

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

DANIEL FRANCISCO SILVA

COLORAÇÃO DE ARESTAS DISTINTA NA VIZINHANÇA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA

2017

DANIEL FRANCISCO SILVA

COLORAÇÃO DE ARESTAS DISTINTA NA VIZINHANÇA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida

PONTA GROSSA

2017



TERMO DE APROVAÇÃO

COLORAÇÃO DE ARESTAS DISTINTA NA VIZINHANÇA

por

DANIEL FRANCISCO SILVA

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em 29 de Junho de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Profa. Dra. Sheila Moraes de Almeida
Orientador(a)

Prof. MSc. Leandro Miranda Zatesko
Membro titular

Prof. Dr. André Koscianski
Membro titular

Prof. Dr. Ionildo José Sanches
Responsável pelo Trabalho de Conclusão
de Curso

Prof. Dr. Erikson Freitas de Moraes
Coordenador do curso

- A Folha de Aprovação assinada encontra-se arquivada na Secretaria Acadêmica -

Dedico este trabalho à minha família, pelos momentos de ausência, a minha mãe por ter me ajudado de toda forma que pode nessa etapa da minha vida, aos amigos que não pude mais ver com frequência, aos novos amigos que fiz neste tempo de faculdade, e a minha namorada que me apoiou sempre que pode apesar da distância.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida, por ter me guiado neste Trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. André Koscianski, por ter me apoiado nesse tempo de estudos, demonstrado preocupação em minhas dificuldades como aluno.

Aos meus amigos que conheci neste período de curso, por terem aliviado a minha vida com momentos de humores, assim me dando mais folego para enfrentar as dificuldades nos estudos.

A minha namorada, que apesar de eu ter me feito ausente durante essa fase ela esteve me apoiando o tempo todo, com carinho e atenção.

E aos meus familiares por terem me apoiado mesmo quando cursar uma universidade era ainda só um plano, que me aguardaram ansiosamente, me ajudaram de toda forma que puderam e se preocuparam com meu estado e sucesso.

RESUMO

SILVA, Daniel Francisco. **Coloração de arestas distinta na vizinhança**. 2017. 44 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2017.

Uma coloração de arestas é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo G de forma que arestas incidentes em um mesmo vértice tenham cores distintas. Dada uma coloração de arestas de um grafo G , o conjunto de cores de um vértice v é o conjunto de cores das arestas incidentes em v . Dois vértices são distinguíveis se seus conjuntos de cores são diferentes. Uma coloração de arestas distinta na vizinhança, ou adjacent vertex distinguishing (AVD) edge-coloring, é uma coloração de arestas tal que quaisquer dois vértices adjacentes são distinguíveis. O índice cromático distinto na vizinhança de um grafo G , denotado por $\chi'_a(G)$, é o menor número de cores necessárias para uma coloração de arestas AVD do grafo G . Este trabalho determina o índice cromático distinto na vizinhança para grafos tripartidos completos.

Palavras-chave: coloração de arestas distinta na vizinhança. Grafos tripartidos completos. Índice cromático distinto na vizinhança.

ABSTRACT

SILVA, Daniel Francisco. **Adjacent vertex distinguishing edge coloring**. 2017. 44 p. Work of Conclusion Course (Graduation in Computer Science) - Federal University of Technology - Paraná. Ponta Grossa, 2017.

An edge coloring is an assignment of colors to the edges of a graph G such that edges that are incident to the same vertex receive distinct colors. Given an edge coloring of a graph G , the color-set of a vertex v is the set of colors on the edges incident to v . Two vertices are distinguishable if their color-sets are different. An adjacent vertex distinguishing (AVD) edge-coloring is an edge coloring such that any two adjacent vertices are distinguishable. The adjacent vertex distinguishing chromatic index of a graph G , denoted by $\chi'_a(G)$, is the least number of colors needed for an AVD-edge coloring of G . This work determines the adjacent vertex distinguishing index for complete tripartite graphs.

Keywords: adjacent vertex distinguishing edge coloring. Complete tripartite graphs. Adjacent vertex distinguishing chromatic index.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|---|----|
| Figura 1 - Grafo touro | 10 |
| Figura 2 - Exemplo de Modelo de Kempe | 11 |
| Figura 3 - Exemplo de coloração de vértices | 12 |
| Figura 4 - Exemplo de coloração de arestas | 12 |
| Figura 5 - Exemplo de coloração de arestas com o conjunto de cores nos vértices . | 13 |
| Figura 6 - Exemplo de coloração de arestas distinta na vizinhança..... | 14 |
| Figura 7 - Coloração de arestas distinta na vizinhança para o grafo P_n | 18 |
| Figura 8 - Coloração das arestas adjacentes do vértice de corte..... | 22 |
| Figura 9 - Coloração do caminho pertencente ao ciclo u_i^0 | 22 |
| Figura 10 - Coloração do caminho pertencente ao ciclo u_i^1 | 23 |
| Figura 11 - Coloração de arestas distinta na vizinhança para o Lema 3.5..... | 23 |
| Figura 12 - Componentes do grafo $T_{5,4,6,4,3}$ | 24 |
| Figura 13 - Exemplo de grafo G do Teorema 3.6 | 25 |
| Figura 14 - Grafo 4-partido completo | 26 |
| Figura 15 - Coloração total para o grafo touro..... | 30 |
| Figura 16 - Grafo regular com núcleo acíclico..... | 32 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 - Coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{n,n}$, n é ímpar..... | 27 |
| Tabela 2 - Coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{n,n}$, n é par..... | 28 |
| Tabela 3 - Exemplo de coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{5,5}$ | 29 |
| Tabela 4 - Exemplo de coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{6,6}$ | 29 |

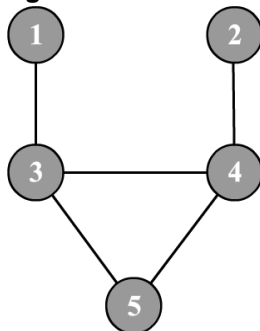
SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1 INTRODUÇÃO | 10 |
| 1.1 OBJETIVOS..... | 15 |
| 1.2 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO..... | 15 |
| 2 OS PRIMEIROS RESULTADOS SOBRE COLORAÇÃO DE ARESTAS AVD ... | 16 |
| 3 COLORAÇÃO DE ARESTAS AVD EM GRAFOS TREVOS E BIPARTIDOS COMPLETOS..... | 21 |
| 3.1 GRAFOS TREVOS | 21 |
| 3.2 GRAFOS MULTIPARTIDOS COMPLETOS | 25 |
| 3.3 RESUMO GERAL DOS RESULTADOS | 29 |
| 4 GRAFOS TRIPARTIDOS COMPLETOS..... | 30 |
| 4.1 RESULTADOS EM TRIPARTIDOS COMPLETOS..... | 32 |
| 5 CONCLUSÃO..... | 42 |
| REFERÊNCIAS..... | 43 |

1 INTRODUÇÃO

Um grafo é uma estrutura abstrata, constituída de dois conjuntos: o conjunto de arestas e o conjunto de vértices. Grafos são utilizados para modelar problemas reais, em que os vértices representam os objetos estudados e as arestas representam as relações entre esses objetos e, portanto, são descritas por pares de vértices. Matematicamente denota-se o grafo G com o conjunto de vértices $V(G)$ e o conjunto de arestas $E(G)$ por $G = (V(G), E(G))$. A Figura 1, a seguir, apresenta um exemplo de grafo. Nesse exemplo, $V(G) = \{1,2,3,4,5\}$ e $E(G) = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{3,5\}\}$.

Figura 1 – Grafo touro



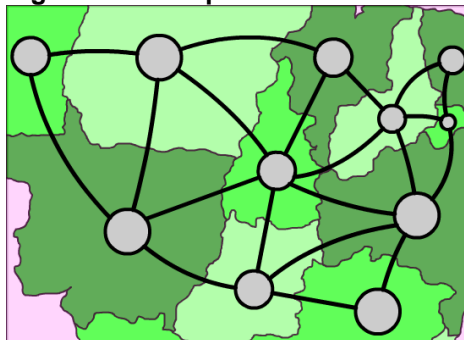
Fonte: autoria própria

Grafos são usados para modelar problemas reais de alocação de recursos. Nesses casos, os grafos representam malhas rodoviárias ou aéreas, redes de computadores, relações entre indivíduos, mapas geográficos, etc. Dentre os problemas comumente resolvidos utilizando algoritmos da Teoria dos Grafos podem-se citar: o Problema do Caminho Mínimo (encontrar o menor caminho entre dois locais); o problema de encontrar rotas aéreas com o menor número de escalas; otimização do roteamento de pacotes em redes computacionais; implantação de redes de abastecimento com custo mínimo; escalonamento de funcionários para os turnos de uma empresa; escalonamento de processos em um sistema computacional; criação de tabelas para torneios esportivos; e bloqueio de rotas de tráfico. Vários problemas reais convergem para modelos com a mesma estrutura em grafos, de forma que a solução de um problema da Teoria dos Grafos pode ser a solução para problemas reais em diferentes contextos. Por exemplo, o mesmo algoritmo da Teoria dos Grafos que

resolve o problema do GPS, também resolve o problema do roteamento de pacotes em uma rede de computadores. O objeto de estudo deste Trabalho de Conclusão de Curso é um problema pertencente a uma das subáreas mais estudadas e mais antigas da Teoria dos Grafos, conhecida como Teoria Cromática dos Grafos.

O primeiro problema em coloração de grafos surgiu em 1852, quando os irmãos Francis e Frederick Guthrie conjecturaram que era possível colorir as regiões de qualquer mapa utilizando apenas quatro cores de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes (CHARTRAND, ZHANG, 2009). O problema de decidir se essa conjectura é verdadeira ficou conhecido como Problema das Quatro Cores. Para resolvê-lo, Kempe o modelou como um grafo, onde cada região é representada por um vértice e existe aresta entre os vértices se e somente se, eles representam regiões vizinhas no mapa (CHARTRAND, ZHANG, 2009). O grafo da Figura 2 apresenta o modelo de Kempe para um mapa.

Figura 2 - Exemplo de Modelo de Kempe

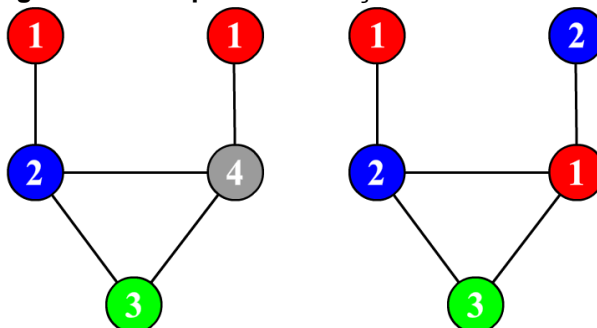


Fonte: autoria própria

O modelo de Kempe deu origem ao mais famoso problema da Teoria de Grafos (CHARTRAND, ZHANG, 2009), conhecido como Problema da Coloração de Vértices, que consiste em determinar o menor número de cores com as quais é possível colorir os vértices de um dado grafo G sem que vértices vizinhos tenham cores iguais. Este número é chamado de número cromático de G e denotado por $\chi(G)$. O grafo da Figura 3 apresenta duas colorações de vértices para o grafo G . Observe que a coloração da esquerda não utiliza o menor número possível de cores, então esta é uma coloração de vértices válida, mas não é

ótima. A coloração da direita utiliza o menor número de cores possível, portanto trata-se de uma coloração ótima e $\chi(G) = 3$.

