Iniciação Científica **CESUMAR**
Jul./Dez. 2010, v. 12, n. 2, p. 175-182

APLICAÇÃO DA TEORIA DAS FILAS NA OTIMIZAÇÃO DO NÚMERO DE CAIXAS: UM ESTUDO DE CASO

Danielle Durski Figueiredo*

Silvana Heidemann Rocha**

RESUMO: Este trabalho procura mostrar como a Teoria das Filas pode ser utilizada para se prever o número otimizado de caixas necessários num momento para atender a demanda de uma loja. O objeto de pesquisa é a realidade de uma loja com grande número de clientes e que utiliza fila única para os caixas. Para o cálculo do referido número otimizado, aqui é adotado como ponto de partida a condição de que seja pequena a probabilidade do tempo médio de espera de um cliente na fila ultrapassar um valor pré-estabelecido. Através de estudos amostrais, foi proposto para o caso em análise um modelo quantitativo de fila do tipo *M/M/c* (Exponencial, Exponencial, *c* canais de atendimento). Atualmente, a loja em questão adota um sistema, denominado Agifila, de controle para o número de clientes na fila única dos caixas. Neste trabalho é feita uma comparação entre o modelo de fila proposto, fundamentado em previsões, com o sistema Agifila, fundamentado em controle momentâneo, de maneira a esclarecer a eficiência tanto do modelo como a do referido sistema.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria das Filas; Otimização; Número de caixas; Modelo *M/M/c.*

APPLICATION OF THE QUEUEING THEORY FOR OPTIMIZATION OF NUMBER OF CASHIERS: A CASE STUDY

ABSTRACT: This work intends to show how the Queueing Theory may be used to predict the optimized number of cashiers is required at a certain time to attend the demand of a store. The research's object is the reality of a store with a great number of customers, and which uses the single line system for cashiers. In order to calculate the optimized number, this work adopts as starting point the condition that the probability of a customer to exceed a pre-determined average time in line is small. Through sample studies, a quantitative model of line type M/M/c (Exponential, Exponential, *c* service channels) was proposed for the case under analysis. Currently, the considered store adopts a system named Agifila to control the number of customers at the cashier's single line. This work compares the proposed model, based on predictions, with the Agifila system, which is grounded on momentary control, in order to clarify both the model efficiency and the referenced system.

KEYWORDS: Queueing Theory; Optimization; Number of cashiers; *M/M/c* model.

INTRODUÇÃO

O congestionamento de clientes em filas para a aquisição ou o pagamento de mercadorias, de serviços telefônicos, bancários, conexão de internet ou, ainda, o congestionamento de tarefas a serem executadas por um equipamento, como uma impressora, por exemplo, é um problema fundamental com que a administração de um negócio deve lidar, pois o tempo de espera em uma fila é um dos itens que retrata a qualidade do atendimento do estabelecimento comercial, do prestador de serviço ou do equipamento.

Quando, por exemplo, o número de clientes à espera de atendimento é permanentemente muito grande ou quando os atendentes ficam ociosos a maior parte do tempo, há evidência de que o número de atendentes não está adequadamente dimensionado (ANDRADE, 1990). Adequar o número de atendentes ao número de clientes que aguardam atendimento é um problema que pode ser resolvido com a Teoria das Filas, tópico da Pesquisa Operacional que envolve investigações baseadas em distribuições

* Mestre em Métodos Numéricos e Programação Matemática pela Universidade Federal do Paraná – UFPR; Docente do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Email: danidurski@gmail.com
** Docente do Departamento de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Email: heidemann@utfpr.edu.br

de probabilidades[1]. Essa teoria permite determinar um modelo quantitativo de fila para uma situação em particular, a partir do padrão probabilístico das chegadas dos clientes à fila, do padrão probabilístico dos atendimentos fornecidos pela empresa e a partir do número de canais de atendimento disponíveis.

Estudar e compreender o comportamento das filas possibilita dimensionar sistemas do mundo real, a fim de amenizar situações estressantes que esperas demasiadas possam causar. Por exemplo, Silva (2006) utilizou a Teoria das Filas para analisar as características do atendimento aos navios que atracavam no Porto de Itajaí (SC) e, assim, pôde identificar espaços para possíveis melhorias administrativas. Em seu problema, considerou o número de chegadas dos navios ao porto num intervalo de tempo, bem como o número de navios ali atendidos em certo intervalo de tempo seguindo distribuições de Poisson. Como, na época do estudo, havia 3 canais de atendimento (berços), Silva (2006), mostrou que a implantação de um quarto berço no Porto de Itajaí permitiria melhorar o atendimento aos navios clientes, reduzindo o tempo de permanência no porto em aproximadamente 20 minutos.

