

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

LUIS ANGELO LOSS DE CASTRO

CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS
SPLIT-CO-COMPARABILIDADE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

PONTA GROSSA

2018

LUIS ANGELO LOSS DE CASTRO

**CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS
SPLIT-CO-COMPARABILIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial à aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Bacharelado em Ciência da Computação, do Departamento Acadêmico de Informática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Prof^a Dr^a Sheila Morais de Almeida

PONTA GROSSA

2018



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Informática
Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas ou
Bacharelado em Ciência da Computação



TERMO DE APROVAÇÃO

CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT-CO-COMPARABILIDADE

por

LUIS ANGELO LOSS DE CASTRO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em **13 de junho de 2018** como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. O candidato foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **aprovado**.

Profa. Dra. Sheila Morais de Almeida
Orientadora

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz
Membro titular

Profa. Dra. Simone Nasser Matos
Membro titular

Prfa. Dra. Helyane Bronoski Borge
Profa. Responsável pelo
Trabalho de Conclusão de Curso

Prof. MSc. Saulo Jorge Beltrão de Queiroz
Coordenador do curso

RESUMO

CASTRO, L. A. L. d. *Caracterização e Coloração de Arestas em Grafos Split-co-comparabilidade*. 2018. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2018.

Uma caracterização de um conjunto de grafos é a determinação de propriedades estruturais que identifiquem unicamente os grafos desse conjunto. Essas caracterizações podem dar informações importantes que auxiliam na solução de diversos problemas combinatoriais, como por exemplo, o Problema da Coloração de Arestas. Uma coloração de arestas em um grafo G é uma atribuição de cores para as arestas de G de forma que as cores de quaisquer duas arestas que incidem no mesmo vértice são distintas. O Problema da Coloração de Arestas é determinar o menor número de cores que permite uma coloração de arestas para um dado grafo G . Sabe-se que qualquer grafo simples G tem uma coloração de arestas com $\Delta(G) + 1$ cores, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo do grafo G . Entretanto, alguns grafos G têm uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores. Decidir se um grafo G tem uma coloração de arestas com $\Delta(G)$ cores é um problema NP-completo. Este trabalho apresenta novas caracterizações para os grafos split-co-comparabilidade. Usando essas caracterizações, determina-se um subconjunto dos grafos split-co-comparabilidade para o qual a versão de decisão do Problema da Coloração de Arestas tem solução em tempo polinomial.

Palavras-chaves: Grafos split. Coloração de arestas. Índice cromático. Caracterização. Grafos co-comparabilidade.

ABSTRACT

CASTRO, L. A. L. d. *Characterization and edge coloring on split-co-comparability graphs*. 2018. 35 f. Work of Conclusion Course (Graduation in Computer Science) — Federal University of Technology - Paraná. Ponta Grossa, 2018.

A characterization of a graph class is the determination of structural properties that uniquely identify the graphs in this class. Those characterizations can give important information that supports many combinatorial problems, such as the Edge Coloring Problem. An edge coloring of a graph G is an assignment of colors to the edges of G such that the colors of any two edges that share a common vertex are distinct. The Edge Coloring Problem is to determine the minimum number of colors that allows an edge coloring for a given graph G . It is known that any simple graph G has an edge coloring with $\Delta(G) + 1$ colors, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . However, some graphs G have an edge coloring with $\Delta(G)$ colors. It is an NP-complete problem to decide if a graph G has an edge coloring with $\Delta(G)$ colors. This work shows new characterizations for split-co-comparability graphs. Using these characterizations, it is determined a subset of split-co-comparability graphs for which the decision version of the Edge Coloring Problem has polynomial time solution.

Key-words: Split graphs. Edge coloring. Chromatic index. Characterization. Co-comparability graphs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Um grafo com uma coloração de arestas usando três cores	8
Figura 2	– Exemplos de coloração de arestas: Na Figura 2(a) é apresentado um grafo colorido com 4 cores e na Figura 2(b) é apresentado o mesmo grafo colorido com 3 cores	9
Figura 3	– Grafo completo com cinco vértices.....	9
Figura 4	– Grafo bipartido	10
Figura 5	– Grafo split	10
Figura 6	– Na Figura 6(a) é apresentado o grafo G , na Figura 6(b) é apresentado o subgrafo induzido pelo núcleo do grafo G e na Figura 6(c) é apresentado o subgrafo induzido pelo semi-núcleo do grafo G	16
Figura 7	– Grafo split completo	18
Figura 8	– Na Figura 8(a) é ilustrado um quadrado latino de ordem ímpar e na Figura 8(b) é ilustrado um quadrado latino de ordem par	18
Figura 9	– Diagrama de cores com vetores de cores de tamanho 3	19
Figura 10	– Na Figura 10(a) é ilustrado um grafo split com $\Delta(G)$ ímpar, na Figura 10(b) é ilustrado o quadrado latino utilizado para colorir o grafo split, na Figura 10(c) é ilustrado o grafo split colorido e na Figura 10(d) é ilustrado a divisão do quadrado latino que os autores fazem para poder pintar os grafos split com $\Delta(G)$ ímpar.....	20
Figura 11	– Exemplo de orientação, na Figura 11(a) é mostrado o grafo K_3 e na Figura 11(b) é mostrado o grafo K_3 com arestas orientada.....	22
Figura 12	– Exemplo de grafo split-comparabilidade	22
Figura 13	– Exemplo da orientação no início entre o bipartido e a clique.....	24
Figura 14	– Exemplo da orientação no final entre o bipartido e a clique.	24
Figura 15	– Exemplo da orientação no meio entre o bipartido e a clique	25
Figura 16	– Exemplo da orientação no início e final entre o bipartido e a clique	25
Figura 17	– Grafos a) G_1 , b) $\overline{G_1}$, c) G_3 , d) $\overline{G_3}$, e) $2K_2$, f) C_4 e g) C_5	26

LISTA DE SÍMBOLOS

$V(G)$	Conjunto de vértices do grafo G . (p. 8).
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo G . (p. 8).
\overline{G}	Complemento de um grafo G . (p. 11).
$\chi'(G)$	Mínimo de cores para uma coloração de arestas de um grafo G . (p. 9).
Λ_G	Núcleo de um grafo G . (p. 16).
Λ_G	Semi-núcleo de um grafo G . (p. 16).
$\Delta(G)$	Maior grau de um vértice do grafo G . (p. 8).
$M = [m_{i,j}]$	Quadrado latino com células $m_{i,j}$. (p. 18).
$A \cup B$	União dos conjuntos A e B . (p. 10).
$A \cap B$	Interseção entre os conjuntos A e B . (p. 16).
\emptyset	Conjunto vazio. (p. 16).
$A \setminus B$	Conjunto dos elementos de A que não pertencem a B . (p. 23).
$N_G(u)$	Conjunto de vértices adjacentes a u no grafo G . (p. 16).
$N_G[u]$	Conjunto $N_G(u) \cup \{u\}$. (p. 16).
$d_G(u)$	Grau do vértice u no grafo G . (p. 13).
F	Conjunto de arestas orientadas. (p. 21).
F^{-1}	Complemento de um conjunto de arestas. (p. 21).
F^2	$F^2 = \{ac ab, bc \in F \text{ para algum vértice } b\}$. (p. 21).
K_n	Grafo completo com n vértices. (p. 9).
$K(G)$	Clique de um grafo split G com partição do conjunto de vértices $[K(G), S(G)]$. (p. 10).
$S(G)$	Conjunto independente de um grafo split G com partição do conjunto de vértices $[K(G), S(G)]$. (p. 10).
B_G	Subgrafo bipartido induzido pelas arestas de um grafo split G que incidem em vértices de $S(G)$. (p. 29).

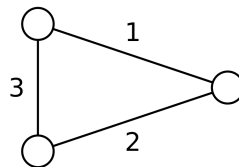
SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	GRAFOS COM VÉRTICE UNIVERSAL	13
2.2	NÚCLEO E SEMI-NÚCLEO DE UM GRAFO	15
2.3	COLORAÇÃO DE ALGUNS GRAFOS SPLIT	17
2.4	CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO DOS SPLIT-COMPARABILIDADE	21
3	CARACTERIZAÇÃO DOS SPLIT-CO-COMPARABILIDADE	28
3.1	CARACTERIZAÇÃO POR SUBGRAFOS PROIBIDOS	28
3.2	CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL	29
4	COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT-CO-COMPARABILIDADE	31
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	33

1 INTRODUÇÃO

Alguns conceitos e notações da Teoria dos Grafos são necessários para a compreensão desse trabalho. Esses conceitos são apresentados a seguir e mais detalhes podem ser vistos nos livros de West (2001) e Bondy e Murty (2008). Um *grafo* $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura matemática abstrata formada por um conjunto $V(G)$ de elementos chamados *vértices* e por um conjunto $E(G)$ de pares não-ordenados de vértices, chamados de *arestas*. Neste trabalho, denota-se por (u, v) a aresta formada pelos vértices $u \in V(G)$ e $v \in V(G)$. Dois elementos são *vizinhos* quando são dois vértices que definem uma aresta, ou duas arestas com um vértice em comum, ou ainda um vértice e qualquer aresta que o contém. O *grau máximo* de um grafo G é o maior número de vizinhos de um vértice de G , denotado por $\Delta(G)$. Uma coloração de arestas de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma função $c : E(G) \rightarrow C$, que atribui cores de um conjunto de cores C às arestas de um grafo G , de forma que arestas vizinhas tenham cores distintas. Neste Trabalho de Conclusão de Curso, as cores são denotadas por números naturais. A Figura 1 ilustra uma coloração de arestas em um grafo com três vértices e três arestas. Neste exemplo, as cores pertencem ao conjunto $C = \{1, 2, 3\}$. Observe que arestas vizinhas têm cores diferentes.

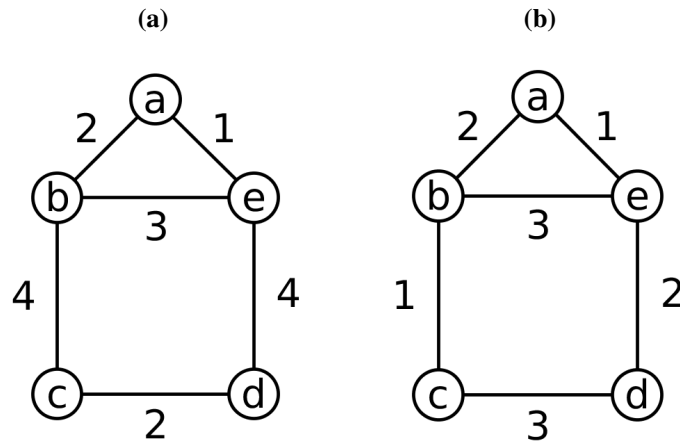
Figura 1 – Um grafo com uma coloração de arestas usando três cores



Fonte: Autoria própria

O Problema da Coloração de Arestas consiste em apresentar uma coloração de arestas para um dado grafo G com o menor número de cores possível. Como exemplo, a Figura 2 ilustra duas colorações de arestas para um mesmo grafo. Na Figura 2(a), tem-se uma coloração de arestas utilizando 4 cores e, na Figura 2(b), tem-se uma coloração de arestas utilizando 3 cores. Observe que no grafo da Figura 2 existem três arestas incidentes no vértice b , bem como no vértice e . Então são necessárias pelo menos três cores para uma coloração de arestas. Portanto, o número de cores utilizadas na coloração da Figura 2(b) é mínimo.