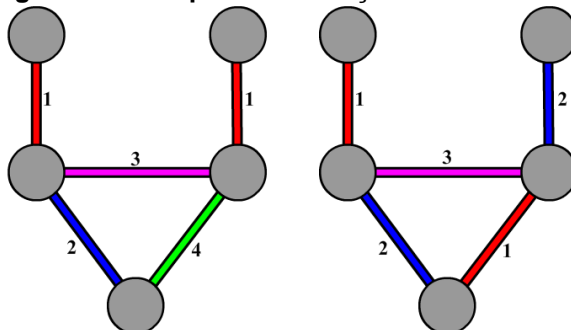
Figura 3 - Exemplo de coloração de vértices



Fonte: autoria própria

Ainda na tentativa de resolver o Problema das Quatro Cores, outros estudos resultaram na criação de novos problemas de coloração de grafos. Dentre eles, um dos mais conhecidos é o Problema da Coloração de Arestas. Uma coloração de arestas é uma atribuição de cores para as arestas de um grafo de forma que arestas que incidem em um mesmo vértice tenham cores diferentes. O Problema da Coloração de Arestas consiste em determinar o menor número de cores que permite uma coloração de arestas de um dado grafo G . Esse número é chamado de índice cromático de G e denotado por $\chi'(G)$. A Figura 4 apresenta duas colorações de arestas de um grafo G . A coloração apresentada à direita é ótima com $\chi'(G) = 3$.

Figura 4 - Exemplo de coloração de arestas

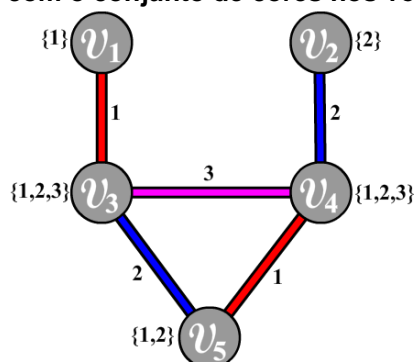


Fonte: Autoria própria

O Problema das Quatro Cores foi finalmente resolvido pela primeira vez em 1976 pelo matemático Kenneth Ira Appel, junto do seu colega Wolfgang Haken na Universidade de Illinois em Urbana e Champaign, solucionando o Problema de forma computacional, o que era uma novidade para a época (INFORMATION LITERACY FOR MAT 225, 2006).

No início dos anos 2000 surgiram outras formas de coloração de grafos que têm sido amplamente estudadas. Uma delas é a coloração de arestas distinta na vizinhança, tema deste Trabalho de Conclusão de Curso. Para defini-la, é preciso conhecer o conceito de conjunto de cores. Considere uma coloração de arestas de um determinado grafo G e um vértice v pertencente a $V(G)$. O conjunto de cores de v , denotado por $C(v)$, é o conjunto das cores das arestas que incidem em v . A Figura 5 ilustra uma coloração de arestas de um grafo G e os conjuntos de cores de seus vértices.

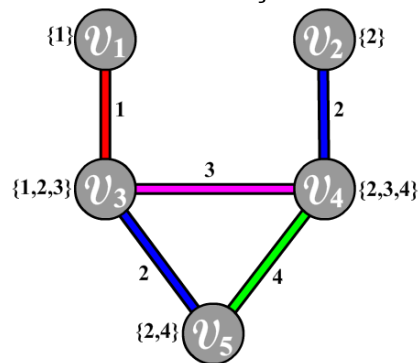
Figura 5 - Exemplo de coloração de arestas com o conjunto de cores nos vértices



Fonte: autoria própria

Uma coloração de arestas é distinta na vizinhança se para quaisquer dois vértices vizinhos, u e v , os conjuntos de cores de u e v são diferentes (ZHANG et al., 2002). Observe que a coloração do grafo da Figura 5 não é distinta na vizinhança, já que os vértices 3 e 4 têm conjuntos de cores iguais e são vizinhos. A Figura 6 apresenta uma coloração de arestas distinta na vizinhança para o mesmo grafo.

Figura 6 - Exemplo de coloração de arestas distinta na vizinhança



Fonte: autoria própria

O termo em inglês para “coloração de arestas distinta na vizinhança” é “*adjacent vertex distinguishing edge coloring*”, por isso essa coloração também é chamada de coloração de arestas AVD. O Problema da Coloração de Arestas AVD consiste em determinar o menor número de cores que permite uma coloração de arestas AVD em um dado grafo G . Esse número é chamado de índice cromático distinto na vizinhança e denotado por $\chi'_a(G)$.

Um grafo completo, K_n , é um grafo com n vértices dois a dois adjacentes. Note que o grafo completo K_2 não possui uma coloração de arestas AVD. Por definição, $\chi'_a(G) \geq \chi'(G)$. Quanto a um limite superior para $\chi'(G)$, Zhang (2002) relacionou o índice cromático distinto na vizinhança com o grau máximo do grafo e apresentou uma conjectura que ficou conhecida como Conjectura da Coloração de Arestas AVD. O grau máximo de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é o maior número de arestas incidentes em um mesmo vértice do grafo. A Conjectura de Zhang (2002) é apresentada a seguir.

Conjectura 1.1 (ZHANG, 2002): se G é um grafo simples com pelo menos 6 vértices e sem componentes isomorfas ao K_2 , então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Apesar do Problema da Coloração de Arestas AVD ter sido definido há mais de uma década (ZHANG, 2002), não se conhece algoritmo eficiente para sua solução no caso geral. Diante da dificuldade, muitos estudos concentram-se na busca de algoritmos polinomiais que o resolvam em classes de grafos mais restritas, utilizando uma estratégia de dividir para conquistar.

1.1 OBJETIVOS

Neste trabalho, o Problema da Coloração de Arestas AVD é abordado nas classes tripartidos completos. Esta classe de grafos é definida em momento mais apropriado, quando o estudo sobre a mesma é apresentado. Os objetivos específicos são a determinação do índice cromático distinto na vizinhança para todos os grafos destas classes, com apresentação de algoritmos polinomiais que recebam como entrada um grafo da classe e apresentem uma coloração de arestas distinta na vizinhança ótima para o mesmo.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O Capítulo 2 apresenta algumas definições básicas e resultados anteriores. São resultados conhecidos de Zhang, Liu e Wang (2002), que resolvem o Problema da Coloração de Arestas Distinta na Vizinhança em classes de grafos bem simples e bastante conhecidas: os caminhos e os ciclos. No Capítulo 3, é apresentado o estudo sobre a coloração distinta na vizinhança em grafos bipartidos completos e grafos trevos apresentado por Jana (2015). No Capítulo 4, é determinado o índice cromático distinto na vizinhança para todos os grafos tripartidos completos. Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 OS PRIMEIROS RESULTADOS SOBRE COLORAÇÃO DE ARESTAS AVD

Quando Zhang, Liu e Wang (2002) definiram o Problema da Coloração de Arestas AVD, apresentaram resultados deste problema em algumas classes de grafos. Os mais simples são os resultados para grafos completos, árvores e ciclos, que são enunciados neste capítulo.

Um laço é uma aresta cujos extremos são o mesmo vértice. Um conjunto de duas ou mais arestas que incidem sobre o mesmo par de vértices é chamado de arestas múltiplas. Grafos sem laços, sem arestas múltiplas e não orientados são grafos simples. Um subgrafo de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dado um grafo G e um subconjunto de vértices $A \subseteq V(G)$, o subgrafo de G induzido por A é o grafo H tal que $V(H) = A$ e $E(H)$ é o subconjunto das arestas de G cujos extremos pertencem a A .

Um grafo é conexo se existe um caminho entre qualquer par de vértices do grafo. Uma componente de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G , ou seja, um subgrafo conexo que não está propriamente contido em outro subgrafo conexo. Neste trabalho, todos os grafos são simples e conexos.

Para qualquer vértice v de um grafo G , o grau de v é o número de arestas que incidem em v e é denotado por $d(v)$. O maior número de arestas incidentes em um mesmo vértice do grafo é chamado de grau máximo do grafo e denotado por $\Delta(G)$. No grafo da Figura 1 $d(5) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.

Um caminho P_n é um grafo com conjunto de vértices $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e conjunto de arestas $\{\{v_i, v_{i+1}\}: 0 \leq i < n-1\}$. Um ciclo, C_n , é um grafo com conjunto de vértices $V(C_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, e conjunto de arestas $E(C_n) = \{\{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}: 0 \leq i < n\}$. Uma árvore é um grafo acíclico e conexo, ou seja, um grafo conexo que não contém um ciclo como subgrafo. Observe que uma árvore que tenha um ou dois vértices é um K_1 ou K_2 , respectivamente, e, portanto, não possui uma coloração de arestas AVD. Para os demais casos, Zhang e colegas enunciaram o seguinte teorema.

Teorema 2.1 (ZHANG et. al., 2002): se uma árvore T tem pelo menos três vértices, então, se T possui vértices adjacentes de grau máximo, $\chi'_a(T) = \Delta(T) + 1$; caso contrário, $\chi'_a(T) = \Delta(T)$.

Note que todo caminho é uma árvore. Neste caso particular, apresentamos a seguinte demonstração.

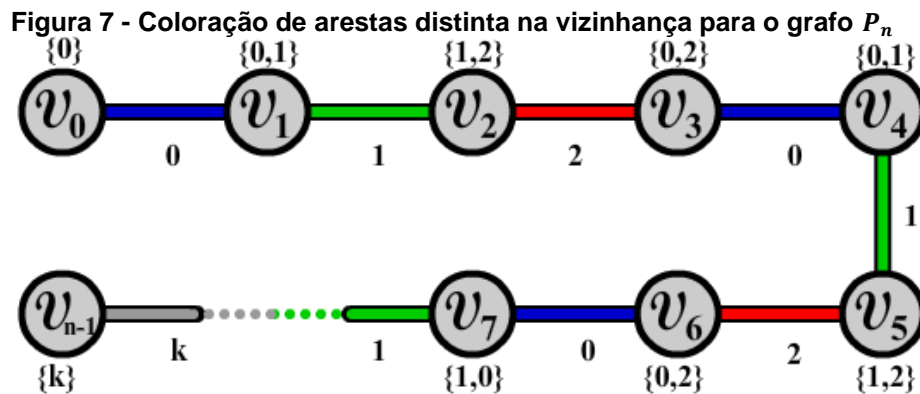
Lema 2.2 (ZHANG et. al., 2002): se P_n é um caminho com n vértices, então

$$\chi'_a(P_n) = \begin{cases} 2, & \text{onde } n = 3; \\ 3, & \text{onde } n > 3. \end{cases}$$

Demonstração: considere um grafo caminho com n vértices, $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ e $n - 1$ arestas, $\{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}\}$. Se $n = 3$, então o grafo possui apenas duas arestas e as mesmas são adjacentes, não podendo assim ter a mesma cor. Portanto, $\chi'_a(P_3) \geq 2$. Considere a seguinte coloração de arestas para o grafo P_3 : atribua cor 0 para a aresta $\{v_0, v_1\}$ e cor 1 para a aresta $\{v_1, v_2\}$. Como $d(v_0) = d(v_2) = 1$ e $d(v_1) = 2$, os vértices adjacentes têm diferentes número de cores em seus conjuntos de cores, portanto são conjuntos diferentes. Logo $\chi'_a(P_3) = 2$.