Neste trabalho pretende-se mostrar que é possível ampliar as aplicações da Teoria das Filas. Aqui são fornecidos elementos teóricos e práticos que podem auxiliar administradores a formular políticas preventivas de problemas decorrentes de filas mal dimensionadas. A partir da realidade de uma loja varejista com grande número de clientes, nosso objetivo aqui é fazer previsões otimizadas do número de caixas[2] que deverão estar em funcionamento em certo momento na loja em questão, de modo que seja pequena a probabilidade de um cliente esperar na fila dos caixas além de um tempo médio, estabelecido previamente nas metas da empresa. Também procuraremos identificar dentre dois modelos de filas (o utilizado atualmente pela loja e o aqui proposto) qual aquele que produz em média melhores resultados.

Para a realização deste trabalho, uma das filiais das Lojas Americanas S/A[3] foi selecionada por conveniência ao permitir aplicar a metodologia aqui proposta, bem como ao dispor-se em fornecer os dados necessários ao desenvolvimento deste estudo.

Para agilizar o atendimento ao cliente, as Lojas Americanas S/A, na seção de recebimento, atualmente utiliza o sistema de caixas com fila única. Nesse sistema, os clientes devem aguardar em uma fila única para efetuarem o pagamento das suas compras em um dos caixas que estiver disponível no momento. No entanto, como, do ponto de vista da Loja, é aleatório o número de clientes que entram na fila única dos caixas num intervalo de tempo, isto é, como o número de clientes que entram de modo independente e ao acaso na fila única dos caixas varia nos períodos do dia (manhã, tarde, noite), na semana ou no mês, por exemplo, tal fato dificulta, por parte da Loja, a previsão do número de caixas necessários para atendimento aos consumidores.

Para enfrentar o problema da adequação do número de caixas à demanda, as Lojas Americanas S/A passou a trabalhar com dois tipos de caixas, classificados em *caixas-fixos* ou em *caixas-volantes,* bem como implantou um sistema manual, denominado Agifila, para o controle do número de clientes que entram na fila dos caixas num intervalo de tempo.

Os caixas-fixos são funcionários que exercem somente a função de caixa, ou seja, havendo ou não clientes na fila para serem atendidos, os caixas-fixos estão sempre com seus guichês abertos. Já os caixas-volantes abrem seus guichês somente se tiver muitos clientes na fila única dos caixas. Caso contrário, os caixas-volantes exercem atividades em outros departamentos da loja. Quanto ao sistema Agifila, um funcionário é designado para verificar a cada 30 minutos a quantidade de clientes que aguardam na fila dos caixas. Este mesmo funcionário convoca ou dispensa os caixas-volantes de maneira que atenda à seguinte regra: o número de caixas abertos deverá ser, se possível, a metade do número de clientes que aguardam na fila, sendo que o número de caixas abertos é limitado pelo número máximo de guichês de caixas existentes na loja.

Após a implantação do sistema Agifila, as reclamações dos clientes quanto ao tempo de espera na fila dos caixas diminuíram consideravelmente, porém tal sistema não revelou o tempo médio de espera do cliente e ainda dificultou o planejamento geral da loja, uma vez que, a qualquer momento, alguns funcionários (os caixas-volantes) podem deixar suas atividades para abrir guichês de caixa.

Inicialmente aqui será proposto para a loja em estudo, um modelo de fila de acordo com a Teoria das Filas, de modo a prever o número ótimo de caixas para cada intervalo de 30 minutos, no horário de funcionamento da loja. Na sequência, o modelo aqui proposto, fundamentado em previsões, será comparado com o sistema Agifila, de controle momentâneo, no sentido de esclarecer a eficiência tanto do modelo como a do referido sistema.

[1] Sobre distribuições de probabilidades, ver Magalhães (2006).

[2] Neste trabalho, caixa é o(a) funcionário(a) que tem a seu cargo o recebimento de dinheiro.

[3] Empresa brasileira fundada em 1929 e atualmente possui 94 filiais distribuídas em todas as regiões do Brasil.

