

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

GIOVANNA SANGUINO BIAZON

**O PROBLEMA DE STEFAN DE ZERO-FASE PARA MATERIAL EM
MUDANÇA DE FASE ENCAPSULADO COM FLUXO DE CALOR
UNIDIMENSIONAL EM AMBAS AS FACES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

GUARAPUAVA

2017

GIOVANNA SANGUINO BIAZON

**O PROBLEMA DE STEFAN DE ZERO-FASE PARA MATERIAL EM
MUDANÇA DE FASE ENCAPSULADO COM FLUXO DE CALOR
UNIDIMENSIONAL EM AMBAS AS FACES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica, da Coordenação de Engenharia Mecânica do Campus Guarapuava da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Dalmas

Co-orientador: Prof. Dr. Christian Naaktgeboren

GUARAPUAVA

2017



TERMO DE APROVAÇÃO

O PROBLEMA DE STEFAN DE ZERO-FASE PARA MATERIAL EM MUDANÇA DE FASE ENCAPSULADO COM FLUXO DE CALOR UNIDIMENSIONAL EM AMBAS AS FACES

por

GIOVANNA SANGUINO BIAZON

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado em 04 de dezembro de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Dr. Sérgio Dalmás
Prof. Orientador

Dr. Christian Naaktgeboren
Prof. Co-orientador

Dra. Denise Alves Ramalho
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso -

RESUMO

BLAZON, Giovanna S. **O Problema De Stefan De Zero-Fase Para Material Em Mudança De Fase Encapsulado Com Fluxo De Calor Unidimensional Em Ambas As Faces**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Guarapuava, 2017.

Este trabalho apresenta um estudo analítico do comportamento das interfaces móveis de um material em mudança de fase encapsulado, utilizando-se como metodologia a aplicação de métodos analíticos assintóticos. A abordagem do problema de Stefan de zero-fase foi aplicada, pois se mostra um método simples para a efetivação da análise. Ao final, fez-se possível obter formulações para as posições das interfaces móveis do material em mudança de fase unidimensional, submetido a fluxos de calor transitórios; variando-se espessuras de encapsulamento, para diferentes tipos de material e escalas de tempo, nas quais os encapsulamentos não atenuam o fluxo de calor.

Palavras-chave: Material em mudança de fase. Problema de Stefan. Encapsulado. Analítico.

ABSTRACT

BIAZON, Giovanna S. **The Zero-Phase Stefan Problem For Encapsulated Phase Change Material With Unidimensional Heat Flux In Both Faces**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Federal Technology University -Parana. Guarapuava, 2017.

This work presents an analytical study about the behavior of the mobile interface in an encapsulated phase change material, using as methodology the application of asymptotic analytical methods. The zero-phase Stefan problem approach was applied as it shows to be a simple method for the analyze effectuation. At the end, it was possible to obtain formulations for the positions of the mobile interfaces in the one-dimensional phase change material, undergone transitional heat fluxes; varying the thickness of encapsulation for different types of materials and scales of time, in which the encapsulation does not attenuate the heat flux.

Keywords: Phase change material. Stefan problem. Encapsulated. Analytical.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Parede com transferência de calor em que, na face esquerda há uma temperatura imposta em regime periódico permanente, e na face direita uma temperatura constante	20
Figura 2 – Caso 1: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em fase	24
Figura 3 – Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 1.....	25
Figura 4 – Posições de interfaces geradas, no decorrer do tempo, para ambas as faces.....	26
Figura 5 – Caso 1 encapsulado: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em fase.....	27
Figura 6 – Caso 2: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor entrando em fase	28
Figura 7 - Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 2.....	28
Figura 8 – Caso 2 encapsulado: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor entrando em fase	29
Figura 9 - Caso 3: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em antifase.....	30
Figura 10 – Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 3.....	30
Figura 11 - Caso 3 encapsulado: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em antifase	31
Figura 12 - Caso 4: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor saindo em antifase.....	32
Figura 13 – Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 4.....	32
Figura 14 - Caso 4 encapsulado: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor saindo em antifase	33

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	6
1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA	7
2 OBJETIVOS	9
2.1 OBJETIVO GERAL	9
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	9
3 JUSTIFICATIVA	10
4 REFERENCIAL TEÓRICO	11
4.1 O MODELO DE STEFAN DE ZERO-FASE	16
4.2 O PROBLEMA DA PAREDE	20
5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	22
6 RESULTADOS E DISCUSSÕES	23
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	35
REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

Materiais em mudança de fase podem ser encontrados na natureza, como na formação de icebergs, evaporação dos mares, e solidificação do interior do planeta. Suas aplicações são diversas, desde utilizações cotidianas até situações mais complexas. Exemplos disso ocorrem na obtenção do gelo, e em seu derretimento, na obtenção do aço, na moldagem de objetos metálicos, nas técnicas de criocirurgia e conservação de tecidos vivos e na ablação de corpos durante reentrada na atmosfera (NAAKTGEBOREN, 2002).

Materiais em mudança de fase, ou MMFs, podem ser utilizados em bancos de gelo, que são equipamentos que visam o armazenamento de energia térmica na forma de calor latente, por meio da fabricação de gelo durante intervalos de tempo fora do horário de pico, para a utilização posterior em resfriamento de água para processos industriais (FILHO, 2003).

Assim, o MMF armazena energia térmica e serve para otimizar o consumo de energia elétrica, resfriar equipamentos eletrônicos, e também em outros campos de conhecimento, como os da área cirúrgica, de construção civil, de segurança, de transporte e outras (ALEXIADES, 1993 apud. NAAKTGEBOREN, 2002).

Para o estudo desses fenômenos é necessário o entendimento de processos de transferência de calor com mudança de fase, nos quais, em geral, se faz necessária a resolução da equação da difusão de calor em ambas as fases, além de uma condição de interface conhecida como condição de Stefan (ALEXIADES, 1993 apud. NAAKTGEBOREN, 2002).

O presente estudo considera o material em mudança de fase encapsulado. Muitas abordagens para problemas como esse são complexas e pouco atrativas, exigindo a resolução de problemas acoplados.

Será utilizada uma abordagem mais simples, a do problema de Stefan de zero-fase, que permite previsões do comportamento do material em mudança de fase (MMF), ou seja, proporciona o conhecimento da posição de interface entre sólido e líquido. O modelo será estendido para materiais encapsulados em diferentes condições de inserção de fluxo de calor unidimensional.

1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA

O seguinte trabalho tem como objetivo investigar analiticamente o comportamento de um material em mudança de fase encapsulado.

A principal forma de utilização de MMF é a acumulação de energia em forma de calor latente, normalmente na mudança da fase sólida para a fase líquida. Tal estratégia resulta na redução da despesa com energia elétrica, como também na possibilidade de aumento na eficiência energética de chillers, ou, basicamente, resfriadores de água.

O encapsulamento consiste em inserir o MMF dentro de um recipiente de forma a evitar o contato do material com outras partículas, o que diminui a troca de calor do material com a vizinhança. Dependendo do tamanho, material e geometria do encapsulamento, sua aplicação varia (TRISTÃO 2014).

Os métodos usuais tratam o MMF encapsulado como um problema acoplado. Até o presente momento, os estudos sobre os materiais em mudança de fase encapsulados – o problema acoplado, não produziram soluções analíticas (ALEXIADES, 1993 apud. NAAKTGEBOREN, 2002).

O processo de mudança de fase envolve a equação da condução de calor (que é uma equação da conservação de energia) para as fases do material, e também para a região entre as fases sólida e líquida presentes no processo. Essa faixa pode ser bem definida, ou então, completamente indistinta, trazendo complexidade à proposição. Tanto para a resolução do problema acoplado, envolvendo transferência de calor e massa, como também a presença de encapsulamento, simplificações, que discretizam os modelos matemáticos, são feitas, podendo haver o desacoplamento (ALEXIADES, 1993 apud. NAAKTGEBOREN, 2002).

Em algumas soluções, construiu-se a base matemática e, então, a análise experimental validou os modelos matemáticos obtidos, como a solução analítica de Neumann dos problemas de Stefan de uma e duas fases, nas quais a equação da difusão do calor deve ser resolvida em uma e duas fases, respectivamente. Desta forma, há alguns métodos de aproximação do problema, com hipóteses simplificadoras, como a aproximação quase estacionária de Leibenzon (NAAKTGEBOREN, 2007).

Problemas de Stefan são chamados de “problemas de fronteira móvel”, pois uma de suas incógnitas é a delimitação da região. Nele, apenas os fenômenos físicos básicos da mudança de fase são incorporados e, ainda sim, hipóteses simplificadoras são necessárias para se ter uma solução aproximada (NAAKTGEBOREN, 2007).

Para o problema do material encapsulado em fusão, ou solidificação, uma abordagem simples, fácil e conexa se apresenta ao se utilizar de uma derivação do problema clássico de Stefan, que é o modelo zero-fase. Estendendo-se os problemas de Stefan, Naaktgeboren (2007) diz que para o modelo zero-fase não há necessidade da resolução da equação da difusão de calor em nenhuma das fases do material, isso se dá por mudanças de condições de contorno e de fronteira, simplificando o problema.

Esta abordagem tem como vantagem o desacoplamento de problemas, de modo que, no problema apresentado, a solução para o material em mudança de fase pode ser obtida separadamente do encapsulamento (NAAKTGEBOREN, 2007).

O problema a ser estudado é unidimensional, com um material em fusão e solidificação, em domínio finito com faces em ambos os lados do material. A temperatura nas faces do encapsulamento estará em regime periódico permanente, e a do interior se manterá constante e igual a temperatura de mudança de fase.

2 OBJETIVOS

Nesta seção será apresentado o objetivo geral do trabalho, bem como os objetivos específicos que compõem o global.

2.1 OBJETIVO GERAL

Investigar de forma analítica o comportamento de materiais em mudança de fase quando encapsulados, através das posições de interface sólido-líquida, e comparar tais resultados com os de materiais em mudança de fase sem encapsulamento, porém com domínio finito. Considera-se uma temperatura em regime periódico permanente nas vizinhanças do encapsulado, que gera um fluxo de calor na face exterior diferente do fluxo na face interior da parede.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Verificar as possibilidades de configuração das variáveis do problema, se atendo as similaridades nos casos no intuito de minimizá-los;

Estudar o método do problema de Stefan de zero-fase para averiguar analiticamente o comportamento da posição de interface sólido líquida de um material em mudança de fase encapsulado;

Utilizar o método do problema de Stefan de zero-fase, com propósito de comparação, em um material em mudança de fase com domínio finito, com fluxos de calor, gerados por uma temperatura em regime periódico permanente, imposto em ambas as faces do encapsulado.