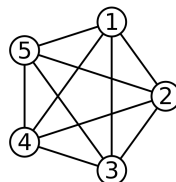
Figura 2 – Exemplos de coloração de arestas: Na Figura 2(a) é apresentado um grafo colorido com 4 cores e na Figura 2(b) é apresentado o mesmo grafo colorido com 3 cores



Fonte: Autoria própria

Dado um grafo G , o menor número de cores que permitem uma coloração de arestas do grafo G é chamado de *índice cromático* de G e é representado por $\chi'(G)$. O grafo da Figura 2, por exemplo, tem $\chi'(G) = 3$. Segundo Holyer (1981), não se conhece algoritmo polinomial para determinar o índice cromático quando a entrada é um grafo qualquer. Diante dessa dificuldade, uma alternativa é buscar métodos de solução eficientes para conjuntos de grafos mais específicos, que possuam alguma propriedade estrutural em comum. Esses conjuntos são chamados de *classes* de grafos. Uma classe de grafos é o conjunto de todos os grafos que possuem uma determinada propriedade P . A determinação dessa propriedade é chamada de *caracterização* da classe de grafos. Um exemplo é a classe dos grafos completos caracterizados da seguinte forma: um grafo é completo se, e somente se, existe aresta entre quaisquer dois vértices do grafo. Denota-se por K_n o grafo completo com n vértices. A Figura 3 apresenta uma representação gráfica do grafo K_5 com conjunto de vértices $V(K_5) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e conjunto de arestas $E(K_5) = \{(i, j), i \neq j \wedge 1 \leq i, j \leq 5\}$.

Figura 3 – Grafo completo com cinco vértices

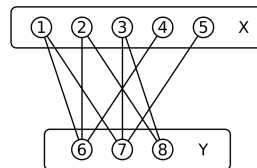


Fonte: Autoria própria

Outra classe de grafos bastante conhecida é a dos grafos *bipartidos*. Uma caracterização para os grafos bipartidos é a seguinte: um grafo é bipartido se, e somente se, seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos tais que não existem arestas entre vértices do mesmo subconjunto. Um conjunto de vértices que não são vizinhos entre si é chamado de

conjunto independente. Pela caracterização apresentada, o conjunto de vértices de qualquer grafo bipartido pode ser particionado em dois conjuntos independentes. Um grafo bipartido B cujo conjunto de vértices seja particionado em dois conjuntos independentes, X e Y , é denotado por $B[X, Y]$. A Figura 4 ilustra um grafo bipartido onde $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $Y = \{6, 7, 8\}$. Não é obrigatória a existência de todas as arestas entre os vértices de X e Y . Note que a aresta $(5, 8)$ do grafo da Figura 4, por exemplo, não existe.

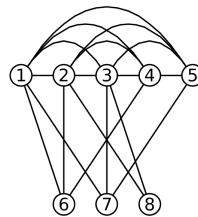
Figura 4 – Grafo bipartido



Fonte: Autoria própria

Neste trabalho, apresenta-se um estudo do Problema da Coloração de Arestas em um subconjunto dos grafos split, através da apresentação de novas caracterizações para os grafos deste subconjunto. Um grafo é *split* se e somente se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos, $K(G)$ e $S(G)$, tal que existe aresta entre quaisquer dois vértices de $K(G)$, e não existe aresta entre vértices de $S(G)$. Observe que o subgrafo induzido por $K(G)$ é um grafo completo. Um grafo split G com conjunto de vértices particionado em dois subconjuntos, $K(G)$ e $S(G)$, é denotado por $G(K(G) \cup S(G), E(G))$. A Figura 5 ilustra um grafo split.

Figura 5 – Grafo split



Fonte: Autoria própria

Em um grafo qualquer, um conjunto de vértices que sejam dois a dois adjacentes é chamado de clique, como por exemplo o conjunto $K(G)$ em um grafo split G . Analogamente, um conjunto de vértices entre os quais não existe aresta é chamado de conjunto independente, como por exemplo o conjunto $S(G)$ de um grafo split G .

Não existe algoritmo polinomial que resolva o Problema da Coloração de arestas quando a entrada é um grafo qualquer, mesmo quando este problema é restrito a um subconjunto com propriedades estruturais bem definidas, pode não haver algoritmo polinomial conhecido que resolva o problema. Na classe dos grafos split, por exemplo, apenas alguns subcasos estão resolvidos, como nos split com grau máximo ímpar (CHEN; FU; KO, 1995). Assim, definiram-se

várias subclasses dos grafos split, onde se estudam esse e outros problemas. Dentre essas subclasses estão os grafos split-comparabilidade e os split-co-comparabilidade, definidas a seguir.

Uma *orientação transitiva* de um grafo G é uma atribuição de orientação para as arestas do grafo que satisfaz a seguinte condição: para quaisquer três vértices a , b e c , se existir aresta orientada de a para b e de b para c , então deve obrigatoriamente existir uma aresta orientada de a para c . O grafo G é um grafo de *comparabilidade* se ele admite uma orientação transitiva para suas arestas. Um grafo *split-comparabilidade* é um grafo split que também é um grafo de comparabilidade.

Sabe-se que o Problema da Coloração de Arestas pode ser resolvido em tempo polinomial para os grafos da classe split-comparabilidade (CRUZ, 2017). Entretanto, não se conhece algoritmo que resolva o problema eficientemente na classe dos grafos split-co-comparabilidade, definida a seguir. Considere um grafo $G = (V(G), E(G))$. O *complemento* do grafo G é definido como $\overline{G} = (V(G), \overline{E(G)})$, onde $\overline{E(G)} = \{(x, y) : x \in V(G) \wedge y \in V(G) \wedge (x, y) \notin E(G)\}$. Um grafo é *split-co-comparabilidade* se e somente se é o complemento de um grafo split-comparabilidade.

Sabe-se que o algoritmo apresentado por Cruz (2017) para coloração de arestas dos split-comparabilidade baseia-se em uma caracterização estrutural da classe apresentada por Ortiz e Villanueva (1996). Muitas vezes propriedades estruturais específicas auxiliam na criação de algoritmos polinomiais para resolver problemas que no caso geral não tem algoritmo eficiente. No caso do Problema da Coloração de Arestas, algoritmos eficientes são conhecidos quando um grafo é completo, é ciclo, é bipartido, tem um vértice adjacente a todos os demais, dentre outros exemplos para os quais técnicas eficientes podem ser vistas no livro de Chartrand e Zhang (2008), que traz uma compilação dos algoritmos clássicos para solução desse problema.

Observando-se que determinadas caracterizações auxiliam na solução de problemas computacionais, esse trabalho de conclusão de curso traz novas caracterizações para a classe dos grafos split-co-comparabilidade, além disso, alguns subconjuntos dos grafos split-co-comparabilidade para os quais o Problema da Coloração de Arestas tem algoritmo polinomial são apresentados.

Sabendo disso, esse trabalho de conclusão de curso apresenta uma caracterização para os grafos split-co-comparabilidade similar à caracterização apresentada por Ortiz e Villanueva (1996) para os grafos split-comparabilidade. Considerando que a caracterização dada por Ortiz e Villanueva (1996) para os grafos split-comparabilidade levou a um algoritmo polinomial de coloração de arestas para esta classe (CRUZ, 2017), espera-se que as caracterizações apresentadas neste trabalho para os grafos split-co-comparabilidade sejam úteis para a criação de algoritmos polinomiais que resolvam o Problema da Coloração de Arestas nesta classe.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O restante do documento está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 é apresentada a revisão bibliográfica, mostrando alguns casos em que o Problema da Coloração de Arestas está resolvido, principalmente quando relacionado à classe dos grafos split. Nesse capítulo também são apresentados mais detalhes da caracterização dos grafos split-comparabilidade feita por Ortiz e Villanueva (1996). No Capítulo 3 são apresentadas, como resultado desse trabalho, duas caracterizações da classe dos grafos split-co-comparabilidade. No Capítulo 4 é mostrado como a caracterização pode auxiliar na determinação do índice cromático dos grafos split-co-comparabilidade. No Capítulo 5, é apresentado o estado da arte do Problema da Coloração de Arestas para os grafos split-co-comparabilidade, um resultado que só foi possível a partir das novas caracterizações encontradas para a classe. Também são dadas sugestões de trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Um grafo G é simples se não existe laço, ou seja, aresta com os dois extremos no mesmo vértice; nem arestas múltiplas, que são duas ou mais arestas constituídas pelo mesmo par de vértices. Neste trabalho, todos os grafos considerados são simples. Para qualquer grafo simples G , $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ pela própria definição do índice cromático e do grau máximo do grafo. Em 1964, Vizing (1964) provou que qualquer grafo G possui $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Esse resultado implica que para qualquer grafo G , o índice cromático só possui dois valores possíveis: $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Quando $\chi'(G) = \Delta(G)$, o grafo G é Classe 1; caso contrário, G é Classe 2. É interessante observar que, mesmo havendo apenas dois valores possíveis, decidir se um grafo é Classe 1 é um problema NP-completo (HOLYER, 1981). O restante do capítulo dedica-se a mostrar resultados importantes dos problemas de Coloração de Arestas, principalmente aqueles que se aplicam a subconjuntos de grafos split.

2.1 GRAFOS COM VÉRTICE UNIVERSAL

Dado um grafo G com n vértices, um vértice é *universal* se é vizinho de todos os outros vértices de G . O número de vizinhos de um vértice v no grafo G é chamado de *grau* de v em G e denotado por $d_G(v)$. Observe que, por definição, quando v é um vértice universal, $d_G(v) = |V(G)| - 1$. Existe um subconjunto dos grafos com vértice universal que são split. No entanto, nem todo grafo split tem vértice universal. O Teorema 2.1 a seguir determina o índice cromático de todos os grafos que possuem pelo menos um vértice universal.

Teorema 2.1. (PLANTHOLT, 1981) *Seja G um grafo com vértice universal. O grafo G é Classe 1 se, e somente se, $|E(G)| \leq \Delta(G) \frac{|V(G)|}{2}$.*

Quando um grafo G não satisfaz a desigualdade $|E(G)| \leq \Delta(G) \frac{|V(G)|}{2}$, G é chamado de *sobrecarregado*. Grafos sobrecarregados têm mais arestas do que se pode colorir com $\Delta(G)$ cores e, portanto, são Classe 2. O Teorema 2.1 garante que os únicos grafos com vértice universal que são Classe 2 são os grafos sobrecarregados. Mesmo quando um grafo G não é sobrecarregado, se existir um subgrafo de G que seja sobrecarregado e tenha grau máximo igual a $\Delta(G)$, então G é Classe 2. Nesses casos, dizemos que G é *subgrafo-sobrecarregado*.

Considere um grafo G qualquer e seja A um subconjunto dos vértices de G . O subgrafo induzido por A , denotado por $G[A]$ é o grafo obtido quando se remove de G todos os vértices que não pertencem à A . Da mesma forma, o subgrafo $G[E']$ induzido por um subconjunto de arestas $E' \subseteq E(G)$ é o subgrafo de G cujos vértices são vizinhos das arestas de E' e cujas arestas são somente aquelas de E' .