2 A TEORIA DAS FILAS

Conforme Andrade (1990), um sistema de filas é composto de muitos elementos que querem ser atendidos em um posto de serviço e que, eventualmente, devem esperar até que o posto esteja disponível. Na caracterização de um sistema de filas, é possível destacar cinco componentes básicas, o modelo de chegadas dos usuários, o modelo de serviço, o número de canais disponíveis, a capacidade para atendimento dos usuários e a disciplina da fila, definidos a seguir:

a) Modelo de chegadas dos usuários: É usualmente especificado pelo tempo entre chegadas sucessivas de usuários ao estabelecimento de prestação de serviços. Esse tempo pode ser determinístico ou uma variável aleatória.[4] Em geral, do ponto de vista da administração de um sistema, as chegadas dos clientes ocorrem de forma aleatória, isto é, de forma casual e independente, individualmente, mas possível de se determinar um padrão no conjunto das observações. Estudos amostrais permitem descobrir se o processo de chegadas dos usuários pode ser caracterizado por uma distribuição de probabilidades.[5]
b) Modelo de serviço: No estudo de um sistema de filas é importante também realizar amostragens do número de clientes atendidos por unidade de tempo ou, equivalentemente, medir o tempo gasto em cada atendimento, a fim de determinar a distribuição de probabilidades da duração de cada atendimento, uma vez que em geral esse tempo é aleatório, com cada cliente exigindo um tempo próprio para a solução de seu problema.
c) Número de canais disponíveis: O número de canais disponíveis refere-se ao número de atendentes que efetuam simultaneamente o atendimento aos usuários.
d) Capacidade para, atendimento dos usuários: A capacidade do sistema é o número máximo permitido no estabelecimento ao mesmo tempo, tanto aqueles que estão sendo atendidos como os que estão na fila à espera. Um sistema que não possui limite no número permitido de usuários no estabelecimento é considerado com capacidade infinita ao passo que um sistema com um limite é considerado com capacidade limitada ou finita.
e) Disciplina da fila: A disciplina da fila é um conjunto de regras que determinam a ordem em que os clientes serão atendidos. Essa ordem pode ocorrer conforme os seguintes critérios:
   - ✓ FIFO (first in first out): o primeiro a entrar na fila é o primeiro a ser atendido.
   - ✓ LIFO (last in first out): o último a entrar na fila é o primeiro a ser atendido.
   - ✓ SIRO (served in random ordem): a ordem no atendimento é escolhida de maneira aleatória.
   - ✓ PRI (priority): estipula-se uma prioridade de atendimento.

Um sistema de fila é geralmente descrito com uma série de símbolos do tipo *A/B/X/Y/Z* que especifica as características de suas cinco componentes. O símbolo *A* indica a distribuição probabilística do tempo entre chegadas, *B* indica a distribuição probabilística do tempo de atendimento, *X* é o número de canais operando no sistema, *Y* representa a capacidade do sistema e *Z* designa a disciplina da fila.

Em muitas situações práticas, somente os três primeiros símbolos são utilizados. Ao omitir os dois últimos símbolos, convenciona-se que a capacidade do sistema é infinita e a disciplina da fila segue o critério FIFO (*first in first out*).

As características das componentes de um sistema de fila determinam o modelo quantitativo mais adequado ao sistema de fila em questão. Como um sistema de fila pode ter as mais variadas estruturas, dependendo das características de suas componentes, cada caso exige um estudo analítico próprio. No caso da loja aqui estudada, o modelo de fila proposto nesta pesquisa é o modelo *M/M/c* (Exponencial, Exponencial, *c* canais), uma vez que o problema em questão atende às características gerais, próprias do modelo *M/M/c*, que, segundo Andrade (1990), são:

[4] Sobre os fenômenos determinísticos e os estocásticos, ver Meyer (1965) e Stewart (1991). Sobre variáveis aleatórias, ver James (1987) e Magalhães (2006).