3 JUSTIFICATIVA

Energia é fundamental para a existência do ser humano, com crescente consumo e muita extração. Até o presente momento, combustíveis fósseis têm sido utilizados para suprir a demanda energética humana. Entretanto, tal fonte é esgotável, como também cara, com alta probabilidade de um aumento progressivo em seu valor, por efeito da contínua procura.

A busca por outras fontes é ininterrupta, entretanto, possíveis soluções encontradas possuem flutuações acentuadas, que ocasionam dificuldades em sua utilização. Uma alternativa deste problema, é recorrer a técnicas de armazenamento de energia.

Uma forma de armazenamento de energia térmica em forma de calor latente, é a utilização de material em mudança de fase. O emprego desses materiais resulta em uma solução genuína e impecável, por se tratar de volumes pequenos com alto rendimento, podendo ser utilizados para aplicações domésticas ou industriais.

Um exemplo é a refrigeração de espaços, através de tijolos com MMFs, que armazenam o calor do ambiente, interno ou externo, para posterior liberação, permitindo manter uma temperatura adequada; ou também, em tecidos inteligentes, que acumulam energia para manter a temperatura corporal correta, em situações onde há grande perda de calor.

Um contratempo que envolve materiais em mudança de fase ocorre em locais de clima frio, onde ocorrem problemas de congelamento de tubos de água. Tal situação resulta em perturbações na passagem do fluido, bem como cenários de rachaduras ou quebras do duto, gerando gastos e perdas.

Conhecendo a espessura da camada sólida que se forma no cano, ou seja, a posição de interface entre as fases do material em mudança de fase, é possível prever e prevenir possíveis danos e grandes dispêndios.

Em todos os contextos possíveis, o MMF deve estar encapsulado, para evitar efeitos como espalhamento e perda de propriedades. Também existem fluxos de calor de e para o material, em sua maioria, presentes no entorno do encapsulado.

Portanto, este trabalho visa obter, de forma analítica, as posições de interface do material em mudança de fase dentro de um encapsulado, em casos representativos de bom escopo, com fluxos de calor unidimensional.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Para um processo que envolve a mudança de fase nos materiais é necessário haver transferência de calor, que é uma “energia térmica em trânsito devido a uma diferença de temperaturas no espaço” (INCROPERA, 2011, p. 2), de, ou para, ele. Tal transmissão pode ocorrer por três formas: condução, convecção e radiação. A condução de calor é “a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para as partículas adjacentes que são menos energéticas” (MORAN *et al.*, 2013, p. 41). A convecção ocorre por esta difusão térmica somada a advecção devido ao movimento do fluido; e a radiação é a energia emitida por qualquer material que se encontre a uma temperatura absoluta não nula. (GRADE, 2013).

Para o cálculo da taxa temporal de transferência de energia por condução, utiliza-se a lei de Fourier. Considerando-se a área da parede e o gradiente de temperatura na direção x (MORAN *et al.*, 2013, p. 41):

$$\dot{Q}_x = -\kappa A \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

na qual κ é a condutividade térmica, A é a área da seção transversal ao fluxo de calor e dT/dx é o gradiente de temperatura na direção longitudinal do fluxo de calor.

Estando a matéria nos estados sólido ou líquido, as forças coesivas mantêm os átomos próximos. Estes vibram mais acentuadamente nos líquidos, devido ao calor, ou energia térmica, armazenado (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES *et al.*, 1993). O acúmulo de energia pode ser sob forma de calor sensível, calor latente e calor termoquímico. O primeiro é referente ao aumento da temperatura; o segundo é relacionado à mudança de fase do material (TRISTÃO, 2014); enquanto que o último é relativo às reações ocasionadas no material, ou seja, o “estabelecimento ou quebra de ligações moleculares” (GRADE, 2013, p. 23).

Para que a mudança de fase ocorra, é necessário romper ou estruturar as forças de ligação das moléculas, ou seja, se liberar ou se acumular, respectivamente, energia em forma de calor latente (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES *et al.*, 1993).

Na solidificação e na fusão de materiais aparece uma interface separando as fases presentes, que se movimenta durante o processo. Havendo duas fases, as propriedades se diferem mesmo se tratando de um mesmo material. Nesta situação,

a posição da interface deve ser definida para se obter uma solução (HU; ARGYROPOULOS, 1996).

Então, “materiais de mudança de fase (MMF) são substâncias com capacidade de armazenar calor na forma de calor latente” (TRISTÃO, 2014, p. 4). Isso é verificado pelas reações que ocorrem na mudança de estado, quando endotérmica há absorção do calor, quando exotérmica, liberação do calor.

Esses materiais podem ser comparados com materiais de armazenagem convencionais sensíveis ao calor (SHS), quanto à absorção do calor. Entretanto, diferentemente destes, os MMFs mantêm sua temperatura durante a mudança de fase, envolvendo maiores quantidades de calor, e liberando tal energia quando a temperatura da vizinhança cai, fazendo-o retornar ao estado inicial. (LOSCHI, 2012).

Para Vitorino (2009, p. 1), há estudos que indicam “uma grande variedade de materiais com potencial para serem usados como MMFs”, ou seja, que possuem as características necessárias para serem aplicados como tal. No entanto, suas propriedades devem ser avaliadas corretamente para seu efetivo uso. Tais materiais são divididos em quatro grupos: orgânicos, inorgânicos, ácidos graxos e comerciais. Desses, os ácidos graxos não são muito aplicados por suas características não serem tão adequadas (VITORINO, 2009 apud REGIN, 2008).

Para um uso eficiente de MMFs, não pode haver reação entre o material em mudança de fase e o encapsulamento; este deve “ser capaz de suportar os ciclos térmicos” do sistema sem perda de propriedades; e devem interferir pouco na transferência de calor (VITORINO, 2009, p. 10).

“A região de transição entre fases, na qual ambas fases existem”, é muito estreita e de microestrutura complexa. Há a presença de descontinuidades por propriedades termofísicas do material, entretanto, como a modelagem é macroscópica, a análise pode desconsiderar tais empecilhos. (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993, p. 17).

Real e Oliveira (2003 apud VOLLER et al. p. 172) classificam a solidificação em três tipos e, para cada uma delas, há condições diferentes. Para a solidificação distinta, na qual a região de mudança de fase possui duas fases notáveis, “a interface sólido-líquido corresponde a uma curva isotérmica”; para a solidificação liga, há uma estrutura cristalina presente no material e, para a contínua, não há distinção de interface. Portanto há a exigência de métodos diferentes para o tratamento de solidificações diferenciadas.

No presente trabalho, a mudança de fase se dá com uma interface sólido-líquida presente e perceptível, ou seja, uma solidificação distinta. A posição durante a aplicação do fluxo de calor nas faces, bem como a movimentação da interface sólido-líquido será verificada analiticamente.

Em sistemas com mudança de fase tem-se o desconhecimento do movimento da interface sólido-líquido, de modo que o entendimento do processo de transferência de calor nesta área é dificultado (VITORINO, 2009, p. 6). As incógnitas correlatas são definidas ao utilizar-se da modelagem zero-fase do problema de Stefan. (NAAKTGEBOREN, 2007).

Os problemas de fronteira móvel são assim chamados em razão da interface de mudança de fase ser variável no tempo, com lei de movimento conhecida. Já os de fronteira livre tem a lei de movimento desconhecida. (TARZIA, 1981). Para Hu e Argyropoulos (1996), a posição da fronteira móvel deve ser determinada como uma função do tempo e espaço e, com isso, surgem os problemas de Stefan.

A condição de Stefan é proposta como sendo (ANDREUCCI, 2004, p. 2)

$$-\kappa_1 \theta_{x1}(s(t)-, t) + \kappa_2 \theta_{x1}(s(t)+, t) = L\dot{s}(t) \quad (2)$$

na qual $\kappa_{1,2}$ é o coeficiente de difusão nas diferentes fases, θ_{x1} é a função de temperatura em uma fase, $s(t)$ é a posição da interface em um dado instante t , e L é o calor latente inserido. Esta equação mostra que a movimentação da interface é proporcional à inserção de calor latente (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993).

Essa condição foi a base para a formulação dos problemas de Stefan existentes. Eles se baseiam em geometrias semi-infinitas ou infinitas, porém, é necessário o conhecimento da variável de tempo para se considerar válida a solução, quando aproximado para um problema de geometria finita. (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993).

O problema mais simples foi chamado de problema de uma fase de Stefan, que consiste em considerar apenas o líquido. Neumann encontrou uma solução baseada na anterior, utilizando duas fases. Nesta a temperatura inicial é diferente da temperatura de mudança de fase e ela não se mantém em um valor constante durante o processo (HU; ARGYROPOULOS, 1996).

A formulação clássica se baseia em duas hipóteses principais, a de que “nenhuma região mushy¹ está inicialmente presente ou será formada” (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993) e “as fases sólidas e líquidas estão separadas por uma superfície regular que evolui regularmente” (VISINTIN, 2008, p.386).

O problema de uma fase de Stefan se baseia em um enunciado de uma placa inicialmente sólida com temperatura imposta na fronteira, tal que a temperatura inicial do material é a mesma temperatura constante de mudança de fase, o que implica em um fluxo de calor contínuo no sólido (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993). Ele analisa a velocidade de interface da transformação do líquido para sólido (JEROME et al., 1982), necessitando resolver a equação do calor para apenas uma das fases, dependendo do problema.

No problema de Stefan de duas fases, a temperatura inicial imposta é menor que a temperatura constante de mudança de fase, tornando o fluxo de calor variável no sólido, ou seja, a equação da condução de calor deve ser resolvida para ambas as fases (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993).

A maior parte das aplicações envolvendo transferência de calor são transitórios, com variação das propriedades com o tempo. Para a determinação da transferência de calor entre materiais em estados diferentes, focando na troca entre sólidos com sua vizinhança, desprezando o gradiente de temperatura no interior do material, é utilizado do método da capacitância global (INCROPERA, 2011).

Este método supõe que a condutividade térmica do material é relativamente alta, ou seja, a resistência térmica do interior do material é desprezível em relação a resistência entre o material e a vizinhança, o que acarreta, devido a Lei de Fourier, numa temperatura uniforme do material.

Através de um balanço de energia (INCROPERA, 2011, p. 164), obtém-se

$$-\dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu} \quad (3)$$

$$-hA_s(T - T_\infty) = \rho Vc \frac{dT}{dt} \quad (4)$$

na qual ρ é a densidade do material, h é o coeficiente de transferência de calor por convecção, c é o calor específico do material, V é o volume e A_s é a área de superfície.

¹ “Mushy” é um termo normalmente não traduzido do inglês. Denomina uma região de coexistência entre duas fases, uma “zona mista” (NAAKTGEBOREN, 2002 apud ALEXIADES et al., 1993).