Se G tem um subgrafo sobrecarregado com grau máximo $\Delta(G)$, induzido por um vér-

tice e seus vizinhos, então G é vizinhança-sobrecarregado. Note que todo grafo com vértice universal que é sobrecarregado também é vizinhança-sobrecarregado.

Um caso particular de grafos com vértice universal são os grafos completos. Além disso, os grafos completos são também um caso particular de grafos split, já que é possível particionar o conjunto de vértices de um K_n em $n - 1$ vértices que são dois a dois adjacentes (conjunto $K(G)$ do split $G = (K(G) \cup S(G), E(G))$) e um vértice isolado (conjunto $S(G)$ do split $G = (K(G) \cup S(G), E(G))$). Baranyai (1975) determinou o índice cromático dos grafos completos, conforme apresentado no Teorema 2.2.

Teorema 2.2. (BARANYAI, 1975) *Seja K_n , um grafo completo com n vértices, então*

$$\chi'(K_n) = n - 1, \text{ quando } n \text{ é par;}$$

$$\chi'(K_n) = n, \text{ quando } n \text{ é ímpar.}$$

Demonstração. É possível apresentar uma coloração de arestas para qualquer grafo completo. Se o grafo K_n tem n par, rotule os vértices com números de 0 a $n - 1$. Pinte cada aresta (i, j) , $0 \leq i, j < n - 1$, com a cor $i + j \pmod{n - 1}$. Pinte cada aresta $(i, n - 1)$ com a cor $2i \pmod{n - 1}$, $0 \leq i < n$. Esta é uma coloração de arestas do grafo K_n com $n - 1$ cores. Como $\Delta(K_n) = n - 1$, essa coloração utiliza o menor número de cores possível. Portanto, quando n é par, $\chi'(K_n) = n - 1$.

Se o número de vértices do grafo completo K_n é ímpar, pode-se provar que $n - 1$ cores não são suficientes para uma coloração de arestas do grafo. Observe que, em qualquer grafo com n ímpar, cada cor pode pintar no máximo $\frac{n-1}{2}$ arestas. Então, com $n - 1$ cores pode-se colorir no máximo $(n - 1) \frac{(n-1)}{2}$ arestas. Como o grafo completo K_n tem $n \frac{n-1}{2}$ arestas, conclui-se que $n - 1$ cores não são suficientes. Portanto K_n com n ímpar é um grafo sobrecarregado. Sendo assim, uma coloração ótima para o grafo K_n quando n é ímpar utiliza pelo menos n cores. Para mostrar que n cores são suficientes, basta exibir uma coloração de arestas do grafo com n cores. Para tanto, rotule os vértices do K_n com números de 0 a $n - 1$. Pinte cada aresta (v_i, v_j) , $0 \leq i, j < n$ com a cor $i + j \pmod{n}$. \square

Observe que a partir da prova do Teorema 2.2 pode-se construir um algoritmo polinomial para coloração de arestas dos grafos completos. Usando a coloração de arestas dos grafos completos que têm grau máximo ímpar é possível obter uma coloração de arestas para grafos com vértice universal que têm grau máximo ímpar. Seja G um grafo com vértice universal e grau máximo ímpar. Então G é subgrafo de um grafo completo K_n com $n = |V(G)|$ par. Além disso, G tem vértice universal e, portanto, $\Delta(G) = \Delta(K_n) = n - 1$. Então, insira em G todas as arestas que faltam para que ele seja um grafo completo, faça uma coloração do grafo completo com $n - 1$ cores, como descrito anteriormente, e remova as arestas que foram incluídas. Esta é uma coloração de arestas de G com $\Delta(G) = n - 1$ cores e, portanto, $\chi'(G) = \Delta(G)$ e G é Classe 1.

Já no caso em que G tem vértice universal e grau máximo par, a técnica para provar que G é Classe 1 se, e somente se, G não é sobrecarregado foi apresentada por Plantholt (1981). Se G não é sobrecarregado, o conjunto de vértices de G é particionado em dois subconjuntos L e R , o primeiro com $\frac{n+1}{2}$ vértices e o segundo com $\frac{n-1}{2}$ vértices. Plantholt (1981) prova que é possível fazer tal partição de forma que o subgrafo induzido pelos vértices de L não é sobrecarregado. Observe que o subgrafo induzido pelos vértices do conjunto R , denotado por $G[R]$, tem uma coloração de arestas com $\frac{n-1}{2}$ cores, já que $\Delta(G[R]) = \frac{n-1}{2} - 1$ e todo grafo simples H tem uma coloração de arestas com $\Delta(H) + 1$ cores, segundo Vizing (1964). Se $\frac{n+1}{2}$ é par, então $G[L]$ é subgrafo de um grafo completo com número de vértices par que tem uma coloração de arestas com $\Delta(G[L])$ cores, ou seja, $\frac{n-1}{2}$ cores. Se $\frac{n+1}{2}$ é ímpar, há dois casos. Caso 1: $G[L]$ é um grafo com vértice universal não sobrecarregado e, por indução, tem uma coloração de arestas com $\frac{n-1}{2}$ cores. Caso 2: $G[L]$ não tem vértice universal. Neste caso, $G[L]$ tem grau menor que $\frac{n-1}{2}$ e Vizing (1964) garante que $G[L]$ tem uma coloração de arestas com $\frac{n-1}{2}$ cores. Como $G[L]$ e $G[R]$ são subgrafos disjuntos, ambos podem ser coloridos com as mesmas $\frac{n-1}{2}$ cores. Resta agora colorir as arestas que possuem um extremo em L e o outro extremo em R . Seja $B[L, R]$ o subgrafo de G induzido pelas arestas que possuem um vértice em L e outro em R . Como $|L| = \frac{n+1}{2}$ e $|R| = \frac{n-1}{2}$, o grafo $B[L, R]$ tem $\Delta(B) \leq \frac{n+1}{2}$. Segundo Plantholt (1981) é possível colorir uma aresta incidente em cada vértice de B cujo grau seja $\frac{n+1}{2}$ usando as mesmas $\frac{n-1}{2}$ cores da coloração de arestas de $G[L]$ e $G[R]$. Com isso, o subgrafo induzido pelas arestas não coloridas é um grafo bipartido com grau máximo $\frac{n-1}{2}$. Em 1916, König provou que todo grafo bipartido H tem uma coloração de arestas com $\Delta(H)$ cores (STIEBITZ *et al.*, 2012). Então, é possível colorir as arestas restantes de G com $\frac{n-1}{2}$ cores novas. Logo, o grafo G pode ser colorido com $\Delta(G) = n - 1$ cores e, portanto, é Classe 1.

2.2 NÚCLEO E SEMI-NÚCLEO DE UM GRAFO

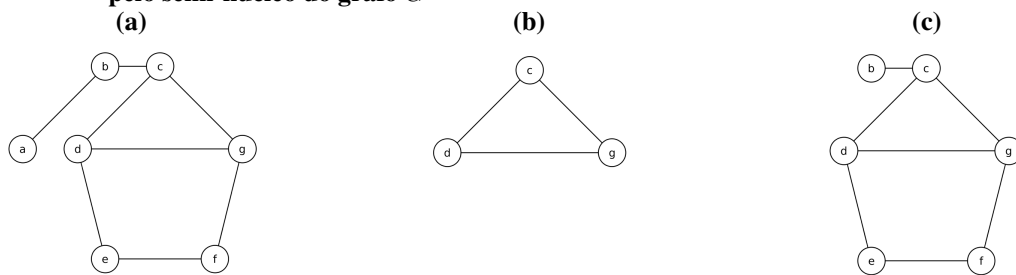
Nesta seção é apresentado um resultado importante sobre coloração de arestas, que diz que o índice cromático de um grafo G é equivalente ao índice cromático do semi-núcleo do grafo G .

A vizinhança de um vértice v no grafo G , denotado por $N_G(v)$, é o conjunto de vértices adjacentes a v em G . A vizinhança fechada do vértice v no grafo G é $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Considere um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ e um vértice $v \in V(G)$. O conjunto dos vizinhos de v que pertencem à X é denotado por $N_X(v)$. A vizinhança fechada de v no conjunto X é o conjunto $N_X[v] = N_X(v) \cup \{v\}$. Dado um conjunto de vértices X , o conjunto de vértices que são vizinhos de algum vértice de X no grafo G é denotado por $N_G(X)$. A vizinhança de um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ é a união das vizinhanças dos vértices que pertencem a X e é denotada por $N_G(X)$. A vizinhança fechada de um conjunto de vértices X no grafo G é $N_G[X] = X \cup N_G(X)$. Quando não houver ambiguidade, a notação do grafo G pode ser omitida

das notações de vizinhança.

O núcleo de um grafo G , representado por Λ_G , é o conjunto dos vértices que tem grau $\Delta(G)$. O semi-núcleo de G , representado como $N_G[\Lambda_G]$, é o conjunto dos vértices pertencentes ao núcleo de G e seus vizinhos. A Figura 6 ilustra um exemplo de núcleo e semi-núcleo de um grafo G . Perceba que os vértices c , d e g são os vértices com grau $\Delta(G)$, logo o núcleo do grafo é composto por estes vértices, ou seja $\Lambda_G = \{c, d, g\}$. Na mesma figura, o semi-núcleo é composto pelos vértices com grau $\Delta(G)$ e seus vizinhos, e , f e b . Então $N_G[\Lambda_G] = \{c, d, g, e, f, b\}$ Perceba também que o vértice a não faz parte do núcleo, nem do semi-núcleo do grafo G .

Figura 6 – Na Figura 6(a) é apresentado o grafo G , na Figura 6(b) é apresentado o subgrafo induzido pelo núcleo do grafo G e na Figura 6(c) é apresentado o subgrafo induzido pelo semi-núcleo do grafo G



Fonte: Autoria própria

Para provar que o índice cromático de um grafo G é igual ao índice cromático de $G[N_G[\Lambda_G]]$ (Teorema 2.5), precisamos de alguns resultados que são listados a seguir. O primeiro lema é conhecido como recoloração de Vizing (1964) e foi apresentado quando Vizing provou que o índice cromático de qualquer grafo simples é no máximo $\Delta(G) + 1$.

Lema 2.3. (VIZING, 1964) *Seja $G = (V, E)$ um grafo Classe 1 e seja (u, v) uma aresta de \overline{G} que possui extremo u não-adjacente a nenhum $\Delta(G)$ -vértice em G , ou seja, $N_G(u) \cap \Lambda_G = \emptyset$. Nestas condições, $G' = (V, E \cup \{uv\})$ é Classe 1.*

O próximo lema é um resultado do trabalho de Machado e Figueiredo (2010) e sua demonstração utiliza o conceito de $\Delta(G)$ -vértice e de união entre dois grafos. Um $\Delta(G)$ -vértice é um vértice de G com grau $\Delta(G)$. Dados dois grafos G e H , o grafo $G \cup H$ é o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$.

