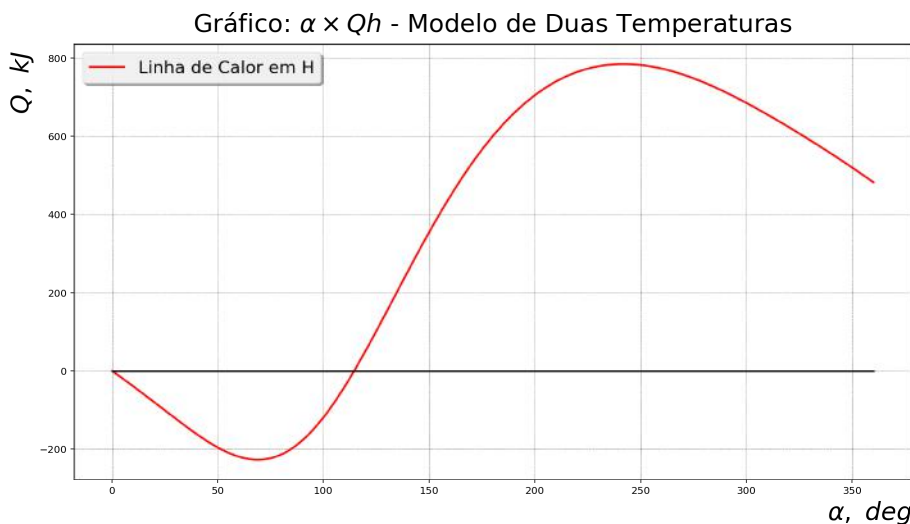
Gráfico: $\alpha \times Vh$ - Modelo de Duas Temperaturas


```
In [71]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, lrb, 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume em $x_c$')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('$\alpha$, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$x_c$, \ cm$^3$', x=0.00, y=0.78, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $\alpha$ \times Vh$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

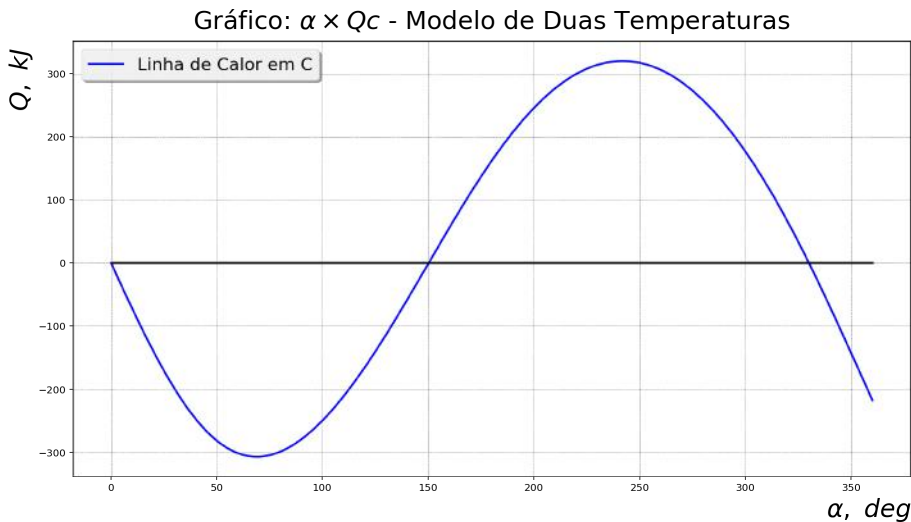


- Graphic: $\alpha \times \text{Heat}$

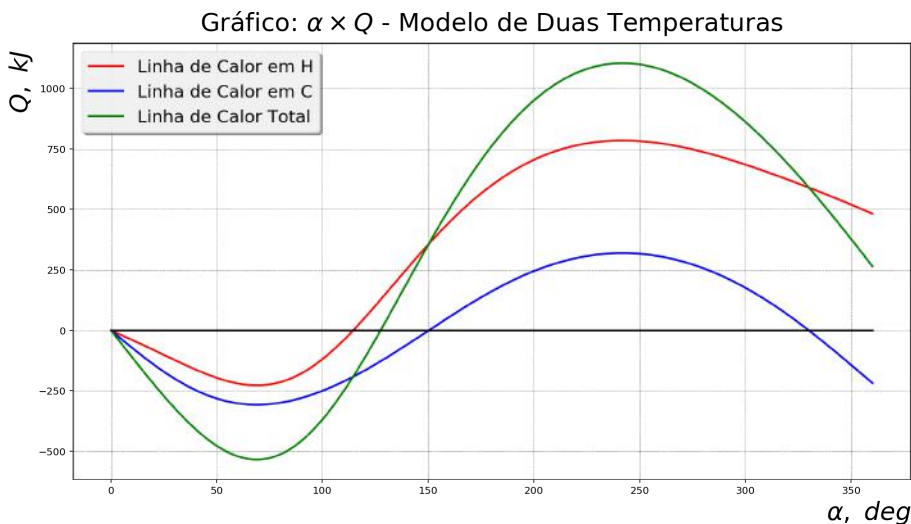
```