Ela é uma equação diferencial separável, que tem solução:

$$t = \frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta} \quad (5)$$

onde $\theta = T - T_\infty$, e define-se uma constante de tempo térmica por

$$\tau_t = \left(\frac{1}{h A_s} \right) (\rho V c) = R_t C_t \quad (6)$$

onde R_t é a resistência à transferência de calor por convecção e C_t é a capacitância térmica global do sólido.

Também se obtém que a energia interna do corpo é

$$Q = (\rho V c) \theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right) \right] \quad (7)$$

Para que o método seja válido, o número de Biot

$$Bi = \frac{hl}{k} \quad (8)$$

deve ser suficientemente baixo o que representa um gradiente de temperatura dentro do material pequeno comparado com o que ocorre entre a superfície e a vizinhança (INCROPERA, 2011).

O presente trabalho utiliza de uma aproximação para a fronteira móvel isotérmica no modelo de mudança de fase. Segundo Naaktgeboren (2007) esta é derivada do problema de Stefan clássico de uma fase, na qual as condições de fronteira (CF) são dependentes da forma generalizada do número de Biot, Bi , e corresponde à uma solução assintótica fazendo $Bi \rightarrow 0$.

$$Bi = \frac{hL_c}{k} \rightarrow 0, \quad (9)$$

onde h é o coeficiente convectivo [$W/m^2 \cdot ^\circ C$], k é o coeficiente condutivo de calor [$W/m \cdot ^\circ C$] e L_c é o comprimento característico do corpo [m].

Analisando a Eq. (9), observa-se que para que o número de Biot seja baixo, a superfície do material deve ser uma pequena dimensão, feitos de materiais de condutividade térmica elevada e coeficiente convectivo baixo. Ou seja, a condução de calor no interior do material (sólido ou fluido) ocorre de forma rápida, em comparação com a convecção entre a fronteira do material e a vizinhança envolvente; o que é equivalente a resistência térmica de condução do material ser pequena, o que faz com que este atinja o equilíbrio térmico rapidamente (INCROPERA, 2011).

Naaktgeboren (2007), mostra que isso corresponde a uma simplificação que traz como resultado a solução de problemas envolvendo múltiplas interfaces com geometrias finitas nas coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, tendo variação no tempo, bem como troca de sinal nos fluxos de calor, ou seja, inserindo-se e retirando-se calor com o tempo. Assim sendo, as condições de fronteira podem ser facilmente encontradas com a formulação zero-fase.

A aproximação zero-fase, ou isotérmica, para modelar os processos de mudança de fase tem a vantagem de desacoplar o problema. Para isso troca-se o domínio do material em mudança de fase (MMF), ou seja, as variações de temperaturas, ocorridas durante a mudança de fase, pela inserção, ou retirada, de calor na fronteira, são resumidas como uma temperatura fixa no contorno. Esta é o valor de temperatura no ponto de fusão do MMF e é estendido para o restante do sistema, enquanto o MMF está mudando de fase (NAAKTGEBOREN, 2007).

Tal qual Naaktgeboren (2007), o modelo de zero-fase só pode ser aplicado como uma aproximação analítica para casos tendo pequeno, mas finito, números de Biot. Acontece em mudança de fase em micro canais, em MMFs micro ou nano-encapsulados e em algumas situações envolvendo materiais em mudança de fase altamente condutivos.

4.1 O MODELO DE STEFAN DE ZERO-FASE

Para Naaktgeboren (2007), o problema clássico de uma-fase de Stefan consiste num meio semi-infinito de MMF, inicialmente sólido e todo à temperatura de fusão:

$$T(x,0) = T_f, \quad x \geq 0, \quad (10)$$

na qual x é a coordenada cartesiana com origem na superfície do material e perpendicular a esta superfície. O material funde devido a um fluxo de calor variável no tempo imposto em sua superfície, na direção positiva do eixo x :

$$q_p''(t) = -k_L \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (11)$$

na qual k_L é a condutividade térmica do MMF líquido.

Considera-se não haver movimento da fase líquida e, deste modo, a correspondente região consiste numa placa semi-infinita de espessura variável sem advecção e com distribuição de temperatura transitória $T(x,t)$, governada pela equação de difusão de calor no domínio líquido variável:

$$\rho c_L \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_L \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq X(t), \quad (12)$$

na qual ρ é a densidade do MMF (sendo a mesma para ambas as fases sólida e líquida), c_L é o calor específico para a fase líquida incompressível, que pode ser diferente daquele para a fase sólida, e $X(t)$ é a localização da interface plana sólida-líquida, que se move de acordo com a condição de Stefan

$$\rho L \frac{dX}{dt} = -k_L \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=X}, \quad (13)$$

na qual L é o calor latente de fusão do MMF. A temperatura na interface de mudança de fase é a temperatura de fusão, em virtude de se assumir que haja o equilíbrio térmico, ou seja, que todos os pontos do material estão em uma mesma temperatura: $T(X(t), t) = T_f$. A condição inicial para a Eq. (13) é $X(0) = 0$.

Para a melhor visualização das variáveis, bem como para reduzi-las, Naaktgeboren (2007) faz a adimensionalização do problema. Considerando T^* como L/c_L , e T_∞^* e T_p^* como indicadores de escala de $T_\infty(t)$ e $T_p(t)$, respectivamente. Adicionalmente, toma-se q^* como um critério de escala de $|q_d''(t)|$; t^* como um parâmetro de equivalência temporal de $q_d''(t)$; e x^* , uma escala de comprimento como $x^* = (t^* q^*)/(\rho L)$, então se tem as seguintes variáveis

$$\theta = \frac{T - T_f}{T^*}, \quad \psi = \frac{q}{q^*}, \quad \tau = \frac{t}{t^*}, \quad \xi = \frac{x}{x^*} \quad e \quad \Xi = \frac{X}{x^*} \quad (14)$$

e os parâmetros

$$Ste = \frac{c_L T^*}{L}, \quad (15)$$

$$Bi = \frac{q^* x^*}{k_L T^*},$$

podem ser definidos. A Eq. (11) se torna:

$$\psi_p''(\tau) = \frac{-\kappa}{Bi} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \quad (16)$$

A Eq. (13) se torna:

$$Ste \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\kappa}{Bi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right), \quad 0 \leq \xi \leq \Xi(\tau), \quad (17)$$

e a Eq. (14) torna-se:

$$\pm \frac{d\Xi}{d\tau} = \frac{-\kappa}{Bi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\Xi^-}, \quad (18)$$

Nessas equações, κ assume valor unitário positivo para os problemas de fusão ou k_S/k_L para os problemas de solidificação. Na Eq. (18), o sinal positivo, do lado esquerdo da igualdade, se refere aos problemas de fusão, conseqüentemente, o sinal negativo significa o problema de solidificação. As condições de interface e iniciais são

$$\theta(\Xi(\tau), \tau) = 0, \quad (19)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0, \quad \xi \geq 0, \quad (20)$$

$$\Xi(0) = 0. \quad (21)$$

Assumindo que o limite $Bi \rightarrow 0$, tem-se que a equação governante (17) se reduz para

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = 0, \quad 0 \leq \xi < \Xi(\tau), \quad \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = f(\tau) \quad (22)$$

ou que a derivada de θ em função de ξ é uma função de τ .

A condição de contorno, Eq. (16), implica

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \rightarrow \theta(\xi, \tau) : \theta(\tau), \quad (23)$$

portanto, a função de θ depende apenas da variável τ . Da Eq. (19), tem-se

$$\theta(\xi, \tau) = 0 \quad (24)$$

levando a um domínio isotérmico $\xi \geq 0$ na temperatura de mudança de fase durante toda a duração do problema.

A indeterminação na condição de Stefan pode ser resolvida reescrevendo-a em termos da condição de contorno, Eq. (16), usando a solução para a equação governante (22):

$$\frac{-\kappa}{Bi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\Xi^-} = \frac{-\kappa}{Bi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_0, \quad \rightarrow \pm \frac{\partial \Xi}{\partial \tau} = \psi_p''(\tau). \quad (25)$$

Problemas de fusão tem $\psi_p''(\tau) \geq 0$, já os de solidificação, $\psi_p''(\tau) \leq 0$, assim

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \tau} = |\psi_p''(\tau)|. \quad (26)$$

Para a resolução da Eq. (26), sujeita a uma condição inicial (21), Naaktgeboren (2007) chega a:

$$\Xi(\tau) = \int_0^\tau |\psi_p''(s)| ds. \quad (27)$$

Naaktgeboren (2007) ainda estende o problema para diferentes situações. No caso de uma posição inicial aleatória de interface, a Eq. (27) se torna:

$$\Xi(\tau) = \Xi_0 + \int_0^\tau |\psi_p''(s)| ds. \quad (28)$$

Quando há a presença de múltiplas interfaces no domínio, a posição da interface móvel mais próxima da fronteira $\Xi_{2i}(\tau)$, $i \geq 0$ é:

$$\Xi_{2i}(\tau) = \Xi_{2i,0} + \int_{\tau_i^*}^\tau |\psi_p''(s)| ds, \quad \tau_i^* \leq \tau < \tau_{i+1}^* \quad (29)$$

Nos casos em que o fluxo de calor na fronteira tiver inversão de sentido, a mudança de fase irá ocorrer sempre que a condição abaixo se mantiver verdadeira.

$$-\sum_0^L \leq \int_0^\tau \psi_p''(s) ds \leq \sum_0^S, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (30)$$

E, quando em domínio finito, deve-se observar os sentidos dos fluxos de calor nas fronteiras e a condição abaixo para a ocorrência da mudança de fase:

$$-\sum_0^L \leq \int_0^\tau [\psi_e''(s) - \psi_d''(s)] ds \leq d - \sum_0^L, \quad \forall \tau \geq 0. \quad (31)$$

Naaktgeboren (2007) mostra que, se duas ou mais interfaces estão presentes no domínio, não haverá interação entre os lados direito e esquerdo do domínio, e apenas as interfaces próximas das fronteiras esquerda e direita irão se mover em resposta aos fluxos de calor respectivos às suas fronteiras. Enquanto isso for verdadeiro, pode-se separar o problema em dois independentes, e resolver conforme mostrado anteriormente. A condição de Stefan para as interfaces móveis será, respectivamente

$$\frac{d\Xi_e}{d\tau} = |\psi_e''(\tau)|, \quad e \quad \frac{d\Xi_d}{d\tau} = -|\psi_d''(\tau)|, \quad (32)$$

Se houver apenas uma interface presente no domínio, a condição de Stefan se torna

$$\frac{d\Xi}{d\tau} = |\psi_e''(\tau)| - |\psi_d''(\tau)|, \quad (33)$$

Esta condição só é válida se ambos os fluxos de calor tiverem o mesmo sinal, para um número ímpar de interfaces se apresentarem no domínio, se seus sinais concordarem ou, então, um número par. A solução se apresenta como:

$$\Xi(\tau) = \Xi_0 + \int_0^\tau \left[|\psi_e''(s)| - |\psi_d''(s)| \right] ds \quad (34)$$

até que um dos fluxos de calor, ou ambos, troquem de sinal.