Lema 2.4. (MACHADO; FIGUEIREDO, 2010) *Seja $G = G_1 \cup G_2$ o grafo união de um grafo $G_1 = (V, E_1)$ e um grafo $G_2 = (V, E_2)$, tal que G_1 é Classe 1 e $\Delta(G) = \Delta(G_1)$. Se $\Lambda_G = \Lambda_{G_1}$ e nenhuma aresta de G_2 possui ambos os extremos em $N_{G_1}[\Lambda_{G_1}]$, então G é Classe 1.*

Demonstração. Renomeie os vértices em E_2 , $u_1, v_1, \dots, u_k, v_k$, de tal modo que u_i é uma ponta da aresta (u_i, v_i) que não pertence a $N_{G_1}[\Lambda_{G_1}]$. Agora, seja $G^0 = G_1$ e $G^i = (V, E_1 \cup \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_i, v_i)\})$, para $1 \leq i \leq k$. Observe que G^i é obtido a partir de G^{i-1} pela adição da aresta (u_i, v_i) . Provaremos o lema aplicando indução em i .

O grafo $G^0 = G_1$ é Classe 1 por hipótese. Suponha que G^i é Classe 1. Lembre-se que nenhuma aresta (u_i, v_i) , $1 \leq i \leq k$, é incidente em um $\Delta(G_1)$ -vértice. Então $\Lambda_{G^0} = \Lambda_{G^1} = \dots = \Lambda_{G^k}$ e $N_{G^0}[\Lambda_{G^0}] = N_{G^1}[\Lambda_{G^1}] = \dots = N_{G^k}[\Lambda_{G^k}]$. Logo, u_{i+1} não pertence a $N_{G^i}[\Lambda_{G^i}]$ e pelo Lema 2.3, G^{i+1} é Classe 1. \square

A partir dos Lemas anteriores, Machado e Figueiredo (2010) estabeleceram o importante Teorema 2.5, que permite remover alguns vértices de um grafo e ainda assim obter o seu índice cromático.

Teorema 2.5. (MACHADO; FIGUEIREDO, 2010) *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então $\chi'(G) = \chi'(G[N_G[\Lambda_G]])$.*

Demonstração. Observe que $G[N_G[\Lambda_G]]$ é um subgrafo de G com o mesmo grau máximo. Logo, se $G[N_G[\Lambda_G]]$ é Classe 2, então G também é Classe 2, e ambos os grafos têm o mesmo índice cromático.

Agora suponha que $G[N_G[\Lambda_G]]$ é Classe 1. Seja G' o grafo obtido a partir de G removendo-se as arestas do semi-núcleo. Os grafos G e $G[N_G[\Lambda_G]]$ têm o mesmo grau máximo e o mesmo conjunto de $\Delta(G)$ -vértices. Além disso, nenhuma aresta de G' pode ter as duas pontas em $N_{G[\Lambda_G]}[\Lambda_G]$, pela definição de G' . Logo, pelo Lema 2.4, $G = G[N_G[\Lambda_G]] \cup G'$ é Classe 1, ou seja, G e $G[N_G[\Lambda_G]]$ têm o mesmo índice cromático. \square

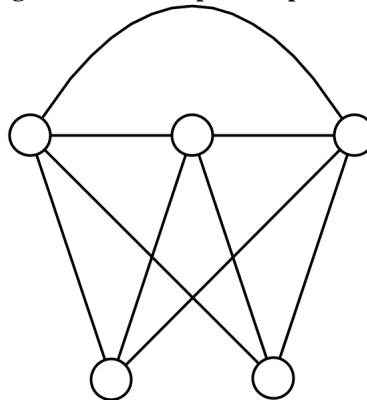
Do Teorema 2.5 pode-se concluir que para determinar o índice cromático de um grafo, pode-se remover todos os seus vértices que não pertencem a $N_G[\Lambda_G]$.

2.3 COLORAÇÃO DE ALGUNS GRAFOS SPLIT

Chen, Fu e Ko (1995) resolveram o Problema da Coloração de Arestas para os grafos split completos e grafos split com grau máximo ímpar. A técnica desenvolvida por estes autores é um elegante algoritmo polinomial de coloração de arestas que faz uso de quadrados latinos. A seguir, introduzimos esta técnica e seus fundamentos.

Considere um grafo split $G = (K(G) \cup S(G), E(G))$. Se cada vértice de $K(G)$ é adjacente a todos os vértices de $S(G)$, então G é um grafo *split completo*, denotado por $G = [K_n(G), S_r(G)]$, onde $K_n(G)$ representa a clique de tamanho n e $S_r(G)$ representa o conjunto independente de tamanho r . A Figura 7 ilustra um exemplo de grafo split completo.

Figura 7 – Grafo split completo



Fonte: Autoria própria

Observe que todo grafo split completo possui vértice universal. Logo, para esses grafos, vale o Teorema 2.1 e todo grafo split completo é Classe 1 se, e somente se, não é sobrecarregado.

Chen, Fu e Ko (1995) desenvolveram uma técnica para colorir todos os grafos split com $\Delta(G)$ ímpar, mas para entender a técnica é preciso conhecer os conceitos de quadrados latinos e diagrama de cores. Um quadrado latino de ordem k é uma matriz $k \times k$ com valores do conjunto $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ de tal modo que cada elemento de $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ aparece apenas uma vez em cada coluna e apenas uma vez em cada linha. Seja $M = [m_{i,j}]$ um quadrado latino, se $m_{i,j} = m_{j,i}$, para todo i e j tal que $0 \leq i, j \leq k - 1$, dizemos que o quadrado latino M é comutativo. Seja $M = [m_{i,j}]$, um quadrado latino de ordem k , tal que $m_{i,j} = (i + j)(\text{mod } k)$, $0 \leq i, j \leq k - 1$. Quando k é ímpar, todos os elementos da diagonal principal de M são diferentes e dizemos que M é *idempotente*. É conhecido que um quadrado latino idempotente comutativo de ordem k existe se, e somente se, k é ímpar. A Figura 8 ilustra um quadrado latino de ordem par e outro de ordem ímpar, obtidos com a fórmula $m_{i,j} = (i + j)(\text{mod } k)$.

Figura 8 – Na Figura 8(a) é ilustrado um quadrado latino de ordem ímpar e na Figura 8(b) é ilustrado um quadrado latino de ordem par

(a)				
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

(b)					
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

Fonte: Autoria própria

Perceba que os elementos da diagonal principal da Figura 8(a) são todos diferentes entre si. Por outro lado, na diagonal principal da Figura 8(b) existem elementos iguais, por exemplo, o elemento 1 aparece duas vezes.

Um diagrama de cores $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_k)$ é um conjunto ordenado de vetores de cores, onde um vetor de cores $V_i = [c_{i,1}, \dots, c_{i,d_i}]$, de tamanho d_i , consiste de cores duas a duas distintas, $1 \leq i \leq k$. O diagrama de cores \mathcal{C} é chamado *monotônico* se a cor $c_{i,j}$ ocorre no máximo $d_i - j$ vezes em V_1, \dots, V_{i-1} para todo $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq d_i$. Na Figura 9, é apresentado um exemplo de diagrama de cores, perceba que em cada vetor V_i não existem duas cores iguais e que a cor $c_{i,j}$ ocorre no máximo $d_i - j$ vezes nos vetores V_k com $k < i$. Por exemplo, a cor $c_{3,1} = 6$ do vetor de cores V_3 ocorre no máximo $3 - 1 = 2$ vezes em $V_1 \cup V_2$.

Figura 9 – Diagrama de cores com vetores de cores de tamanho 3

$$V_1 = \{4, 5, 6\}$$

$$V_2 = \{5, 6, 0\}$$

$$V_3 = \{6, 0, 1\}$$

$$V_4 = \{0, 1, 2\}$$

Fonte: Autoria própria

Com um diagrama de cores monotônico $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_k)$ é possível obter uma coloração de arestas para um grafo bipartido $B = [X, Y]$ desde que $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{|X|}\}$ e $|V_i| = d_B(x_i)$, $1 \leq i \leq k$. Para cada vértice $x_i \in X$, seja $V_i = [c_{i,0}, c_{i,1}, \dots, c_{i,d_B(x_i)}]$ um vetor com $d_B(x_i)$ cores duas a duas distintas. Se a sequência $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_k)$ é um diagrama de cores monotônico, então pode-se colorir as arestas de B utilizando-se as cores do vetor V_i para colorir as arestas incidentes ao vértice x_i , para cada vértice $x_i \in X$. Basta considerar os vértices x_i consecutivamente e utilizar as cores na ordem em que aparecem no vetor V_i . Para cada cor $c_{i,j}$, escolha um vértice adjacente a x_i onde não incide nenhuma aresta colorida com a cor $c_{i,j}$ e pinte esta aresta com a cor $c_{i,j}$. Como \mathcal{C} é um diagrama de cores monotônico, quando o algoritmo está colorindo uma aresta de x_i e considerando a cor $c_{i,j}$, esta cor já coloriu, no máximo, $d_B(x_i) - j$ arestas do grafo, que é o número máximo de vezes que esta cor apareceu anteriormente em \mathcal{C} . Como existem no mínimo $d_B(x_i) - j + 1$ arestas incidentes a x_i que ainda não estão coloridas, existe ao menos uma aresta que pode ser colorida com a cor $c_{i,j}$. O lema a seguir formaliza este resultado.

Lema 2.6. (CHEN; FU; KO, 1995) *Sejam $B = [X, Y]$ um grafo bipartido e $\mathcal{C} = (V_0, V_1, \dots, V_{|X|})$ um diagrama de cores monotônico onde cada vetor V_i tem $d_B(x_i)$ cores. O grafo B tem uma coloração de arestas que usa as cores de V_i para colorir as arestas incidentes a x_i , para todo $x_i \in X$.*

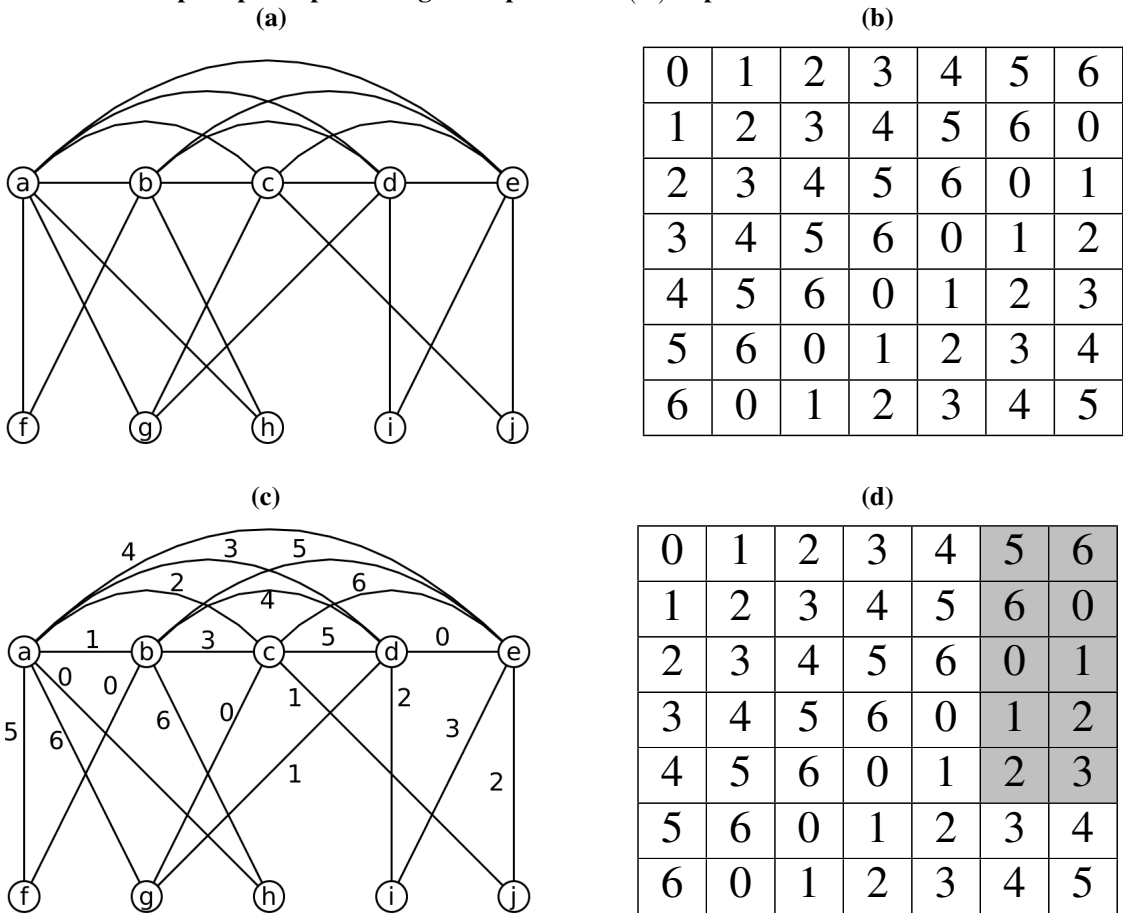
A partir dos conceitos de quadrados latinos e diagramas de cores monotônicos, pode-se formalizar o resultado de Chen, Fu e Ko (1995).