Se $n > 3$, então para cada aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i \leq n - 2$, atribua a cor $i \bmod 3$. Vamos provar que esta é uma coloração de aresta distinta na vizinhança. Considere quaisquer dois vértices adjacentes, v_i e v_{i+1} , então, por construção, $C(v_i) = \{(i - 1) \bmod 3, i \bmod 3\}$ e $C(v_{i+1}) = \{i \bmod 3, (i + 1) \bmod 3\}$. Como a diferença entre $i - 1$ e $i + 1$ é menor que 3 então essas cores são distintas e, portanto, os conjuntos de cores nos vértices são diferentes. Observe que os conjuntos de cores de v_0 e v_{n-1} são diferentes dos conjuntos de seus vizinhos pela sua cardinalidade, pois $d(v_0) = d(v_{n-1}) = 1$. ■

A Figura 7 ilustra a coloração de arestas distinta na vizinhança para qualquer grafo caminho de n vértices, de acordo com o Lema 2.2.



$$c(v_{n-1}) = \{k\}, \text{ onde } k = (n-2) \bmod 3$$

Fonte: autoria própria

O Teorema 2.1 considera todos os grafos sem ciclos. Para os ciclos, Zhang e colegas apresentaram o seguinte resultado.

Teorema 2.3 (ZHANG, 2002): se C_n é um ciclo, então

$$\chi_a'(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 4, & \text{se } n \equiv 1, 2 \pmod{3} \text{ e } n \neq 5; \\ 5, & \text{se } n = 5. \end{cases}$$

Demonstração: seja C_n um ciclo com n vértices, $V(C_n) = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$, e n arestas, $E(C_n) = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}, \{v_{(n-1)}, v_0\}\}$. O ciclo C_n possui um subgrafo caminho P_n com $n - 1$ arestas. A prova é dividida em três casos.

Caso 1: $n \bmod 3 \neq 2$. Atribua ao subgrafo P_n a coloração apresentada no Lema 2.2. Para estes casos ainda falta colorir a aresta $\{v_{n-1}, v_0\}$. Para concluir a coloração de arestas distinta na vizinhança do grafo C_n , há três casos:

- Se $n \bmod 3 \equiv 0$, então $c(\{v_{n-2}, v_{n-1}\}) = 1$, portanto $c(\{v_{n-1}, v_0\}) = 2$ e $\chi_a'(C_n) = 3$.
- Se $n \bmod 3 \equiv 1$, então $c(\{v_{n-2}, v_{n-1}\}) = 2$, porém nenhuma cor já usada em P_n é aceitável para a aresta $\{v_{n-1}, v_0\}$, pois 2 é a cor de uma de suas arestas adjacentes $\{v_{n-2}, v_{n-1}\}$, 0 é a cor da outra aresta adjacente

$\{v_0, v_1\}$, e o uso da cor 1 faz com que os conjuntos de cores de v_{n-1} e v_{n-2} sejam iguais. Portanto atribua uma nova cor 3 para a aresta $\{v_0, v_{n-1}\}$. Como não existe outra aresta com cor 3, então não existem arestas adjacentes com a mesma. Por construção, os conjuntos de cores dos vértices v_0 e v_{n-1} não são iguais aos dos seus vizinhos. Isso pode ser observado, pois antes da coloração da aresta $\{v_0, v_{n-1}\}$, os conjuntos de cores de v_0 e v_{n-1} eram distintos já que v_0 possuía a cor 0 e v_{n-1} a cor 2. A aresta $\{v_0, v_{n-1}\}$ tem cor 3, então os novos conjuntos de cores de v_0 e v_{n-1} são respectivamente $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$, que se distinguem entre si e que se distinguem dos demais devido à cor 3. Portanto, $\chi'_a(C_n) = 4$.

Caso 2: $n \pmod{3} \equiv 2$ e $n \neq 5$. Para cada aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i \leq n - 2$, atribua a cor $i \pmod{4}$ e para a aresta $\{v_{n-1}, v_0\}$ atribua a cor $n - 1 \pmod{4}$. Considerando quaisquer dois vértices adjacentes, v_i e v_{i+1} , então por construção $C(v_i) = \{(i - 1) \pmod{4}, i \pmod{4}\}$ e $C(v_{i+1}) = \{i \pmod{4}, (i + 1) \pmod{4}\}$. Como a diferença entre $i - 1$ e $i + 1$ é menor que 4 então essas cores são distintas e, portanto, os conjuntos de cores dos vértices são diferentes, assim $\chi'_a(C_n) = 4$.

Caso 3: $n = 5$. Observe que $5 \pmod{3} \equiv 2$. Considere uma coloração de arestas com quatro cores. Vamos mostrar que esta coloração de arestas não é distinta na vizinhança. Se duas arestas adjacentes têm a mesma cor, então a coloração de arestas não é AVD. Se não há arestas adjacentes com a mesma cor, então há arestas com a mesma cor separadas por no máximo uma única aresta $\{v_i, v_{i+1}\}$. Dessa forma, o conjunto de cores dos vértices v_i e v_{i+1} serão iguais. Como v_i e v_{i+1} são vértices adjacentes, esta não é uma coloração de arestas distinta na vizinhança. Portanto qualquer coloração de arestas distinta na vizinhança no grafo C_5 tem as cores das arestas duas a duas distintas. Então $\chi'_a(C_5) = 5$. ■

Outra classe de grafos bastante estudada para a qual o resultado é conhecido pelo trabalho de Zhang (2002), é a dos grafos completos.

Teorema 2.4 (ZHANG et al., 2002): se K_n é um grafo completo com $n \geq 3$, então $\chi'_a(K_n) = n$, se n é par; e $\chi'_a(K_n) = n + 1$, se n é ímpar.

Para o caso geral, Zhang e colegas apresentaram um limite inferior quando existem vértices adjacentes com grau máximo, como segue.

Teorema 2.5 (ZHANG et al., 2002): seja G um grafo com vértices adjacentes de grau máximo, então $\chi'_a(G) \geq \Delta(G) + 1$.

O Teorema 2.5 é bastante intuitivo, já que se um vértice tem grau máximo, são necessárias pelo menos $\Delta(G)$ cores para colorir suas arestas. Se forem utilizadas as mesmas $\Delta(G)$ cores para as arestas de dois vértices adjacentes, então os conjuntos de cores desses vértices serão iguais. Portanto, são necessárias pelo menos $\Delta(G) + 1$ cores para colorir as arestas de vértices adjacentes que tenham grau $\Delta(G)$.

3 COLORAÇÃO DE ARESTAS AVD EM GRAFOS TREVOS E BIPARTIDOS COMPLETOS

O objetivo inicial desse trabalho era o estudo do problema da coloração de arestas distintas na vizinhança em grafos multipartidos completos. Uma das primeiras referências encontradas sobre esse tópico durante o levantamento bibliográfico foi o artigo de Jana (2015). Este artigo apresenta uma solução do Problema da Coloração de Arestas Distinta na vizinhança para os grafos trevos e bipartidos completos. A seguir, são apresentados os principais resultados do trabalho de Jana (2015).

3.1 GRAFOS TREVOS

Considere um conjunto de $y + 1$ ciclos, $\{C_{n_0}, C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_y}\}$, tal que $V(C_{n_i}) = \{v_0, u_1^i, u_2^i, \dots, u_{n_i}^i\}$, $u_j^i \neq u_l^k$ quando $j \neq l$ ou $i \neq k$, e $E(C_{n_i}) = \{\{u_j^i, u_{j+1}^i\}, 1 \leq j < n_i - 1\} \cup \{\{v_0, u_1^i\}, \{u_{n_i-1}^i, v_0\}\}$, para $0 \leq i \leq y$. A união $H \cup F$ é a operação sobre H e F cujo resultado é o grafo $V(G) = (V(G), E(G))$ tal que $V(G) = V(H) \cup V(F)$ e $E(G) = E(H) \cup E(F)$.

Neste trabalho, chamamos de grafo $(y+1)$ -trevos o grafo $T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y}$, resultante da operação $C_{n_0} \cup C_{n_1} \cup C_{n_2} \cup \dots \cup C_{n_y}$. Observe que o vértice v_0 tem grau igual a $2(y + 1) = \Delta(T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y})$ e que os demais vértices têm grau igual a 2, pois todo grafo ciclo tem $\Delta(C_n) = \delta(C_n) = 2$. O Lema 3.5 determina o índice cromático distinto na vizinhança de todo grafo 2-trevos.

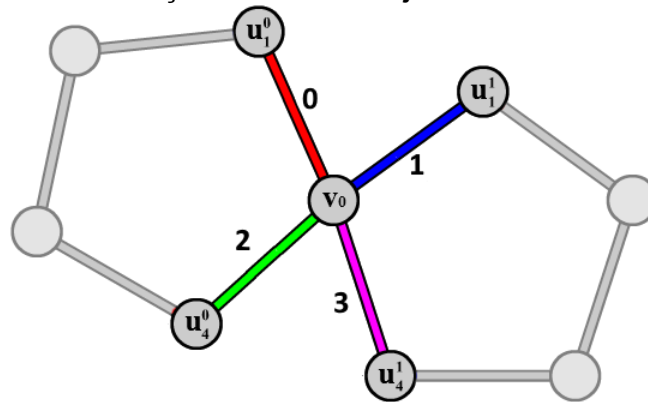
Lema 3.5: todo grafo T_{n_0, n_1} tem $\chi'_a(T_{n_0, n_1}) = \Delta(T_{n_0, n_1}) = 4$.

Demonstração: para essa prova, o método se divide em três etapas:

Etapa 1: considere apenas as arestas adjacentes ao vértice de corte, ou seja, as arestas $\{v_0, u_1^0\}$, $\{v_0, u_{n_0-1}^0\}$, $\{v_0, u_1^1\}$ e $\{v_0, u_{n_1-1}^1\}$. Como essas arestas incidem no mesmo vértice, cada uma terá uma cor diferente, totalizando 4 cores, 0, 1, 2 e 3. Então, $\chi'_a(T_{n_0, n_1}) \geq 4$. A Figura 8 exemplifica esta etapa para um

grafo $T_{5,5}$, onde os vértices e arestas não numerados representam elementos que não são considerados na etapa.