In [72]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, array(01ehCum), 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Calor em H')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('$\alpha$, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$Q$, \ kJ$', x=0.00, y=0.84, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $\alpha$ \times Qh$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```



```
In [73]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, array(Qleccum), 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Calor em C')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$Q, \ kJ$', x=0.00, y=0.84, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: \alpha \times Qc - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

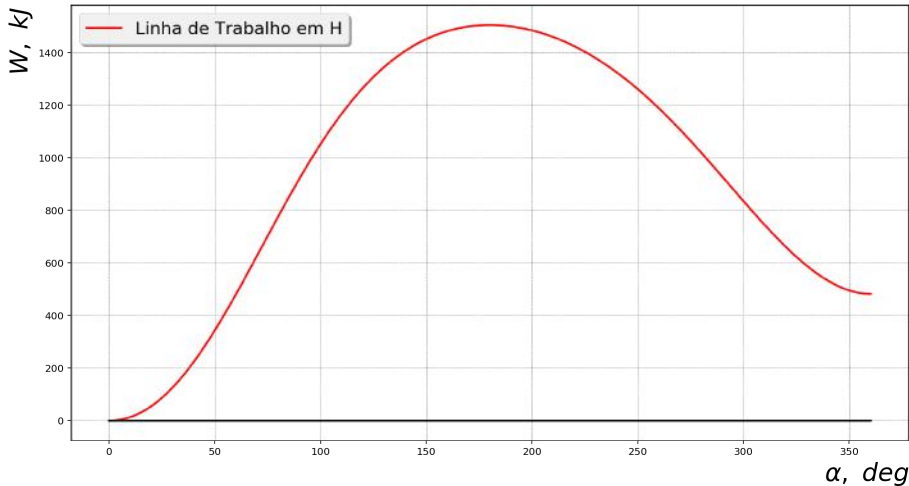