Teorema 2.7. (CHEN; FU; KO, 1995) *Seja G um grafo split. Se $\Delta(G)$ é ímpar, então G é Classe 1.*

A técnica que permite a prova do Teorema 2.7 será ilustrada a seguir, a partir de um exemplo.

Vamos colorir o grafo split $G = (K(G) \cup S(G), E(G))$ da Figura 10(a) com o quadrado latino da Figura 10(b). Perceba que $\Delta(G)$ é ímpar. Na clique $K(G)$, a aresta (u_i, u_j) será colorida com a cor $m_{i,j}$ do quadrado latino M , $0 \leq i < |K(G)|$. Então, as cores da diagonal principal não são usadas. As arestas de G com um extremo em $K(G)$ e o outro em $S(G)$ formam um grafo bipartido que, pelo Lema 2.6, pode ser colorido com as cores do diagrama de cores monotônico $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_k)$, tal que $V_i = [m_{i,|K(G)|}, m_{i,|K(G)|+1}, m_{i,|K(G)|+2}, \dots, m_{i,|K(G)|-1}, m_{i,i}]$ quando $i < \Delta(G)$, e $V_i = [m_{i,i}, m_{i,|K(G)|}, m_{i,|K(G)|+1}, m_{i,|K(G)|+2}, \dots, m_{i,|K(G)|-1}]$ quando $i \geq \Delta(G)$. A Figura 10(d) destaca parte do diagrama de cores dentro do quadrado latino.

Figura 10 – Na Figura 10(a) é ilustrado um grafo split com $\Delta(G)$ ímpar, na Figura 10(b) é ilustrado o quadrado latino utilizado para colorir o grafo split, na Figura 10(c) é ilustrado o grafo split colorido e na Figura 10(d) é ilustrado a divisão do quadrado latino que os autores fazem para poder pintar os grafos split com $\Delta(G)$ ímpar



Fonte: Autoria própria

Para os grafos split com grau máximo par, poucos resultados são conhecidos e a técnica de Chen, Fu e Ko (1995) não pode ser aplicada diretamente, já que não é possível construir diagramas de cores monotônicos da mesma forma quando o quadrado latino tem tamanho par. Dentre os resultados conhecidos, o trabalho de Almeida (2012) apresenta casos em que a técnica de Chen, Fu e Ko pode ser adaptada para grafos com grau máximo par.

Teorema 2.8. (ALMEIDA, 2012) *Seja $G = (S(G) \cup K(G), E(G))$ um grafo split com $\Delta(G)$ par. Se G tem um vértice $u \in S(G)$ com $\left\lceil \frac{|K(G)|}{2} \right\rceil \leq d_G(u) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ então G é Classe 1.*

Visto que para todos os grafos split completos e todos os grafos split com $\Delta(G)$ ímpar, a técnica apresentada por Chen, Fu e Ko (1995) consegue colorir suas arestas, e Almeida (2012) apresenta uma técnica onde é possível colorir alguns grafos split com grau máximo par. O Problema permanece em aberto apenas para um subconjunto dos grafos split com grau máximo par.

2.4 CARACTERIZAÇÃO E COLORAÇÃO DOS SPLIT-COMPARABILIDADE

Os split-comparabilidade são o conjunto de grafos que pertencem à interseção de duas outras classes de grafos: os grafos split e os grafos comparabilidade. Grafos split já foram explorados na Seção 2.3. Quanto aos grafos de comparabilidade, como dito na introdução, são grafos que admitem uma orientação transitiva para suas arestas. Uma *orientação transitiva* das arestas de um grafo é uma atribuição de orientação para as arestas de forma que se existe aresta orientada de um vértice a para um vértice b e de b para um vértice c , então obrigatoriamente existe uma aresta orientada de a para c (GOLUMBIC, 2004).

Neste trabalho, uma aresta orientada de um vértice a para um vértice b será denotada por ab , sem parênteses. Seja F um conjunto de arestas orientadas. O conjunto F^{-1} representa o mesmo conjunto de arestas que está em F , mas com a orientação contrária, ou seja, $F^{-1} = \{v_i v_j : v_j v_i \in F\}$. Formalmente, o Teorema 2.9 caracteriza os grafos de comparabilidade.

Teorema 2.9. (GOLUMBIC, 2004) *Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um grafo de comparabilidade se existe uma orientação F de $E(G)$ que satisfaz*

$$i) F \cap F^{-1} = \emptyset,$$

$$ii) F \cup F^{-1} = E(G) \text{ e}$$

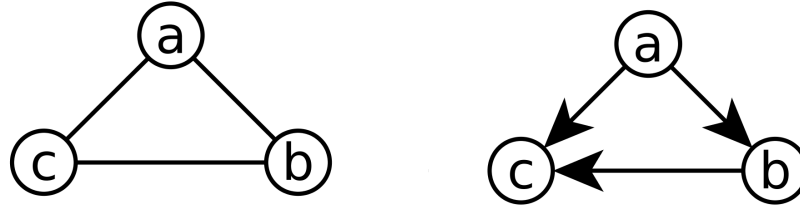
$$iii) F^2 \subseteq F,$$

$$\text{onde } F^2 = \{ac | \exists b(b \in V(G) \wedge ab \in F \wedge bc \in F)\}.$$

Como exemplo, suponha $G = (V(G), E(G))$ com $V(G) = \{a, b, c\}$ sendo o conjunto de vértices e $E(G) = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ o conjunto de arestas de G . O grafo G pode ser visto na Figura 11(a). Seja $F = \{ab, ac, bc\}$ uma orientação das arestas de G . Para sabermos se essa orientação é transitiva, iremos verificar se ela satisfaz as regras do Teorema 2.9. Então $F^{-1} = \{ba, ca, bc\}$ e a condição $F \cap F^{-1} = \emptyset$ é satisfeita. A segunda propriedade exige que $F \cup F^{-1} = \{ab, ba, bc, cb, ac, ca\} = E(G)$. Observe que se todas as arestas são orientadas nos dois sentidos, então a orientação das arestas não é mais necessária. Então, $F \cup F^{-1} =$

$\{ab, ba, bc, cb, ac, ca\} = \{(a, b), (b, c), (a, c)\} = E(G)$ e a segunda regra também é satisfeita. A última condição exige que $F^2 \subseteq F$ e é satisfeita, por inspeção: veja que se as arestas orientadas ab e bc existem, então a aresta orientada ac existe e, portanto, pertence a F . Logo a orientação F é transitiva. A Figura 11(b) ilustra a orientação F .

Figura 11 – Exemplo de orientação, na Figura 11(a) é mostrado o grafo K_3 e na Figura 11(b) é mostrado o grafo K_3 com arestas orientada
(a) (b)

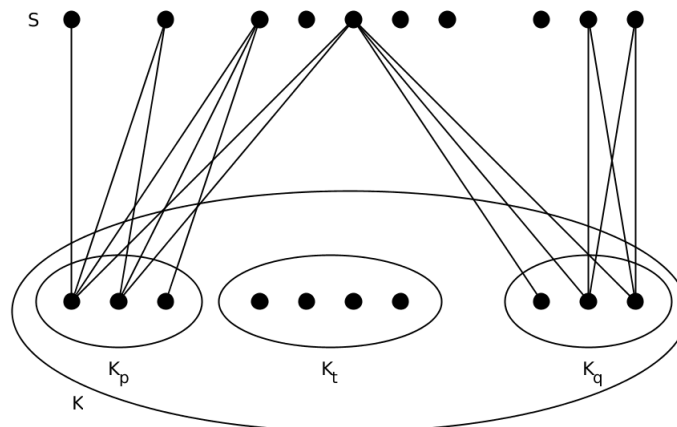


Fonte: Autoria própria

O principal objetivo desta seção é descrever caracterizações dos grafos split-comparabilidade. A mais interessante delas, já utilizada para resolver um Problema de Coloração de Arestas, é apresentada a seguir. Mas sua demonstração exige a definição do conceito de ordem parcial. Uma relação R em um conjunto A é *reflexiva* se $(a, a) \in R$ para todo elemento $a \in A$; e é *antissimétrica* se, para todo $a, b \in A$ a existência de $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$ (ROSEN, 2014). Uma relação R em um conjunto S é chamada de *ordem parcial* ou *ordenação parcial* se ela é reflexiva, antissimétrica e transitiva (ROSEN, 2014). Um conjunto S com uma ordem parcial R é chamado de conjunto parcialmente ordenado.

Os grafos split-comparabilidade foram caracterizados por Ortiz e Villanueva (1996), e uma prova dessa caracterização é apresentada no Teorema 2.10, cuja compreensão do enunciado pode ser auxiliada pela Figura 12. As arestas da clique $K(G)$ na Figura 12 foram omitidas para uma melhor visualização.

Figura 12 – Exemplo de grafo split-comparabilidade



Fonte: Ortiz e Villanueva (1996)

Teorema 2.10. (ORTIZ; VILLANUEVA, 1996) Um grafo split $G = (S(G) \cup K(G), E)$ é um grafo split-comparabilidade se e somente se $K(G)$ pode ser totalmente ordenado $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_r$ e particionado em três (possivelmente vazios) segmentos $K_p(G) = [v_1, v_p]$, $K_q(G) = [v_q, v_r]$ e $K_t(G) = K(G) \setminus (K_p(G) \cup K_q(G))$ tal que $N(s)$ tem uma das seguintes formas para cada vértice $s \in S$:

- i) $[v_1, v_i]$ para $i \leq p$
- ii) $[v_j, v_r]$ para $q \leq j \leq r$
- iii) $[v_1, v_i] \cup [v_j, v_r]$ para $i \leq p$ e $q \leq j \leq r$.

Demonstração. Seja $G = (K(G) \cup S(G), E(G))$ um grafo split, onde $K(G)$ é uma clique maximal.

