

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
**DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE INFORMÁTICA**  
**BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**TATHIANA MIKAMURA BARCHI**

**COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM GRAFOS ARCO-CIRULARES**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**PONTA GROSSA**  
**2019**

**TATHIANA MIKAMURA BARCHI**

**COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM GRAFOS ARCO-CIRULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Ma. Denise do Rocio Maciel  
Coorientador: Prof.<sup>a</sup> Dra. Sheila Morais de Almeida

**PONTA GROSSA**  
**2019**



Ministério da Educação  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
Câmpus Ponta Grossa

Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Departamento Acadêmico de Informática  
Bacharelado em Ciência da Computação



---

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

### **COLORAÇÃO DE VÉRTICES EM GRAFOS ARCO-CIRCULARES**

por

**TATHIANA MIKAMURA BARCHI**

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi apresentado em três de Dezembro de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Ciência da Computação. A candidata foi arguida pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

---

**Profa. MSc. Denise do Rocio Maciel**  
Orientadora

---

**Prof. Dr. Hugo Valadares Siqueira**  
Membro titular

---

**Prof. Dr. Leandro Miranda Zatesko**  
Membro titular

---

**Prof. MSc. Geraldo Ranthum**  
Responsável pelo Trabalho de Conclusão  
de Curso

---

**Profa. Dra. Mauren Louise Sguario**  
Coordenador do curso

-O Termo de Aprovação assinado encontra-se arquivado na Secretaria Acadêmica -

*“Não tem jeito: se a gente não fizer  
mais do que costuma e sabe fazer,  
a vida vai ficar sempre igual.”*

*Ruth Manus*

## RESUMO

M. BARCHI, Tathiana. **Coloração de Vértices em Grafos Arco-Circulares**. 2019. 45p. Trabalho de Conclusão de Curso de Bacharelado em Ciência da Computação – Federal Technology University - Paraná. Ponta Grossa, 2019.

O Problema da Coloração de Vértices permanece em aberto para a classe dos grafos arco-circulares. Além disso, sabe-se que a versão de decisão deste problema é NP-completa mesmo quando restrita a esta classe. Apesar disso, existem algoritmos eficientes para algumas subclasses, como arco-circulares próprios e arco-circulares perfeitos. Nesse trabalho foram estudadas duas técnicas com complexidade de tempo polinomial para a coloração de vértices: Algoritmo Guloso e Contração de Dupla de Vértices. Embora estas técnicas nem sempre resultem em uma coloração de vértices ótima, podem ser aplicadas com sucesso em grafos cordais. Modificamos estas técnicas para colorir de forma eficiente um subconjunto de grafos arco-circulares que não são perfeitos e não são próprios.

**Palavras-chaves:** Coloração de Vértices. Grafos arco-circulares. Contração de Dupla. Algoritmo Guloso.

## ABSTRACT

M. BARCHI, Tathiana. **Vertex Coloring on Circular-Arc Graphs**. 2019. 45p. Work of Conclusion Course in Bachelor of Science in Computer Science – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2019.

The Vertex Coloring Problem remains open for circular-arc graphs. Moreover, it is known that the decision version of this problem is NP-complete even when restricted to this class. However, there are efficient algorithms for some subclasses such as proper circular-arc graphs and perfect circular-arc graphs. In this work, two polynomial time vertex coloring techniques are studied: Greedy Algorithm and Pair-contracting Operation. Although there are cases in which the vertex coloring presented by these techniques are not optimal, they can be successfully used on chordal graphs. We modify these techniques to efficiently color a subset of the circular-arc graphs which are not perfect and not proper.

**Keywords: Vertex Coloring. Circular-arc graph. Pair-contracting Operation. Greedy Algorithm.**

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– Contraexemplo de Kempe dado por Heawood (1890) .....	9
Figura 2	– Um mapa e sua representação por um grafo .....	10
Figura 3	– Um grafo que não é planar .....	11
Figura 4	– Exemplo de grafo de interseção .....	12
Figura 5	– Representação arco-circular .....	12
Figura 6	– Grafo ciclo .....	16
Figura 7	– Grafo completo .....	18
Figura 8	– Grafo ciclo .....	21
Figura 9	– Grafo ciclo colorido com Algoritmo Guloso .....	22
Figura 10	– Grafo bipartido .....	23
Figura 11	– Grafo bipartido em níveis .....	24
Figura 12	– Grafo bipartido com coloração aplicada por Algoritmo Guloso .....	25
Figura 13	– Grafo cordal .....	25
Figura 14	– Grafo cordal colorido .....	27
Figura 15	– Contração de $x$ e $y$ .....	28
Figura 16	– Grafo que não admite dupla par .....	29
Figura 17	– Sequência de contrações .....	30
Figura 18	– Sequência de contrações em grafo não perfeito .....	30
Figura 19	– Grafo fracamente cordal .....	31
Figura 20	– Contração dos vértices $b$ e $f$ .....	31
Figura 21	– Contração dos vértices $fb$ e $d$ .....	31
Figura 22	– Grafo $G_k$ .....	32
Figura 23	– Grafo fracamente cordal colorido .....	32
Figura 24	– Grafo de Meyniel .....	33
Figura 25	– Contração dos vértices $a$ e $c$ .....	33
Figura 26	– Contração dos vértices $b$ e $d$ .....	34
Figura 27	– Grafo de Meyniel colorido .....	34
Figura 28	– Exemplo Grafo arco-circular sem $I$ numerado .....	36
Figura 29	– Grafo arco-circular colorível pelo Algoritmo Guloso .....	38

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\chi(G)$	Número cromático de $G$
$\Delta(G)$	Grau máximo do grafo $G$
$\omega(G)$	Tamanho da maior clique do grafo $G$
$A \setminus B$	Conjunto $A$ menos os elementos que pertencem a $B$
$C_n$	Grafo ciclo com $n$ vértices
$d(v)$	Grau do vértice $v$
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo $G$
$\overline{G}$	Complemento do grafo $G$
$G_k$	Grafo obtido após $k$ sucessivas contrações do grafo $G$
$G[U]$	Subgrafo de $G$ induzido pelo conjunto $U$ .
$K_n$	Grafo completo com $n$ vértices
$K_{s,t}$	Grafo bipartido completo com partição em conjuntos com $s$ e $t$ vértices
$N_G(v)$	Vizinhança aberta do vértice $v$
$N_G[v]$	Vizinhança fechada do vértice $v$
$P_n$	Grafo caminho com $n$ vértices
$V(G)$	Conjunto de vértices do grafo $G$



## SUMÁRIO

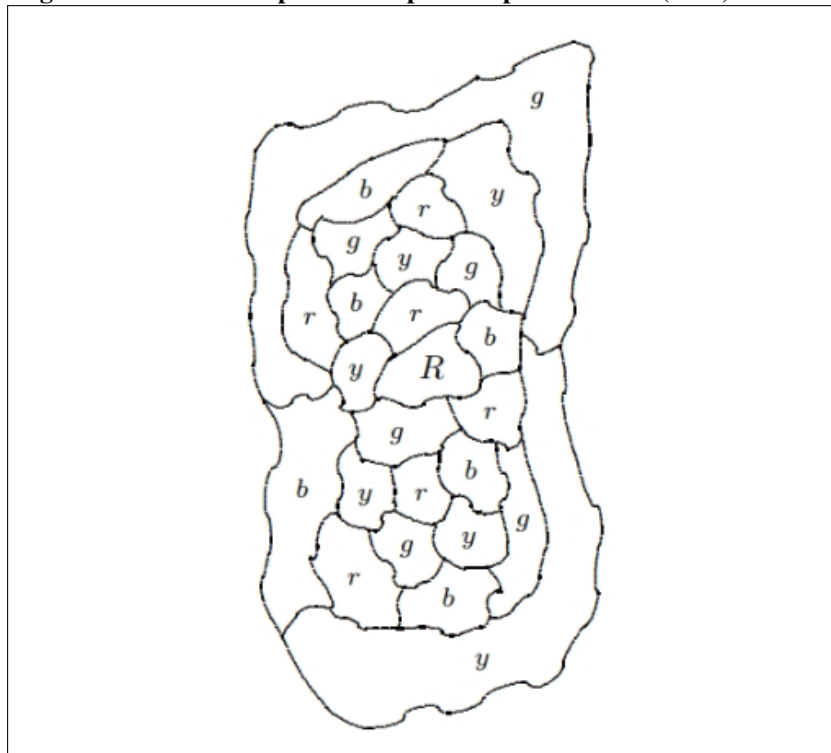
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
1.1	OBJETIVOS .....	13
1.2	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO .....	13
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS E RESULTADOS ANTERIORES</b> .....	<b>15</b>
2.1	RESULTADOS ANTERIORES .....	19
<b>3</b>	<b>ALGORITMO GULOSO</b> .....	<b>21</b>
3.1	BIPARTIDOS .....	23
3.2	CORDAIS .....	24
<b>4</b>	<b>CONTRAÇÃO DE DUPLA DE VÉRTICES</b> .....	<b>28</b>
4.1	FRACAMENTE CORDAIS .....	30
4.2	MEYNIEL .....	32
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b> .....	<b>35</b>
5.1	ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO GULOSO .....	35
5.2	ADAPTAÇÃO DA CONTRAÇÃO DE DUPLA DE VÉRTICES .....	39
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>40</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1852 surgiu o Problema das Quatro Cores, que questionava se era possível colorir qualquer mapa com no máximo quatro cores de forma que regiões vizinhas recebessem cores distintas. Durante um século foram feitas diversas tentativas de resolver o Problema das Quatro Cores, dentre elas pode-se citar os trabalhos de Kempe (1879), Heawood (1890) e Appel e Haken (1977).

Kempe (1879) publicou no *American Journal of Mathematics* sua prova de que quatro cores eram suficientes para colorir qualquer mapa sem que regiões vizinhas tenham a mesma cor. Esta prova foi dada como válida e o Problema das Quatro Cores resolvido. Onze anos depois Heawood (1890) apresentou um contra-exemplo, mostrado na Figura 1, de um mapa que não poderia ser colorido pela técnica de Kempe. Neste exemplo, Heawood mostrava que após colorir quase todas as regiões do mapa utilizando a técnica de Kempe, restava uma região que não se podia colorir. Na Figura 1, as cores  $g$ ,  $b$ ,  $r$  e  $y$  correspondem a *green*, *blue*, *red* e *yellow*, e a região  $R$  é a que não pode ser colorida pela técnica apresentada por Kempe.

**Figura 1 – Contraexemplo de Kempe dado por Heawood (1890)**



Fonte: Golumbic (2004)

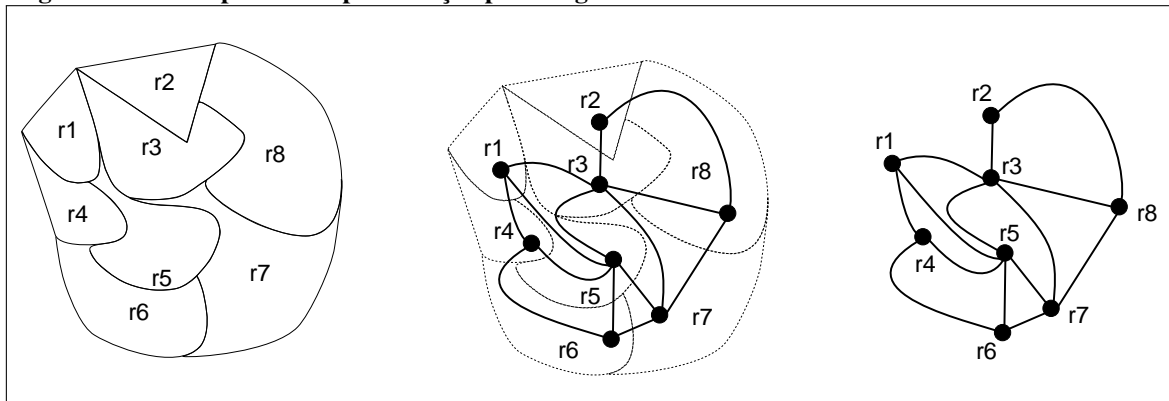
Apesar da prova de Kempe conter falhas, sua técnica foi, em partes, reutilizada por Heawood (1890) para provar que não são necessárias mais do que cinco cores para a coloração de qualquer mapa.