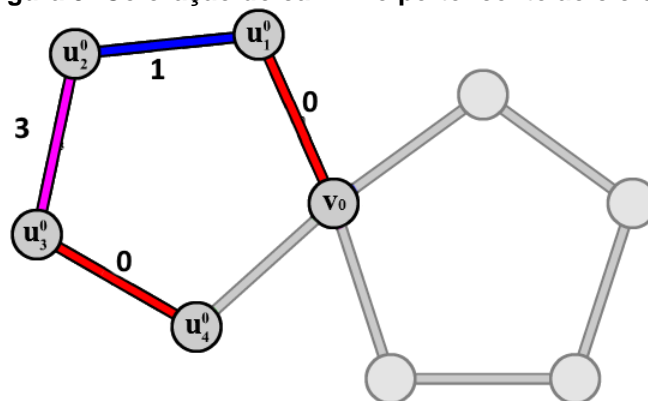
Figura 8- Coloração das arestas adjacentes do vértice de corte



Fonte: autoria própria

Etapa 2: considere o subgrafo C_{n_0} sem a aresta $\{v_0, u_{n_0-1}^0\}$. Observe que trata-se de um subgrafo isomorfo a um caminho. Então, aplique a mesma coloração apresentada no Lema 2.2 usando as mesmas cores que foram utilizadas na etapa 1, as cores 0, 1, 2 e 3, exceto pela cor atribuída a aresta entre o vértice de corte (v_0) e o último vértice do primeiro ciclo ($u_{n_0-2}^0$), ou seja, a cor $c(\{v_0, u_{n_0-2}^0\}) = 2$, sobrando então apenas as cores 0,1 e 3. Como a aplicação da coloração do Lema 2.2 não altera a cor da aresta $\{v_0, u_1^0\}$ atribuída na etapa 1, obtém-se a coloração deste subgrafo caminho. Veja um exemplo na Figura 9.

Figura 9- Coloração do caminho pertencente ao ciclo u_i^0

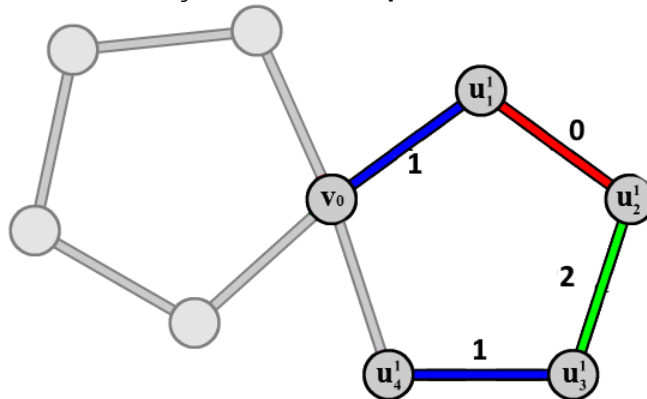


Fonte: autoria própria

Etapa 3: considere o ciclo C_{n_1} sem a aresta $\{v_0, u_{n_1-1}^1\}$. Aplique a mesma coloração do Lema 2.2, utilizando apenas as cores da etapa 1 exceto a cor da aresta $\{v_0, u_{n_1-1}^1\}$, ou seja, apenas as cores 0, 1 e 2. Como aplicação da

coloração do Lema 2.2 não altera a cor da aresta $\{v_0, u_1^1\}$, atribuída na etapa 1, obtém-se uma coloração para este subgrafo caminho. Um exemplo é ilustrado na Figura 10.

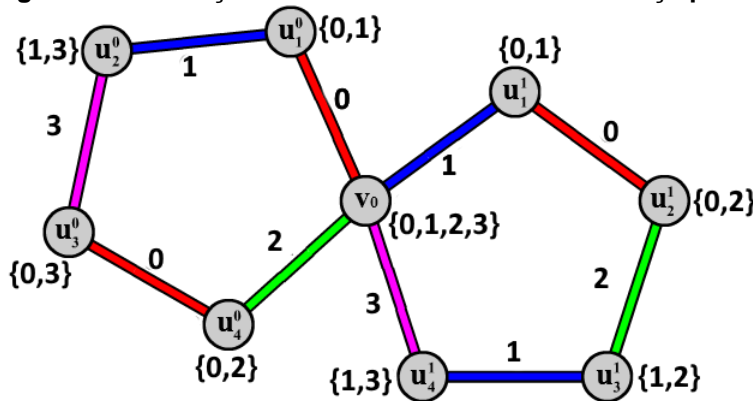
Figura 10- Coloração do caminho pertencente ao ciclo u_i^1



Fonte: autoria própria

Unindo os subgrafos coloridos em todas as etapas, obtém-se a coloração de arestas distinta na vizinhança para o grafo G. Um exemplo pode ser visto na Figura 11. ■

Figura 11- Coloração de arestas distintas na vizinhança para o Lema 3.5



Fonte: autoria própria

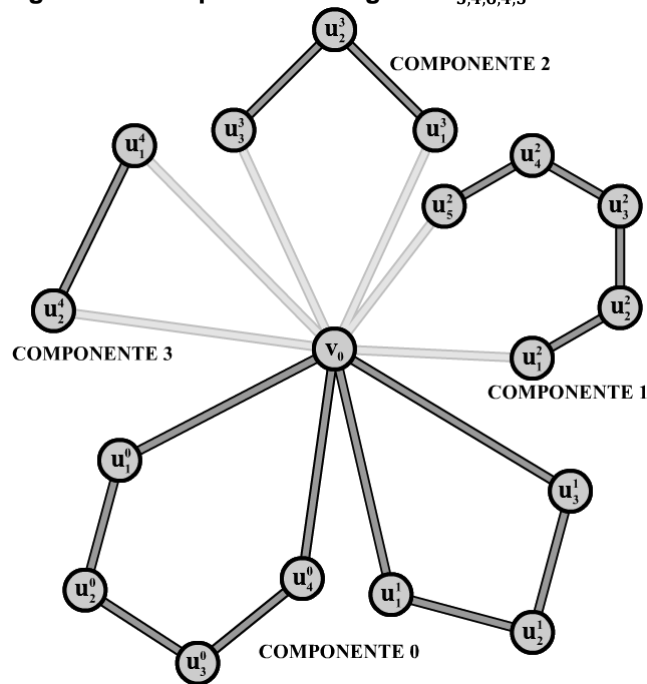
O resultado do Lema 3.5 pode ser generalizado para grafos $(y+1)$ -trevos, como prova o Teorema 3.6.

Teorema 3.6: todo grafo $T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y}$ tem $\chi'_a(T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y}) = \Delta(T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y}) = 2(y + 1)$.

Demonstração: remova as arestas do grafo $T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y}$, o grafo resultante é desconexo e possui y componentes, onde uma componente é

formada pelo subgrafo T_{n_0, n_1} e as demais componentes são os subgrafos caminhos, $P_{n_2-1}, P_{n_3-1}, \dots$ e P_{n_y-1} . A Figura 12 evidencia as componentes de um grafo $T_{5,4,6,4,3}$, onde a componente 0 é o subgrafo $T_{5,4}$ e as demais componentes são os caminhos P_5, P_3 e P_2 , observando que as arestas mais claras não fazem parte de nenhuma componente.

Figura 12- Componentes do grafo $T_{5,4,6,4,3}$



Fonte: autoria própria

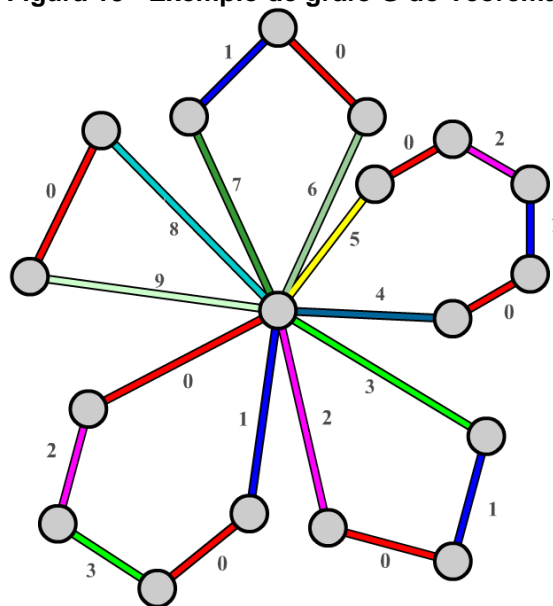
Para a componente 0, aplique a coloração pelo método descrito no Lema 3.5. Para as componentes que são caminhos, aplique uma coloração de acordo com o Lema 2.2, reutilizando quaisquer três cores da coloração da componente 0. Dessa forma, todas as arestas estão coloridas, exceto as que interligam as componentes, ou seja, as arestas $\{v_0, u_1^2\}, \{v_0, u_1^3\}, \dots, \{v_0, u_1^y\}$ e as $\{v_0, u_{n_2-1}^2\}, \{v_0, u_{n_3-1}^3\}, \dots, \{v_0, u_{n_y-1}^y\}$.

Como as arestas que ainda não possuem cor são adjacentes ao vértice de corte e este já possui arestas com todas as cores até então usadas no grafo, é necessária a atribuição de novas cores para estas arestas, uma para cada aresta. Dessa forma totalizando $\Delta(T_{n_0, n_1, n_2, \dots, n_y}) = d(v_0) = 2(y + 1)$. Pelo Lema 2.2, a coloração dos caminhos é distinta na vizinhança. Pelo Lema 3.5, a coloração de arestas da componente 0 é distinta na vizinhança. As novas

arestas, que ligam caminhos ao vértice v_0 conectam vértices que tem graus distintos nesse grafo e, portanto, seus conjuntos de cores nos vértices são distintos. Então, esta é uma coloração de arestas distinta na vizinhança. ■

A Figura 13 ilustra a coloração para o grafo $T_{5,4,6,4,3}$ aplicando este lema.

Figura 13 - Exemplo de grafo G do Teorema 3.6

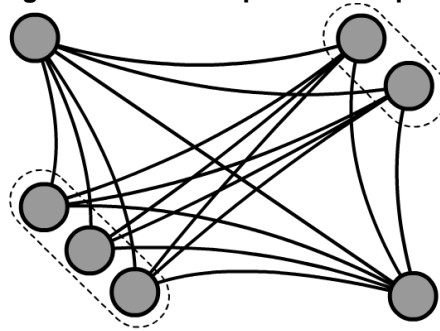


Fonte: autoria própria

3.2 GRAFOS MULTIPARTIDOS COMPLETOS

Esta seção apresenta os resultados de Jana (2015) para um subconjunto dos grafos multipartidos completos. Um grafo é multipartido se seu conjunto de vértices pode ser particionado em subconjuntos (ou partes) onde os vértices são dois a dois não-vizinhos. Todo grafo simples é um grafo multipartido, pois é possível particionar o conjunto de vértices em subconjuntos compostos de um único vértice. Quando quaisquer dois vértices u e v pertencentes a partes diferentes são vizinhos, o grafo é chamado de multipartido completo. Um grafo k -partido completo é um grafo multipartido completo com k partes. A Figura 14 apresenta um exemplo de um grafo 4-partido completo.