4.2 O PROBLEMA DA PAREDE

Observa-se na Figura 1 – Parede Figura 1 uma parede com a face $x = 0$ com temperatura periódica permanente e com a face $x = L$ com temperatura igual a temperatura de fusão do material que está na região $x > l$. Deseja-se descobrir o fluxo de calor nas faces dessa parede.

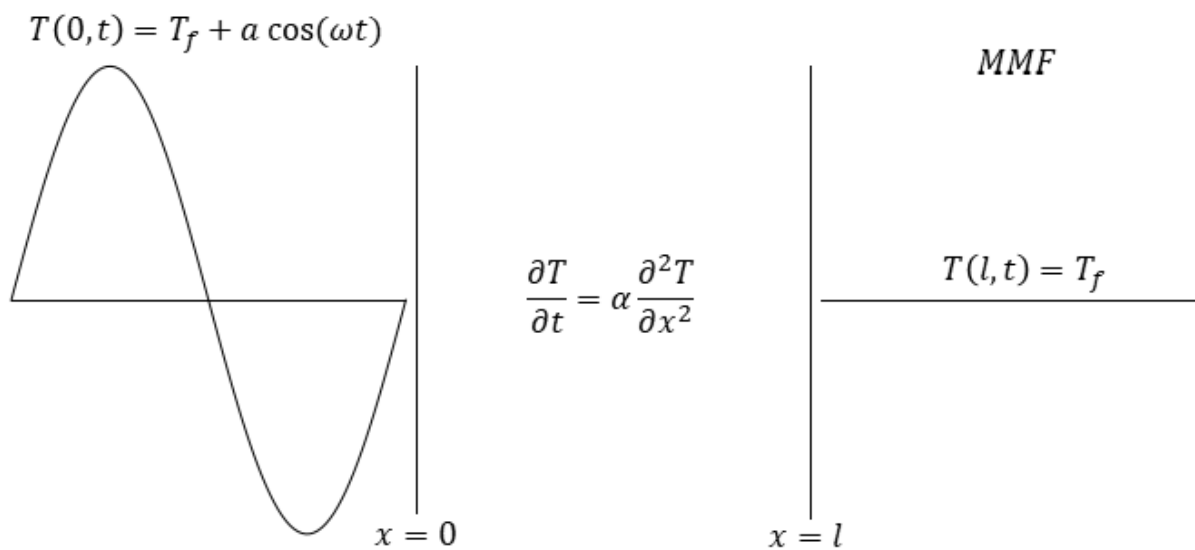


Figura 1 – Parede com transferência de calor em que, na face esquerda há uma temperatura imposta em regime periódico permanente, e na face direita uma temperatura constante
Fonte: Naaktgeboren (2007)

Para reduzir o número de parâmetros, Naaktgeboren (2007), faz a adimensionalização das variáveis:

$$\theta = \frac{T - T_f}{T^*}, \quad T^* = a, \quad (35)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad l = x^*, \quad (36)$$

resultando em uma equação de condução de calor no interior da parede

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial(a\theta + T_f)}{\partial(\omega\tau)} = \alpha \frac{\partial^2(a\theta + T_f)}{\partial(\xi l)^2}$$

$$\frac{(a + T_f)\partial\theta}{\omega\partial\tau} = \alpha \frac{(a + T_f)\partial^2\theta}{l^2\partial\xi^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\alpha\omega}{l^2} \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = f \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \quad (37)$$

$$\tau = \omega t, \quad \omega = \frac{1}{t^*}. \quad (38)$$

Para as condições de contorno

$$\theta(0, \tau) = \cos(\tau) \quad (39)$$

$$\theta(1, \tau) = 0$$

Naaktgeboren (2007), realiza operações matemáticas envolvendo equações com variáveis imaginárias, obtendo os fluxos de calor,

$$\psi_o'' = \frac{r[(\cos(\tau) + \text{sen}(\tau))\cos(r)\text{sen}(r) + (\cos(\tau) - \text{sen}(\tau))\text{senh}(r)\cosh(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (40)$$

$$\psi_1'' = \frac{r[(\cos(\tau) + \text{sen}(\tau))\text{sen}(r)\cosh(r) + (\cos(\tau) - \text{sen}(\tau))\text{senh}(r)\cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (41)$$

onde $r = l\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} = x^*\sqrt{\frac{1}{2t^*T^*}}$ e os subscritos 0 e 1 designam $x = 0$ e $x = l$,

respectivamente. A razão entre os fluxos obtidos se torna

$$A \quad (42)$$

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Analogamente ao método de dedução do tensor de tensão viscosa de Bird (2004), primeiramente, visa-se obter uma redução nos casos possíveis de exame, comparando comportamentos e resultados.

Deve-se observar e investigar as movimentações das interfaces sólido-líquido no interior do material em mudança de fase. Uma análise unidimensional, com fluxos de calor em regime periódico permanente, aplicado em ambos os lados do domínio finito, em fase ou defasados.

Com os casos representativos de um maior escopo, um estudo analítico das posições da interface, bem como as variáveis que influenciam no comportamento do MMF, será realizado.

Para o estudo, será estendida a abordagem do problema de Stefan de zero-fase, enunciada por Naaktgeboren (2007), para os casos do trabalho, utilizando-se dos resultados designados por “o problema da parede” para os fluxos de calor, também estendidos para o escopo do trabalho.

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A princípio, utiliza-se raciocínio análogo ao da dedução do tensor tensão viscosa que começa com as combinações lineares de todos os gradientes de velocidade e 81 grandezas de coeficientes de viscosidade, e se reduzem para apenas 2 (Bird, 2004).

Para o presente estudo, inicialmente há 48 configurações para comparação, bem como o mesmo número para análise, considerando, inicialmente, a presença de duas interfaces sólido-líquida; a permutação das fases do material; a fase, ou antifase, do fluxo de calor sendo aplicado nas fronteiras; bem como a direção de aplicação de tal.

Verificando-se o comportamento, a movimentação das interfaces sólido-líquida e seu posicionamento, reduzimos para 4 casos de comparação e 4 casos para análise.

O modelo de Stefan de zero-fase com posição inicial arbitrária de interface, presença de múltiplas interfaces no domínio, fluxo de calor na fronteira com mudança de sinal e domínio finito, estendendo-se para o presente trabalho. As equações base, portanto, serão Eqs. (28), (29), (30), (32) e (34).

Para fins de comparação, serão utilizados os fluxos de calor obtidos por Naaktgeboren (2007), mostrados nas Eqs. (40) e (41), estendendo-os para o escopo do trabalho.

Isso corresponde a analisar o fluxo ψ_0'' para uma parede com espessura $l = 0$. Para tanto, $r = l\sqrt{\omega/2\alpha} = 0\sqrt{\omega/2\alpha} = 0$, o que resulta em uma indeterminação como mostrado

$$\psi_0'' = \frac{0[(\cos(\tau) + \text{sen}(\tau))\text{sen}(0)\cos(0) + (\cos(\tau) - \text{sen}(\tau))\text{senh}(0)\cosh(0)]}{\text{senh}^2(0) + \text{sen}^2(0)} = \frac{0}{0}$$

Para a resolução desta indeterminação, aplica-se l'hôpital. Sabendo-se que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(r)}{r}, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{senh}(r)}{r}, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{sen}^2(r)}{r^2}, \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{senh}^2(r)}{r^2} = 1, \text{ tem-se}$$

$$\psi_0'' = \frac{[(\cos(\tau) + \text{sen}(\tau))\text{sen}(r)\cos(r) + (\cos(\tau) - \text{sen}(\tau))\text{senh}(r)\cosh(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)}$$

r

$$\psi_0'' = \frac{\left[\frac{(\cos(\tau) + \operatorname{sen}(\tau))\operatorname{sen}(r)\cos(r)}{r} + \frac{(\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau))\operatorname{senh}(r)\cosh(r)}{r} \right]}{\frac{\operatorname{senh}^2(r) + \operatorname{sen}^2(r)}{r^2}}$$

$$\psi_0'' = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left[(\cos(\tau) + \operatorname{sen}(\tau))\cos(r)\frac{\operatorname{sen}(r)}{r} + (\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau))\cosh(r)\frac{\operatorname{senh}(r)}{r} \right]}{\frac{\operatorname{senh}^2(r)}{r^2} + \frac{\operatorname{sen}^2(r)}{r^2}}$$

$$\psi_0'' = \frac{[(\cos(\tau) + \operatorname{sen}(\tau))\cos(0) \times 1 + (\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau))\cosh(0) \times 1]}{1+1}$$

$$\psi_0'' = \frac{(\cos(\tau) + \operatorname{sen}(\tau)) + (\cos(\tau) - \operatorname{sen}(\tau))}{2}$$

$$\psi_0'' = \frac{2\cos(\tau)}{2}$$

$$\psi_0'' = \cos(\tau)$$

Portanto, o fluxo de calor resultante tendendo-se a parede a uma espessura $l = 0$ é um cossenoide. Essa formulação será utilizada para os casos sem o encapsulamento.

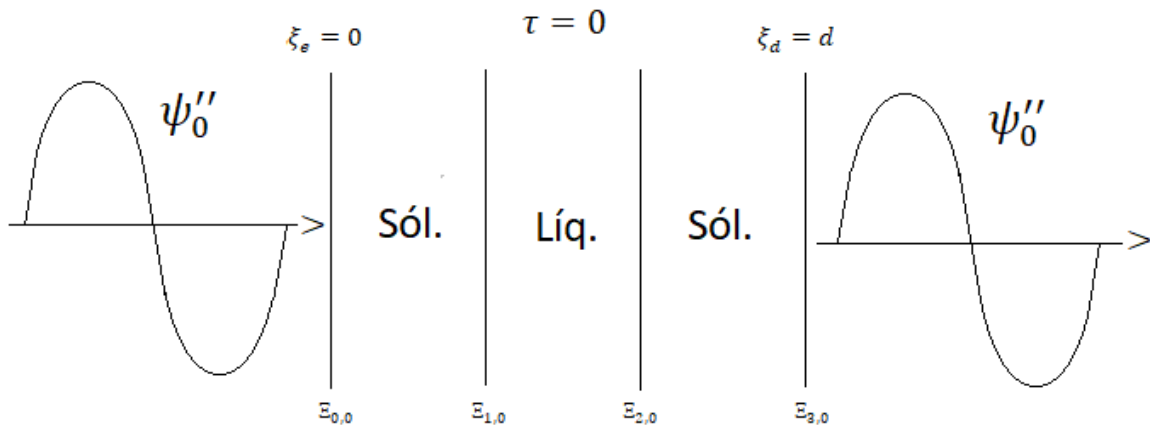


Figura 2 – Caso 1: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em fase
Fonte: Autoria própria

No primeiro caso, vê-se que em ambas as fronteiras o fluxo é inicialmente positivo, ou seja, estão em fase, entretanto, ele tem direção de entrada na margem da esquerda e direção de saída na margem da direita. Assim sendo, o calor está sendo inserido na fronteira esquerda e retirado na direita.