Até então, o Problema das Quatro Cores permanecia em aberto e somente cem anos depois uma resposta afirmativa foi dada por Appel e Haken (1977). A solução apresentada

utilizou-se da ajuda de computadores IBM que, por força bruta, coloriram um conjunto reduzido de casos, verificados um a um duas vezes, por diferentes programas em diferentes computadores (ROGERS, 2011). Essa demonstração foi suficiente para provar que não existe um mapa que precise de mais do que quatro cores para ser colorido de forma que regiões vizinhas recebam cores diferentes.

Apesar da falha na prova apresentada por Kempe (1879), seu trabalho trouxe observações interessantes. Uma delas é que se pode representar qualquer mapa por um grafo, em que cada região corresponde a um vértice e dois vértices são adjacentes se, e somente se, as respectivas regiões que representam são vizinhas. A Figura 2 mostra um mapa e sua representação como um grafo.

**Figura 2 – Um mapa e sua representação por um grafo**



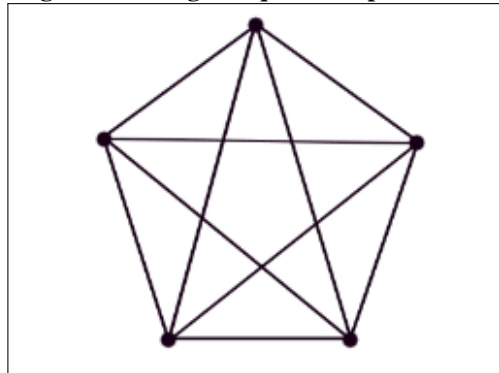
**Fonte: Autoria própria**

Todos os grafos que modelam mapas tem a propriedade de poderem ser desenhados no plano sem que suas arestas se cruzem e, por isso, são chamados de grafos planares. Kempe (1879) observou que uma coloração dos vértices desses grafos corresponde a uma coloração das regiões dos mapas que representam. Assim, uma consequência da solução do Problema das Quatro Cores foi a prova de que, utilizando-se no máximo quatro cores, é possível colorir os vértices de qualquer grafo planar de forma que vértices conectados por uma aresta tenham cores diferentes.

Sabe-se que existem grafos que não são planares, ou seja, não podem ser desenhados no plano sem que suas arestas se cruzem. Um exemplo, é o grafo apresentado na Figura 3. Além de tentar resolver o Problema das Quatro Cores, Kempe (1879) levantou uma questão mais geral: dados um grafo  $G$  qualquer e um número natural  $k$ , é possível colorir os vértices de  $G$  com  $k$  cores de forma que vértices vizinhos tenham cores distintas? Este problema ficou conhecido como Problema da Coloração de Vértices e é o objeto de estudo deste Trabalho de Conclusão de Curso.

O Problema da Coloração de Vértices é NP-completo (KARP, 1972), ou seja, não se conhece algoritmo eficiente que o resolva. Por outro lado, caso futuramente algum algoritmo eficiente seja encontrado para qualquer problema NP-completo, todos os problemas da Classe NP poderão ser resolvidos em tempo polinomial (CARLSON; JAFFE; WILES, 2006). Dentre

**Figura 3 – Um grafo que não é planar**



**Fonte: Autoria própria**

esses problemas, pode-se citar o Problema do Caixeiro Viajante, que tem diversas aplicações reais, como o roteamento de veículos e de pacotes na internet. Outro problema que seria resolvido eficientemente é o da fatoração de um número inteiro, o que implicaria, por exemplo, em quebrar chaves da criptografia RSA de forma eficiente.

Responder se existe um algoritmo polinomial para algum dos problemas NP-completos é considerado pelo *Clay Mathematics Institute* um dos sete problemas mais desafiadores deste milênio (CARLSON; JAFFE; WILES, 2006). Dada tal dificuldade e importância, o *Clay Mathematics Institute* oferece um milhão de dólares para quem conseguir tal façanha.

Diante da dificuldade em se resolver o Problema da Coloração de Vértices, alguns trabalhos concentram-se em apresentar resultados para classes de grafos específicas, como bipartidos, ciclos, completos entre outras. Neste trabalho, o Problema da Coloração de Vértices é estudado na classe dos grafos arco-circulares, um subconjunto bem estruturado dos grafos de interseção.

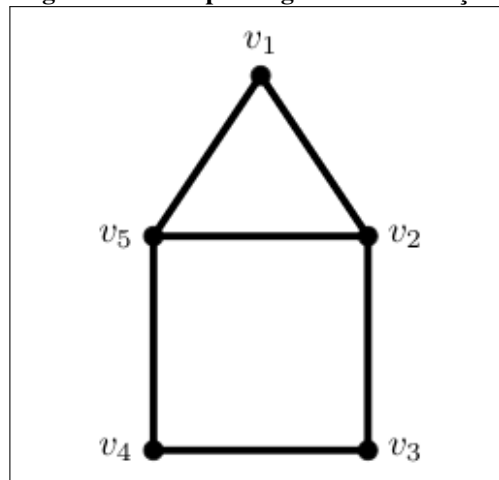
**Definição 1.1.** (SZPILRAJN-MARCZEWSKI, 1945)<sup>1</sup> Um grafo é chamado grafo de interseção se, existe uma família de conjuntos  $F = \{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$ , tal que cada vértice do grafo corresponde a um dos conjuntos  $F_1, F_2, \dots, F_n$  e dois vértices são adjacentes se, e somente se, os respectivos conjuntos possuem interseção não-vazia.

A Figura 4 mostra o grafo de interseção da família  $F = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ , em que  $S_1 = \{0, 1\}$ ,  $S_2 = \{1, 2, 3\}$ ,  $S_3 = \{3, 5\}$ ,  $S_4 = \{4, 5\}$  e  $S_5 = \{0, 2, 4\}$ . Observe que nesse exemplo o vértice  $v_i$  corresponde ao conjunto  $S_i$ , para todo  $i$  que satisfaz  $1 \leq i \leq 5$ .

Todo grafo é grafo de interseção de alguma família de conjuntos. Assim, é interessante considerar casos especiais de grafos de interseção. Esse trabalho concentra-se na subclasse dos grafos arco-circulares.

**Definição 1.2.** (TUCKER, 1971) Um grafo arco-circular é o grafo de interseção de um conjunto  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  de arcos da circunferência.

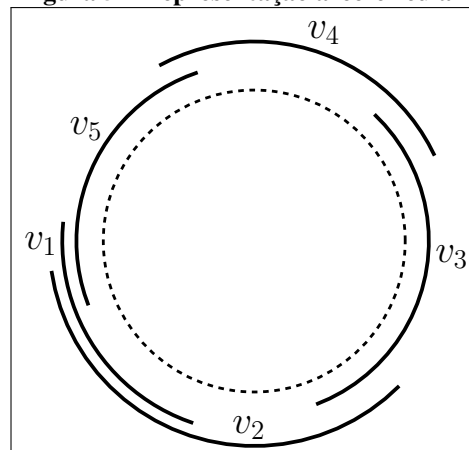
<sup>1</sup> A versão em inglês pode ser encontrada em Golumbic (2004)

**Figura 4 – Exemplo de grafo de interseção**

Fonte: Autoria própria

Pela Definição 1.2, em um grafo arco-circular, cada vértice corresponde a um arco da circunferência e existe uma aresta entre dois vértices se e somente se os arcos correspondentes tem interseção não vazia.

A representação gráfica de uma família de arcos da circunferência que corresponde a determinado grafo  $G$  é chamada de representação arco-circular de  $G$ . A Figura 5 mostra uma representação arco-circular para o grafo dado na Figura 4. Nesta e em outras imagens a seguir, a circunferência é representada por uma linha pontilhada para auxiliar o leitor.

**Figura 5 – Representação arco-circular**

Fonte: Autoria própria

Um mesmo grafo  $G$  pode ser grafo de interseção de diferentes famílias de arcos da circunferência e, conseqüentemente, ter mais de uma representação arco-circular.

De acordo com Garey *et al.* (1980) mesmo quando o Problema da Coloração de Vértices recebe como entrada somente grafos arco-circulares, trata-se de um problema NP-completo. A importância de encontrar um algoritmo eficiente para o Problema da Coloração de Vértices em grafos arco-circulares se dá pela sua aplicação e contribuição para a Teoria da Computação. Em relação à aplicação, os grafos dessa classe são utilizados para representar modelos de escalona-

mentos cíclicos e alocação de registros na memória do computador (ORLIN; BONUCCELLI; BOVET, 1981).

No escalonamento cíclico, considera-se uma série de tarefas que têm que ser realizadas periodicamente e deve-se atribuir tarefas que ocorrem ao mesmo tempo a executores diferentes. Neste caso, cada período de tempo durante o qual a tarefa é executada pode ser representado por um arco da circunferência. Cada executor será representado por uma cor e, ao se atribuir cores diferentes aos arcos com interseção não-vazia, nenhum executor terá duas tarefas ao mesmo tempo. Neste caso, o número mínimo de cores para uma coloração de vértices do grafo arco-circular é também o menor número de executores necessários para realizar todas as tarefas.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar algoritmos polinomiais para solução do Problema da Coloração de Vértices em subconjuntos da classe arco-circular. Para atendê-lo, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Encontrar técnicas de coloração que possam ser utilizadas para coloração de vértices em grafos arco-circulares;
- Adaptar técnicas encontradas para resolver o Problema da Coloração de Vértices em um subconjunto dos grafos arco-circulares.

Assim, foi estudado o Algoritmo Guloso com Busca em Largura e a operação de Contração de Duplas de Vértices. O Algoritmo Guloso é conhecidamente aplicado com sucesso na coloração de vértices em grafos bipartidos e em grafos cordais (FULKERSON; GROSS, 1965). A Contração de Dupla de Vértices é aplicada com sucesso na coloração de grafos fracamente cordais (HAYWARD; HOÀNG; MAFFRAY, 1989). Ambas as técnicas foram adaptadas para que um conjunto de grafos arco-circulares tenha uma coloração de vértices ótima em tempo polinomial. Até onde vai nosso conhecimento, este conjunto inclui grafos para os quais o Problema da Coloração de Vértices estava em aberto<sup>2</sup>.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

O trabalho está organizado em seis capítulos. O Capítulo 2 apresenta fundamentos sobre o Problema da Coloração de Vértices e mostra algumas classes de grafos para as quais o problema está resolvido em tempo polinomial. O Capítulo 3 apresenta o Algoritmo Guloso como

---

<sup>2</sup> Casos em que o Problema da Coloração de Vértices está em aberto são casos em que o número cromático ainda é desconhecido.

técnica para coloração de vértices. As seções 3.1 e 3.2 apresentam a aplicação deste algoritmo para as classes dos grafos bipartidos e dos cordais, respectivamente. Seguindo a mesma estrutura, o Capítulo 4 apresenta a técnica de coloração de vértices conhecida como Contração de Dupla de Vértices e mostra a aplicação desta técnica para os grafos fracamente cordais e de Meyniel. Os resultados obtidos durante o desenvolvimento desta pesquisa são apresentados no Capítulo 5 que está dividido em duas seções. A Seção 5.1 apresenta uma adaptação do Algoritmo Guloso para a coloração de vértices de um subconjunto dos grafos arco-circulares. Para este mesmo subconjunto, a Seção 5.2 apresenta uma adaptação da técnica de Contração de Dupla de Vértices. O Capítulo 6 apresenta a conclusão deste trabalho e aponta questões interessantes para trabalhos futuros. Para facilitar o acesso às definições necessárias para a compreensão do texto, este documento apresenta um índice remissivo.

## 2 FUNDAMENTOS E RESULTADOS ANTERIORES

Este capítulo apresenta os primeiros conceitos sobre o Problema da Coloração de Vértices e alguns resultados deste problema em classes de grafos bastante conhecidas.