[5] Um experimento aleatório é um experimento com as seguintes características: reprodutibilidade, isto é, o experimento pode ser reproduzido inúmeras vezes sob condições inalteradas em sua essência; casualidade dos resultados individuais, isto é, os resultados individuais são imprevistos, dependem do acaso; é possível descrever um conjunto contendo todos os resultados possíveis para o experimento; regularidade, isto é, quando o experimento é reproduzido um número muito grande de vezes, aparece uma configuração definida ou regularidade do comportamento do experimento. Essa regularidade permite determinar um modelo probabilístico para se fazer previsões relativas ao experimento (Cf. MEYER, 1965; GNEDENKO, 1969).

a) O número de chegadas na fila, num intervalo de tempo, acontece de acordo com uma distribuição de Poisson com média l. Consequentemente, o tempo entre duas chegadas consecutivas segue uma distribuição exponencial com média $1/\lambda$.

b) O tempo de atendimento de um cliente, por canal ou atendente, segue uma distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$, isto é, o número de atendimentos por atendente segue uma distribuição de Poisson com média μ.

c) O atendimento à fila é feito pela ordem de chegada, isto é, pelo critério FIFO.

d) O número de canais disponíveis de atendimento do sistema é denotado por c.

e) O número de possíveis clientes é suficientemente grande para que a população possa ser considerada infinita.

f) O ritmo de serviço é µ.c.

g) A condição de estabilidade do sistema é l < µ.c.

Considerar que o tempo de atendimento de um cliente em cada canal segue uma mesma distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$ é uma limitação do modelo *M/M/c*, uma vez que, se considerados individualmente os tempos de atendimentos por canal, podem ter distribuições exponenciais com médias diferentes de $\frac{1}{\mu}$ ou até mesmo ter uma distribuição probabilística diferente da exponencial. No entanto, teoricamente esse modelo preconiza que os tempos de atendimentos por cliente em cada canal sejam agrupados numa mesma amostra a fim de se obter a distribuição exponencial com média $\frac{1}{\mu}$, que passará a representar o tempo de atendimento em cada canal.[6]

A seguir estão mostradas apenas as principais equações do modelo *M/M/c*, cujas deduções, que têm como base o modelo *M/M/1* (uma fila e um canal de atendimento), podem se encontradas em Gross e Harris (1974).

[6] Lima e Morabito (2000) aplicaram o modelo M/M/c da Teoria das Filas, no problema de congestão em caixas de supermercados. Particularmente, procuraram modelar o tempo médio de espera em fila, em função da capacidade do sistema, isto é, do número de caixas num dado período de tempo. Após testarem algumas hipóteses, os autores admitiram serem estatisticamente iguais, para todos os caixas, os intervalos médios entre chegadas de clientes nas filas, bem como os tempos médios de atendimento.

a) Probabilidade de haver nenhum cliente no sistema num determinado momento (P_0):

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^{c-1} \frac{\sigma^j}{j!} + \frac{\sigma^c}{c!\left(1-\frac{\sigma}{c}\right)} \right)} \text{, sendo} \quad \sigma = \frac{\lambda}{\mu} \tag{1}$$

b) Probabilidade de haver n clientes no sistema num momento (Pn):

b.1) n < c:

$$Pn = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) . \frac{1}{n!} . Po \tag{2}$$

b. 2) n ≥ c:

$$Pn = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{c!\, c^{n-c}} . Po \tag{3}$$

c) Probabilidade de que todos os canais estejam ocupados num determinado momento ($P_{(\text{ocupação total})}$):

$$P_{(\text{ocupação} \quad \text{total})} = P(n \geq c) = \frac{\sigma^c}{c!\left(1-\frac{\sigma}{c}\right)} . Po \tag{4}$$

d) Número médio de clientes na fila numa unidade de tempo (NF):

$$NF = \frac{\sigma^c . \lambda . \mu . c}{c!\,(\mu . c - \lambda)^2} . Po \tag{5}$$

e) Tempo médio de espera de um cliente na fila (TF):

$$TF = NF . \left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{6}$$

f) Número médio de clientes no sistema numa unidade de tempo (NS):

(7)

$$NS = NF + \sigma$$

g) Tempo médio gasto por um cliente no sistema (TS):

$$TS = \frac{NS}{\lambda} \quad (8)$$

h) Probabilidade de que o tempo de espera na fila seja ≥ t ($W_q(t)$).

$$W_q(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{c.\sigma^c}{c!(c-\sigma)}.Po, & \text{se } t = 0 \\[2ex] \dfrac{\sigma^c\left(1-\sigma^{-(\mu c-\lambda)t}\right)}{(c-1)!(c-\sigma)}.Po + W_q(0), & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (9)$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A filial das Lojas Americanas S/A onde este estudo foi realizado atende ao público de segunda-feira a sábado, das 10 às 22 horas, e no domingo, das 13 às 20 horas. A jornada diária de trabalho de um caixa-fixo é de 6 horas e a de um caixa-volante é de 8 horas. A loja em questão possui 12 (doze) guichês de caixas e dispõe de 3 caixas-fixos que trabalham das 10 às 16 horas, de 3 outros para o horário das 16 às 22 horas e de 15 caixas-volantes para o horário das 8 às 16horas.