O comportamento das interfaces móveis no interior do domínio pode ser mostrado na Figura 3, vê-se que a interface $\Xi_{1,0}$ permanece estática durante a movimentação daquelas criadas ou movidas.

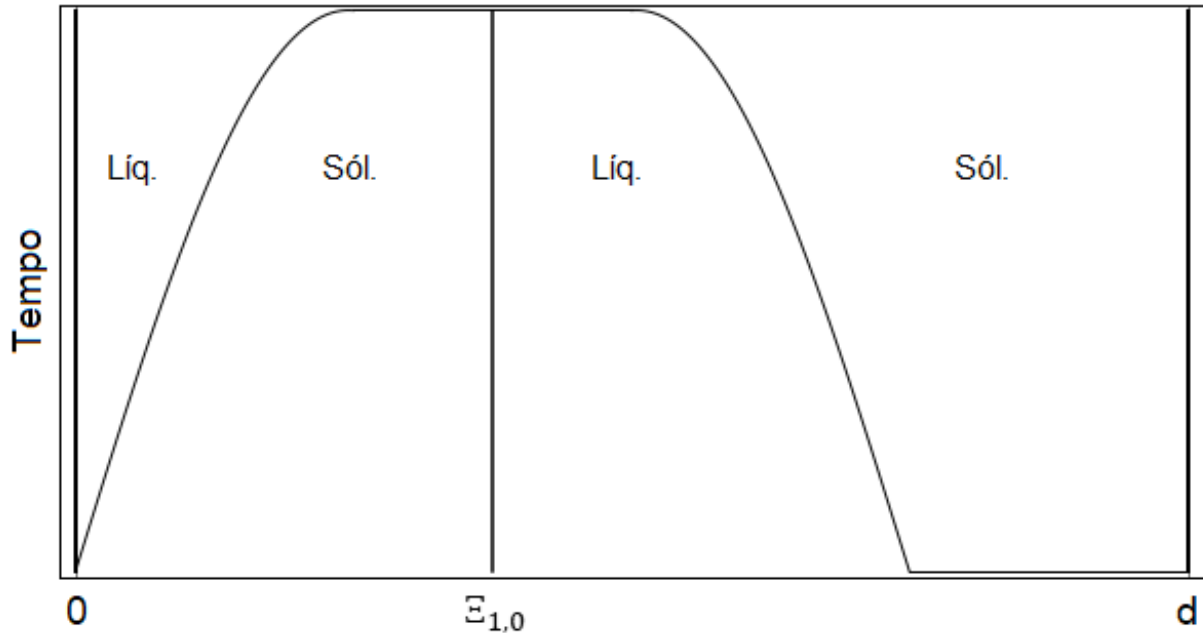


Figura 3 – Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 1
Fonte: Autoria própria

Dessa maneira, percebe-se a criação de uma nova interface móvel em $\xi_e = 0$. Quando observado em $\xi_d = d$, percebe-se que a interface $\Xi_{2,0}$ é a que se move. Ambas se afastando das fronteiras.

Como há mais de uma interface no domínio, de acordo com o modelo de Stefan de zero-fase, pode-se tratar ambos os lados separadamente. Portanto,

$$\frac{d\Xi_{e,1}}{d\tau} = |\psi_0''(\tau)|, \quad e \quad \frac{d\Xi_{d,1}}{d\tau} = -|\psi_0''(\tau)|$$

Integrando o fluxo de calor ψ_0'' .

$$\Xi_{e,1} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \psi_0''(s) ds$$

$$\Xi_{e,1} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \cos(s) ds$$

$$\Xi_{e,1} = \Xi_{0,0} + \text{sen}(s) \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{e,1} = \Xi_{0,0} + \text{sen}(\tau) - \text{sen}(0)$$

$$\Xi_{e,1} = \Xi_{0,0} + \text{sen}(\tau) \tag{43}$$

obtém-se a equação de posição para a fronteira esquerda. Para a fronteira direita, analogamente se obtém:

$$\Xi_{d,1} = \Xi_{2,0} - \text{sen}(\tau) \quad (44)$$

O comportamento das interfaces móveis mais próximas da fronteira esquerda pode ser mostrado como no gráfico da Figura 4, o qual apresenta

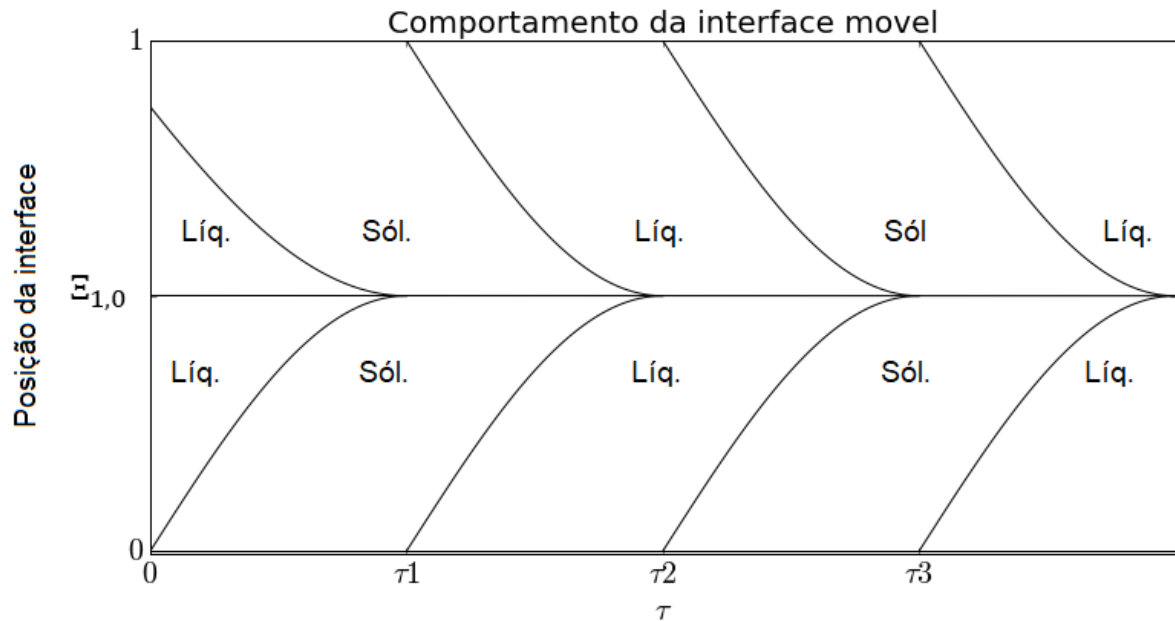


Figura 4 – Posições de interfaces geradas, no decorrer do tempo, para ambas as faces
Fonte: Autoria própria

um deslocamento da interface líquida inicial até um tempo τ_1 , onde o fluxo de calor troca de sinal, resultando em uma constância no deslocamento da interface inicial criada e iniciando-se o deslocamento de uma segunda interface gerada, agora com a fase sólida. A cada inversão de sinal do fluxo, há a troca da fase mais próxima da fronteira esquerda, formando uma nova interface.

Porém, se a condutividade térmica das fases líquida e sólida forem iguais, a variação de sinal no fluxo de calor gerará posições de interfaces coincidentes, resultando na não acumulação de energia em forma de calor latente. Desta forma, os coeficientes devem ser diferentes, o que ocorre na maior parte dos casos.

Quando com o encapsulado, o fluxo de calor obtido no capítulo “o problema da parede” pode ser utilizado, pois encaixa-se perfeitamente para o caso. Então, utilizando-se do fluxo de calor ψ_1'' , são obtidas as formulações mostradas abaixo.

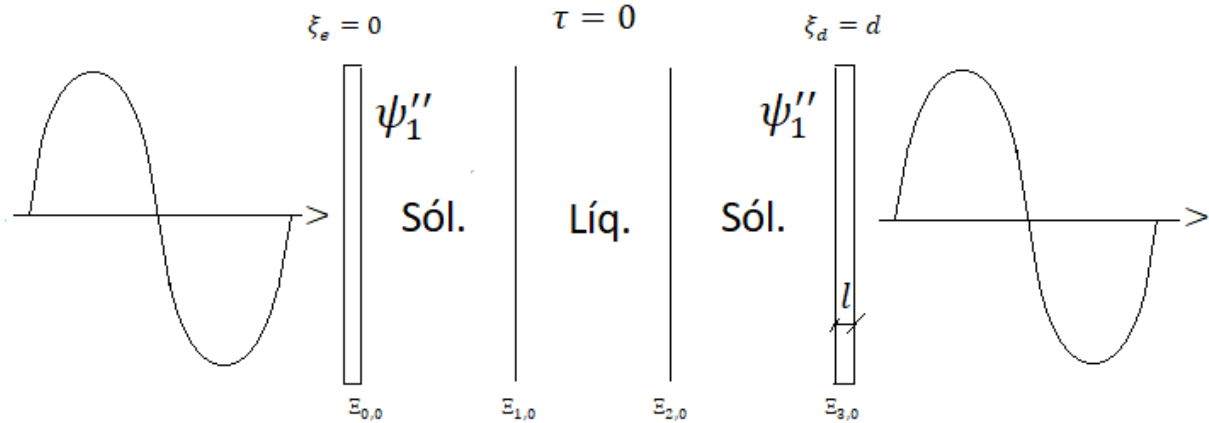


Figura 5 – Caso 1 encapsulado: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em fase
Fonte: Autoria própria

$$\frac{d\Xi_{ep,1}}{d\tau} = |\psi_1''(\tau)|, \quad e \quad \frac{d\Xi_{dp,1}}{d\tau} = -|\psi_1''(\tau)|$$

$$\Xi_{ep,1} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \psi_1''(s) ds$$

$$\Xi_{ep,1} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \frac{r[(\cos(s) + \text{sen}(s))\text{sen}(r) \cosh(r) + (\cos(s) - \text{sen}(s))\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} ds$$

$$\Xi_{ep,1} = \Xi_{0,0} + \frac{r[(\text{sen}(s) - \cos(s))\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(s) + \cos(s))\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{ep,1} = \Xi_{0,0} + \frac{r[(\text{sen}(\tau) - \cos(\tau) + 1)\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(\tau) + \cos(\tau) - 1)\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (45)$$

Para a fronteira direita

$$\Xi_{dp,1} = \Xi_{2,0} - \frac{r[(\text{sen}(\tau) - \cos(\tau) + 1)\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(\tau) + \cos(\tau) - 1)\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (46)$$

Os casos seguintes apresentam variação nas direções dos fluxos de calor, estando, estes, em fase ou defasados; e nas fases presentes no domínio. Consequentemente, a interface móvel varia, entretanto, a formulação é a mesma.