Um grafo  $G$  é formado por um conjunto de vértices, denotado por  $V(G)$ , e um conjunto de arestas, denotado por  $E(G)$ , no qual cada aresta representa um par de vértices que são adjacentes (GOLUMBIC, 2004). Neste trabalho, a aresta que representa o par de vértices  $u$  e  $v$  é denotada por  $uv$ . A cardinalidade do conjunto de vértices é denotada por  $n$  e a cardinalidade do conjunto de arestas é denotada por  $m$ .

Uma coloração de vértices em um grafo  $G$  é uma atribuição de cores para os vértices de  $G$ . Uma coloração de vértices é dita própria se para quaisquer dois vértices adjacentes são atribuídas cores diferentes (CHARTRAND; ZHANG, 2008). A menor quantidade de cores com que se pode realizar uma coloração de vértices própria de um grafo  $G$  é chamada de número cromático de  $G$  e é denotada por  $\chi(G)$ . Uma coloração de vértices de um grafo  $G$  é ótima se utiliza  $\chi(G)$  cores para realizar uma coloração própria dos vértices de  $G$ . A versão de otimização do Problema da Coloração de Vértices é, dado um grafo  $G$ , determinar o valor de  $\chi(G)$ . A versão de decisão do Problema da Coloração de Vértices é, dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , responder se é possível realizar uma coloração própria dos vértices de  $G$  com  $k$  cores. Neste trabalho as cores serão representadas por números naturais.

Um laço em um grafo  $G$  é uma aresta  $uv$  tal que  $u = v$ . Quando um vértice é adjacente a si mesmo, não é possível apresentar uma coloração de vértices própria. Um conjunto de arestas múltiplas em um grafo é um conjunto de arestas que conectam o mesmo par de vértices. Para uma coloração própria de vértices, não importa se dois vértices  $u$  e  $v$  estão conectados por uma única aresta ou por várias arestas, pois se existe pelo menos uma aresta entre eles,  $u$  e  $v$  precisam receber cores diferentes. Logo, se um grafo possui arestas múltiplas, pode-se desconsiderar as arestas extras, deixando-se apenas uma entre cada par de vértices vizinhos. Assim, a coloração de vértices obtida para o grafo com arestas múltiplas removidas também é uma coloração de vértices para o grafo original. Grafos que não possuem laços nem arestas múltiplas são chamados de grafos simples. Neste trabalho, todos os grafos considerados são simples.

Um caminho em um grafo  $G$  é uma sequência  $v_1v_2 \dots v_k$  que não repete vértices e tal que  $v_i$  é adjacente a  $v_{i+1}$  quando  $1 \leq i < k$ . Um grafo é conexo se entre quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  existe um caminho. Quando um grafo é desconexo, cada subgrafo conexo maximal<sup>1</sup> é chamado de componente conexa. Quando um grafo  $G$  é desconexo,  $\chi(G)$  é o maior dentre os números cromáticos de suas componentes conexas. Portanto, uma solução em tempo polinomial para o Problema da Coloração de Vértices em grafos conexos implica em solução polinomial para grafos desconexos. Assim, este trabalho considera apenas grafos conexos.

Uma questão interessante do ponto de vista teórico é determinar qual a estrutura dos

<sup>1</sup> Um subgrafo conexo é maximal se não está propriamente contido em nenhum outro subgrafo conexo.

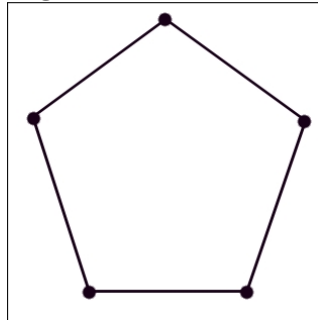


grafos que possuem  $\chi(G) = k$ , quando  $k$  é um número natural fixo. Se  $\chi(G) = 1$ , então  $G$  necessariamente é um grafo sem arestas. Portanto, se  $\chi(G) = 1$  e  $G$  é conexo, então  $G$  tem um único vértice e é chamado de grafo trivial.

Um ciclo em um grafo  $G$  é uma sequência de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tal que todos os vértices são diferentes e  $v_i$  é adjacente a  $v_{i+1}$ , para  $1 \leq i < k$ , e  $v_k$  é adjacente a  $v_1$ . Quando  $k$  é par, o ciclo é chamado de ciclo par. Da mesma forma, quando  $k$  é ímpar, trata-se de um ciclo ímpar. Sabe-se que  $\chi(G) = 2$  se, e somente se,  $G$  é um grafo sem ciclo ímpar (GOLUMBIC, 2004). Grafos que têm  $\chi(G) = 2$  são chamados de grafos bipartidos.

Um grafo ciclo é um grafo  $G$  com conjunto de vértices  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e conjunto de arestas  $E(G) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\}$ . Os grafos ciclos são denotados por  $C_n$ , sendo  $n$  o número de vértices pertencentes ao ciclo. A Figura 6 a seguir mostra o grafo ciclo de tamanho 5, ou apenas  $C_5$ .

**Figura 6 – Grafo ciclo**



**Fonte: Autoria própria**

O Teorema 2.1 apresenta o número cromático dos grafos ciclos, um resultado bastante conhecido da Teoria Cromática de Grafos.

**Teorema 2.1.** *Seja  $C_n$  um ciclo com  $n$  vértices. Então,*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{se } n \text{ for par;} \\ 3, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Se  $n$  é par, é suficiente apresentar uma coloração de vértices de um grafo ciclo  $C_n$  com duas cores. Considere um grafo ciclo  $C_n$  com  $n$  par e numere seus vértices consecutivamente  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Pinte cada vértice ímpar com cor 1 e cada vértice par com cor 2. Essa é uma coloração do grafo  $C_n$  com duas cores. Como existem vértices adjacentes, não se pode colorir o grafo com menos que duas cores e, portanto, esta é uma coloração ótima.

Então considere um grafo ciclo  $C_n$  com  $n$  ímpar. Suponha que os vértices do  $C_n$  estão ordenados  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de forma que  $v_i$  é adjacente a  $v_{i+1}$ ,  $1 \leq i < n$ . Então, vértices com índices pares devem ter cor diferente dos vértices com índices ímpares. Além disso,  $v_n$  é um vértice com um vizinho de índice par ( $v_{n-1}$ ) e um vizinho com índice ímpar ( $v_1$ ). Portanto, são necessárias pelo menos três cores: uma para os vértices com índice par, uma para os vértices com índice ímpar diferentes de  $v_n$  e uma outra cor para  $v_n$ . A coloração pode ser feita pela mesma

estratégia do caso anterior, mas deve-se atribuir a cor 3 a  $v_n$ . Portanto, se o grafo  $C_n$  tem  $n$  ímpar, seus vértices tem uma coloração ótima com três cores.  $\square$

Observa-se que a estratégia de coloração de vértices apresentada no Teorema 2.1 tem complexidade de tempo linear em relação ao número de vértices. Esse procedimento analisa a paridade de cada vértice de  $v_1$  a  $v_n$  uma vez.

Com o resultado do número cromático para grafos ciclos, pode-se apresentar o Teorema 2.2, que prova que os grafos com  $\chi(G) = 2$  são exatamente aqueles que não têm ciclo ímpar. Como já mencionado, esses grafos são chamados de grafos bipartidos.

**Teorema 2.2.** (KÖNIG, 1916) *Seja  $G$  um grafo conexo não trivial. O grafo  $G$  possui  $\chi(G) = 2$  se, e somente se,  $G$  não contém ciclo ímpar.*

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo não trivial.

Primeiro, vamos mostrar por contraposição que se  $G$  possui  $\chi(G) = 2$  então  $G$  não contém ciclos ímpares. Então, considere um grafo  $G$  que contém pelo menos um ciclo ímpar. A partir do Teorema 2.1, a coloração própria desse ciclo ímpar exige pelo menos 3 cores. Logo,  $\chi(G) \neq 2$ .

Resta provar que se  $G$  é um grafo conexo, não trivial e sem ciclos ímpares, então  $\chi(G) = 2$ . Como  $G$  é conexo e não-trivial,  $\chi(G) \geq 2$ . A seguir é apresentada uma coloração própria dos vértices de  $G$  com duas cores, garantindo que  $\chi(G) = 2$ .

Tome um vértice  $u$  qualquer de  $G$  e faça a partição  $[U, W]$  dos vértices de  $G$  da seguinte forma:

$$U = \{v : \text{a distância entre } u \text{ e } v \text{ é par}\},$$

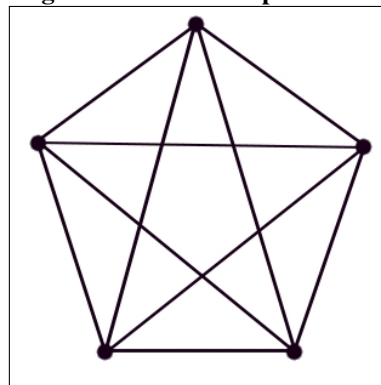
$$W = \{v : \text{a distância entre } u \text{ e } v \text{ é ímpar}\}.$$

Pinte os vértices de  $U$  com cor 1 e pinte os vértices de  $W$  com cor 2. Como  $G$  é conexo, todos os vértices foram coloridos. Vamos mostrar que não existem vértices adjacentes com a mesma cor. Suponha, por absurdo, que existem dois vértices adjacentes com a mesma cor  $c \in \{1, 2\}$ . Sem perda de generalidade, sejam  $v_1$  e  $v_2$  tais vértices. Então, tanto a distância de  $u$  a  $v_1$ , quanto a distância de  $u$  a  $v_2$  é par. Sejam  $P_1$  e  $P_2$  os caminhos de  $v_1$  a  $u$  e de  $v_2$  a  $u$ , respectivamente. Se não existe nenhum vértice em comum em  $P_1$  e  $P_2$ , além de  $u$ , então faça  $w = u$ ,  $P'_1 = P_1$  e  $P'_2 = P_2$ . Se existirem vértices em comum em  $P_1$  e  $P_2$  além de  $u$ , chame de  $w$  o vértice comum mais próximo a  $v_1$  e  $v_2$ . Sejam  $P'_1$  e  $P'_2$  os subcaminhos correspondentes de  $w$  até  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Note que o número de arestas em  $P'_1$  e  $P'_2$  têm a mesma paridade. Então  $P'_1$  concatenado a  $P'_2$  concatenado à aresta  $v_1v_2$  constitui um ciclo ímpar, um absurdo, já que  $G$  não tem ciclo ímpar. De forma análoga, pode-se provar que é um absurdo existirem dois vértices adjacentes coloridos com cor 2. Portanto, não existem vértices adjacentes com a mesma cor e  $\chi(G) = 2$ .  $\square$

Retomando a ideia geral: quando  $\chi(G) = 1$ ,  $G$  é o grafo trivial; quando  $\chi(G) = 2$ ,  $G$  é um grafo sem ciclo ímpar; quando  $\chi(G) > 2$ ,  $G$  tem pelo menos um ciclo ímpar. Embora determinar se  $\chi(G) \in \{1, 2\}$  possa ser feito de maneira eficiente, decidir se  $\chi(G) = 3$  é um problema NP-completo, mesmo quando restrito a grafos planares com grau máximo igual a 4, como apresentado por Garey e Johnson (2002).

Para um grafo  $G$  com  $n$  vértices, sabe-se que  $\chi(G) = n$  se, e somente se, existe aresta entre todo par de vértices de  $G$ . De fato, caso  $G$  tenha um par de vértices que não sejam adjacentes, então pode-se atribuir a mesma cor a esses dois vértices e  $\chi(G) \leq n - 1$ . Grafos em que todos os vértices são adjacentes entre si são chamados de grafos completos. Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . A Figura 7 mostra um grafo completo  $K_5$ .