Figura 14 - Grafo 4-partido completo



Fonte: autoria própria

O grafo 2-partido completo, também chamado de bipartido completo, pode ser representado matematicamente por $K_{|A|,|B|}$, onde A e B são os subconjuntos de vértices dois a dois não-adjacentes e $|A|$ e $|B|$ são as cardinalidades destes subconjuntos, respectivamente.

Jana (2015) determina o índice cromático distinto na vizinha de todos os grafos bipartidos completos, como mostra o Teorema 3.7.

Teorema 3.7 (JANA, 2015): todo grafo bipartido completo $K_{|U|,|V|}$ tem

$$\chi'_a(K_{|U|,|V|}) = \begin{cases} \Delta(K_{|U|,|V|}) + 2, & \text{se } |U| = |V|, \\ \Delta(K_{|U|,|V|}), & \text{se } |U| \neq |V|; \end{cases}$$

Ideia da demonstração: primeiro, observe que se $|U| \neq |V|$, então basta realizar uma coloração de arestas do grafo bipartido $K_{|U|,|V|}$ com $\Delta(K_{|U|,|V|}) = \max\{|U|, |V|\}$ cores, já que neste caso os conjuntos de cores se distinguem por sua cardinalidade. Tal coloração é possível, segundo König (1916).

Então, considere $|U| = |V|$. Neste caso, existem vértices adjacentes de grau máximo. Então, pelo Teorema 2.5, $\chi'_a(K_{|U|,|V|}) \geq \Delta(K_{|U|,|V|}) + 1$. Como o número de vértices é par, toda cor que não incide em todos os vértices falta em pelo menos dois vértices. Como existe aresta entre quaisquer dois vértices $u \in U$ e $v \in V$, toda cor que falta em dois vértices, falta em um vértice de U e a um vértice de V . Logo, ao utilizar $\Delta(K_{|U|,|V|}) + 1$ cores, cada cor falta em dois vértices, sendo um deles do conjunto U e outro do conjunto V . Como em cada vértice falta exatamente uma cor, haverá vértices adjacentes com mesmo conjunto de cores. Portanto, não se obtém uma coloração de arestas AVD. Resta provar que o

índice cromático AVD é $\Delta(K_{|U|,|V|}) + 2$. A prova é construtiva. Pinte as arestas do grafo utilizando as seguintes equações:

- Caso o valor de n seja um número ímpar: pinte a aresta $\{u_i, v_j\}$ com cor $(2i + j) \bmod(n + 2)$.
- Caso o valor de n seja um número par: pinte a aresta $\{u_i, v_j\}$ com cor $\left(2i + j + \left\lfloor \frac{2i}{n+2} \right\rfloor\right) \bmod(n + 2)$.

As tabelas a seguir, Tabela 1 e Tabela 2, mostram a coloração obtida a partir da descrição acima. A Tabela 1 representa a coloração do $K_{n,n}$ com n ímpar e a Tabela 2 representa a coloração do $K_{n,n}$ quando n é par.

Tabela 1- Coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{n,n}$, n é ímpar

| | v_0 | v_1 | v_2 | ... | v_{n-3} | v_{n-2} | v_{n-1} | $c(u_i)$ |
|---------------|----------|----------|----------|-----|--------------|--------------|--------------|------------------|
| u_0 | 0 | 1 | 2 | ... | $n - 3$ | $n - 2$ | $n - 1$ | $c(u_0)$ |
| u_1 | 2 | 3 | 4 | ... | $n - 1$ | n | $n + 1$ | $c(u_1)$ |
| u_2 | 4 | 5 | 6 | ... | $n + 1$ | 0 | 1 | $c(u_2)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $u_{(n-1)/2}$ | $n - 1$ | n | $n + 1$ | ... | $n - 6$ | $n - 5$ | $n - 4$ | $c(u_{(n-1)/2})$ |
| $u_{(n+1)/2}$ | $n + 1$ | 0 | 1 | ... | $n - 4$ | $n - 3$ | $n - 2$ | $c(u_{(n+1)/2})$ |
| $u_{(n+3)/2}$ | 1 | 2 | 3 | ... | $n - 2$ | $n - 1$ | n | $c(u_{(n+3)/2})$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| u_{n-2} | $n - 6$ | $n - 5$ | $n - 4$ | ... | $n - 11$ | $n - 10$ | $n - 9$ | $c(u_{n-2})$ |
| u_{n-1} | $n - 4$ | $n - 3$ | $n - 2$ | ... | $n - 9$ | $n - 8$ | $n - 7$ | $c(u_{n-1})$ |
| $c(v_j)$ | $c(v_0)$ | $c(v_1)$ | $c(v_2)$ | ... | $c(v_{n-3})$ | $c(v_{n-2})$ | $c(v_{n-1})$ | |

Fonte: Jana (2015)

Tabela 2 - Coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{n,n}$, n é par

| | v_0 | v_1 | v_2 | ... | v_{n-3} | v_{n-2} | v_{n-1} | $c(u_i)$ |
|---------------|----------|----------|----------|-----|--------------|--------------|--------------|------------------|
| u_0 | 0 | 1 | 2 | ... | $n-3$ | $n-2$ | $n-1$ | $c(u_0)$ |
| u_1 | 2 | 3 | 4 | ... | $n-1$ | n | $n+1$ | $c(u_1)$ |
| u_2 | 4 | 5 | 6 | ... | $n+1$ | 0 | 1 | $c(u_2)$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $u_{(n+2)/2}$ | 1 | 2 | 3 | ... | $n-2$ | $n-1$ | n | $c(u_{(n+2)/2})$ |
| $u_{(n+4)/2}$ | 3 | 4 | 5 | ... | n | $n+1$ | 0 | $c(u_{(n+4)/2})$ |
| $u_{(n+6)/2}$ | 5 | 6 | 7 | ... | 0 | 1 | 2 | $c(u_{(n+6)/2})$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| u_{n-2} | $n-5$ | $n-4$ | $n-3$ | ... | $n-10$ | $n-9$ | $n-8$ | $c(u_{n-2})$ |
| u_{n-1} | $n-3$ | $n-2$ | $n-1$ | ... | $n-8$ | $n-7$ | $n-6$ | $c(u_{n-1})$ |
| $c(v_j)$ | $c(v_0)$ | $c(v_1)$ | $c(v_2)$ | ... | $c(v_{n-3})$ | $c(v_{n-2})$ | $c(v_{n-1})$ | |

Fonte: Jana (2015)

Nas tabelas 1 e 2, as operações aritméticas são modulares (módulo $n+2$). Observe que em ambas as tabelas a célula $m_{i,j} = m_{i,j-1} + 1$, $0 \leq i < n$ e $0 < j < n$. Ou ainda $m_{i,j} = m_{i-1,j} + 2$, onde $0 < i < n$ e $0 \leq j < n$. Além disso, nas duas tabelas $m_{0,i} = i$, $0 \leq i < n$. Todas as cores são representadas por números inteiros no intervalo $\{0, n+1\}$ e, portanto, são $\Delta(K_n) + 2$ cores. Por fim, as cores dos conjuntos de cores dos vértices de U são números inteiros consecutivos, enquanto as cores dos conjuntos de cores dos vértices de V não são números consecutivos. Então, trata-se de uma coloração de arestas distinta na vizinhança. ■

A seguir são apresentadas duas tabelas, a Tabela 3 e a Tabela 4, que exemplificam a aplicação deste teorema para um grafo com n ímpar, $K_{5,5}$, e um grafo com n par, $K_{6,6}$, respectivamente.

Tabela 3 - Exemplo de coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{5,5}$

| | v_0 | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | $c(u_i)$ |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| u_0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | {0,1,2,3,4} |
| u_1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | {2,3,4,5,6} |
| u_2 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | {0,1,4,5,6} |
| u_3 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | {0,1,2,3,6} |
| u_4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | {1,2,3,4,5} |
| $c(v_j)$ | {0,1,2,4,6} | {0,1,2,3,5} | {1,2,3,4,6} | {0,2,3,4,5} | {1,3,4,5,6} | |

Fonte: autoria própria

Tabela 4- Exemplo de coloração de arestas distinta na vizinhança para o $K_{6,6}$

| | v_0 | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 | $c(u_i)$ |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|---------------|
| u_0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | {0,1,2,3,4,5} |
| u_1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | {2,3,4,5,6,7} |
| u_2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | {0,1,4,5,6,7} |
| u_3 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | {0,1,2,3,6,7} |
| u_4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | {1,2,3,4,5,6} |
| u_5 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | {0,3,4,5,6,7} |
| $c(v_j)$ | {0,1,2,3,4,6} | {1,2,3,4,5,7} | {0,2,3,4,5,6} | {1,3,4,5,6,7} | {0,2,4,5,6,7} | {0,1,3,4,5,6,7} | |

Fonte: autoria própria

O resultado do Teorema 3.7 confirma o seguinte teorema de Ballister (2007).

Teorema 3.8 (BALISTER et al., 2007): se G é um grafo bipartido sem arestas isoladas, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

3.3 RESUMO GERAL DOS RESULTADOS

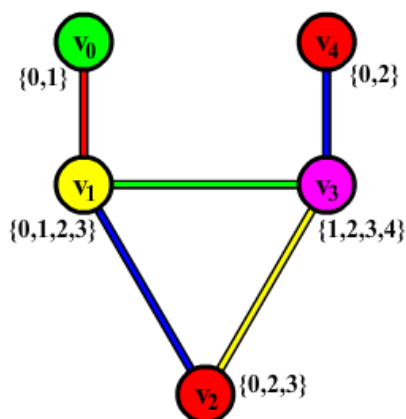
Sabemos que todo grafo bipartido completo tem uma coloração de arestas AVD com $\Delta(G)$ cores, quando as partes do grafo são de tamanhos diferentes, e $\Delta(G) + 2$ cores quando as partes são de mesmo tamanho. Isso foi comprovado por Jana (2015). Para outros resultados que já eram conhecidos foram apresentados novas demonstrações para os grafos ciclos e caminhos. Também a partir desse estudo derivamos o resultado para o grafo Trevo.

4 GRAFOS TRIPARTIDOS COMPLETOS

A partir dos estudos e resultados para o Problema da Coloração de Arestas AVD em grafos bipartidos completos, um passo natural é a generalização de tais resultados para a classe dos grafos tripartidos completos. Este capítulo apresenta resultados para o Problema da Coloração de Arestas AVD nesta classe. Em alguns casos o índice cromático distinto na vizinhança relaciona-se com outros parâmetros do grafo. Um desses parâmetros é número cromático total, definido a seguir.