Para se determinar qual o modelo de fila seria o mais adequado para o problema em estudo, foram selecionadas aleatoriamente amostras do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas de dois clientes, bem como da duração do tempo de atendimento nos caixas. A partir destas amostras, procurou-se obter a distribuição de probabilidade de cada uma dessas variáveis.

Para estudar o processo de chegada e da permanência dos consumidores na fila única dos caixas da loja em questão, no período do levantamento de dados (que foi em maio e junho/2009, totalizando 7 (sete) semanas de observação) foi contado o número de chegadas na fila a cada 30 minutos, sequencialmente para cada um dos sete dias da semana, no horário de funcionamento da loja. Os respectivos períodos de 30 minutos foram considerados típicos para um mesmo dia da semana. Dias atípicos, como o dia dos namorados (12 de junho), por exemplo, foram desconsiderados do estudo. A partir desta contagem, foi construída a tabela 1, a seguir:

Tabela 1 Tempo médio, em segundos, entre as chegadas consecutivas de dois clientes na fila única dos caixas num intervalo de 30 minutos – Lojas Americanas S/A – Maio e junho/ 2009

Horário de atendimento		Dia da semana 2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sábado	Domingo
10:00	10:30	16	18	16	16	15	17	-
10:30	11:00	15	14	12	12	11	11	-
11:00	11:30	16	10	10	10	9	11	-
11:30	12:00	14	11	12	11	10	11	-
12:00	12:30	17	14	14	13	11	11	-
12:30	13:00	23	16	14	14	12	11	-
13:00	13:30	9	16	15	14	12	10	14
13:30	14:00	20	15	13	13	12	9	13
14:00	14:30	23	14	12	9	12	9	11
14:30	15:00	18	11	11	11	11	9	11
15:00	15:30	19	12	12	11	11	8	11
15:30	16:00	20	13	13	12	10	9	11
16:00	16:30	16	13	13	11	10	9	12
16:30	17:00	11	12	12	11	11	9	12
17:00	17:30	19	14	13	12	12	11	14
17:30	18:00	16	15	15	13	13	11	18
18:00	18:30	18	16	14	14	14	13	25
18:30	19:00	14	19	18	16	15	14	37
19:00	19:30	11	22	19	18	16	15	48
19:30	20:00	20	20	21	18	16	17	55
20:00	20:30	11	31	35	27	20	22	-
20:30	21:00	16	42	48	45	32	41	-
21:00	21:30	17	53	54	48	48	55	-
21:30	22:00	21	63	69	68	54	76	-

Nota: Estudo realizado numa filial das Lojas Americanas S/A. Esses tempos médios entre chegadas foram calculados a partir da contagem, em relatórios gerados pelo sistema computacional da loja, do número de clientes que foram atendidos nos caixas, a cada 30 minutos, em 7 semanas de coleta de dados.

Ainda no período da coleta de dados, para estudar o comportamento do tempo de atendimento de cada caixa, foram coletadas 20 amostras de cada um dos 5 caixas-fixos que estavam operando naqueles dias, sendo estes tempos cronometrados, totalizando 100 amostras desses tempos, conforme a tabela 2 a seguir. A média das durações totais dos atendimentos coletados foi de aproximadamente 51 segundos, utilizada como o parâmetro μ nas referidas equações da Teoria das Filas.

Com os dados das tabelas 1 e 2 foram realizados testes Qui-Quadrado para aderência, com o nível usual de significância de 5%, e constou-se que os processos de chegada e permanência dos clientes na fila única dos caixas eram compatíveis com um sistema de filas com canais de atendimento no padrão *M/M/c*. Ou seja, as variáveis tempo entre chegadas consecutivas de dois clientes e tempo de atendimento em cada caixa se ajustaram à distribuições exponenciais.

Como o problema em estudo atendeu às características gerais do modelo *M/M/c*, mencionadas anteriormente, as equações desse modelo, também já mencionadas, puderam então ser aplicadas à situação real em análise, para que fosse obtido o número otimizado de caixas para cada 30 minutos, no horário de funcionamento da loja, sob a condição do tempo médio de espera de um cliente na fila única dos caixas não exceder o estabelecido previamente, que nesse caso foi de 3 (três) minutos.