**Figura 7 – Grafo completo**



**Fonte: Autoria própria**

**Teorema 2.3.**  $\chi(G) = n$  se e somente se  $G$  é o grafo completo com  $n$  vértices.

Um limitante inferior conhecido para o número cromático está relacionado com um parâmetro conhecido como clique máxima. Um conjunto de vértices que são todos adjacentes entre si é uma clique. Em cada grafo  $G$ , o tamanho da maior clique é denotado por  $\omega(G)$  e cliques com  $\omega(G)$  vértices são chamadas de cliques máximas. Por definição, em qualquer coloração de vértices ótima, os vértices pertencentes a uma mesma clique devem ter cores distintas uns dos outros. Como a maior clique em  $G$  tem tamanho  $\omega(G)$ , tem-se como consequência imediata um limitante inferior para o número cromático.

**Corolário 2.4.** Para qualquer grafo  $G$ ,  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .

É interessante observar que  $\omega(G)$  é um limitante inferior justo para o número cromático de  $G$ , já que existem classes de grafos onde  $\chi(G) = \omega(G)$ , como os grafos perfeitos, apresentados a seguir.

**Definição 2.5.** Um subgrafo de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Definição 2.6.** Dado um grafo  $G$  e um subconjunto de vértices  $U \subseteq V(G)$ , o subgrafo de  $G$  induzido por  $U$ , denotado por  $G[U]$ , é o subgrafo de  $G$  com conjunto de vértices  $U$  e tal que para

qualquer par de vértices  $x$  e  $y$  pertencentes a  $U$ , a aresta  $xy$  pertence a  $G[U]$  se, e somente se,  $xy$  é uma aresta em  $G$ .

**Definição 2.7.** (BERGE, 1960) Um grafo  $G$  é perfeito se todo subgrafo induzido  $H$  do grafo  $G$  tem  $\chi(H) = \omega(H)$ .

Quando Berge (1960) introduziu os grafos perfeitos, apresentou também duas conjecturas para a caracterização desta classe de grafos. Mais tarde, estas conjecturas foram provadas e são conhecidas como Teorema Fraco e Teorema Forte dos grafos perfeitos.

**Teorema 2.8** (Teorema Fraco dos Grafos Perfeitos). (LOVÁSZ, 1972) *Um grafo é perfeito se, e somente se, seu complemento é perfeito.*

O enunciado do Teorema Forte dos Grafos Perfeitos necessita do conceito de complemento de um grafo.

**Definição 2.9.** O complemento de um grafo  $G$  é o grafo  $\overline{G}$  tal que  $V(\overline{G}) = V(G)$  e  $E(\overline{G}) = \{uv \mid u, v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$ .

Mesmo tendo sido investigada diligentemente, a prova da Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos foi apresentada apenas quatro décadas após ter sido enunciada por Berge (1960). Este foi um dos mais celebrados resultados da Combinatória nos últimos cem anos.

**Teorema 2.10** (Teorema Forte dos Grafos Perfeitos). (CHUDNOVSKY *et al.*, 2006) *Um grafo  $G$  é perfeito se, e somente se, todo ciclo induzido em  $G$  e em  $\overline{G}$  têm o mesmo tamanho.*

Se  $G$  é um grafo tal que todo ciclo induzido em  $G$  e em  $\overline{G}$  têm o mesmo tamanho, então  $G$  é chamado de grafo de Berge. O Teorema Forte dos Grafos Perfeitos mostra então que as classes de Berge e dos grafos perfeitos são equivalentes. Uma outra caracterização da classe é apresentada a seguir.

**Definição 2.11.** (BRANDSTADT; SPINRAD; LE, 1999)  $G$  é um grafo perfeito se, e somente se, nem  $G$  e nem  $\overline{G}$  contém ciclo induzido ímpar  $C_n$  com  $n \geq 5$ .

Os próximos capítulos apresentam algumas técnicas de coloração de vértices que permitem encontrar soluções ótimas com complexidade de tempo polinomial para algumas subclasses dos grafos perfeitos. Como será visto, nem todo grafo arco-circular é perfeito. Contudo, este trabalho mostra que tais técnicas podem ser adaptadas para apresentar uma coloração de vértices ótima para um subconjunto dos grafos arco-circulares não necessariamente perfeitos.

## 2.1 RESULTADOS ANTERIORES

Esta seção apresenta resultados existentes sobre o Problema da Coloração de Vértices em grafos arco-circulares.

Em *On Perfect Circular Arc Graphs*, Chen, Hu e Zang (2005) apresentaram um algoritmo para coloração de grafos arco-circulares perfeitos com complexidade  $O(n^2m)$ .

Em  $O(n^2)$  *Algorithm for Coloring Proper Circular Arc Graphs*, Orlin, Bonucelli e Bovet (1981) apresentaram um algoritmo de complexidade  $O(n^2)$  para coloração de grafos arco-circulares próprios com  $K$  cores, para um  $K$  divisor de  $n$ . Tal algoritmo pode realizar uma coloração com  $\omega(G)$  cores, desde que  $\omega(G)$  seja divisor de  $n$ .

No trabalho *A Linear Algorithm for Maximum Weight Cliques in Proper Circular Arc Graphs*, Bhattacharya, Hell e Huang (1996) apresentaram um algoritmo com complexidade  $O(n)$  que faz uma  $q$ -coloração em grafos arco-circulares próprios, para qualquer  $q$  fixo. Tal resultado é aplicável aos grafos arco-circulares que são potências de ciclo, para os quais as técnicas apresentadas neste trabalho não se aplicam.

Em *Coloring a Family of Circular Arcs*, Tucker (1975) apresentou dois limitantes superiores para o número cromático da classe dos grafos arco-circulares. Seja  $r_{sup}$  o tamanho do maior conjunto de arcos sobrepostos e seja  $r_{inf}$  o tamanho do menor conjunto de arcos sobrepostos, então  $\chi(G) \leq r_{sup}(G) + r_{inf}(G) \leq 2r_{sup}(G) - 1$  para qualquer grafo arco-circular e  $\chi(G) \leq \frac{3}{2}r_{sup}(G)$ , se quando não existe um  $C_3$  induzido dando a volta na circunferência.

Além dos resultados de Tucker (1975), Valencia-Pabon (2001) apresentou em *Revisiting Tucker's Algorithm to Color Circular Arc Graphs* resultado complementar ao trabalho de Tucker (1975). Seja  $l$  o menor ciclo induzido que dá a volta na circunferência, se  $l \geq 4$ , então  $\lfloor \frac{l-1}{l-2} \rfloor r_{sup} + 1$  cores são suficientes para colorir os arcos de um dado grafo arco-circular.

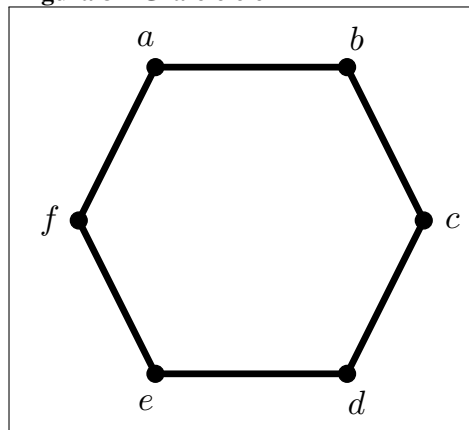
### 3 ALGORITMO GULOSO

Suponha que as cores são números naturais. A ideia mais intuitiva para a solução do Problema da Coloração de Vértices é escolher um vértice não colorido e atribuir a ele a menor cor que não causa conflito com os vizinhos. Ao repetir esse processo para todos os vértices do grafo, obtém-se uma coloração própria e, em alguns casos, ótima. Essa técnica é conhecida como Algoritmo Guloso. De maneira geral, um algoritmo é chamado de guloso se tenta resolver um problema fazendo escolhas que são localmente ótimas a cada fase, com a esperança (que nem sempre se concretiza) de encontrar um ótimo global.

Dado um vértice  $v$  em um grafo  $G$ , a vizinhança de  $v$  é o conjunto de todos os vértices que são adjacentes a  $v$  em  $G$ . A vizinhança de  $v$  é denotada por  $N_G(v)$  e chamada de vizinhança aberta de  $v$  no grafo  $G$ . O conjunto  $N_G(v) \cup \{v\}$  é chamado de vizinhança fechada de  $v$  no grafo  $G$  e denotado por  $N_G[v]$ . Quando não houver ambiguidade, a notação do grafo  $G$  poderá ser omitida, escrevendo-se apenas  $N(v)$  ou  $N[v]$ .

**Definição 3.1.** (CHARTRAND; ZHANG, 2008) Seja  $G$  um grafo de ordem  $n$  e suponha que seus  $n$  vértices estão listados em uma ordem específica. O Algoritmo Guloso percorre esta sequência e atribui a cada vértice a menor cor possível considerando sua vizinhança aberta.

**Figura 8 – Grafo ciclo**

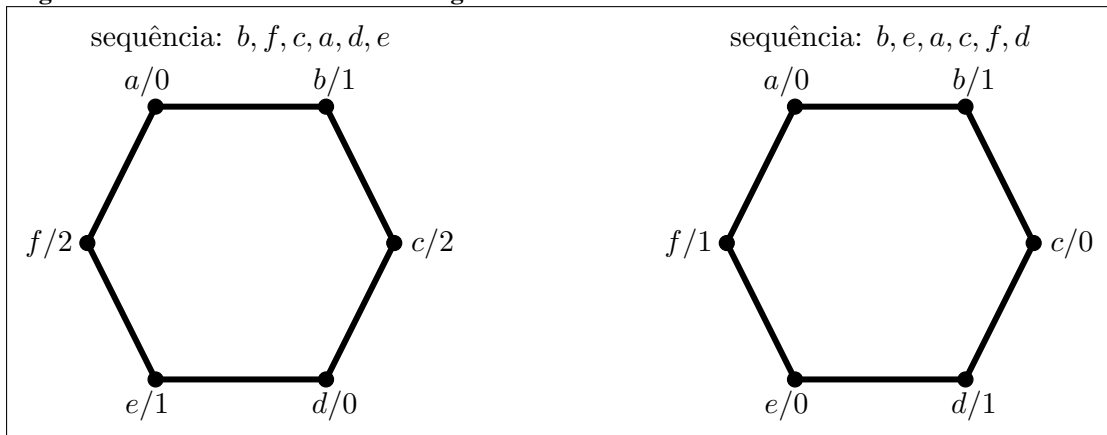


**Fonte: Autoria própria**

A Figura 9 mostra duas possíveis colorações para os vértices do grafo  $G$  da Figura 8. O grafo do exemplo é um  $C_6$ , que possui  $\chi(G) = 2$ , e é utilizado o Algoritmo Guloso, porém com duas sequências de vértices diferentes. Note que a sequência à direita faz com que a quantidade de cores utilizadas seja maior que o número cromático.

O grau de um vértice  $v$  em um grafo simples  $G$ , expresso por  $d(v)$ , é a quantidade de vizinhos de  $v$  no grafo  $G$ . Pela definição, nos grafos simples,  $d(v) = |N_G(v)|$ . O maior grau de um vértice em um grafo  $G$  é chamado de grau máximo de  $G$ , sendo expresso por  $\Delta(G)$ .

O livro de Chartrand e Zhang (2008) apresenta um limitante superior para o número de cores utilizadas pelo Algoritmo Guloso.

**Figura 9 – Grafo ciclo colorido com Algoritmo Guloso**

Fonte: Autoria própria

**Teorema 3.2.** (CHARTRAND; ZHANG, 2008) *A aplicação do Algoritmo Guloso em qualquer grafo  $G$  resulta em uma coloração própria de vértices com no máximo  $\Delta(G) + 1$  cores.*

*Demonstração.* Suponha que os vértices de  $G$  estão listados na ordem  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e que o Algoritmo Guloso de coloração seja aplicado. Então  $v_1$  recebe a cor 1 e para  $2 \leq i < n$ , o vértice  $v_i$  recebe a cor 1 ou a cor  $k + 1$ , na qual  $k$  é o maior inteiro tal que todas as cores  $1, 2, \dots, k$  estão presentes na vizinhança de  $v_i$  no conjunto  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ . Em  $S$  podem haver desde nenhum vizinho de  $v_i$  até no máximo  $d(v_i)$  vizinhos de  $v_i$ , dessa forma o maior valor de  $k$  é  $d(v_i)$ . Consequentemente a cor que será atribuída a  $v_i$  é no máximo  $d(v_i) + 1$ . Portanto,  $K \leq \max_{1 \leq i \leq n} d(v_i) + 1 = \Delta(G) + 1$ .  $\square$

Pelo Teorema 3.2, sabe-se que a quantidade de cores utilizadas pelo Algoritmo Guloso para colorir qualquer grafo em qualquer sequência de vértices é no mínimo  $\chi(G)$  e no máximo  $\Delta(G) + 1$ . Brooks (1941) usou Algoritmo Guloso para provar que, se o grafo não for um ciclo ímpar ou um completo, então o limitante superior é mais justo.