```
In [74]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, array(Qlehcum), 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Calor em H')
plb.plot(-the_α, array(Qleccum), 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Calor em C')
plb.plot(-the_α, array(Qlehcum) + array(Qleccum), 'g-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Calor Total')
#plb.plot(-the_α, theVt * 500, 'y--', linewidth=2.0, label = 'Linha de Volume Total')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$Q, \ kJ$', x=0.00, y=0.84, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: \alpha \times Q - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

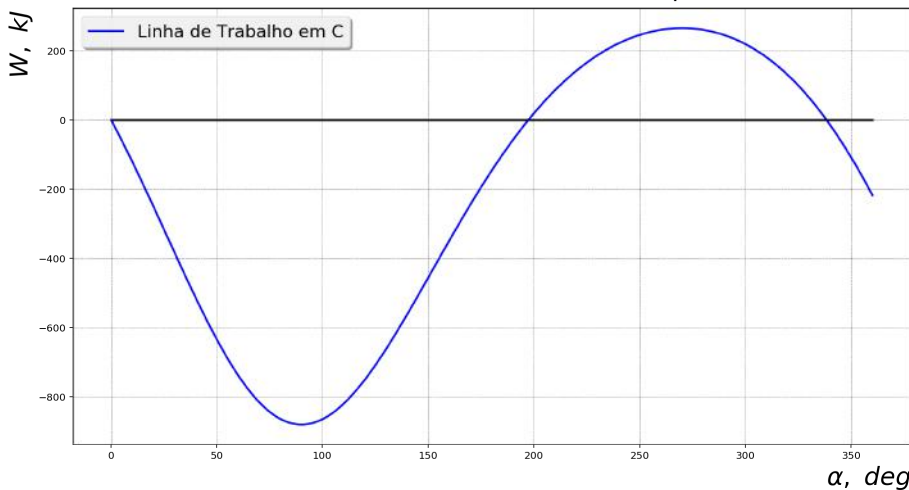


- Graphic: $\alpha \times$ Work

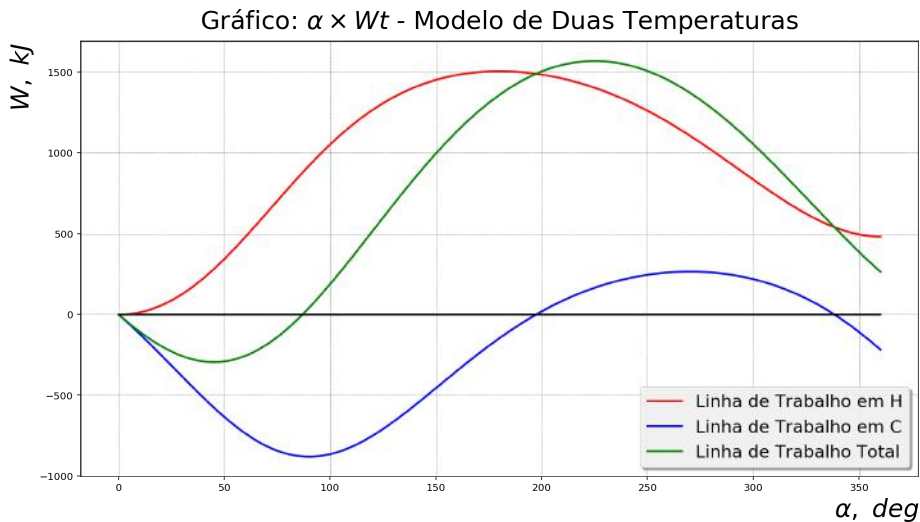
```
In [75]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, -array(WlehCum), 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Trabalho em H')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$W, \ kJ$', x=0.00, y=0.84, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: \alpha \times Wh\$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

Gráfico: $\alpha \times Wh$ - Modelo de Duas Temperaturas

```
In [76]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, -array(WlecCum), 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Trabalho em C')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$W, \ kJ$', x=0.00, y=0.84, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: \alpha \times Wc\$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```