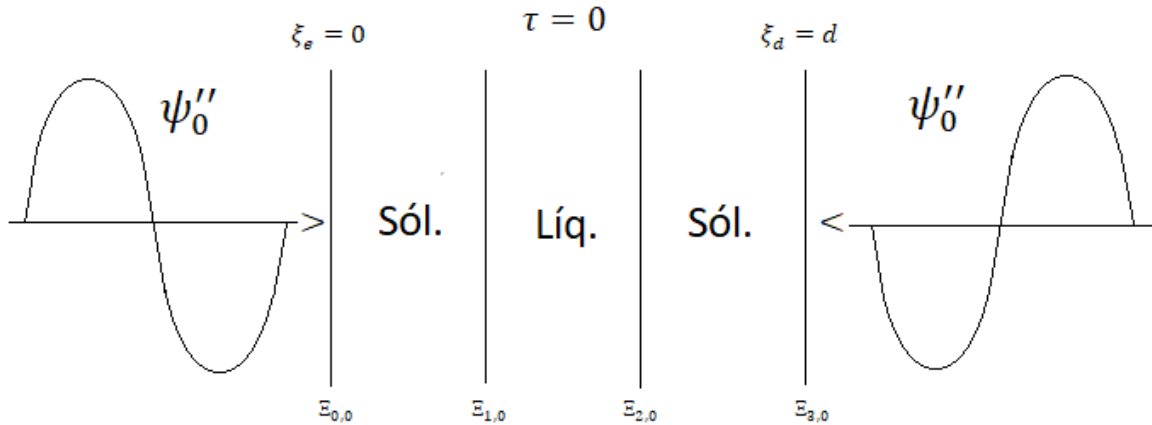


Figura 6 – Caso 2: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor entrando em fase
Fonte: Autoria própria

No segundo caso, vê-se que em ambas as fronteiras o fluxo é inicialmente positivo, ou seja, estão em fase, e, ambas as margens, têm direção de entrada de fluxo. Assim sendo, o calor está sendo inserido nas duas fronteiras.

A movimentação das interfaces está representada na Figura 7. Vê-se que em ambas as fronteiras, as interfaces móveis são criadas.

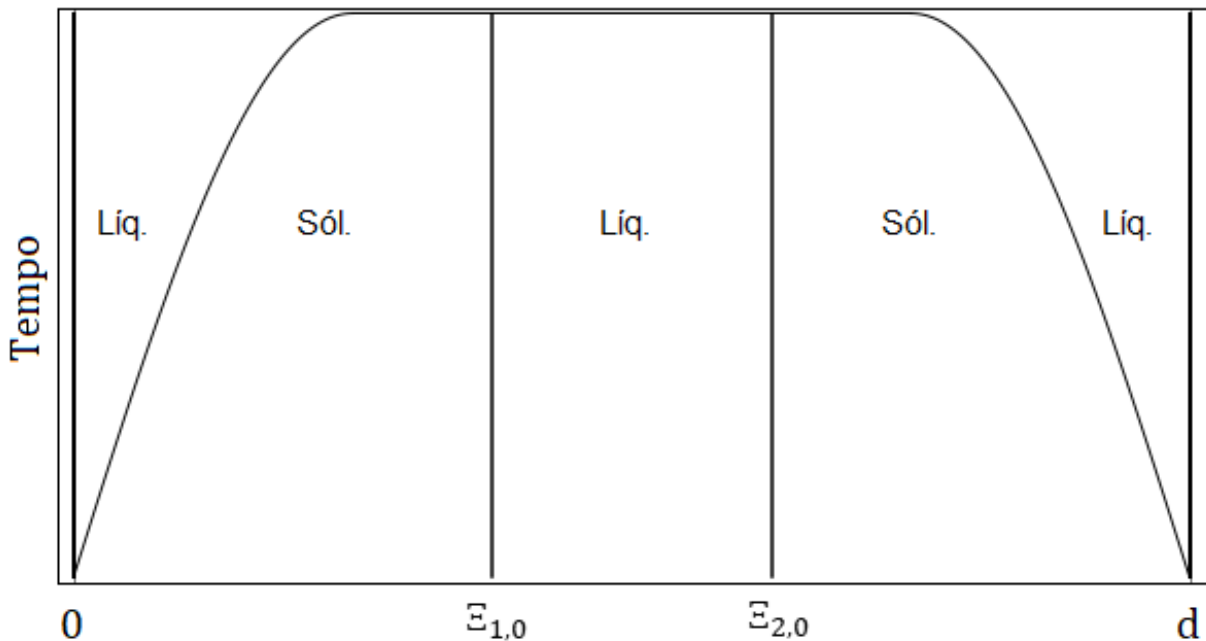


Figura 7 - Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 2
Fonte: Autoria própria

Pode-se tratar da mesma forma que no caso anterior, porém, estendendo o método do domínio finito, a direção de entrada na fronteira direita muda o sentido do fluxo, portanto o sinal na equação.

$$\frac{d\Xi_{e,2}}{d\tau} = |\psi_0''(\tau)|, \quad e \quad \frac{d\Xi_{d,2}}{d\tau} = |\psi_0''(\tau)|$$

$$\Xi_{e,2} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \psi_0''(s) ds$$

$$\Xi_{e,2} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \cos(s) ds$$

$$\Xi_{e,2} = \Xi_{0,0} + \text{sen}(s) \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{e,2} = \Xi_{0,0} + \text{sen}(\tau) - \text{sen}(0)$$

$$\Xi_{e,2} = \Xi_{0,0} + \text{sen}(\tau) \quad (47)$$

Para a fronteira direita,

$$\Xi_{d,2} = \Xi_{3,0} + \text{sen}(\tau) \quad (48)$$

No caso encapsulado,

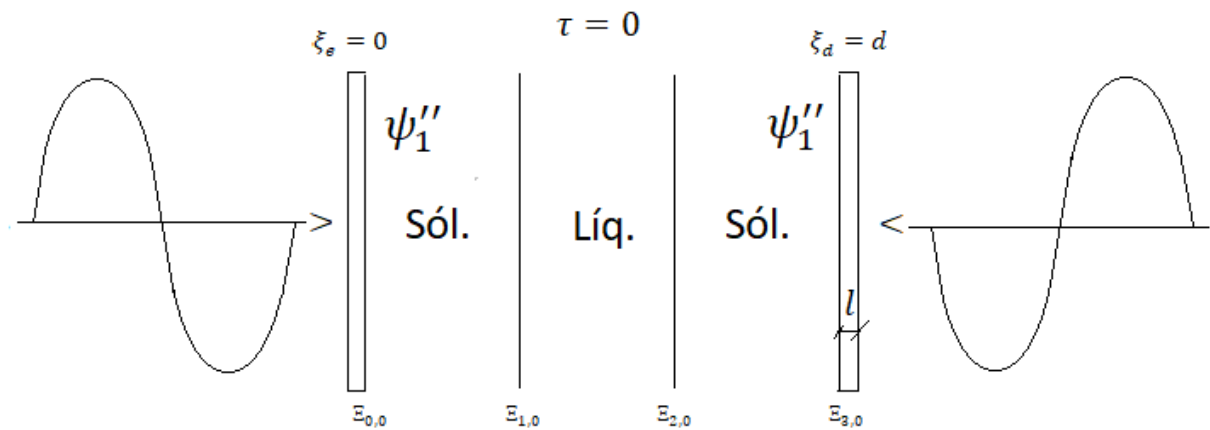


Figura 8 – Caso 2 encapsulado: fase sólida próxima à fronteira com fluxos de calor entrando em fase

Fonte: Autoria própria

Para o caso com encapsulado, tem-se a utilização do fluxo de calor ψ_1'' .

$$\Xi_{ep,2} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \psi_1''(s) ds$$

$$\Xi_{ep,2} = \Xi_{0,0} + \int_0^\tau \frac{r[(\cos(s) + \text{sen}(s))\text{sen}(r) \cosh(r) + (\cos(s) - \text{sen}(s))\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} ds$$

$$\Xi_{ep,2} = \Xi_{0,0} + \frac{r[(\text{sen}(s) - \cos(s))\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(s) + \cos(s))\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{ep,2} = \Xi_{0,0} + \frac{r[(\text{sen}(\tau) - \cos(\tau) + 1)\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(\tau) + \cos(\tau) - 1)\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (49)$$

Para a fronteira direita

$$\Xi_{dp,2} = \Xi_{3,0} + \frac{r[(\text{sen}(\tau) - \cos(\tau) + 1)\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(\tau) + \cos(\tau) - 1)\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (50)$$

No terceiro caso.

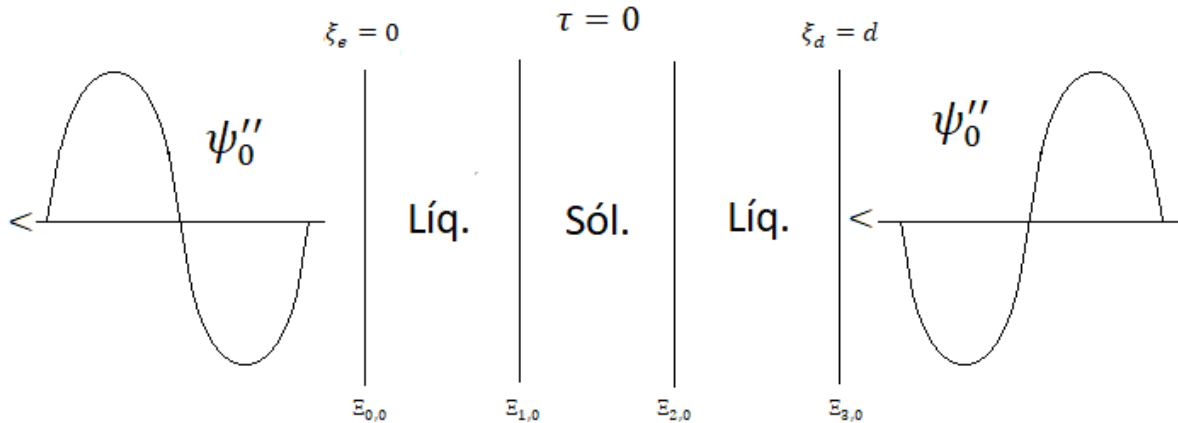


Figura 9 - Caso 3: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em antifase
Fonte: Autoria própria

Neste muda-se a configuração das fases no domínio, tem-se então a fase líquido próxima das fronteiras. Nesta situação, o fluxo de calor da margem esquerda tem direção de saída e é inicialmente negativo, portanto, sua direção se inverte, já na margem direita, é inicialmente positivo e tem direção de entrada.