**Teorema 3.3.** (BROOKS, 1941) *Se  $G$  não é um ciclo ímpar nem um grafo completo, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

Todo grafo possui uma ordenação dos vértices para a qual o Algoritmo Guloso produz uma coloração ótima. A dificuldade do Problema da Coloração de Vértices é justamente encontrar em tempo polinomial uma ordenação adequada para cada grafo. Este capítulo, apresenta como encontrar em tempo linear uma ordem apropriada dos vértices para grafos bipartidos e grafos cordais. Assim, estas classes têm uma coloração de vértices ótima que pode ser obtida de maneira eficiente utilizando o Algoritmo Guloso.

### 3.1 BIPARTIDOS

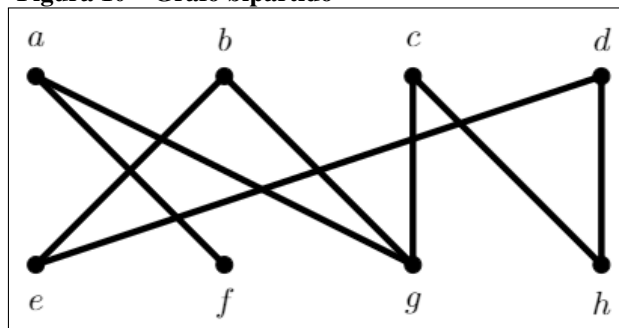
Como já visto, um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo ímpar. O Teorema 2.2 presente no Capítulo 2 é suficiente para provar que grafos bipartidos não necessitam de 3 cores ou mais para uma coloração própria. Essa seção apresenta o Algoritmo Guloso como técnica de coloração de vértices aplicada à classe dos grafos bipartidos.

Observe que, dada uma coloração de vértices própria para um grafo  $G$ , o conjunto dos vértices que estão coloridos com a mesma cor não possui arestas entre si. Na Teoria dos Grafos, um conjunto de vértices que não são vizinhos entre si é chamado de conjunto independente. Então, quando um grafo tem uma coloração própria com  $k$  cores, possui  $k$  conjuntos independentes, um para os vértices de cada cor. Assim, um grafo bipartido também pode ser caracterizado por uma partição de seu conjunto de vértices em conjuntos independentes.

**Definição 3.4.** (KRISHNAMOORTHY, 1975) Um dado grafo  $G$  é um grafo bipartido se, e somente se, existe uma partição de  $V(G)$  em dois subconjuntos independentes.

A Figura 10 mostra um exemplo de um grafo bipartido  $G$  com partição em dois conjuntos independentes,  $A$  e  $B$ , em que  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{e, f, g, h\}$ .

**Figura 10 – Grafo bipartido**



**Fonte: Autoria própria**

Para colorir um grafo bipartido  $G$  utilizando o Algoritmo Guloso, uma sequência ideal para os vértices pode ser dada pela ordem em que são visitados por um algoritmo de busca, como a Busca em Largura.

Um Algoritmo de Busca em Largura, também chamado de Algoritmo de Busca em Amplitude ou apenas de *BFS* (*Breadth First Search*), é um algoritmo usado para percorrer grafos. Dado um vértice inicial, que pode ser qualquer vértice do grafo, os seus vizinhos são visitados em seguida. Posteriormente todos os vizinhos dos vizinhos do vértice inicial são visitados, e assim por diante. Dessa forma, o grafo é percorrido em níveis<sup>1</sup>; até que o nível mais profundo seja visitado, ou seja, todos os vértices sejam percorridos. A Busca em Largura tem complexidade de tempo  $O(m)$  em grafos conexos. Então, uma ordem para a coloração dos vértices pode ser obtida em tempo linear em função do tamanho do grafo.

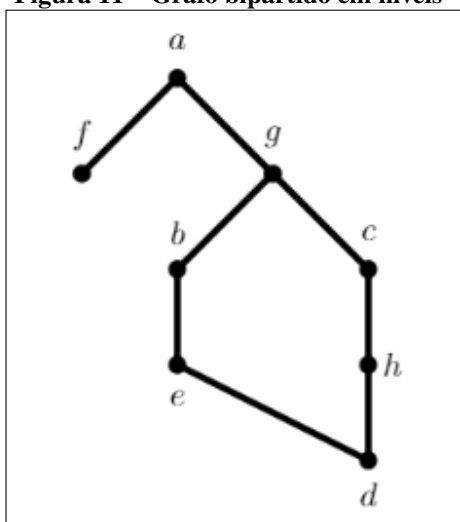
<sup>1</sup> O nível de um vértice é a sua distância até o vértice inicial da Busca em Largura.



Observe que, ao aplicar a Busca em Largura em um grafo bipartido, este será estruturado em níveis de forma que não haverá pares de vértices adjacentes que pertençam a níveis com a mesma paridade. Se tais vértices existissem, o grafo teria um ciclo ímpar e, portanto, não seria bipartido. Então, é suficiente atribuir cor para os vértices através de uma operação matemática em função da paridade do nível do vértice a ser colorido:  $\forall v \in V(G), v = \text{nível}(v) \bmod 2$ .

Para exemplificar, a Figura 11 apresenta o grafo  $G$  dado pela Figura 10 com os vértices dispostos de outra forma.

**Figura 11 – Grafo bipartido em níveis**



Fonte: Autoria própria

**Teorema 3.5.** *Se  $G$  é um grafo bipartido, então o Algoritmo Guloso com Busca em Largura realiza uma coloração ótima em  $G$ .*

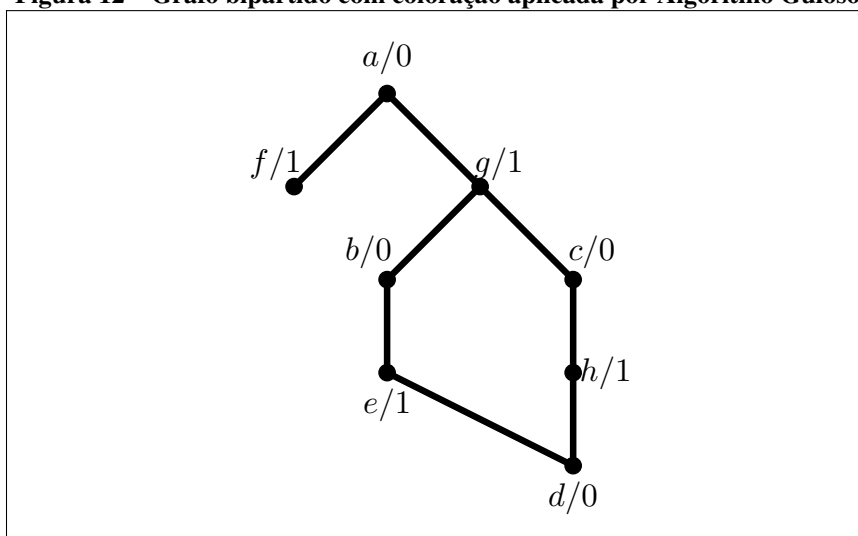
*Demonstração.* Considere um grafo bipartido  $G$  colorido utilizando o Algoritmo Guloso com Busca em Largura. Suponha que os vértices de  $G$  que possuem nível par recebam a cor 0, enquanto os vértices de nível ímpar recebam a cor 1. Por contradição, suponha que duas cores não foram suficientes, ou seja, após aplicar o Algoritmo Guloso, existe um par de vértices adjacentes com a mesma cor. Então, estes vértices estão em níveis com a mesma paridade. Logo,  $G$  possui um ciclo de tamanho ímpar, um absurdo.  $\square$

A Figura 12 a seguir mostra como o grafo  $G$  fica colorido após utilizar o Algoritmo Guloso com a Busca em Largura, iniciando pelo vértice  $a$ . Note que foi utilizada a menor quantidade de cores possível.

### 3.2 CORDAIS

Esta seção mostra como o Algoritmo Guloso pode ser utilizado para obtenção de uma coloração de vértices ótima em grafos cordais.

**Figura 12 – Grafo bipartido com coloração aplicada por Algoritmo Guloso**

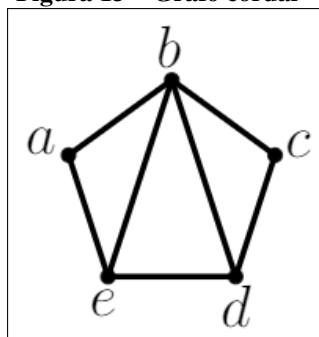


Fonte: Autoria própria

**Definição 3.6.** (HAJNAL; SURÁNYI, 1958)<sup>2</sup> Um dado grafo  $G$  é um grafo cordal se todo ciclo de  $G$  com tamanho maior que três possui uma corda.

A Figura 13 mostra o exemplo de um grafo cordal  $G$ . Note que este grafo possui um ciclo de tamanho cinco com duas cordas compostas pelas arestas  $eb$  e  $bd$ .

**Figura 13 – Grafo cordal**



Fonte: Autoria própria

É interessante considerar técnicas de coloração de vértices que sejam aplicáveis a grafos cordais, já que todo grafo arco-circular contém um grafo cordal como subgrafo. Assim, uma estratégia a se considerar para a coloração de vértices de um grafo arco-circular,  $G$ , é: 1) considere um subgrafo  $G'$  do grafo  $G$  que seja cordal; 2) aplique a técnica de coloração de vértices utilizada em grafos cordais para colorir  $G'$ ; 3) Faça adaptações necessárias na coloração dos vértices de  $G$  para atribuir cores aos vértices ainda não coloridos.

Claro que para esta técnica funcionar, a adaptação da coloração para os vértices não coloridos de  $G$  deve ser possível. São adaptações como esta que discutiremos neste trabalho. Por ora, esta seção se destina a apresentar como o Algoritmo Guloso pode ser aplicado em grafos cordais para a obtenção de uma coloração de vértices ótima.

<sup>2</sup> Há vasta literatura com versão em inglês desta definição, por exemplo em Chartrand e Zhang (2008).

**Definição 3.7.** Um vértice  $v$  é simplicial se  $N[v]$  é uma clique em  $G$ .

Em 1961 Dirac (1961) mostrou que todo grafo cordal com pelo menos dois vértices possui pelo menos dois vértices simpliciais. Usando esta propriedade, Fulkerson e Gross (1965) apresentaram um algoritmo iterativo para reconhecimento de grafos cordais. O Algoritmo de Fulkerson e Gross consiste em repetidamente eliminar vértices simpliciais do grafo até que não existam mais. Se todos os vértices do grafo forem eliminados, então trata-se de um grafo cordal. Além disso, neste caso, a ordem em que os vértices foram eliminados é chamada de ordem perfeita de eliminação. Formalmente, a ordem perfeita de eliminação é definida a seguir.

**Definição 3.8.** (FULKERSON; GROSS, 1965) Uma ordem perfeita de eliminação é uma sequência de vértices  $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  na qual cada vértice  $v_i$  é simplicial no subgrafo induzido  $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$ .

A ordem perfeita de eliminação permite uma outra caracterização dos grafos cordais.

**Definição 3.9.** (FULKERSON; GROSS, 1965) Um dado grafo  $G$  é um grafo cordal se, e somente se,  $G$  possui uma ordem perfeita de eliminação.