\mapsto Suponha que a vizinhança de qualquer vértice $s \in S(G)$ satisfaz um dos itens i), ii) e iii), como mostrado na Figura 12. Para provar que este grafo é de comparabilidade, basta mostrar que existe uma orientação transitiva de suas arestas.

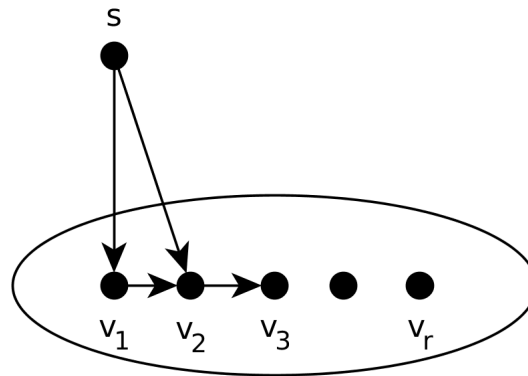
Considere a ordem dos vértices em $K(G)$ obtida da seguinte maneira. Para vértices em $K_p(G)$ considere uma ordem decrescente, de acordo com o número de vizinhos em $S(G)$, ou seja, se $|N_S(v)| \geq |N_S(w)|$, $v, w \in K_p(G)$, então v está antes de w nesta ordem. Similarmente, é possível ordenar os vértices de $K_q(G)$ em ordem crescente do número de vizinhos em $S(G)$. A ordem dos vértices em $K_t(G)$ é qualquer. Finalmente, vértices em $K_p(G)$ são dispostos antes de $K_t(G)$ e vértices em $K_t(G)$ antes dos vértices de $K_q(G)$. Então $K_p(G) \prec K_t(G) \prec K_q(G)$. Renomeie os vértices em $K(G)$ de modo que $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_r$, $r = |K(G)|$.

Agora considere a seguinte orientação das arestas de G . As arestas (v_i, v_j) , $v_i, v_j \in K(G)$, são orientadas de v_i para v_j se e somente se $i < j$. As arestas (v, s) com $v \in K(G)$ e $s \in S(G)$ são orientadas de v para s se $v \in K_p(G)$ e de s para v se $v \in K_q(G)$. Como esta orientação é transitiva e G é split por hipótese, conclui-se que G é um grafo split-comparabilidade.

\leftarrow Suponha que G é um grafo split-comparabilidade. Então G admite uma orientação transitiva de suas arestas. Isso é equivalente a dizer que existe uma ordenação parcial P , associada a G , tal que dois vértices são adjacentes em G se e somente se os elementos correspondentes são comparáveis em P . Essa ordem parcial de $V(G)$ induz uma ordem linear dos vértices em $K(G)$. Renomeie os vértices de $K(G)$ tal que $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_r$, $r = |K(G)|$. Então, v_1 e v_r são o primeiro e o último elementos de $K(G)$, respectivamente, de acordo com P . Agora resta mostrar que a vizinhança de cada vértice $s \in S(G)$ satisfaz i), ii) ou iii).

Todos os vértices em $S(G)$ são maiores que v_1 e menores que v_r em P . Por contradição, suponha que existe um vértice $v \in S(G)$ tal que $s < v_1$. Então, a aresta (s, v_1) deve ser orientada de s para v_1 no grafo orientado correspondente. Como $v_1 < v_2$ então (v_1, v_2) é orientada de v_1 para v_2 (Figura 13). Com o mesmo argumento s deve ser comparável a v_3, v_4, \dots, v_r , um absurdo pois a clique $K(G)$ é maximal.

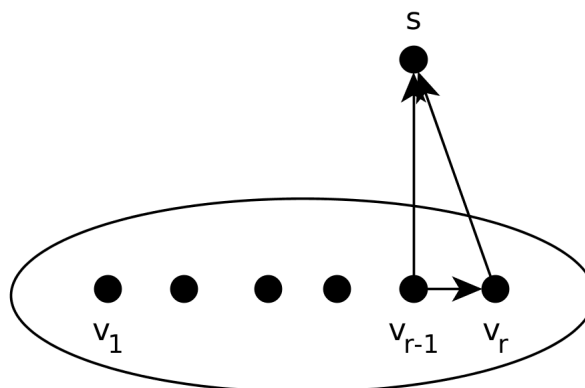
Figura 13 – Exemplo da orientação no início entre o bipartido e a clique



Fonte: Ortiz e Villanueva (1996)

Similarmente, se $s \in S(G)$ é maior que v_r então (s, v_r) deve ser orientada de v_r para s . Como $v_{r-1} < v_r$ então (s, v_{r-1}) deve existir em G e, pelo mesmo argumento, $(s, v_{r-2}), \dots, (s, v_2), (s, v_1)$ devem existir, contradizendo a maximalidade de $K(G)$ (Figura 14). Então, cada aresta (s, v_1) é orientada de v_1 para s e cada aresta (s, v_r) é orientada de s para v_r .

Figura 14 – Exemplo da orientação no final entre o bipartido e a clique.

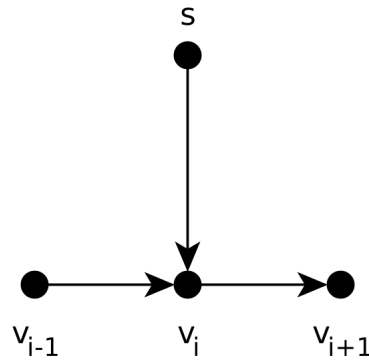


Fonte: Ortiz e Villanueva (1996)

Agora, considere um vértice $s \in S(G)$ e sejam $v_i < v_j$ o menor e o maior vértices em $K(G)$ adjacentes a s , respectivamente. Há três casos.

a) Caso $i \neq 1$: como $v_{i-1} < v_i$ então a aresta (v_{i-1}, v_i) é orientada de v_{i-1} para v_i . Como $v_{i-1} \notin N_G(s)$, então (s, v_i) deve ser orientada de s para v_i (Figura 15). Então, por transitividade, (s, v_{i+1}) deve existir e é orientada de s para v_{i+1} . Pelo mesmo argumento $(s, v_{i+2}), (s, v_{i+3}), \dots, (s, v_r)$ devem existir e serem orientadas de s para $v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_r$, respectivamente. Consequentemente, $j = r$.

Figura 15 – Exemplo da orientação no meio entre o bipartido e a clique

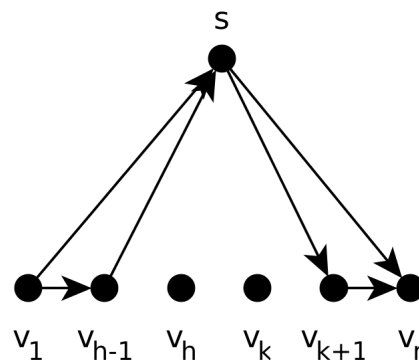


Fonte: Ortiz e Villanueva (1996)

b) Caso $j \neq r$: como $v_j < v_{j+1}$ então (v_j, v_{j+1}) é orientada de v_j para v_{j+1} . Como $v_{j+1} \notin N_G(s)$, então (s, v_j) deve ser orientada de v_j para s . Por transitividade, (s, v_{j-1}) , (s, v_{j-2}) , ..., (s, v_1) devem existir e são orientadas de v_{j-1} , v_{j-2} , ..., v_1 para s , respectivamente. Então, $i = 1$.

c) Caso $i = 1$ e $j = r$: pela maximalidade de $K(G)$, (s, v_1) é orientada de v_1 para s e (s, v_r) é orientada de s para v_r . Sejam v_h e v_k , o menor e o maior vértice em $K(G)$ não adjacentes a s , respectivamente. Se (s, v_{h-1}) existe em G , então deve ser orientada de v_{h-1} para s . Como $v_{h-2} < v_{h-1}$, a aresta (s, v_{h-2}) deve existir em G e ser orientada de v_{h-2} para s . Analogamente, (s, v_{h-3}) , ..., (s, v_3) , (s, v_2) devem existir em G e são orientadas de v_{h-3} , ..., v_3 , v_2 para s , respectivamente. Similarmente, se (s, v_{k+1}) existe em G , então (s, v_{k+2}) , (s, v_{k+3}) , ..., (s, v_r) devem existir e são orientadas de s para v_{k+1} , v_{k+2} , ..., v_r , respectivamente (Figura 16).

Figura 16 – Exemplo da orientação no início e final entre o bipartido e a clique



Fonte: Ortiz e Villanueva (1996)

Agora, suponha que existe um vértice v_a adjacente a s tal que $v_h < v_a < v_k$, $a \neq h$, $a \neq k$ e $N(s) \cap \{v_h, v_k\} = \emptyset$. Se (s, v_a) for orientada de s para v_a , todos os vértices em $K(G)$ maiores que v_a devem ser adjacentes a s . Se (s, v_a) for orientada de v_a para s , então

todos os vértices em $K(G)$ menores que v_a devem ser adjacentes a s . De qualquer forma, uma contradição, pois v_h e v_k não são adjacentes a s .

Então, cada vértice s em $S(G)$ deve ser adjacente a v_1 ou a v_r ou ambos. Se s é adjacente a v_1 e v_r , então $N_G(s) = N_1(s) \cup N_2(s)$ tal que $N_1(s)$ é o conjunto de vértices consecutivos contendo v_1 e $N_2(s)$ é o conjunto de vértices consecutivos contendo v_r . Se s é adjacente a v_1 mas não adjacente a v_r , então $N_G(s)$ é um conjunto de vértices consecutivos, em uma ordem parcial correspondente, incluindo v_1 e podemos dizer que $N_G(s) = N_1(s)$ e $N_2(s) = \emptyset$. Analogamente, se s é adjacente a v_r , mas não a v_1 , então $N_G(s) = N_2(s)$ é um conjunto de vértices consecutivos contendo v_r com $N_1(s) = \emptyset$. Definindo $K_p(G)$ como o conjunto união de $N_1(s)$ para todos os s em $S(G)$, $K_q(G)$ o conjunto união de $N_2(s)$ para todos os s em $S(G)$ e $K_t(G)$ como o conjunto de vértices tal que $N_G(s) = \emptyset$ para todo $s \in S(G)$, temos o resultado. \square

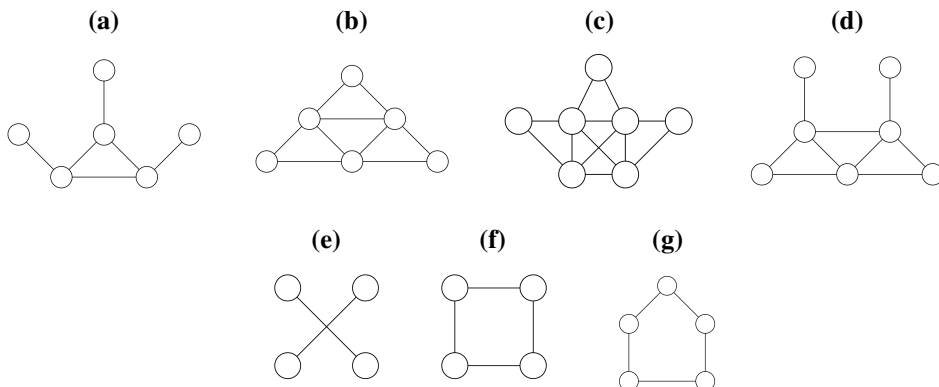
Outra caracterização dos grafos split-comparabilidade muito conhecida é feita por Foldes e Hammer (1977), que identificaram estruturas que são proibidas em grafos split-comparabilidade. Ou seja, esses autores identificaram subgrafos que não existem em um grafo G se e unicamente no caso em que G é um split-comparabilidade. Os Teoremas 2.11 e 2.12, a seguir, apresentam caracterizações dos grafos split e split-comparabilidade por subgrafos proibidos. Para melhor compreensão desses resultados, os grafos mencionados nesses teoremas podem ser vistos na Figura 17.