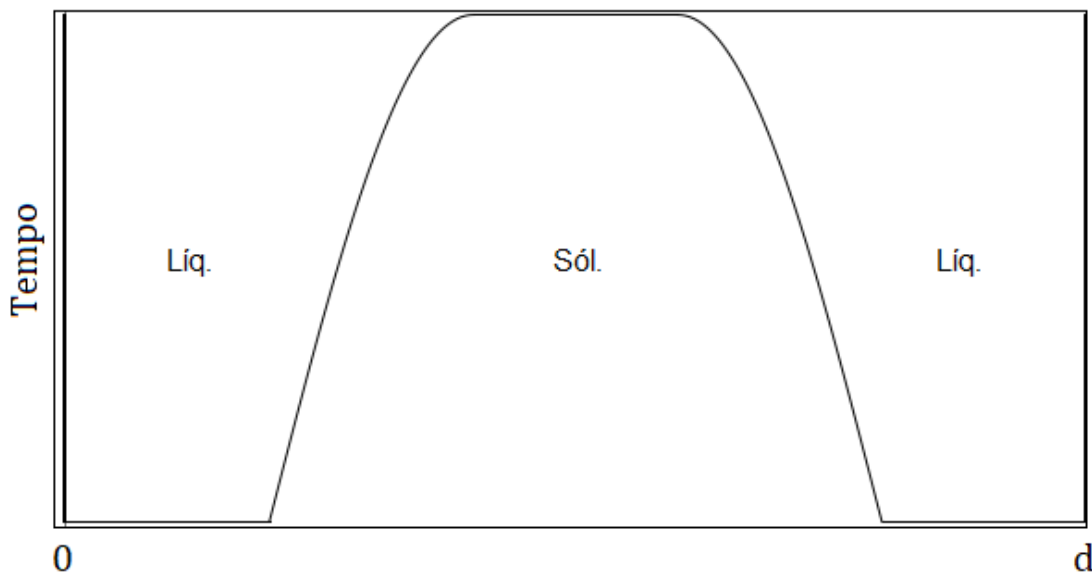


Figura 10 – Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 3
Fonte: Autoria própria

Como mostrado na Figura 10, uma pequena espessura do domínio leva à criação de uma única interface, com isso, o fluxo resultante no interior seria a soma dos fluxos em ambos os lados.

$$\frac{d\Xi_{e,3}}{d\tau} = |\psi_0''(\tau)|, \quad e \quad \frac{d\Xi_{d,3}}{d\tau} = |\psi_0''(\tau)|$$

$$\Xi_{e,3} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \psi_0''(s + \pi) ds$$

$$\Xi_{e,3} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \cos(s + \pi) ds$$

$$\Xi_{e,3} = \Xi_{1,0} + \text{sen}(s + \pi) \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{e,3} = \Xi_{1,0} + \text{sen}(\tau + \pi) \quad (51)$$

Para a fronteira direita,

$$\Xi_{d,3} = \Xi_{2,0} + \text{sen}(\tau + \pi) \quad (52)$$

Com o encapsulamento

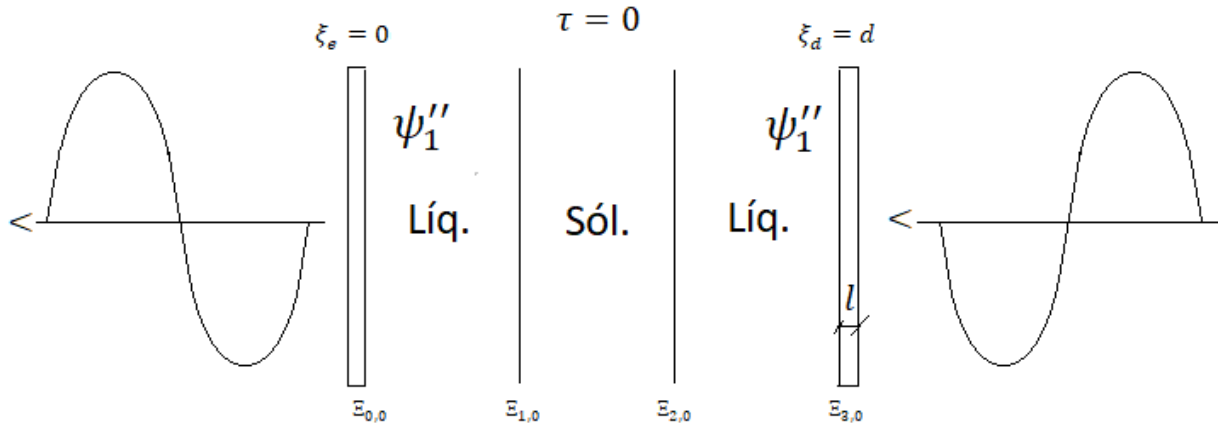


Figura 11 - Caso 3 encapsulado: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor sequenciais em antifase
Fonte: Autoria própria

$$\Xi_{ep,3} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \psi_1''(s + \pi) ds$$

$$\Xi_{ep,3} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \frac{r[(\cos(s + \pi) + \text{sen}(s + \pi))\text{sen}(r) \cosh(r) + (\cos(s + \pi) - \text{sen}(s + \pi))\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} ds$$

$$\Xi_{ep,3} = \Xi_{1,0} + \frac{r[(\text{sen}(s + \pi) - \cos(s + \pi))\text{sen}(r) \cos(r) + (\text{sen}(s + \pi) + \cos(s + \pi))\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{ep,3} = \Xi_{1,0} + \frac{r[(\text{sen}(\tau + \pi) - \cos(\tau + \pi) - 1)\text{sen}(r)\cosh(r) + (\text{sen}(\tau + \pi) + \cos(\tau + \pi) + 1)\text{senh}(r)\cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)}$$

(53)

Para a fronteira direita

$$\Xi_{dp,3} = \Xi_{2,0} + \frac{r[(\text{sen}(\tau) - \cos(\tau) + 1)\text{sen}(r)\cosh(r) + (\text{sen}(\tau) + \cos(\tau) - 1)\text{senh}(r)\cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)}$$

(54)

No último caso

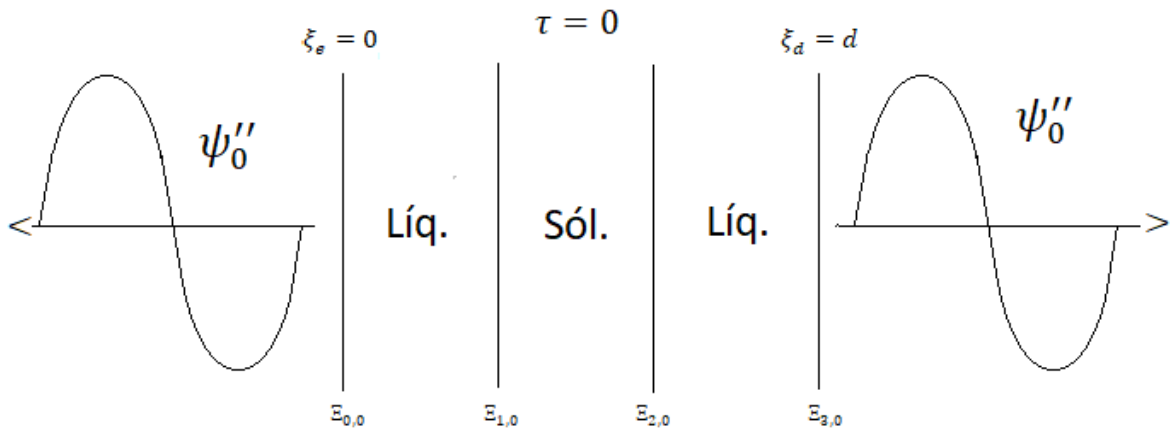


Figura 12 - Caso 4: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor saindo em antifase
Fonte: Autoria própria

No quarto caso a fase líquida está próxima da fronteira, o fluxo da margem direita tem direção de saída, já o da fronteira esquerda, de entrada, sendo este inicialmente negativo, portanto, invertendo o sentido do fluxo de calor, e o da fronteira direita inicialmente positivo.

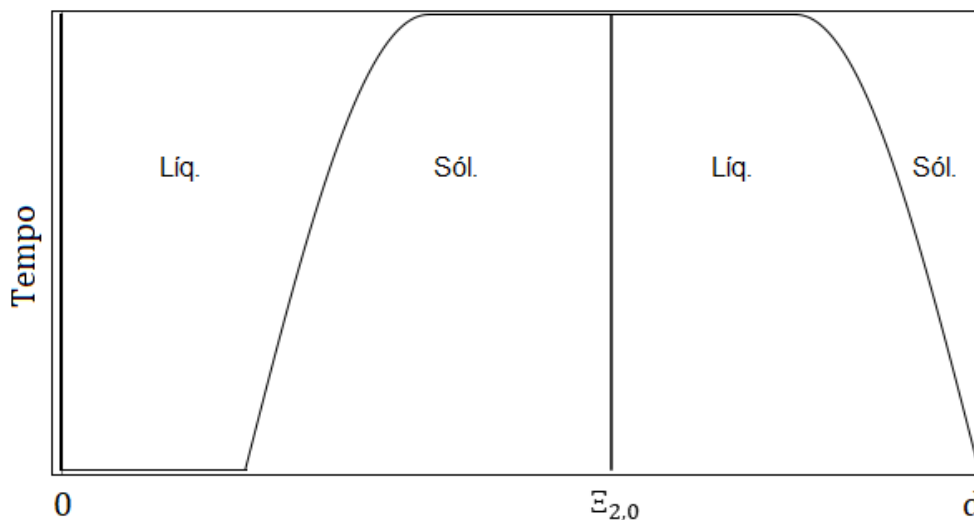


Figura 13 – Movimentação da interface, no interior do domínio, de acordo com o tempo para o caso 4

Fonte: Autoria própria

A movimentação das interfaces está mostrada na

$$\frac{d\Xi_{e,4}}{d\tau} = |\psi_0''(\tau)|, \quad e \quad \frac{d\Xi_{d,4}}{d\tau} = -|\psi_0''(\tau)|$$

$$\Xi_{e,4} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \psi_0''(s + \pi) ds$$

$$\Xi_{e,4} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \cos(s + \pi) ds$$

$$\Xi_{e,4} = \Xi_{1,0} + \text{sen}(s + \pi) \Big|_0^\tau$$

$$\Xi_{e,4} = \Xi_{1,0} + \text{sen}(\tau + \pi) \quad (55)$$

Para a fronteira direita,

$$\Xi_{d,4} = \Xi_{3,0} - \text{sen}(\tau) \quad (56)$$

Para o MMF encapsulado.