Dado um grafo cordal  $G$ , é possível encontrar uma ordem perfeita de eliminação a partir do Algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica (ROSE; TARJAN; LUEKER, 1976). A Busca em Largura Lexicográfica consiste em atribuir rótulos para os vértices de  $G$  a partir dos quais é possível criar uma ordem de vértices. O Algoritmo 1 apresenta a Busca em Largura Lexicográfica.

---

**Algoritmo 1:** Busca em Largura Lexicográfica

---

```

1 atribua o rótulo  $\emptyset$  para cada vértice;
2 para  $i \leftarrow n$  até 1, passo -1 faça
3    $v \leftarrow$  vértice que não está em  $\sigma$  e possui o maior rótulo lexicográficoa;
4    $\sigma(i) \leftarrow v$ ;
5   update: para cada vértice  $w \in N(v)$  que não pertence a  $\sigma$ , concatene  $i$  ao
      rótulo de  $w$ ;
6 fim
```

---

<sup>a</sup> O rótulo lexicográfico é ordenado de acordo com a ordem dos termos em dicionário, por exemplo: 1, 12, 123, 124, 2, 22, 24 estão em ordem lexicográfica.

Para cada vértice  $v \in V(G)$ , o rótulo de  $v$  possui um conjunto de números. Esse conjunto é formado a partir das atribuições de rótulos da linha 5.

A saída do Algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica é uma sequência  $\sigma$ , formada de acordo com a sequência lexicográfica dos rótulos de cada vértice. Quando o grafo  $G$  é cordal, a sequência  $\sigma$  é uma ordem perfeita de eliminação. Esse algoritmo possui complexidade

$O(n + m)$ , logo, é um algoritmo com complexidade de tempo linear em relação ao tamanho do grafo (GOLUMBIC, 2004).

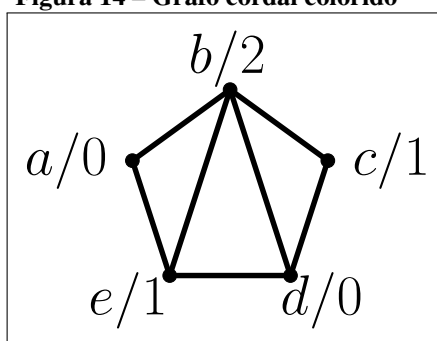
O Teorema 3.10 mostra que o Algoritmo Guloso pode ser utilizado para a obtenção de uma coloração de vértices ótima dos grafos cordais utilizando uma ordem perfeita de eliminação.

**Teorema 3.10.** (LIMA, 2017) *O Algoritmo Guloso encontra uma solução ótima para o Problema da Coloração de Vértices em grafos cordais com valor  $\chi(G) = \omega(G)$  a partir de uma ordem perfeita de eliminação.*

*Demonstração.* Considere um grafo cordal  $G$  e uma ordem perfeita de eliminação de seus vértices  $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Seja  $\sigma^r = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$ . Aplicando o Algoritmo Guloso sobre  $\sigma^r$ , todo vértice  $v_i$  é colorido com a cor que possui o menor índice e ainda não foi utilizada por seus vizinhos. A cada iteração do algoritmo, o vértice  $v_i$ , que deve ser colorido, é simplicial em  $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$ . Então, a vizinhança fechada de  $v_i$  no subgrafo  $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$  é uma clique maximal<sup>3</sup> deste subgrafo. Como o tamanho de qualquer clique maximal de  $G$  é limitado a  $\omega(G)$ , pelo menos uma das cores do conjunto  $\{1, \dots, \omega(G)\}$  pode ser atribuída a  $v_i$  na coloração de vértices de  $G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$ , obtendo-se uma coloração de vértices própria para este subgrafo. Como este processo se repete para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq n$ , tem-se uma coloração própria dos vértices de  $G$  com no máximo  $\omega(G)$  cores. Além disso, como  $\omega(G) \leq \chi(G)$ , então  $\chi(G) = \omega(G)$ .  $\square$

No grafo da Figura 13, uma Busca em Largura Lexicográfica a partir do vértice  $a$  resulta na ordem de eliminação perfeita  $\sigma = \{c, d, b, e, a\}$ . Aplicando-se o Algoritmo Guloso sobre  $\sigma^r = \{a, e, b, d, c\}$  obtém-se o grafo colorido da Figura 14.

**Figura 14 – Grafo cordal colorido**



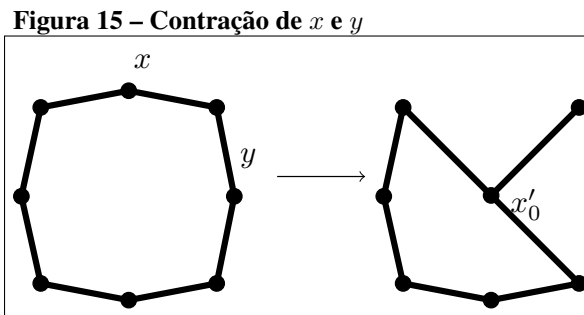
**Fonte: Autoria própria**

<sup>3</sup> Uma clique em  $G$  é maximal se não está propriamente contida em nenhuma outra clique de  $G$ .

#### 4 CONTRAÇÃO DE DUPLA DE VÉRTICES

Considere um grafo  $G$  e dois vértices não-adjacentes  $x$  e  $y$  pertencem a  $G$ . Uma contração de dupla de vértices é uma operação que constrói um grafo  $G^{xy}$  removendo  $x$  e  $y$  de  $G$ , inserindo um novo vértice  $x'$  e fazendo com que  $x'$  seja adjacente a  $N_G(x) \cup N_G(y)$ .

A Figura 15 mostra a contração de dois vértices não adjacentes,  $x$  e  $y$ , em um dado grafo  $G$ , neste caso um  $C_8$ .



Fonte: Autoria própria

A técnica de contração de dupla de vértices consiste em aplicar operações de contração até que não seja mais possível contrair o grafo (até que não existam mais pares de vértices não adjacentes). Depois, realiza-se a coloração dos vértices do grafo contraído. Em seguida, cada vértice contraído passa pelo processo inverso, sendo expandido para a dupla de vértices originais. Observa-se que as expansões devem ser feitas na ordem contrária das contrações. Por fim, cada vértice recebe a mesma cor que havia sido atribuída ao vértice contraído correspondente.

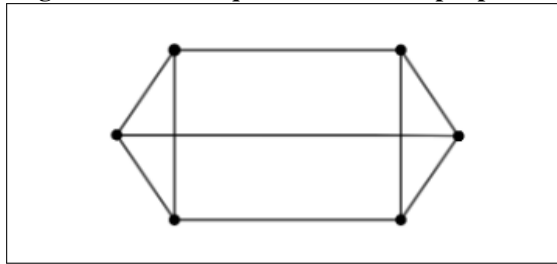
Em relação à estrutura do grafo  $G^{xy}$ , formalmente,  $V(G^{xy}) = V(G) \setminus \{x, y\} \cup \{x'\}$  e  $E(G^{xy}) = E(G) \setminus \{uv : u \in \{x, y\} \wedge v \in V(G) \wedge uv \in E(G)\} \cup \{vx' : v \in V(G) \setminus \{x, y\} \wedge v \in N_G(x) \cup N_G(y)\}$ .

Este capítulo mostra como aplicar a técnica de Contração de Dupla de Vértices para, dado um grafo  $G$ , encontrar seu número cromático,  $\chi(G)$ . Para garantir que a quantidade de cores utilizada seja a menor possível, é necessário que restrições sejam feitas sobre quais pares de vértices serão contraídos (FIGUEIREDO, 1991). Estas restrições relacionam-se à distância entre os vértices  $x$  e  $y$ .

Considere uma sequência de vértices  $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$  que seja um caminho em um grafo  $G$ . Um caminho induzido é par (ímpar) se possui um número de arestas par (ímpar). Dois vértices são chamados de dupla par quando não existe um caminho induzido ímpar entre eles. A Figura 16 mostra um grafo que não admite dupla par pois entre quaisquer pares de vértices existe pelo menos um caminho induzido ímpar (FIGUEIREDO, 1991).

O Lema 4.1 a seguir prova que ao contrair os vértices que formam uma dupla par, o número cromático ( $\chi(G)$ ) e o tamanho da clique máxima ( $\omega(G)$ ) são preservados em relação ao grafo original.

**Figura 16 – Grafo que não admite dupla par**



Fonte: Autoria própria

**Lema 4.1.** (FIGUEIREDO, 1991) *O grafo obtido por contração de uma dupla par tem o mesmo número cromático e tamanho da maior clique que o grafo original.*

*Demonstração.* Seja  $\{x, y\}$  uma dupla par em um grafo  $G$ . Sempre valem as desigualdades  $\omega(G^{xy}) \geq \omega(G)$  e  $\chi(G^{xy}) \geq \chi(G)$ . Suponha que  $\omega(G^{xy}) > \omega(G)$ . Então existe em  $G$  uma clique  $K$  de tamanho  $\omega(G)$  tal que  $N_G(x) \cup N_G(y) \supseteq K$ , mas  $N_G(x) \not\supseteq K$  e  $N_G(y) \not\supseteq K$ . Seja  $a \in K \setminus N_G(x)$  e  $b \in K \setminus N_G(y)$ . Então  $(x, a, b, y)$  é um caminho induzido de tamanho três entre  $x$  e  $y$ , uma contradição já que  $\{x, y\}$  é uma dupla par. Portanto,  $\omega(G^{xy}) = \omega(G)$ .

Por outro lado, como não existe caminho induzido ímpar entre  $x$  e  $y$ , existe uma coloração ótima para  $G$  na qual  $x$  e  $y$  têm a mesma cor. De fato, dada uma coloração ótima para  $G$ , em que  $x$  e  $y$  têm cores diferentes, considere o grafo  $H$  induzido pelos vértices que têm a mesma cor de  $x$  ou a mesma cor de  $y$ . Como  $x$  e  $y$  têm cores diferentes e, em particular, não existe caminho induzido ímpar entre  $x$  e  $y$  no grafo  $H$ , temos que os vértices  $x$  e  $y$  não podem estar na mesma componente conexa de  $H$ . Basta então trocar as duas cores na componente conexa de  $H$  que contém  $x$  para obter uma coloração ótima para  $G$  onde  $x$  e  $y$  têm a mesma cor.

Agora, dada uma coloração ótima de  $G$  em que  $x$  e  $y$  têm a mesma cor, podemos obter uma coloração de  $G^{xy}$  com a mesma quantidade de cores ao atribuir a  $x'$  a mesma cor de  $x$  e de  $y$  e atribuindo aos outros vértices de  $G^{xy}$  a mesma cor da coloração de  $G$ .

□

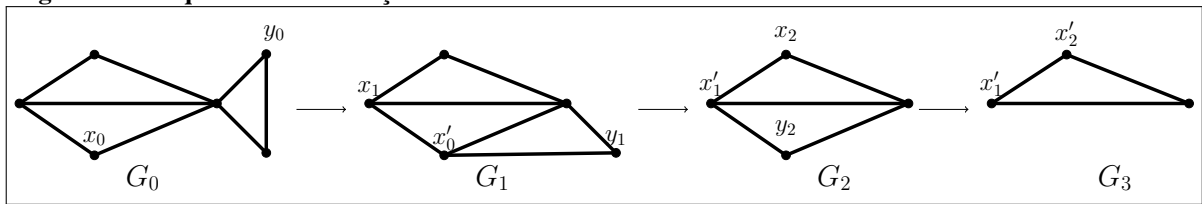
Uma sequência de contrações de  $G$  é uma sequência  $G = \{G_0, G_1, \dots, G_k\}$ , tal que  $G_k$  é um grafo completo, e, para  $1 \leq i \leq k$ , o grafo  $G_i$  é obtido de  $G_{i-1}$  por contração de uma dupla par  $\{x_{i-1}, y_{i-1}\}$ . Em outras palavras, ao final da aplicação recursiva da técnica obtêm-se um grafo de modo que a ordem deste grafo corresponde ao número cromático ( $\chi(G)$ ) do grafo original (FIGUEIREDO, 1991), ou seja,  $\chi(G_0) = |G_k|$ .