Teorema 2.11. (FOLDES; HAMMER, 1977) G é um grafo split se, e somente se, G não contém um subgrafo induzido isomorfo ao $2K_2$, C_4 ou C_5 .

Teorema 2.12. (FOLDES; HAMMER, 1977) Seja G um grafo split. O grafo G é split-comparabilidade se, e somente se, G não contém um subgrafo induzido isomorfo a G_1 , $\overline{G_1}$ ou $\overline{G_3}$.

Então, pelos teoremas 2.11 e 2.12, G é um grafo split-comparabilidade se ele não contém um subgrafo induzido isomorfo a grafos da família $F = \{2K_2, C_4, C_5, G_1, \overline{G_1}, \overline{G_3}\}$, apresentados na Figura 17.

Figura 17 – Grafos a) G_1 , b) $\overline{G_1}$, c) G_3 , d) $\overline{G_3}$, e) $2K_2$, f) C_4 e g) C_5



Fonte: Autoria própria

Conhecer a estrutura de uma classe de grafos ajuda a criar hipóteses e técnicas de coloração que se adéquem a estrutura. Cruz (2017) resolveu o Problema da Coloração de Arestas para os grafos split-comparabilidade com base na caracterização desses grafos apresentada no Teorema 2.10. O Teorema 2.13 apresenta o resultado de Cruz (2017).

Teorema 2.13. (CRUZ, 2017) *Seja G um grafo split-comparabilidade. G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

O principal objetivo desse trabalho é apresentar caracterizações para os grafos que são complemento dos split-comparabilidade para contribuir com trabalhos que busquem resolver o Problema da Coloração de Arestas nesta classe. Acreditamos que possivelmente a técnica a partir da qual se originou o Teorema 2.13 seja possível de adaptações para o caso dos split-comparabilidade.

3 CARACTERIZAÇÃO DOS SPLIT-CO-COMPARABILIDADE

Neste capítulo são apresentadas duas caracterizações dos grafos split-co-comparabilidade, resultantes do desenvolvimento desse Trabalho de Conclusão de Curso. A primeira delas é uma caracterização dos grafos split-co-comparabilidade por subgrafos proibidos e a segunda é uma caracterização estrutural, como a que foi apresentada no Teorema 2.10 para os grafos split-comparabilidade.

3.1 CARACTERIZAÇÃO POR SUBGRAFOS PROIBIDOS

Nesta seção, apresentamos uma caracterização dos grafos split-co-comparabilidade por subgrafos proibidos. Antes, provamos que um grafo é split-co-comparabilidade se, e somente se, é o complemento de um grafo split-comparabilidade, ou seja, é um co-split-comparabilidade. Para tanto, é necessário conhecer o seguinte resultado.

Teorema 3.1. (GOLUMBIC, 2004) *Um grafo não-direcionado G é um grafo split se, e somente se, seu complemento \overline{G} é um grafo split.*

O próximo lema garante que o complemento de um grafo split-comparabilidade é um grafo split-co-comparabilidade.

Lema 3.2. *G é um grafo split-comparabilidade se, e somente se, \overline{G} é split-co-comparabilidade.*

Demonstração. \mapsto Se G é um grafo split-comparabilidade. Pelo Teorema 3.1, \overline{G} é um grafo split. Como o complemento de \overline{G} é o próprio G e G é um grafo de comparabilidade, então \overline{G} é um grafo de co-comparabilidade, por definição.

\leftarrow Se \overline{G} é um grafo split-co-comparabilidade. Então G é um grafo split, pelo Teorema 3.1. Por definição, G é um grafo de comparabilidade. Logo G é um grafo split-comparabilidade. \square

Pelo Lema 3.2 e pelo Teorema 2.12, que caracteriza os grafos split-comparabilidade por subgrafos proibidos, pode-se caracterizar os grafos split-co-comparabilidade por subgrafos proibidos, como mostra o Teorema 3.3 a seguir.

Teorema 3.3. *Um grafo G é split-co-comparabilidade se, e somente se, G é um grafo split e não contém um subgrafo induzido isomorfo a \overline{G}_1 , G_1 ou G_3 .*

Demonstração. \mapsto Suponha que G é um grafo split-co-comparabilidade e contém um dos grafos \overline{G}_1 , G_1 ou G_3 como subgrafo induzido. Seja H esse subgrafo. Então, \overline{G} contém o complemento de H como subgrafo induzido. Então \overline{G} não é um grafo split-comparabilidade, pelo Teorema 2.12. Pelo Lema 3.2, \overline{G} é split-comparabilidade, uma contradição.

↔ Agora suponha que G é um grafo split e não contém nenhum dos grafos $\overline{G_1}$, G_1 e G_3 como subgrafo induzido. Logo \overline{G} não contém $\overline{G_1}$, G_1 e $\overline{G_3}$ como subgrafos induzidos. Além disso, pelo Teorema 3.1, \overline{G} é um grafo split. Então, pelo Teorema 2.12, \overline{G} é um grafo split-comparabilidade. Pelo Lema 3.2, \overline{G} é um grafo split-co-comparabilidade. \square

3.2 CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL

Esta seção apresenta uma caracterização dos grafos split-co-comparabilidade que impõe a existência de uma ordem entre seus vértices e uma relação de contingência entre vizinhanças. Essa caracterização foi possível a partir daquela apresentada para os grafos split-comparabilidade no Teorema 2.10.

Uma clique é maximal se não está propriamente contida em nenhuma outra clique do grafo. Similarmente, um conjunto independente é maximal se não está propriamente contido em nenhum outro conjunto independente do grafo. Nesta seção, $K(G)$ é uma clique maximal no grafo G e $S(G)$ é um conjunto independente maximal em G . O subgrafo de um grafo split G induzido pelas arestas com um extremo em $K(G)$ e outro em $S(G)$ será denotado por B_G . Dado um conjunto $X \subseteq V(G)$, o conjunto $N_X(v)$ é o conjunto $N_G(v) \cap X$.

Teorema 3.4. *Seja $G = (K(G), S(G))$ um grafo split. Então G é um grafo de co-comparabilidade se e somente se existe uma ordem linear total dos vértices de $S(G)$, $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{|S(G)|}$, que induz uma partição de $K(G)$ em $K_l(G)$, $K_c(G)$ e $K_r(G)$, possivelmente vazios, da seguinte forma:*

- $K_l(G) = \{v : N_{S(G)}(v) = [u_1, u_i], 1 \leq i < |S(G)|\}$
- $K_c(G) = \{v : N_{S(G)}(v) = [u_i, u_j], 1 < i \leq j < |S(G)|\}$
- $K_r(G) = \{v : N_{S(G)}(v) = [u_i, u_{|S(G)-1}], 1 < i \leq |S(G)|\}$
- Se $K_l(G) \neq \emptyset$ e $K_r(G) \neq \emptyset$, então $N_{K_l(G)}(x_e) \cup N_{K_r(G)}(x_d) = V(G)$, onde x_e e x_d são os vértices com menor grau dos conjuntos $K_l(G)$ e $K_r(G)$, respectivamente.

Demonstração. \mapsto Seja $G = (K(G), S(G))$ um grafo split tal que G é um grafo de co-comparabilidade. Pelo Lema 3.2, \overline{G} é um grafo split-comparabilidade. Pelo Teorema 2.10, os vértices de $K(\overline{G}) = S(G)$ podem ser totalmente ordenados $u_1 \prec u_2 \prec \dots \prec u_{|K(\overline{G})|}$ e particionados em $K_p(\overline{G}) = [u_1, u_p]$, $K_q(\overline{G}) = [u_q, u_{|K(\overline{G})|}]$ e $K_t(\overline{G}) = K(\overline{G}) \setminus (K_q(\overline{G}) \cup K_p(\overline{G}))$ de forma que para qualquer $v \in S(\overline{G})$, $N_{\overline{G}}(v)$ tem uma das seguintes formas: *i*) $[u_1, u_i]$, para $1 \leq i \leq p$; *ii*) $[u_j, u_{|K(\overline{G})|}]$, para $q \leq j \leq |K(\overline{G})|$; ou *iii*) $[u_1, u_i] \cup [u_j, u_{|K(\overline{G})|}]$ para $1 \leq i \leq p$ e $q \leq j \leq |K(\overline{G})|$. Vamos mostrar que todo vértice em $v \in K(G) = S(\overline{G})$ satisfaz as condições do enunciado.

Caso 1) Se $v \in S(\overline{G})$ tem $N_{\overline{G}}(v) = [u_1, u_i]$ com $1 \leq i \leq p$, então $N_{S(G)}(v) = [u_{i+1}, u_{|S(G)|}]$. Logo v pertence a $K_r(G)$.

Caso 2) Se $v \in S(\overline{G})$ tem $N_{\overline{G}}(v) = [u_i, u_{|K(\overline{G})|}]$ com $q \leq i \leq |K(\overline{G})|$, então $N_{S(G)}(v) = [u_1, u_{i-1}]$. Logo v pertence a $K_l(G)$.

Caso 3) Se $v \in S(\overline{G})$ tem $N_{\overline{G}}(v) = [u_1, u_i] \cup [u_j, u_{|K(\overline{G})|}]$ para $1 \leq i \leq p$ e $q \leq j \leq |K(\overline{G})|$, então $N_{S(G)}(v) = [u_{i+1}, u_{j-1}]$. Como $1 \leq i \leq p < q \leq j \leq |K(\overline{G})|$, $v \in K_c(G)$.

Caso 4) Agora considere que $K_p(\overline{G}) \neq \emptyset$ e $K_q(\overline{G}) \neq \emptyset$. Há dois sub-casos.

Sub-caso 4.1) Ou não existe $x_e \in S(\overline{G})$ tal que $N_{\overline{G}}(x_e) = [u_1, u_i]$, $0 \leq i < p$; ou não existe $x_d \in S(\overline{G})$ tal que $N_{\overline{G}}(x_d) = [u_j, u_{|K(\overline{G})|}]$, $q \leq j \leq |K(\overline{G})|$. Então, $K_l(G) = \emptyset$ ou $K_r(G) = \emptyset$ ou ambos.

Sub-caso 4.2 Existe $x_e \in S(\overline{G})$ tal que $N_{\overline{G}}(x_e) = [u_1, u_i]$, $0 \leq i < p$, e $x_d \in S(\overline{G})$ tal que $N_{\overline{G}}(x_d) = [u_j, u_{|K(\overline{G})|}]$, $q \leq j \leq |K(\overline{G})|$. Então, suponha sem perda de generalidade que x_e e x_d são tais que $|N_{\overline{G}}(x_e)|$ e $|N_{\overline{G}}(x_d)|$ são mínimas. Logo, $|N_{S(G)}(x_e)|$ e $|N_{S(G)}(x_d)|$ são máximas. Como $p < q$, $N_{S(G)}(x_e) \cup N_{S(G)}(x_d) = S(G)$. Como x_e e x_d pertencem a $K(G)$, conclui-se que $N_{S(G)}(x_e) \cup N_{S(G)}(x_d) = V(G)$.