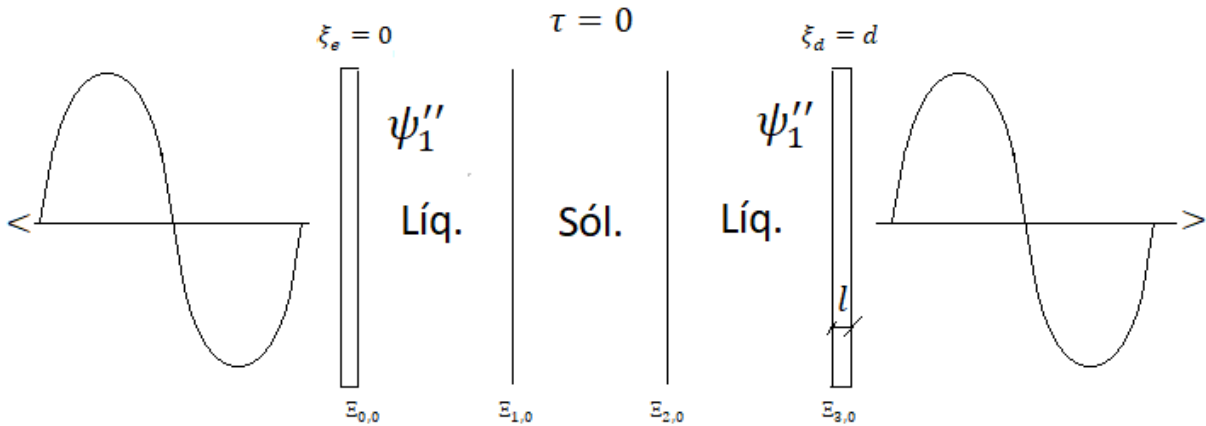


Figura 14 - Caso 4 encapsulado: fase líquida próxima à fronteira com fluxos de calor saindo em antifase

Fonte: Autoria própria

$$\Xi_{ep,4} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau \psi_1''(s + \pi) ds$$

$$\Xi_{ep,4} = \Xi_{1,0} + \int_0^\tau r \left[\frac{(\cos(s + \pi) + \text{sen}(s + \pi)) \text{sen}(r) \cosh(r) + (\cos(s + \pi) - \text{sen}(s + \pi)) \text{senh}(r) \cos(r)}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \right] ds$$

$$\Xi_{ep,4} = \Xi_{1,0} + \left. \frac{r [(\text{sen}(s + \pi) - \cos(s + \pi)) \text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(s + \pi) + \cos(s + \pi)) \text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \right|_0^\tau$$

$$\Xi_{ep,4} = \Xi_{1,0} + \frac{r [(\text{sen}(\tau + \pi) - \cos(\tau + \pi) - 1) \text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(\tau + \pi) + \cos(\tau + \pi) + 1) \text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)}$$

(57)

Para a fronteira direita

$$\Xi_{dp,4} = \Xi_{3,0} - \frac{r[(\text{sen}(\tau) - \cos(\tau) + 1)\text{sen}(r) \cosh(r) + (\text{sen}(\tau) + \cos(\tau) - 1)\text{senh}(r) \cos(r)]}{\text{senh}^2(r) + \text{sen}^2(r)} \quad (58)$$

Para critérios de comparação, diversos materiais com escala temporais diferentes serão testados, encontrando assim espessuras de parede indiferentes para se obter um mesmo fluxo de calor no material encapsulado ou não. Sendo assim, otimizando a absorção ou liberação de energia em forma de calor latente pelo MMF encapsulado.

As escalas temporais serão divididas em segundos, minutos e horas, para se obter valores que se aproximem com as variações reais. O valor do coeficiente de difusividade térmica será apresentado para casos reais de cada material. Tal cálculo implica em resultados diferentes da expressão denominada por r .

Tabela 1 - Valores de espessura, em metros, em que a atenuação entre os fluxos é 0.00001%.

α [mm ² /s]	98.8	22.8	117	0.87	0.47	0.15	1.35
ω							
2π	0.05	0.05	0.05	0.55	0.55	1.05	0.55
$\frac{2\pi}{60}$	0.55	0.55	0.55	2.05	2.55	4.55	1.55
$\frac{2\pi}{3600}$	1.55	3.05	1.55	14.55	19.55	34.05	11.55

Fonte: Autoria própria

Os resultados estão mostrados na Tabela 1, os valores de espessura, l , estão dados em metros. As grandezas ω define a escala temporal e α , o coeficiente de difusividade térmica de alguns materiais, da esquerda para a direita, o alumínio, o aço, o cobre, a sílica fundida, o gesso, o polietileno e o mármore.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como esperado, a formulação mostra que a posição da interface no MMF depende de variáveis dos fluxos de calor, tempo, propriedades do material e dimensões. Um domínio pequeno do material em mudança de fase, com grandes amplitudes de fluxo de calor, tem maiores chances dos fluxos se anularem e o acúmulo de energia ser reduzido.

Para a parede, a medida de espessura, seu material e o período da função temperatura são as principais influências para amenizar o fluxo de calor inserido. Para a maioria das aplicações de armazenamento de energia, deseja-se que todo o fluxo aplicado na fronteira seja acumulado pelo material, dessa forma, constatar valores de espessura, com valores típicos para as outras variáveis de influência, mostra-se um facilitador para trabalhos futuros.

Contudo, nos casos de congelamento de tubos, prevalece o desejo de se obter o inverso: espessuras de parede em que o fluxo de calor é neutralizado; deste modo, a solidificação do fluido no interior do duto pode ser evitada. Os valores encontrados mostram a dimensão mínima para conseguir amenizar o fluxo; trabalhos futuros podem envolver grandezas, sem superdimensionamento, que evitam tais problemas.

Os casos apresentados são apenas amostras. Trabalhos pósteros podem envolver a obtenção de uma formulação única e representativa do todo, facilitando assim a consulta posterior para a realização de adicionais produções e aplicações.

REFERÊNCIAS

ALEXIADES, Vasilios; SOLOMON, Alan D. **Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes**. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1993.

ANDREUCCI, Daniele. **Lecture Notes on the Stefan Problem**. Università di Roma La Sapienza. Itália, 2004. Disponível em <http://www.dmmm.uniroma1.it/publicazioni/doc/phd_quaderni/02-1-and.pdf> Acesso em: 13 maio 2017.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E; LIGHTFOOT, E. N. **Fenômenos de Transporte**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2004.

COSTA, Susana P. L. **Armazenamento de Energia Térmica Através de Materiais de Mudança de Fase**. 2014. 140 f. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2014. Disponível em: < <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/73754/2/31464.pdf> >. Acesso em: 29 agosto 2017.

FILHO, Manuel A. 'Banco de gelo' economiza energia ao armazenar a frio. **Jornal da Unicamp**, Campinas, p. 8, 29 set. 2003.

GRADE, Paulo de J. S. P. da Silva. **Materiais de Mudança de Fase em Revestimentos**. 2013. 131 f. Dissertação - Área Departamental de Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, 2013. Disponível em <<http://repositorio.ipl.pt/bitstream/10400.21/3083/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf>> Acesso em 26 maio 2017.

HU, H.; ARGYROPOULOS, Stavros A. Mathematical modelling of solidification and melting: a review. **Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.** United Kingdom, v. 4, n. 4, p. 371-396, jul. 1996. Disponível em <<http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/S2006/CHT/Papers/FREEZING/hu.pdf>> Acesso em 20 maio 2017.

INCROPERA, F. P.; DEWITT D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 6 ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011.

JEROME, Joseph W.; ROSE, Michael E. Error Estimates for the Multidimensional Two-Phase Stefan Problem. **Mathematics of Computation**, Providence, v. 39, n. 160, p. 377-414, out. 1. Disponível em: <<http://www.ams.org/journals/mcom/1982-39->

160/S0025-5718-1982-0669635-2/S0025-5718-1982-0669635-2.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2017.

LOSCHI, Priscila Ariane. Materiais de mudança de fases aplicados no design de tecidos inteligentes. **XXVI prêmio jovem cientista**. 2012. Disponível em <http://estatico.cnpq.br/portal/premios/2012/pjc/pdf/premiados/est_superior_1_priscila_ariane_loschi.pdf> Acesso em: 25 maio 2017.

MORAN, Michael J.; SHAPIRO, Howard N.; BOETTNER, Daisie D.; BAILEY, Margaret B. **Princípios de Termodinâmica para Engenharia**. 7a ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2013.

NAAKTGEBOREN, C. **Estudo Dirigido de Modelagem Matemática de Processos de Fusão e Solidificação**. 2002. 100 f. Tese – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2002.

_____. **Estudo Numérico do Uso de Materiais de Mudança de Fase no Controle de Temperatura de Equipamentos Eletrônicos**. 2002. 176 f. Tese – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2002.

_____. Solution of 1D conduction wall with periodic temperature in one face and constant temperature at the other. 2007.

_____. The zero-phase Stefan problem. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. v. 50, n. 23-24, p. 4614-4622, may 2007.

REAL, Paulo V.; OLIVEIRA, Carlos M. Modelação Numérica de Problemas Térmicos Envolvendo Mudança de Fase. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**. Barcelona, v. 19, n. 2, p. 171-196, 2003.

TARZIA, Domingo A. Una Revisión sobre Problemas de Frontera Móvil y Libre para la Ecuación del Calor. El Problema de Stefan. **Mathematicae Notae**. Rosario, v. 29, p. 147-241, 1981.

TRISTÃO, Paulo J. Soares. **Encapsulação de Materiais de Mudança de Fase (MMF) para Aplicações no Armazenamento de Energia**. 2014. 119 f. Dissertação - Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Bragança, Bragança, 2014.

VISINTIN, Augusto. Introduction to Stefan-Type Problems. **Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations**. North Holland, v. 4, n. 8, p. 377-484, 2008.

VITORINO, Nuno M. Dias. **Utilização de Materiais com Mudança de Fase em Sistemas de Acumulação de Energia Térmica**. 2009. 57 f. Dissertação - Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, 2009. Disponível em <http://repositorio.ipvc.pt/bitstream/20.500.11960/1317/1/Nuno_Vitorino.pdf> Acesso em 13 maio 2017.