Gráfico: $\alpha \times Wc$ - Modelo de Duas Temperaturas

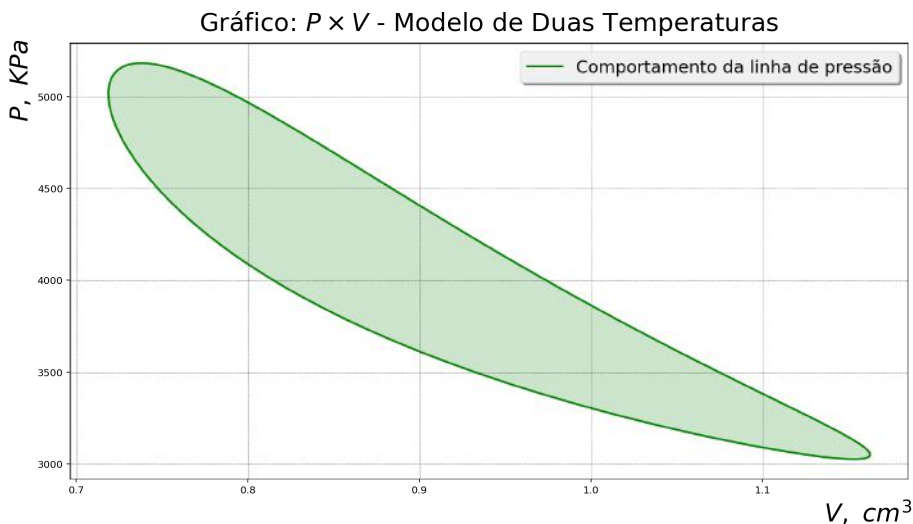
```
In [77]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, -array(WlehCum), 'r-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Trabalho em H')
plb.plot(-the_α, -array(WlecCum), 'b-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Trabalho em C')
plb.plot(-the_α, -array(WlehCum) - array(WlecCum), 'g-', linewidth=2.0, label = 'Linha de Trabalho Total')
plb.plot(-the_α, the_α*0, 'k-', linewidth=2.0)
plb.xlabel('$\alpha$, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$W$, \ kJ$', x=0.00, y=0.84, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $W$ \times $Wt$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='lower right', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```



```
plt.plot(-theq[-1], array(Wleh), 'r-', -theq[-1], array(Wlec), 'g-', -theq[-1], array(Wleh) + array(Wlec), 'b-', -theq[-1], the_α[-1]*0, 'k-')
```

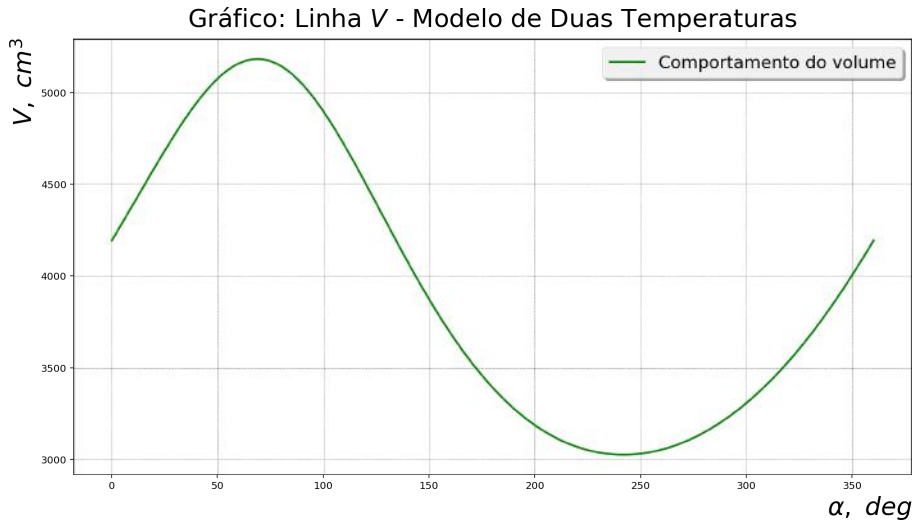
- Graphic: $P \times V$

```
In [78]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(theVt, the_P, 'g-', linewidth=2.0, label = 'Comportamento da linha de pressão')
plb.fill(theVt, the_P, 'g', alpha=0.2)
plb.xlabel('$V$, \ cm^3$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$P$, \ KPa$', x=0.00, y=0.82, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $P$ \times $V$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper right', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```