Então, todo vértice de $K(G)$ pertence a exatamente um dos conjuntos $K_l(G)$, $K_c(G)$ ou $K_r(G)$ e existe uma partição de $K(G)$ que respeita o enunciado.

\Leftarrow Vamos mostrar que se G tem uma partição que respeita o enunciado, então G é um grafo split-co-comparabilidade. Então suponha que G é um grafo split com uma partição dos vértices como descrita no enunciado. É suficiente provar que $K(\overline{G})$ está linearmente ordenado de forma que cada vértice $v \in K(\overline{G})$ têm a vizinhança de uma das formas do Teorema 2.10.

Caso 1) Se $v \in K_l(G)$, então $N_{S(G)}(v) \in [u_1, u_i]$, logo, $N_{\overline{G}}(v) \in [u_{i+1}, u_{|K(\overline{G})|}]$.

Caso 2) Se $v \in K_c(G)$, então $N_{S(G)}(v) \in [u_i, u_j]$, $1 < i \leq j < |S(G)|$, então, $N_{\overline{G}}(v) \in [u_1, u_{i-1}] \cup [u_{j+1}, u_{|K(\overline{G})|}]$ como $i \leq j$, todo vértice desse conjunto não é adjacente a pelo menos um elemento de $K(\overline{G})$.

Caso 3) Se $v \in K_r(G)$, então $N_{S(G)}(v) \in [u_i, u_{|K(\overline{G})|}]$, logo, $N_{\overline{G}}(v) \in [u_1, u_{i-1}]$.

Suponha que $K_l(G) \neq \emptyset$ e $K_r(G) \neq \emptyset$. Por contradição, assumamos que $N_G(x_e) \cup N_G(x_r) \neq V(G)$. Então existe pelo menos um vértice em G que não é vizinho de x_e nem de x_r . Como x_e e x_r são vértices de $K_l(G)$ e $K_r(G)$ respectivamente, em \overline{G} eles serão vértices do conjunto independente com vizinhos em $K_l(\overline{G})$ e $K_r(\overline{G})$. Como há pelo menos um vértice em G que não é vizinho de x_e ou x_r , esse vértice pertence a $K_c(\overline{G})$ e tem como vizinhos x_e e x_r , um absurdo pela definição de grafo split-comparabilidade.

Então, se existe um vértice em G que é vizinho de x_e e x_r , em \overline{G} esse vértice pertence a $K_c(\overline{G})$. \square

O próximo capítulo mostra como a caracterização apresentada no Teorema 3.4 pode auxiliar na determinação do índice cromático dos grafos split-co-comparabilidade.

4 COLORAÇÃO DE ARESTAS EM GRAFOS SPLIT-CO-COMPARABILIDADE

Assim como o Teorema 2.10 estabelece uma ordem linear para os vértices da clique de um grafo split-comparabilidade, o Teorema 3.4 permite estabelecer uma ordem parcial para os vértices de $K_l(G)$ e $K_r(G)$ em um grafo split-co-comparabilidade G . Para tal, considere os vértices de $K_l(G)$ em ordem decrescente de seus graus e os vértices de $K_r(G)$ em ordem crescente de seus graus. Os vértices em $K_c(G)$ tem uma ordem parcial de acordo com a ordem crescente do menor valor i para o qual um vértice $v_k \in K_c(G)$ é adjacente a $u_i \in S(G)$. Assim, a ordem $K_l(G) \prec K_c(G) \prec K_r(G)$ é uma ordem parcial dos vértices em $K(G)$. Além disso, esta ordem estabelece uma relação de contingência de vizinhanças entre os vértices de $K_l(G)$, tal que para quaisquer dois vértices $v_k, v_j \in K_l(G)$, tem-se $N(v_k) \subseteq N(v_j)$ se, e somente se $v_j \prec v_k$. Similarmente, quaisquer dois vértices $v_k, v_j \in K_r(G)$ têm $N(v_k) \subseteq N(v_j)$ se, e somente se $v_k \prec v_j$. A partir desta observação, os $\Delta(G)$ -vértices de um grafo split-co-comparabilidade, considerando-se uma ordem parcial de $K(G)$ como a descrita, ou pertencem a $K_c(G)$ ou são os primeiros vértices consecutivos com mesmo grau em $K_l(G)$ ou são os últimos vértices consecutivos com mesmo grau em $K_r(G)$. Neste capítulo, essa observação é usada para determinar em que casos o Problema da Coloração de Arestas está resolvido para os split-co-comparabilidade.

Um dos casos em que o Problema da Coloração de Arestas está resolvido é quando todos os $\Delta(G)$ -vértices pertencem a $K_l(G)$ ou todos os $\Delta(G)$ -vértices pertencem a $K_r(G)$, nesse caso todos os $\Delta(G)$ -vértices tem a mesma vizinhança. Segundo Machado e Figueiredo (2010), é suficiente considerar apenas o subgrafo H induzido pelos $\Delta(G)$ -vértices e seus vizinhos. Neste caso, H tem vértice universal e, portanto, é Classe 2 se e, somente se, é sobrecarregado. Portanto, vale o seguinte teorema.

Teorema 4.1. *Seja G um grafo split-co-comparabilidade. Se todos os $\Delta(G)$ -vértices pertencem a $K_l(G)$ ou todos os $\Delta(G)$ -vértices pertencem a $K_r(G)$, então G é Classe 2 se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado.*

Demonstração. Considere o conjunto X dos $\Delta(G)$ -vértices e sua vizinhança. Como todos os $\Delta(G)$ -vértices têm a mesma vizinhança, então o subgrafo $G[X]$ tem vértice universal.

Pelo Teorema 2.1, $G[X]$ é Classe 1 se, e somente se, não é sobrecarregado. Observe que $G[X]$ é o seminúcleo de G . Pelo Teorema 2.5, $\chi'(G[X]) = \chi'(G)$. Então G é Classe 1 se, e somente se, $G[X]$ não é sobrecarregado. Então G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado. \square

Como Cruz (2017) resolveu o Problema da Coloração de Arestas para os grafos split-comparabilidade, então todo grafo split-co-comparabilidade que for um grafo split-comparabilidade pode ser colorido utilizando o algoritmo polinomial apresentado por Cruz (2017).

Neste caso, os grafos são chamados de split-permutação. Uma caracterização famosa dos grafos permutação é que são grafos de comparabilidade cujo complemento também é um grafo de comparabilidade (GOLUMBIC, 2004).

Em Ortiz e Villanueva (2010) os autores apresentam uma caracterização para os grafos split-permutação, como mostra o Teorema 4.2.

Teorema 4.2. (ORTIZ; VILLANUEVA, 2010) *Um grafo split-comparabilidade $G = (K(G), S(G), E)$ é um split-permutação se, e somente se, S pode ser particionado em S_1 e S_2 , e cada subconjunto pode ser totalmente ordenado tal que $s_i < s_j$ se $N_G(s_i) \subseteq N_G(s_j)$ para $s_i, s_j \in S_1$ ou $s_i, s_j \in S_2$.*

Observe que a classe do grafo split-permutação é a interseção dos grafos split-comparabilidade com os split-co-comparabilidade. Portanto, para esses grafos vale o Corolário 4.3.

Corolário 4.3. *Seja G um grafo split-co-comparabilidade. Se G é um grafo de permutação, então G é Classe 1 se, e somente se, G não é vizinhança- sobrecarregado.*

Demonstração. Segue do Teorema 2.13. □

Diante dos resultados apresentados pelo Teorema 4.1 e pelo Corolário 4.3, é interessante investigar quais os grafos split-co-comparabilidade para os quais o Problema da Coloração de Arestas permanece em aberto.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

A ampla gama de publicações sobre o Problema da Coloração de Arestas em grafos split e em outras classes de grafos mostra a pertinência do estudo deste tema. Um resultado inicial interessante apresentado neste trabalho são as caracterizações da classe dos grafos split-co-comparabilidade por subgrafos proibidos e por propriedades estruturais relacionadas com uma ordem dos vértices. A partir dessas caracterizações, principalmente a partir da segunda, foi possível identificar um subconjunto dos grafos split-co-comparabilidade para o qual o índice cromático é conhecido. Também é possível concluir que o Problema da Coloração de Arestas permanece em aberto somente para um subconjunto dos grafos split-co-comparabilidade que não são grafos permutação, têm grau máximo par e possuem semi-núcleo sem vértice universal. Espera-se que tais caracterizações ajudem na criação de novas técnicas de coloração de arestas para este subconjunto.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, S. M. d. **Coloração de Arestas em Grafos Split**. 2012. 98 f. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação, Campinas, SP, 2012.
- BARANYAI, Z. On the factorization of the complete uniform hypergraph. In: **Infinite and finite sets**. [S.l.: s.n.], 1975. v. 1, p. 91–108.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph theory (graduate texts in mathematics)**. New York: Springer, 2008.
- CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **Chromatic graph theory**. [S.l.]: CRC press, 2008.
- CHEN, B. L.; FU, H. L.; KO, M. T. Total chromatic number and chromatic index of split graphs. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 17, p. 137–146, 1995.
- CRUZ, J. B. d. S. **Coloração de Arestas em Grafos Split-Comparabilidade**. 2017. 62 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Computação, Sorocaba, SP, 2017.
- FOLDES, S.; HAMMER, P. L. Split graphs having dilworth number two. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 666–672, 1977.
- GOLUMBIC, M. C. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. [S.l.]: Elsevier, 2004.
- HOLYER, I. The np-completeness of edge-coloring. **SIAM Journal on Computing**, v. 10, p. 718–720, 1981.
- MACHADO, R. C. S.; FIGUEIREDO, C. M. H. de. Decompositions for edge-coloring join graphs and cobipartite graphs. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 158, n. 12, p. 1336–1342, 2010.
- ORTIZ, C.; VILLANUEVA, M. On split-comparability graphs. **Proc. II ALIO-EURO Workshop on Practical Combinatorial Optimization**, Valparaiso, Chile, p. 91–105, 1996.
- _____. Threshold dimension of split-permutation graphs. **Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing**, v. 75, p. 117–127, 2010.
- PLANTHOLT, M. J. The chromatic index of graphs with a spanning star. **Journal of Graph Theory**, v. 5, p. 45–53, 1981.
- ROSEN, K. H. **Discrete mathematics and its applications**. 7. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2014.
- STIEBITZ, M. *et al.* **Graph Edge Coloring: Vizing’s theorem and goldberg’s conjecture**. [S.l.]: Wiley, 2012.
- VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. **Diskret. Analiz**¹, v. 3, n. 7, p. 25–30, 1964. (em Russo).

¹ O nome completo deste periódico era *Akademiya Nauk SSSR. Sibirskoe Otdelenie. Institut Matematiki. Diskretny i Analiz. Sbornik Trudov*. O nome foi alterado para *Metody Diskretnogo Analiza* no ano de 1980 e o periódico parou de ser publicado em 1991. Uma versão em inglês está disponível em (STIEBITZ *et al.*, 2012)

WEST, D. B. **Introduction to graph theory**. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001. v. 2.