A Figura 17 mostra uma sequência de sucessivas contrações de duplas pares para um grafo conhecido como grafo peixe.

A técnica de contração é aplicável para diferentes classes de grafos. A Figura 18 mostra um exemplo de grafo que admite uma sequência de contrações de duplas pares.

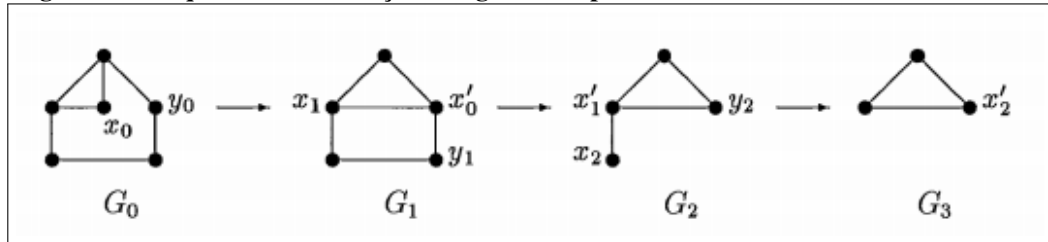
Dessa forma é possível obter uma coloração mínima percorrendo a sequência de contrações no sentido  $G_k$  para  $G_0$ . De modo que, para obter uma coloração mínima para  $G_{i-1}$ , dada

**Figura 17 – Sequência de contrações**



Fonte: Autoria própria

**Figura 18 – Sequência de contrações em grafo não perfeito**



Fonte: Figueiredo (1991)

uma coloração mínima para  $G_i$ , basta colorir  $x_{i-1}$  e  $y_{i-1}$  com a mesma cor de  $x'_{i-1}$  (FIGUEIREDO, 1991).

Lembrando que o grafo resultante de sucessivas contrações,  $G_k$ , sempre será um grafo completo, para o qual o Problema da Coloração de Vértices pode ser resolvido de maneira eficiente, já que é suficiente atribuir uma cor para cada vértice, conforme mostra o Teorema 2.3 no Capítulo 2.

É possível encontrar na literatura classes de grafos que podem ter o Problema da Coloração de Vértices resolvido com essa técnica, como os grafos fracamente cordais e os grafos de Meyniel. As seções a seguir mostram como a Técnica de Contração se aplica a estas classes de grafos.

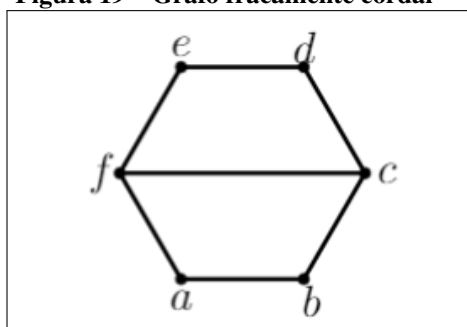
#### 4.1 FRACAMENTE CORDAIS

Essa seção apresenta a técnica Contração de Dupla de Vértices aplicada a classe dos grafos fracamente cordais.

**Definição 4.2.** (HAYWARD; HOÀNG; MAFFRAY, 1989) Um grafo  $G$  é fracamente cordal se, e somente se, nem  $G$  nem  $\bar{G}$  possui um ciclo  $C_n$  induzido com  $n \geq 5$ .

A Figura 19 a seguir mostra um exemplo de grafo fracamente cordal. Note que ele possui dois ciclos induzidos de tamanho 4. Um deles composto pelos vértices  $a, b, c$  e  $f$  e o outro pelos vértices  $c, d, e$  e  $f$ . Note também que ele não possui ciclos induzidos com mais de quatro vértices.

A técnica de Contração de Dupla de Vértices na classe dos grafos fracamente cordais é aplicada contraindo pares de vértices entre os quais qualquer caminho induzido tem tamanho

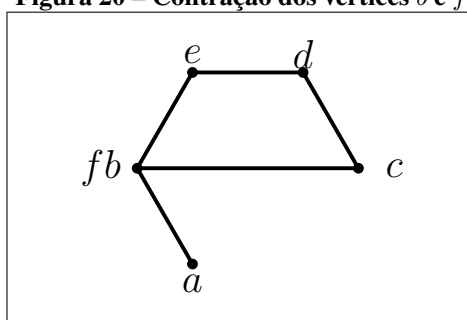
**Figura 19 – Grafo fracamente cordal**

Fonte: Autoria própria

dois. Estes pares de vértices são chamados de dupla dois. Se  $G$  é fracamente cordal, então todo subgrafo induzido de  $G$  que não é uma clique possui uma dupla dois. Além disso, a contração de dupla dois preserva a propriedade de ser fracamente cordal ao longo das contrações (FIGUEIREDO, 1991).

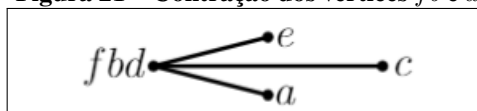
Para o grafo  $G$  dado na Figura 19 é possível contrair, inicialmente, as seguintes duplas dois:  $f e b$ ,  $f e d$ ,  $c e e$ , ou  $c e a$ .

Caso os vértices  $f$  e  $b$  sejam escolhidos para a contração, teremos o seguinte grafo mostrado na Figura 20.

**Figura 20 – Contração dos vértices  $b$  e  $f$** 

Fonte: Autoria própria

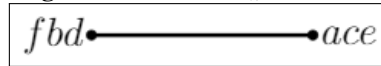
A segunda contração de  $G$  pode ser feita entre as seguintes duplas dois:  $a e c$ ,  $a e e$ ,  $c e e$  ou  $fb e d$ . Ao escolher contrair os vértices  $fb$  com  $d$ , teremos o seguinte grafo, conforme mostra a Figura 21.

**Figura 21 – Contração dos vértices  $fb$  e  $d$** 

Fonte: Autoria própria

Note que dos vértices que podem ser contraídos,  $a$ ,  $c$  e  $e$ , o caminho induzido entre eles é de tamanho dois. Portanto, ao final das sucessivas contrações esses vértices se tornarão apenas um vértice contraído, o vértice  $ace$ . A Figura 22 a seguir mostra a contração final, ou seja, o grafo obtido quando não há mais duplas dois para se contrair.



**Figura 22 – Grafo  $G_k$** 

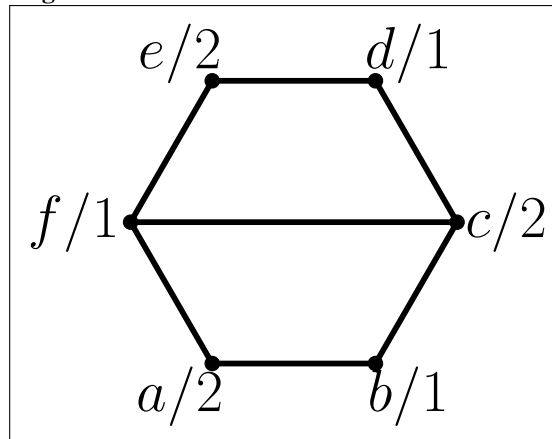
Fonte: Autoria própria

Quando  $G$  é um grafo fracamente cordal, o grafo obtido após todas as possíveis contrações de duplas dois é um grafo completo com cardinalidade  $\omega(G)$ , o tamanho da maior clique do grafo original (FIGUEIREDO, 1991).

Uma vez que um grafo fracamente cordal tenha sido contraído a um grafo completo, uma coloração de vértices para o grafo  $K_{\omega(G)}$  pode ser obtida em tempo  $O(\omega(G))$ , sendo suficiente atribuir a cada vértice de  $K_{\omega(G)}$  um número natural distinto.

Para obter uma coloração de vértices para o grafo fracamente cordal  $G$ , basta atribuir para cada vértice  $v$  a mesma cor atribuída ao respectivo vértice do  $K_{\omega(G)}$  no qual  $v$  foi contraído.

Assim, no exemplo, atribuímos cor 1 para o vértice  $fbd$  e cor 2 para o vértice  $ace$  e fazemos a correspondência de cores para o grafo original. A Figura 23 mostra a coloração do grafo original a partir das cores atribuídas para os vértices do grafo  $K_{\omega(G)}$ .

**Figura 23 – Grafo fracamente cordal colorido**

Fonte: Autoria própria

O Algoritmo de Coloração de Vértices em grafos fracamente cordais utilizando contração de duplas dois foi apresentado por Hayward, Hoàng e Maffray (1989) e pode ser executado em tempo  $O((n + m)n^3)$ .

## 4.2 MEYNIEL

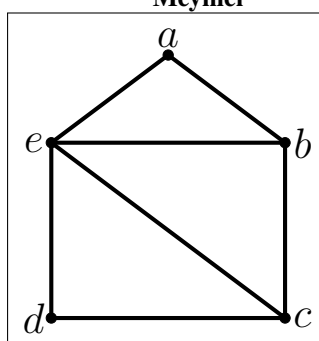
Essa seção apresenta a técnica Contração de Dupla de Vértices aplicada à classe dos grafos de Meyniel.

Como visto, se  $G$  é perfeito então nem  $G$  nem  $\overline{G}$  contém ciclos induzidos ímpares  $C_n$  com  $n \geq 5$ . O grafos de Meyniel são uma subclasse dos grafos perfeitos e, portanto, satisfazem essa propriedade e impõe mais restrições aos ciclos ímpares (não induzidos) existentes no grafo.

**Definição 4.3.** (MEYNIEL, 1984) Uma corda em um ciclo de um grafo  $G$  é uma aresta entre dois vértices não consecutivos do ciclo. Um grafo  $G$  é um grafo de Meyniel se cada ciclo ímpar de tamanho maior ou igual a 5 possuir pelo menos duas cordas.

Nesta classe de grafos as contrações são feitas em pares de vértices não adjacentes que tenham a maior quantidade de vértices adjacentes em comum (FIGUEIREDO, 1991). A Figura 24 mostra um grafo de Meyniel, para o qual será dada uma possível contração.

**Figura 24 – Grafo de Meyniel**

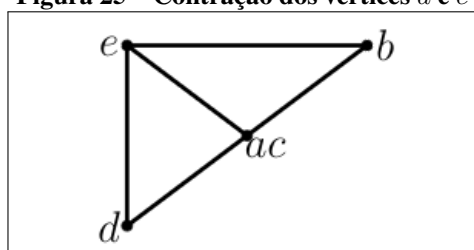


Fonte: Autoria própria

Ao escolher o vértice  $a$  como vértice a ser contraído tem-se que os possíveis vértices para contração são  $c$  ou  $d$ , pois são os vértices não adjacentes de  $a$ . Aplicando o segundo critério para escolha do vértice a ser contraído, ou seja, analisar a semelhança entre as vizinhanças temos:  $N_G(a) \cap N_G(d) = e$  e  $N_G(a) \cap N_G(c) = e, b$ .

Dessa forma temos que  $a$  será contraído com  $c$  resultando no grafo mostrado na Figura 25.

**Figura 25 – Contração dos vértices  $a$  e  $c$**



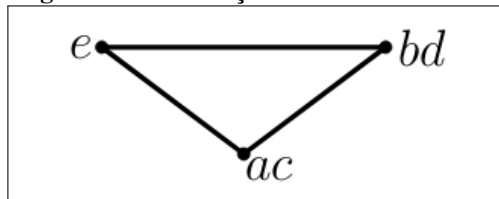
Fonte: Autoria própria

E então só será possível contrair os vértices  $b$  e  $d$ , resultando em um grafo completo, neste caso um  $K_3$ , conforme mostra a Figura 26. Como número cromático do grafo completo é igual ao número de vértices do grafo  $G_k$ , têm-se  $\chi(G_k) = 3$ , conforme o Teorema 2.3.

Se atribuímos uma cor para cada vértice do grafo contraído  $G_k$ , por exemplo,  $e = 1$ ,  $bd = 2$  e  $ac = 3$ , teremos a coloração do grafo original apresentada na Figura 27.