Tabela 2 Tempo, em segundos, para atendimento de um cliente, segundo o caixa - Lojas Americanas S/A – Maio e junho de 2009

Caixa1	Caixa 2	Caixa 3	Caixa 4	Caixa 5
16	11	90	17	55
30	35	46	31	35
45	65	38	63	24
86	99	76	79	56
42	38	27	31	28
79	90	34	62	27
9	15	173	10	120
40	46	30	58	25
18	25	104	18	74
24	15	61	25	45
58	69	27	55	24
38	56	102	45	72
17	19	204	16	125
101	118	52	86	37
19	16	95	12	67
52	49	49	55	36
118	150	32	109	26
38	19	19	36	16
75	85	10	58	10
10	9	44	10	32

Notas: Estudo realizado numa das filiais das Lojas Americanas S/A. Nos dias do levantamento desses dados, só tinham 5 caixas em funcionamento. Cada caixa consiste num único atendente, isto é, não houve substituição do atendente no caixa ao longo dos dias em que o levantamento desses dados foi realizado. O horário de atendimento dos caixas 1, 2 e 3 era das 10h às 16h e o dos caixas 4 e 5, era das 16h às 22h. O processo de medição do tempo de atendimento a um cliente foi aleatório da seguinte maneira: das 10h às 16h, o caixa 1 teve as medições de ordem 1, 4, 7, ...,58, o caixa 2 as de ordem 2, 5, 8, ..., 59, o caixa 3 as de ordem 3, 6, 9, ..., 60. Das 16h às 22h, o caixa 4 teve as medições de ordem 1, 3, 5,..., 39 e o caixa 5 as de ordem 2, 4, 6,...,40.

4 RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na tabela 3, adiante, para calcular o número de caixas previstos como necessários, de acordo com o modelo *M/M/c* aqui proposto, primeiramente foi obtida a média do número de clientes que chegavam à fila única dos caixas, para cada meia hora do dia e em cada dia da semana. Essa média, calculada a partir de um conjunto de 3 semanas dentre as 7 da coleta de dados, foi utilizada como previsão do número de clientes que passariam pelos caixas na semana seguinte no respectivo dia e horário.[7] Por exemplo, para as segundas-feiras, das 10h às 10h30min:

$$\frac{a+b+c}{3}=x$$, onde:

a = nº de clientes que entraram na fila dos caixas, na 1ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min;

b = nº de clientes que entraram na fila dos caixas, na 2ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min;

c = nº de clientes que entraram na fila dos caixas, na 3ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min;

x = nº médio de clientes previstos para serem atendidos nos caixas, na 4ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min,

$$\frac{b+c+d}{3}=y$$, onde:

b = nº de clientes que entraram na fila dos caixas, na 2ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min;

c = nº de clientes que entraram na fila dos caixas, na 3ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min;

d = nº de clientes que entraram na fila dos caixas, na 4ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min;

y = nº médio de clientes previstos para serem atendidos nos caixas, na 5ª segunda-feira da coleta de dados, das 10h às 10h30min.

O processo foi analogamente repetido, obtendo-se então 4 (quatro) semanas de previsão. As médias mencionadas foram então utilizadas como valores do parâmetro λ nas referidas equações da Teoria das Filas. A partir da equação do tempo médio de espera de um cliente na fila, foram simulados vários valores para o número de canais c, de modo a obter-se o menor número de canais (caixas) necessário para atender os clientes, sem extrapolar o tempo médio de 3 minutos.

[7] A escolha de 3 semanas para se fazer a média dos clientes que entravam na fila dos caixas a cada meia hora, possibilitou ter 4 semanas de previsões para serem confrontadas com o número de caixas efetivamente utilizados, uma vez que estavam disponíveis apenas os dados referentes a 7 semanas da dinâmica da fila dos caixas. Em estudos futuros podem ser utilizadas mais semanas para se fazer as médias aritméticas, como 5 semanas por exemplo, a fim de se melhorar as previsões.

Ainda, na tabela 3, no respectivo intervalo de tempo, constam os números de caixas abertos de acordo com o sistema Agifila, bem como os números reais de caixas que deveriam ter sido abertos para atender ao público. Esses números reais foram calculados de acordo com os relatórios computacionais contendo o número de clientes que entraram na fila dos caixas nos respectivos horários.