Coloração total é uma coloração dos vértices e arestas do grafo com a restrição de que arestas adjacentes devem ter cores distintas, vértices adjacentes devem ter cores distintas e, por fim, a cor de cada vértice v não pertence ao conjunto das cores de suas arestas. A Figura 15 apresenta uma coloração total para o grafo touro.

Figura 15 - Coloração total para o grafo touro



Fonte: autoria própria

O menor número de cores que permite uma coloração total de um grafo G é chamado de número cromático total e denotado matematicamente por $\chi''(G)$. O problema da Coloração Total é determinar $\chi''(G)$. Por definição, $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ para qualquer grafo simples G e conjectura-se que $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Esta conjectura é conhecida como Conjectura da Coloração Total e foi proposta independentemente por Behzad (1964) e Vizing (1965).

Um grafo regular é um grafo que tem o mesmo grau em todos os seus vértices, ou seja, $d(v_0) = d(v_1) = \dots = d(v_n) = \Delta(G)$. Para os grafos regulares, Balister (2007) apresentou um teorema relacionando o número cromático total com o índice cromático distinto na vizinhança.

Teorema 4.1 (BALISTER, 2007): se G é regular e $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, então $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 1$.

A partir do Teorema 4.1, duas questões são interessantes. Será que para os grafos regulares com $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$ é verdade que $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 2$? Além disso, será que o Teorema 4.1 vale para grafos que não são regulares? Neste trabalho, há um particular interesse em responder tais questões para grafos tripartidos completos. Para iniciar essa investigação, é importante conhecer o número cromático total dos grafos k -partidos completos, já determinado por Bermond (1974).

Teorema 4.2 (BERMOND, 1974): seja G um k -partido completo cujas partes têm a mesma cardinalidade n . Se $k = 2$ ou se k é par e n é ímpar, então $\chi''(G) = \Delta(G) + 2$. Caso contrário, $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$.

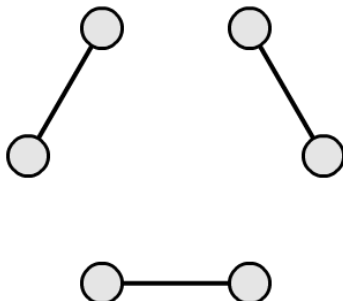
Neste capítulo, vamos responder tais questões e determinar o índice cromático distinto na vizinhança dos grafos tripartidos completos. As demonstrações utilizam com frequência dois resultados bastante conhecidos do Problema de Coloração de Arestas (clássico). Os mesmos são enunciados a seguir.

Teorema 4.3 (KÖNIG, 1916): se G é um grafo bipartido, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Para compreensão do próximo teorema, precisamos definir o conceito de núcleo do grafo. O núcleo de um grafo é o subgrafo induzido por todos os vértices que tenham grau $\Delta(G)$. Por exemplo, se G é um grafo regular, o núcleo de G é o próprio grafo. A Figura 16 representa um grafo regular com 6 vértices,

onde todos têm grau 1. Como este grafo é regular, o próprio grafo é o seu núcleo e, como é um grafo acíclico (uma árvore), o mesmo tem um núcleo acíclico.

Figura 16 - Grafo regular com núcleo acíclico



Fonte: autoria própria

Para grafos com núcleo acíclico, Fournier determinou o índice cromático.

Teorema 4.4 (FOURNIER, 1977): se G é um grafo com núcleo acíclico, então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

O último conceito importante para a compreensão das demonstrações deste capítulo é o conceito de emparelhamento. Um emparelhamento é um conjunto de arestas que não compartilham vértices. E é perfeito se todo vértice do grafo pertence ao emparelhamento.

4.1 RESULTADOS EM TRIPARTIDOS COMPLETOS

Nesta seção são apresentados os lemas que permitem resolver o Problema da Coloração de Arestas AVD para a classe dos grafos tripartidos completos. A abordagem foi dividir esta classe de grafos em quatro conjuntos: grafos cujas partes têm todas a mesma cardinalidade, grafos cujas partes têm cardinalidade duas a duas distintas, grafos com exatamente duas partes de mesmo tamanho onde estas são as menores, e por fim grafos com exatamente duas partes de mesmo tamanho sendo estas as duas maiores. Cada um dos lemas a seguir resolve um desses casos, nesta sequência, com exceção do último caso. Quando há exatamente duas partes de mesmo tamanho e são as

maiores, o problema se mostrou mais difícil de ser resolvido e a prova para esse caso se distribui nos lemas de 4.8 a 4.14.

Lema 4.5: se $|A| = |B| = |C|$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$.

Demonstração: como $|A| = |B| = |C|$ então todos os vértices de $K_{|A|,|B|,|C|}$ têm o mesmo grau, $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. Assim, $K_{|A|,|B|,|C|}$ é regular. Pelo Teorema 4.1, se um grafo é regular e $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$, então $\chi'_a(G) = \Delta(G) + 1$. Pelo Teorema 4.2, $\chi''(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$. Logo, $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$. ■

Lema 4.6: se $|A| \neq |B|$, $|A| \neq |C|$ e $|B| \neq |C|$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Demonstração: se o tamanho de $[A, B, C]$ são diferentes entre si, uma das partes será maior em quantidade de vértices que as demais, e outra parte será a menor. Sem perda de generalidade consideramos que A é a parte maior e C é a parte menor. Dessa forma, $|A| > |B| > |C|$. Então $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) = |A| + |B|$, e apenas os vértices de C possuem grau $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. Sendo C um conjunto independente podemos então afirmar que o núcleo de $K_{|A|,|B|,|C|}$ é acíclico. Pelo Teorema de 4.4, existe uma coloração de arestas tal que $\chi'(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$, como vértices em partes diferentes têm graus diferentes, então seus conjuntos de cores são diferentes. Observe que os tamanhos dos conjuntos de cores são iguais, se e somente se, os respectivos vértices pertencem a mesma parte. Como quaisquer dois vértices da mesma parte não são adjacentes, então os conjuntos de cores de quaisquer dois vértices são diferentes, portanto $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \chi'(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. ■

Lema 4.7: se $|A| = |B| < |C|$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$.

Demonstração: como todo vértice de A e de B possui grau máximo e todo vértice de A é adjacente a todo vértice de B , então não é possível uma coloração de arestas AVD com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores, pelo Teorema 2.5. Logo $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) > \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. Resta provar que $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$. Como $|B| < |C|$ e o subgrafo induzido por $B \cup C$ é um bipartido completo,

existe um emparelhamento M entre B e C que incide em todos os vértices de B . Ainda $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$, porém os únicos vértices com grau $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ em $K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M$ pertencem a A . Desta forma A é um conjunto independente é o núcleo de $K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M$. Então, $K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M$ tem um núcleo acíclico. Pelo Teorema 4.4, $\chi'(K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. Pinte $K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M$ com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores e as arestas de M com uma cor nova. Os vértices do conjunto C têm grau diferente dos demais conjuntos, portanto possuem conjuntos de cores diferentes dos demais. Todos os vértices de B têm a cor do emparelhamento M , o que difere estes do conjunto de cores dos vértices de A . Conclui-se então que $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$. ■

Lema 4.8: se $|A| = |B| > |C|$ e $|C| = 1$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Demonstração: sejam $A = \{a_i: 0 \leq i < |A|\}$, $B = \{b_i: 0 \leq i < |B|\}$ e $C = \{c_0\}$. Pinte cada aresta $\{a_i, c_0\}$ com *cor* i , $0 \leq i < |A|$. Resta pintar um grafo bipartido com partição $[B, A \cup C]$, que tem grau máximo $|A| + |C| = |A| + 1$. Faça um emparelhamento entre os vértices de $B - b_0$ e os vértices de $A - a_0$ e pinte com *cor* 0. Pinte a aresta $\{a_0, b_0\}$ com *cor* 1.

Remova as arestas coloridas do grafo bipartido. Agora, o grafo bipartido tem grau máximo $|A|$. Pelo Teorema 4.3, este grafo bipartido pode ser colorido com $|A|$ cores novas. Use o conjunto $\{|A|, |A| + 1, \dots, 2|A| - 1\}$. Agora, temos uma coloração de arestas do $K_{|A|,|B|,|C|}$ com $2|A|$ cores. Em todos os conjuntos de cores dos vértices de B existe exatamente uma *cor* do conjunto $\{0, 1, \dots, |A|\}$, que ou é a *cor* 0 ou a *cor* 1. Em cada um dos conjuntos de cores dos vértices de A existem duas cores do conjunto $\{0, 1, \dots, |A|\}$. Portanto, os conjuntos de cores dos vértices de A se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de B . Os conjuntos de cores dos vértices de C se distinguem por sua cardinalidade. Portanto, $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = 2|A| = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. ■

Lema 4.9: se $|A| = |B| > |C|$, $|C| = 2$ e $|A| > 3$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Demonstração: seja $C = \{c_0, c_1\}$, $A = \{a_i: 0 \leq i < |A|\}$ e $B = \{a_i: 0 \leq i < |A|\}$. Pinte as arestas $\{a_i, c_0\}$ e $\{b_i, c_1\}$ com cor i , $0 \leq i \leq |A|$. Pinte as arestas $\{a_i, b_{i+1 \bmod |A|}\}$ com cor $(i - 1) \bmod |A|$, $0 \leq i \leq |A|$. Seja F o conjunto de arestas coloridas e $G = K_{|A|, |B|, |C|} \setminus F$. O grafo G é um grafo bipartido $G = [A \cup \{c_0\}, B \cup \{c_1\}]$ e tem grau máximo $|A|$. Pelo Teorema 4.3, existe uma coloração de arestas de G com $\Delta(G)$ cores. Suponha uma tal coloração utilizando as cores do conjunto $\{|A|, |A| + 1, \dots, 2|A| - 1\}$. Observe que $K_{a,b,c} = G \cup F$ e, portanto, temos uma coloração de arestas do $K_{|A|, |B|, |C|}$. Vamos mostrar que esta é uma coloração de arestas própria do $K_{|A|, |B|, |C|}$.

As cores das arestas $\{a_i, c_0\}$, $0 \leq i < |A|$, são todas distintas, por construção. O mesmo vale para as cores das arestas $\{b_i, c_1\}$, $0 \leq i < |A|$. As demais cores que incidem em c_i , $i \in \{0, 1\}$, foram obtidas em uma coloração de arestas própria de G usando cores do conjunto $\{|A|, |A| + 1, \dots, 2|A| - 1\}$. Portanto, não incidem arestas com a mesma cor em c_0 nem em c_1 . Em cada vértice de $A \cup B$ incidem exatamente duas cores do conjunto $\{0, 1, \dots, |A| - 1\}$ e as demais cores nesses vértices foram obtidas através de uma coloração própria do grafo G com cores do conjunto $\{|A|, |A| + 1, \dots, 2|A| - 1\}$. Logo, é suficiente mostrar que em cada um desses vértices as cores que pintam as arestas do conjunto F são distintas.