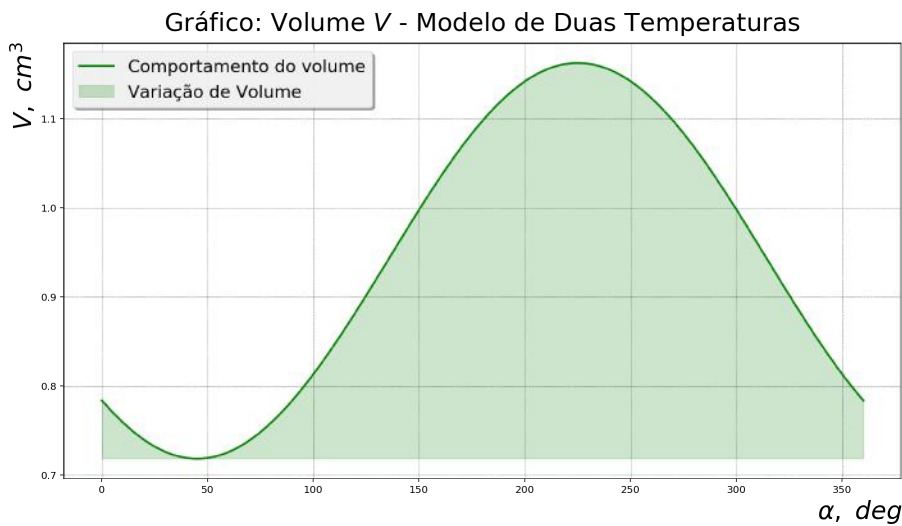
- Graphic: Behavior Line

```
In [79]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, the_P, 'g-', linewidth=2.0, label = 'Comportamento do volume')
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$V, \ cm^3$', x=0.00, y=0.80, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: Linha \$V\$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper right', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```



- Graphic: Volume variation

```
In [80]: plb.figure(figsize=(15, 8))
plb.plot(-the_α, theVt, 'g-', linewidth=2.0, label = 'Comportamento do volume')
plb.fill_between(-the_α, min(theVt), theVt, color='g', alpha=0.2, label = 'Variação de Volume')
plb.xlabel('\alpha, \ deg$', x=0.90, y=0.00, fontsize=25, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('\$V, \ cm^3$', x=0.00, y=0.80, fontsize=25, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: Volume \$V\$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=25, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper left', fontsize = 'xx-large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
plb.show()
```



- Graphic: Theory study

```

In [81]: fig = plt.figure(figsize=(15, 12.5))
=====
plt.subplot(221)
plb.plot(theVt, the_P, 'b-', linewidth=2.0, label = 'Comportamento da linha de pressão')
plb.xlabel('$V, \text{ cm}^3$', x=0.86, y=0.00, fontsize=15, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$P, \text{ KPa}$', x=0.00, y=0.80, fontsize=15, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Gráfico: $P \times V$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=12, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper right', fontsize = 'large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
=====
plt.subplot(222)
plb.plot(-the_α, the_P, 'g-', linewidth=2.0, label = 'Comportamento da linha de pressão')
plb.xlabel('$\alpha, \text{ deg}$', x=0.86, y=0.00, fontsize=15, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$P, \text{ KPa}$', x=0.00, y=0.80, fontsize=15, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Graph: $P \times \alpha$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=12, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='upper right', fontsize = 'large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
=====
plt.subplot(223)
plb.plot(-the_α, theVt, 'r-', linewidth=2.0, label = 'Comportamento do volume')
plb.xlabel('$\alpha, \text{ deg}$', x=0.86, y=0.00, fontsize=15, ha = 'left', va = 'top')
plb.ylabel('$V, \text{ cm}^3$', x=0.00, y=0.80, fontsize=15, ha = 'left', va = 'bottom')
plb.title('Graph: Line $V$ - Modelo de Duas Temperaturas', fontsize=12, ha = 'center', va = 'bottom')
plb.rc('grid', linestyle=":", color='black', linewidth=0.5)
leg = plb.legend(loc='lower right', fontsize = 'large', fancybox=True, shadow=True, ncol=1)
leg.get_frame().set_alpha(0.85)
plb.grid()
=====
AA = linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 361)
PP = array([float(i) for i in P])
VV = array([float(i) for i in V_t])
ax = fig.add_subplot(2, 2, 4, projection='3d')
ax.plot(-the_α, theVt, PP*0+min(the_P), 'r-')
ax.plot(-the_α, theVt*0+max(theVt), the_P, 'g-')
ax.plot(-the_α*0+min(-the_α), theVt, the_P, 'b-')
ax.plot(-the_α, theVt, the_P, 'k-', lw=1.0)
plb.show()

```