Tabela 3 Número de caixas para a primeira semana em estudo, de acordo com o sistema Agifila, com a previsão dada pelo modelo M/M/c aqui proposto e com o número real de caixas que deveriam ser utilizados para atender a demanda da referida semana - Lojas Americanas S/A – Maio e junho de 2009

Horário de atendimento		Dia da semana											
		2ª Feira			3ª Feira			4ª Feira			5ª Feira		
		Agifila	Modelo	Real	Agifila	Modelo	Real	Agifila	Modelo	Real	Agifila	Modelo	Real
10:00	10:30	4	5	5	5	4	4	4	4	4	6	5	5
10:30	11:00	4	5	5	5	4	4	6	5	7	6	6	7
11:00	11:30	6	5	5	5	7	7	5	7	8	5	6	8
11:30	12:00	7	5	6	6	7	8	7	6	7	6	7	7
12:00	12:30	5	4	6	6	5	7	6	6	6	5	6	6
12:30	13:00	8	4	3	3	5	5	6	6	6	6	5	7
13:00	13:30	5	9	8	8	5	5	6	5	5	5	5	5
13:30	14:00	7	4	4	4	5	5	6	6	6	6	6	6
14:00	14:30	6	4	4	4	5	6	6	6	6	7	6	8
14:30	15:00	6	5	4	4	7	7	6	7	7	8	6	8
15:00	15:30	6	4	4	4	6	6	7	6	6	8	6	7
15:30	16:00	7	4	5	5	6	6	7	6	6	8	6	8
16:00	16:30	6	5	5	5	6	6	9	6	6	8	6	8
16:30	17:00	6	7	6	6	6	7	7	6	6	8	6	8
17:00	17:30	7	4	5	5	6	6	7	6	6	8	6	7
17:30	18:00	5	5	5	5	5	5	6	5	5	6	5	6
18:00	18:30	5	5	5	5	5	6	6	5	5	6	6	6
18:30	19:00	5	5	6	6	4	4	5	4	4	6	5	5
19:00	19:30	5	7	7	7	4	4	5	4	4	7	5	5
19:30	20:00	4	4	4	4	4	5	4	4	4	7	5	5
20:00	20:30	5	7	6	5	3	4	4	3	3	5	3	3
20:30	21:00	4	4	6	4	3	3	4	3	3	4	3	3
21:00	21:30	4	4	6	5	3	3	4	3	3	4	3	3
21:30	22:00	3	3	6	4	3	3	4	3	3	3	3	3

Horário de atendimento		Dia da semana								
		6ª Feira			Sábado			Domingo		
		Agifila	Modelo	Real	Agifila	Modelo	Real	Agifila	Modelo	Real
10:00	10:30	5	5	5	6	4	4	-	-	-
10:30	11:00	6	6	7	6	6	7	-	-	-
11:00	11:30	7	8	8	6	6	6	-	-	-
11:30	12:00	7	7	8	6	6	6	-	-	-
12:00	12:30	7	7	6	7	7	8	-	-	-
12:30	13:00	7	6	7	6	7	6	-	-	-
13:00	13:30	6	6	6	8	8	8	7	5	7
13:30	14:00	6	6	6	8	9	8	7	5	7
14:00	14:30	6	7	7	8	8	8	8	6	8
14:30	15:00	7	7	8	8	8	8	8	6	9
15:00	15:30	7	7	7	8	9	9	9	6	9
15:30	16:00	8	7	8	9	9	10	9	7	8
16:00	16:30	8	7	8	9	9	8	9	6	8
16:30	17:00	8	7	8	9	9	9	10	6	7
17:00	17:30	7	7	6	8	8	7	8	6	6
17:30	18:00	7	6	6	8	7	7	6	5	5
18:00	18:30	7	5	6	6	6	6	4	3	3
18:30	19:00	6	5	5	6	6	6	4	3	3
19:00	19:30	6	5	5	6	6	6	3	3	3
19:30	20:00	5	5	5	6	5	5	3	3	3
20:00	20:30	5	4	4	4	4	3	-	-	-
20:30	21:00	4	3	3	4	3	3	-	-	-
21:00	21:30	4	3	3	3	3	3	-	-	-
21:30	22:00	3	3	3	3	3	3	-	-	-

Nota: Estudo realizado numa das filiais das Lojas Americanas S/A. Nas colunas denominadas de 'Agifila' os números de caixas foram realmente utilizados. Nas colunas denominadas de 'Modelo', os números de caixas são previsões. Nas colunas denominadas de 'Real', os números de caixas são os que deveriam ter sido utilizados para atender ao público, calculados de acordo com os relatórios computacionais contendo o número de clientes que entraram na fila dos caixas.