Em A , o conjunto de cores do vértice a_i , $0 \leq i < |A|$, têm as cores i e $(i - 1) \bmod |A|$. Como $|A| > 3$, $i \neq (i - 1) \bmod |A|$ para todo i , $0 \leq i < |A|$. Similarmente em B , o conjunto de cores do vértice b_i , $0 \leq i < |A|$ tem as cores i e $(i - 2) \bmod |A|$ e $i \neq (i - 2) \bmod |A|$, para todo i , $0 \leq i < |A|$. Portanto, trata-se de uma coloração de arestas própria do $K_{|A|, |B|, |C|}$ com $2|A|$ cores.

Vamos mostrar que tal coloração de arestas é uma coloração de arestas AVD. Os conjuntos de cores de c_0 e c_1 se distinguem dos demais por sua cardinalidade. Em A e B , o conjunto de cores de qualquer vértice contém o subconjunto $\{|A|, |A| + 1, \dots, 2|A| - 1\}$. Esses conjuntos se distinguem pelas cores que pintam as arestas de F . Observe que o conjunto de cores de cada vértice $a_i \in A$ contém as cores i e $(i - 1) \bmod |A|$, onde $0 \leq i < |A|$. Quando $i \neq 0$ este par de cores em cada vértice forma uma sequência, ou seja, a diferença entre a cor maior e a menor é igual à 1. Quando $i = 0$ este par de cores é $\{0, |A| - 1\}$, e tem diferença igual à $|A| - 1$. O conjunto de cores de cada vértice $b_i \in B$ contém

as cores i e $(i - 2) \bmod |A|$, onde $0 \leq i < |A|$. Quando $i > 1$, a diferença entre a cor maior e a cor menor em cada conjunto de cores é igual a 2. Quando $i = 0$ este par será $\{0, |A| - 2\}$ e quando $i = 1$ este par será $\{1, |A| - 1\}$, em ambos os casos a diferença entre a cor maior e a menor é igual a $|A| - 2$. Note que, para todos conjuntos de cores dos vértices de A e B , as únicas cores pertencentes ao subconjunto $\{|A|, |A| + 1, \dots, 2|A| - 1\}$ são os pares de cores recentemente descritos. Como $|A| > 3$, a diferença dos valores destes pares de cores é distinta de qualquer vértice de A em relação aos vértices de B . Então, tais conjuntos de cores são distintos. Conclui-se que é uma coloração de arestas AVD e $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. ■

Lema 4.10: se $|A| = |B| = |C| + 1$ e $|C|$ é ímpar, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Demonstração: como $|A| = |B| = |C| + 1$, então $|V| = |A| + |B| + |C| = 3|C| + 2$. Da hipótese, $|C|$ é ímpar, então $|C| = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$ e o número de vértices pode ser escrito como $3(2p + 1) + 2$. Assim $3(2p + 1) + 2 = 6p + 3 + 2 = 6p + 4 + 1 = 2(3p + 2) + 1$, que é um número ímpar. Logo $|V|$ é de ordem ímpar. Então, não existe possibilidade de uma cor pertencer ao conjunto de cores de todos os vértices, já que não existe emparelhamento perfeito. Como $K_{|A|,|B|,|C|}$ tem núcleo acíclico, existe uma coloração de arestas do grafo $K_{|A|,|B|,|C|}$ com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores, pelo Teorema 4.4. Considere essa mesma coloração e observe que cada cor pintou no máximo $\frac{|V|-1}{2}$ arestas. Portanto, cada cor incide em no máximo $|V| - 1$ vértices. Como $d(c_i) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$, onde $0 \leq i \leq |A| - 1$, então todo vértice em C tem todas as $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores em seu conjunto de cores. Sendo assim nenhuma cor falta nos conjuntos de cores dos vértices em C . Como cada cor participa dos conjuntos de cores de $|V| - 1$ vértices, então cada cor falta em um vértice que não pertence a C , ou seja, pertence a $A \cup B$. Observe que $|A \cup B| = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. Como $d(a_i) = d(b_j) = d(c_l) - 1$, onde $0 \leq i, j < |A|$ e $0 \leq l < |A| - 1$, então o conjunto de cores dos vértices de $A \cup B$ é menor apenas em uma cor comparado aos conjuntos de cores dos vértices de C . Dessa forma, em cada vértice de $A \cup B$ falta apenas uma cor. Assim, em quaisquer dois vértices de $A \cup B$ faltam cores distintas. Então o conjunto de

cores de quaisquer dois vértices de $A \cup B$ são distintos. E todos os vértices de C terão um conjunto de cores distinto dos demais por ter uma cor a mais. Logo $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. ■

Lema 4.11: se $|A| = |B| = |C| + 1$ e $|C|$ é par, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$.

Demonstração: o grau de cada vértice em $A \cup B$ é $2|A| - 1$. Os graus dos vértices em C são $2|A|$. Então, em qualquer coloração de arestas com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores, vai faltar exatamente uma cor em cada conjunto de cores dos vértices de $A \cup B$. Como $|C|$ é par e o número de vértices do grafo é $|C| + 2|A|$, o número total de vértices é par. Então, em qualquer coloração de arestas, o número de vértices em que cada cor não incide é par. O número de vértices onde sobra uma cor é $2|A| = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Suponha, por contradição, que exista uma coloração de arestas AVD com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores. Então, cores iguais faltam em vértices da mesma parte. Sejam $0, 1, \dots, k - 1$ as cores que faltam nos vértices de A . Como esta coloração de arestas é AVD, tais cores só faltam em vértices de A . Como em cada vértice de A falta exatamente uma cor, o número de vezes que falta uma cor em A é igual a $|A|$. O número de vezes que falta uma cor em A é igual à soma dos vértices onde falta a cor 0 mais a soma dos vértices onde falta a cor 1 e assim sucessivamente até a cor $k - 1$. Como essas cores faltam em um número par de vértices, essa soma é par, contradizendo a afirmação de que essa soma tem que ser igual a $|A|$. De fato, $|C|$ é par e $|A| = |C| + 1$, ou seja, $|A|$ é ímpar. Portanto, não há coloração de arestas AVD para esse grafo com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ cores.

Resta provar que existe uma coloração de arestas AVD com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$ cores. Para fazer uma coloração de arestas AVD com $\Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$ cores, faça dois emparelhamentos entre A e C , $M_1 = \{\{a_i, c_i\}: 0 \leq i < |C|\}$, e $M_2 = \{\{a_{i+1}, c_i\}: 0 \leq i < |C|\}$. Remova M_1 e M_2 do grafo $K_{|A|,|B|,|C|}$. No novo grafo, os graus dos vértices em C são iguais a $2|A| - 2$, em B são iguais a $2|A| - 1$ e em A são $2|A| - 2$ em a_0 e $a_{|A|-1}$ e são iguais a $2|A| - 3$ nos demais vértices de A . Então o núcleo de $K_{|A|,|B|,|C|} \setminus \{M_1 \cup M_2\}$ está em B e, portanto, é acíclico. Pinte as arestas deste grafo com $2|A| - 1$ cores. Tal

coloração existe, pelo Teorema 4.4. Use duas outras cores que ainda não foram usadas para colorir M_1 e M_2 respectivamente. Essa coloração de arestas é AVD. Os conjuntos de cores em C se distinguem por sua cardinalidade. Os conjuntos de cores em A contêm as cores usadas em M_1 e M_2 e os conjuntos de cores em B não contêm tais cores, assim foram usadas $2|A| - 1 + 2 = 2|A| + 1 = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$ cores. Portanto, $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$. ■

Lema 4.12: se $|A| = |B| = |C| + 2$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Demonstração: pinte $\{a_i, c_j\}$ e $\{b_i, c_{\frac{|C|}{2}+j}\}$ com cor $(i + j) \bmod |A|$, para $0 \leq i < |A|$ e $0 \leq j < \frac{|C|}{2}$. Então, em cada vértice a_i e em cada vértice b_i incidem cores consecutivas do intervalo $\{i, (i + \frac{|C|}{2} - 1) \bmod |A|\}$. Como este intervalo tem tamanho $\frac{|C|}{2}$, que é menor que $|A|$, não há cores repetidas. Até o momento, em cada vértice de C incidem todas as cores de 0 à $|A| - 1$, então não há duas arestas com a mesma cor incidindo em um vértice de C .

Pinte $\{a_i, b_i\}$ com cor $(\frac{|C|}{2} + i) \bmod |A|$, para $0 \leq i < |A|$. Note que, a cor $(\frac{|C|}{2} + i) \bmod |A|$ é a próxima cor após o intervalo $\{i, (i + \frac{|C|}{2} - 1) \bmod |A|\}$, $0 \leq i < |A|$. Como esta cor não pertence ao intervalo das cores já incidentes em cada vértice de A e B , a coloração ainda é válida. Além disso o número de cores usadas até o momento em cada vértice de $A \cup B$ é $\frac{|C|}{2} + 1 \leq \frac{|A|}{2}$ e, portanto, mesmo as operações aritméticas sendo módulo de $|A|$, a cor $\frac{|C|}{2} + i$ não pertence ao intervalo $\{i, (i + \frac{|C|}{2} - 1) \bmod |A|\}$, $0 \leq i < |A|$.

Pinte $a_i b_{i+k}$ com cor $(\frac{|C|}{2} + i + 2k) \bmod |A|$, para $0 \leq i < |A|$ e $1 \leq k \leq \frac{|C|}{4}$. Como $1 \leq k \leq \frac{|C|}{4}$, as cores usadas nos vértices de A são as $\frac{|C|}{4}$ cores de mesma paridade consecutivas após o intervalo $\{i, (i + \frac{|C|}{2}) \bmod |A|\}$. Então as cores usadas nos vértices de A nesta etapa pertencem ao intervalo $\{i + \frac{|C|}{2} + 2, i + |C| + 2\}$. Como esse intervalo contém $\frac{|C|}{2}$ cores não usadas no respectivo vértice

de A nos passos anteriores, e como $\frac{|C|}{2} < |A|$ e as operações aritméticas são módulo de $|A|$, a coloração continua válida.

Outra forma de observar que as cores usadas nos vértices de A nesta etapa são distintas é notar que até o fim do passo anterior, foram usadas para colorir arestas de um vértice a_i , no máximo, $\frac{|C|}{4} + 1$ cores pares (ímpares). Como $|C| = |A| - 2$, foram usadas menos que $\frac{|A|}{4}$ cores pares (ímpares). Como o passo 2 usa as próximas $\frac{|C|}{2} - 1$ cores pares (ímpares), e $\frac{|C|}{2} - 1 < \frac{|A|}{4}$, mesmo as operações sendo módulo de $|A|$, cores repetidas não serão utilizadas, pois no total foram usadas menos que $\frac{2|A|}{4} = \frac{|A|}{2}$ cores pares (ímpares). As cores incidentes nos vértices $b_i \in B$, nesta etapa, são consecutivas e pertencem ao intervalo $\left\{i + \frac{|C|}{2} + 1, i + \frac{3|C|}{4} + 1\right\}$, $0 \leq i < |A|$. Como tais cores pertencem a um intervalo sem intersecção com o das cores usadas nos passos anteriores, essa coloração ainda é válida.