Na tabela 3, podem-se observar os resultados de duas formas: quanto à otimização do número de caixas e quanto ao cumprimento do compromisso em atender o cliente dentro do tempo médio de 3 minutos.

Quanto à otimização do número de caixas, observa-se 67% de acerto para o modelo *M/M/c* aqui proposto contra 44% de acertos do sistema Agifila, quando comparados com o número real de caixas que deveriam ter sido utilizados para atender os clientes que entraram na fila dos caixas. Quanto ao compromisso de atender o cliente dentro do tempo médio pré-determinado, o acerto foi de 78% para o sistema Agifila contra 72% para o modelo *M/M/c*. Esse estudo comparativo foi realizado para todas as 4 (quatro) semanas de previsões, e os resultados constam na tabela 4, a seguir.

Tabela 4 Percentual de acerto do modelo M/M/c e do sistema Agifila, em relação à demanda real, quanto à otimização do número de caixas e ao compromisso de atender o cliente dentro do tempo médio de três minutos - Lojas Americanas S/A – Maio e junho de 2009

PERÍODO	OTIMIZAÇÃO		ATENDIMENTO	
	Modelo	Agifila	Modelo	Agifila
1ª Semana	67%	44%	72%	78%
2ª Semana	68%	48%	80%	82%
3ª Semana	67%	46%	87%	88%
4ª Semana	67%	48%	84%	89%

Nota: Estudo realizado numa das filiais das Lojas Americanas S/A.

Pela tabela 4, pode-se constatar que, em todas as 4 semanas, as previsões para o número de caixas fornecidas pelo modelo M/M/c foram melhores que o número de caixas realmente utilizados pelo sistema Agifila. No quesito compromisso de atendimento dos clientes num tempo médio menor que o estipulado, a maior porcentagem de acertos para o sistema Agifila deu-se em razão desse sistema utilizar um número de caixas maior que o otimizado. No entanto, essas diferenças percentuais relativamente pequenas no tempo de atendimento podem não justificar a utilização de caixas-volantes pela loja, uma vez que a técnica da Teoria das Filas aqui exposta pode determinar previamente o número otimizado de caixas-fixos, o que proporcionaria um melhor planejamento geral das atividades dos funcionários, uma vez que nenhum funcionário precisaria abandonar suas outras tarefas para atender demandas súbitas nos caixas.

Acompanhar o comportamento probabilístico da fila única dos caixas, bem como o do tempo de atendimento nos caixas, pode, por exemplo, trazer evidências de padrões entre respectivos meses, de ano para ano. Reconhecer padrões permite à administração implantar políticas de previsões e tomar decisões com maior segurança.

Por fim, sugere-se estudos futuros que busquem otimizar as jornadas de trabalho dos funcionários, bem como estudos comparativos do custo financeiro e administrativo com funcionários-caixas requerido pelo sistema Agifila e o requerido pelo modelo M/M/c aqui proposto.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, E. L. **Introdução à pesquisa operacional**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1990.

GNEDENKO, B. V. **The theory of probability**. Moscow: Mir Publishers, 1969.

GROSS, D.; HARRIS, C. M. **Fundamentals of queueing theory**. New York: John Wiley & Sons, 1974.

JAMES, B. R. **Probabilidade: um curso em nível intermediário.** Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 1987.

LIMA, F. C. R.; MORABITO, R. **Um modelo para analisar o problema de filas em caixas de supermercados: um estudo de caso.** Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro, v. 20, n. 1, p. 59-71, jun. 2000. Disponível em:<http://www.scielo.br/pdf/pope/v20n1/a07v20n1.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2009.

MAGALHÃES, M. N. **Probabilidade e variáveis aleatórias**. 2. ed. São Paulo, SP: Edusp, 2006.

MEYER, P. L. **Probabilidade: aplicações à estatística.** Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1965.

SILVA, V. M. D. **Teoria das Filas aplicada ao caso Porto de Itajaí - SC**. Synergismus scyentifica, Pato Branco, v. 1, p. 696-707, 2006. Disponível em:<http://www.pb.utfpr.edu.br/eventocientifico/revista/artigos/0607009.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2009.

STEWART, I. **Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos**. Rio de Janeiro, RJ: Zahar, 1991.

Recebido em: 23 Dezembro 2009
Aceito em: 13 Julho 2010