Se $\frac{|C|}{2}$ é par, pinte $a_i b_{i-k}$ com cor $i - 2k - 1 \pmod{|A|}$, para $0 \leq i < |A|$ e $1 \leq k < \frac{|C|}{4}$. Se $\frac{|C|}{2}$ é ímpar, pinte $a_i b_{i-k}$ com cor $i - 2k \pmod{|A|}$, para $0 \leq i < |A|$ e $1 \leq k \leq \frac{|C|}{4}$. As cores usadas nesta etapa pertencem ao mesmo intervalo das cores usadas na etapa anterior. Mas nos vértices de A , as cores dessa fase têm paridades distintas das cores da fase anterior. Então, nos vértices de A , todas as cores são distintas. Nos vértices $b_i \in B$, as cores usadas nesta fase pertencem ao intervalo $\left\{(i - 1) \pmod{|A|}, \left(i - \frac{|C|}{4}\right) \pmod{|A|}\right\}$, $0 \leq i < |A|$, são consecutivas e não foram usadas na primeira etapa da coloração, portanto são distintas.

Observe que até o momento foram usadas $|A|$ cores nas arestas do $K_{|A|,|B|,|C|}$. O grafo bipartido $\left\{A \cup \left\{c_i, 0 \leq i < \frac{|C|}{2}\right\}, B \cup \left\{c_i, \frac{|C|}{2} \leq i < |C|\right\}\right\}$ sem as arestas já coloridas tem grau máximo $|A|$ e pode ser colorido com $|A|$ cores novas, pelo Teorema 4.3. Como a coloração do grafo bipartido usa cores novas, todas as cores incidentes em cada vértice de $K_{|A|,|B|,|C|}$ são distintas. Por fim, vamos mostrar que esta é uma coloração de arestas AVD.

As cores que faltam em $a_i \in A$ são $\frac{|C|}{2} + i + 1$ e $(i - 1)$, $0 \leq i < |A|$. Se fizermos a diferença entre essas cores, teremos: $\frac{|C|}{2} + i + 1 - (i - 1) = \frac{|C|}{2} + 2$. Quando $\frac{|C|}{2}$ é ímpar, as cores que faltam em b_i são $|C| - 2 + i$ e $|C| - 3 + i$. Se subtraímos as cores que faltam em b_i , quando $\frac{|C|}{2}$ é ímpar, temos: $|C| - 2 + i - (|C| - 3 + i) = 1$. Ou seja, em b_i as cores que faltam são consecutivas e, como a diferença das cores em a_i é $\frac{|C|}{2} + 2$ e $|C| > 2$, as cores que faltam em a_i não são consecutivas. Logo, esses conjuntos de cores que faltam são diferentes. Quando $\frac{|C|}{2}$ é par, as cores que faltam em b_i são $|C| + 1 + i$ e $|C| - 2 + i$. Se subtraímos as cores que faltam em b_i quando $\frac{|C|}{2}$ é par, temos: $|C| + 1 + i - (|C| - 2 + i) = 3$. Como $|C| > 2$, a diferença entre as cores em a_i é pelo menos 4 e em b_i essa diferença é 3. Portanto, neste caso esses conjuntos de cores também são distintos. Conclui-se que esta é uma coloração de arestas AVD e $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = 2|A| = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$ ■

O Lema 4.13 define uma propriedade matemática para demonstração do Lema 4.14.

Lema 4.13: sejam a e t números naturais positivos. Se $a \geq t + 3$ e $t \geq 3$, então $a - \left\lfloor \frac{a}{t} \right\rfloor > t$.

Demonstração: se a e t são números naturais positivos, então $\left\lfloor \frac{a}{t} \right\rfloor < \frac{a}{t} + 1$.
 1. Então, $a - \left\lfloor \frac{a}{t} \right\rfloor > a - \frac{a}{t} - 1 = \frac{at - a - t}{t} = \frac{a(t-1) - t}{t}$. Como $a \geq t + 3$ e $t \geq 3$, $\frac{a(t-1) - t}{t} \geq \frac{(t+3)(t-1) - t}{t} = \frac{t^2 + t - 3}{t} = t + \frac{t-3}{t}$. Como $t \geq 3$, $t + \frac{t-3}{t} \geq t$. Portanto, $a - \left\lfloor \frac{a}{t} \right\rfloor > t$. ■

Lema 4.14: se $|A| = |B| \geq |C| + 3$ e $C \geq 3$, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

Demonstração: sejam a_i e b_i , os vértices das partes A e B , $0 \leq i < |A|$, e sejam c_i os vértices da parte C , $0 \leq i < |C|$. Faça emparelhamentos M_i com as

arestas $\{a_{i|C|+j}, c_j\}$, $0 \leq i < \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil - 1$, $0 \leq j < |C|$. Para $p = \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil - 1$, faça um emparelhamento M_p com arestas $(a_{p|C|+j}, c_j)$, $0 \leq j < |A| - p|C|$. Se $|A|$ não for múltiplo de $|C|$, inclua em M_p as arestas $(a_j, c_{|A|-p|C|+1+j})$, $0 \leq j < |C|(p+1) - |A| - 1$.

Sejam $M = M_0 \cup M_1 \cup \dots \cup M_{\left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil - 1}$ e $G = K_{|A|,|B|,|C|} \setminus M$. Como $|A| > |C|$, os graus dos vértices de C em G são $2|A| - \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil$. Os graus dos vértices de A em G são $|A| + |C| - 1$ e os graus dos vértices de B em G são $|A| + |C|$. Como $|A| \geq |C| + 3$ e $|C| \geq 3$, pelo Lema 4.13, $|A| - \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil > |C|$. Então, $2|A| - \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil > |A| + |C|$. Portanto, os vértices de grau máximo em G pertencem a C e G tem núcleo acíclico. Pelo Teorema 4.4, $\chi'(G) = 2|A| - \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil$. Faça uma coloração de arestas de G com $2|A| - \left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil$ cores. Use uma nova cor para colorir as arestas de cada um dos $\left\lceil \frac{|A|}{|C|} \right\rceil$ emparelhamentos de M . Os conjuntos de cores dos vértices de C se distinguem dos demais por sua cardinalidade. Os conjuntos de cores dos vértices de A se distinguem dos conjuntos de cores dos vértices de B por conterem pelo menos uma das cores usadas em M , que não pertencem aos conjuntos de cores dos vértices de B . Portanto, esta é uma coloração de arestas distinta na vizinhança. O total de cores usadas é $2|A| = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$. ■

Dos resultados apresentados nos lemas desta seção, pode-se concluir o seguinte corolário.

Corolário 4.15: seja $K_{|A|,|B|,|C|}$ um grafo tripartido completo. Se existem vértices adjacentes de grau máximo ou se $|A| = |B| = |C| + 1$ e $|C|$ é par, então $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|}) + 1$. Caso contrário $\chi'_a(K_{|A|,|B|,|C|}) = \Delta(K_{|A|,|B|,|C|})$.

5 CONCLUSÃO

O Problema da Coloração de Arestas AVD está aberto há mais de uma década. Seu estudo permitiu a definição de uma nova classe de grafos bem estruturada, os grafos trevo, além da solução do problema para esta classe. Sem dúvida, o principal resultado desse trabalho é a determinação do índice cromático distinto na vizinhança para os tripartidos completos. As demonstrações apresentadas são construtivas e implicam em algoritmos polinomiais para a solução do problema.

Pelos resultados obtidos para os grafos tripartidos completos, fica provada a Conjectura da Coloração de Arestas AVD de Zhang (2002) nesta classe, de acordo com o seguinte corolário.

Corolário 4.16: se G for um tripartido completo, então $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Este trabalho seguiu um curso natural ao estudar o Problema da Coloração de Arestas AVD para a classe de grafos tripartidos completos, considerando os resultados já existentes para os grafos bipartidos completos (JANA, 2015). Da mesma forma, uma continuação previsível desta pesquisa é a investigação da coloração de arestas AVD na classe dos k -partidos completos, com $k > 3$.

REFERÊNCIAS

BALISTER, P.N.; GYÖRI, E.; LEHEL, J.; SCHELP, R.H. Adjacent Vertex Distinguishing Edge-Colorings. **SIAM Journal on Discrete Math**, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 21, No. 1, p. 237–250, 2007.

BEHZAD, M. Graphs and their chromatic numbers. Tese (Doutorado) — **Michigan State University**, 1965.

BERMOND, J.C. Nombre Chromatique Total Du Graphe r-Parti Complet. **Journal of the London Mathematical Society**, Oxford University Press, Vol. s2-9, No. 2, p. 279–285 (1974).

CHARTRAND, G.; ZHANG, P. Chromatic Graph Theory. **Series Editor KENNETH H. RSEN**, Discrete Mathematics and Its Applications, 2009.

FOURNIER, J.C. Méthode et théorème général de coloration des arêtes. **D'un multigraph**. J. Math. Pures Appl. Vol. 56, p. 437–453, 1977.

HOFFMAN, D.G.; RODGER, C.A. The chromatic index of complete multipartite graphs. **Journal of Graph Theory**, Department of Algebra, Combinatorics and Analysis Auburn University, Vol. 16, No. 2, p. 159–163, 1992.

Information Literacy for MAT 225, **The Four Color Map Problem by Sharon Murray**. Disponível em:
<<https://glassrcalc3.wordpress.com/2006/10/19/the-four-color-map-problem-by-sharon-murray/>>. Acesso em 02 de Jul 2013.

JANA, S. Adjacent Vertex Distinguishing (AVD) Edge Colouring of Permutation Graphs. **Progress in Nonlinear Dynamics and Chaos**, Department of Applied Mathematics with Oceanology and Computer Programming Vidyasagar University, Vol. 3, No. 1, p. 9–23, 2015.

KÖNIG, D.K. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. **Mathematische Annalen**, Vol. 77, p. 453–465, 1916.

VIZING, V.G. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. **Diskret. Analiz.**, Vol. 3, p.25–30, 1964, em Russo.

YAP, H.P.; CHEW K.H. Total Chromatic Number of Complete R-partite Graphs. **Journal of Graph Theory**, Vol.16, No. 6, p. 629–634, ISSN 1097-0119, 1992.

ZHANG, Z.F.; LIU, L.Z.; WANG, J.F. Adjacent Strong Edge Coloring of Graphs. **Applied Mathematics Letters**, Elsevier, Vol.15, No. 5, 623–626, 2002.