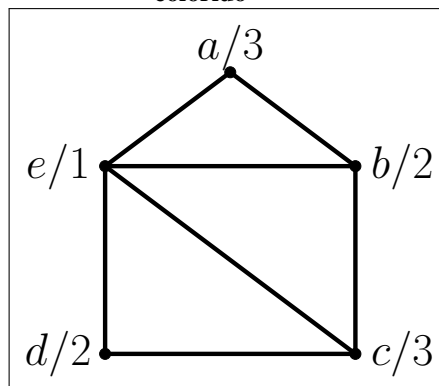
Dessa forma, temos uma coloração ótima para o grafo  $G$ , já que  $\omega(G) = 3$ .

Figura 26 – Contração dos vértices  $b$  e  $d$



Fonte: Autoria própria

Figura 27 – Grafo de Meyniel colorido



Fonte: Autoria própria

## 5 RESULTADOS

Este capítulo mostra os resultados da aplicação do Algoritmo Guloso e da Contração de Dupla de Vértices para a coloração de alguns grafos arco-circulares.

### 5.1 ADAPTAÇÃO DO ALGORITMO GULOSO

Dado um grafo arco-circular  $G$ , a ideia geral desta adaptação é considerar um subgrafo  $G'$  que seja cordal. O Algoritmo Guloso apresentado no Capítulo 3 será utilizado para colorir os vértices de  $G'$  com  $\chi(G')$  cores. Mostraremos casos em que, a partir da coloração de vértices de  $G'$ , os vértices de  $V(G) \setminus V(G')$  podem ser coloridos resultando em uma coloração própria para  $G$  com  $\chi(G)$  cores.

**Definição 5.1.** Considere um grafo arco-circular  $G$  com uma representação arco-circular  $R$ . O conjunto dos arcos que possuem interseção não vazia com o ponto  $I$  da circunferência na representação  $R$  será denotado por  $S_{R,I}$ . E o conjunto dos vértices correspondentes aos arcos em  $S_{R,I}$  será denotado por  $V_{R,I}(G)$ .

**Lema 5.2.** *Seja  $G$  um grafo arco-circular com uma representação  $R$ . Se existe um ponto  $I$  na circunferência de  $R$  tal que nenhum arco tem interseção com  $I$ , então  $G$  representa uma família de intervalos da reta real.*

*Demonstração.* Considere uma família  $F$  de arcos da circunferência tal que nenhum arco tem interseção com um ponto  $I$  da circunferência. Numere cada ponto que corresponde ao início ou fim de um arco com um número natural, começando pelo ponto de início do primeiro arco após o ponto  $I$ , no sentido horário, consecutivamente. Veja um exemplo na Figura 28.

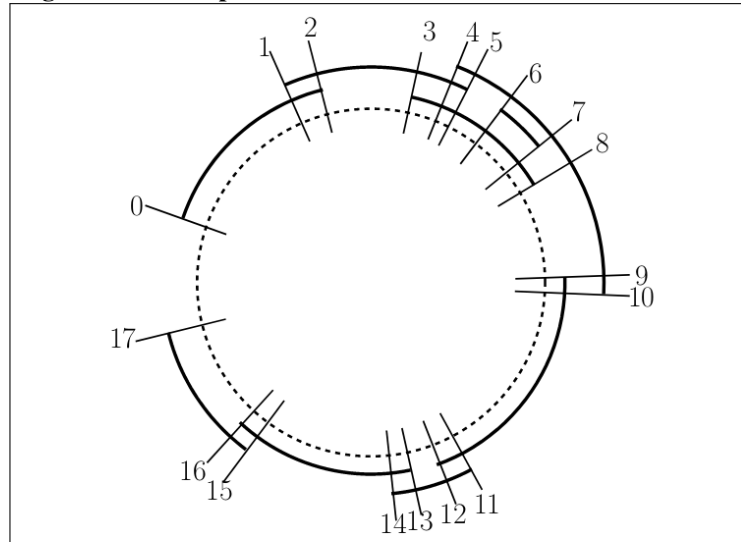
Cada arco  $a$  em  $F$  corresponde a um intervalo da reta real cujo início e fim são determinados pelos números naturais que rotularam os respectivos pontos de início e fim de  $a$  em  $R$ .

Seja  $F'$  a família de intervalos da reta real correspondentes aos arcos de  $F$ . Por construção, dois arcos em  $F$  tem interseção não vazia se, e somente se, os respectivos intervalos em  $F'$  tem interseção não vazia. Logo, se  $G$  é grafo de interseção de  $F$ , então  $G$  também é grafo de interseção de  $F'$ .  $\square$

**Definição 5.3.** (GOLUMBIC, 1980) Um grafo de intervalos  $G$  é um grafo de interseção de uma família  $F$  de intervalos da reta real. Ou seja, cada vértice de  $G$  corresponde a um intervalo de  $F$  e dois vértices são adjacentes se, e somente se, os respectivos intervalos possuem interseção não vazia.

Pelo Lema 5.2 tem-se o seguinte Corolário.

**Figura 28 – Exemplo Grafo arco-circular sem  $I$  numerado**



**Fonte: Autoria própria**

**Corolário 5.4.** *Seja  $G$  um grafo arco-circular com uma representação arco-circular  $R$  e um ponto  $I$  qualquer da circunferência de  $R$ . O subgrafo  $G[V(G) \setminus V_{R,I}(G)]$  é um grafo de intervalos.*

O Corolário 5.4 é importante pois todo grafo de intervalos é cordal (GOLUMBIC, 2004) e, portanto, pode ter seus vértices coloridos por um Algoritmo Guloso com Busca em Largura Lexicográfica.

**Teorema 5.5.** *Seja  $G$  um grafo arco-circular com uma representação  $R$  de arcos da circunferência. Se  $R$  possui um ponto da circunferência  $I$  tal que todo vértice  $v \in V_{R,I}(G)$  possui  $d(v) < \omega(G)$ , então  $\chi(G) = \omega(G)$ .*

*Demonstração.* Considere um grafo arco-circular  $G$  com uma representação  $R$  de arcos da circunferência, tal que  $R$  possui um ponto  $I$  que satisfaz a seguinte implicação: se  $v \in V_{R,I}(G)$ , então  $d(v) < \omega(G)$ .

A prova é construtiva. Seja  $G'$  o subgrafo de  $G$  induzido por  $V(G) \setminus V_{R,I}(G)$ . Observe que  $R \setminus S_{R,I}$  é uma representação arco-circular de  $G'$  e será denotada por  $R'$ .

O grafo  $G'$  é um grafo de intervalos, pelo Corolário 5.4. Como todo grafo de intervalos é cordal (GOLUMBIC, 2004), então  $G'$  é cordal. Aplique o Algoritmo Guloso com Busca em Largura Lexicográfica em  $G'$  como apresentado na Seção 3.2. A resultante do grafo  $G'$  utiliza  $\omega(G')$  cores, pelo Teorema 3.10. Como a remoção de vértices não aumenta o tamanho da clique máxima,  $\omega(G') \leq \omega(G)$ .

Para uma coloração de vértices de  $G$ , resta colorir os vértices do conjunto  $V_{R,I}(G)$ . Como cada vértice  $v$  em  $V_{R,I}(G)$  possui  $d(v) < \omega(G)$ , então há uma cor disponível entre as  $\omega(G)$  cores que podem ser utilizadas para colorir  $v$ . Portanto,  $G$  tem uma coloração com  $\omega(G)$  cores e  $\chi(G) = \omega(G)$ .  $\square$

**Teorema 5.6.** *Seja  $G$  um grafo arco-circular com uma representação  $R$  de arcos da circunferência. Se  $R$  possui um ponto da circunferência  $I$  tal que todo vértice  $v \in V_{R,I}(G)$  possui  $d(v) < \omega(G)$ , então o Algoritmo Guloso adaptado para  $G \setminus V_{R,I}(G)$  permite obter uma coloração de vértices ótima para  $G$  em tempo linear.*

*Demonstração.* Encontrar uma representação  $R$  para um grafo arco-circular  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas pode ser feito em tempo  $O(n + m)$ , utilizando o algoritmo de McConnell (2003).

Encontrar um ponto  $I$  tal que os vértices em  $V_{R,I}(G)$  têm grau no máximo  $\omega(G)$ , se existir, pode ser feito em tempo  $O(n + m)$ . De fato, qualquer alteração no padrão de arcos da circunferência ocorre quando um arco começa ou quando ele termina. Portanto, basta verificar o ponto de início de cada arco  $a$  menos  $\epsilon$  e o ponto de fim de cada arco  $a$  mais  $\epsilon$ , em que  $\epsilon$  representa uma distância suficientemente pequena entre o arco  $a$  e qualquer arco próximo e não adjacente a ele. Em cada ponto  $I$  da circunferência que for verificado, deve-se avaliar os graus dos vértices correspondentes aos arcos que intersectam  $I$ .

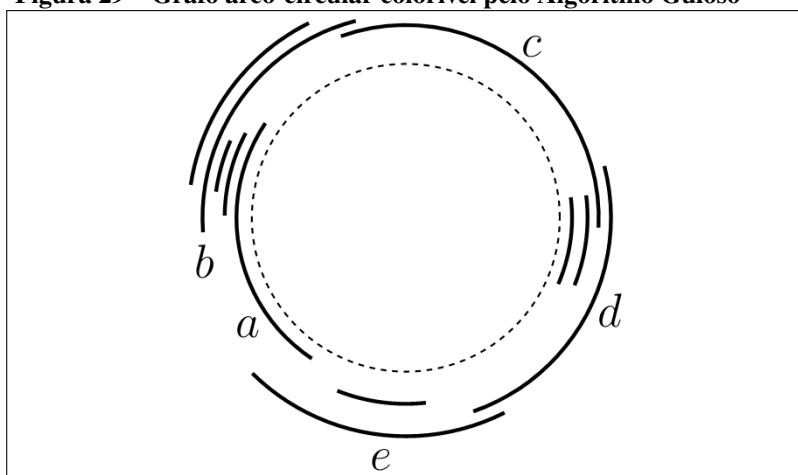
Marcar os vértices do conjunto  $V_{R,I}(G)$  como removidos para que não sejam coloridos pode ser feito em tempo  $O(n)$ . Colorir o grafo cordal resultante com o Algoritmo Guloso usando Busca em Largura Lexicográfica pode ser feito em tempo  $O(n + m)$ , de acordo com o que foi apresentado na Seção 3.2. Reinsere os vértices removidos de  $G$  e atribuir a cada um deles uma cor disponível pode ser feito em tempo  $O(n + m)$ . Portanto, o Algoritmo Guloso permite colorir  $G$  em tempo linear.  $\square$

De agora em diante, os grafos considerados nos teoremas 5.5 e 5.6 são chamados de grafos arco-circulares de Barchi. A seguir, apresentamos a definição formal dos grafos desta classe.

**Definição 5.7.** Um grafo  $G$  é um arco-circular de Barchi se  $G$  possui uma representação  $R$  de arcos da circunferência tal que existe um ponto da circunferência  $I$  em que todo vértice  $v \in V_{R,I}(G)$  possui  $d(v) < \omega(G)$ .

A Figura 29 apresenta um grafo arco-circular de Barchi, que pode ser colorido pela adaptação do Algoritmo Guloso com Busca em Largura Lexicográfica, apresentada nesta seção. Observe que este grafo não é próprio, pois contém um  $K_{1,3}$ , que não possui uma representação arco-circular própria. Este grafo também não é um arco-circular perfeito, pois os arcos  $a, b, c, d$  e  $e$  representam um conjunto de vértices que induzem um  $C_5$ , um ciclo ímpar. Então, os resultados anteriores a este trabalho apresentados por Chen, Hu e Zang (2005) e Bhattacharya, Hell e Huang (1996) não cobrem este caso.

**Figura 29 – Grafo arco-circular colorível pelo Algoritmo Guloso**



Fonte: Autoria própria

**Teorema 5.8.** *Existe algoritmo de reconhecimento dos grafos arco-circulares de Barchi com complexidade de tempo polinomial.*

*Demonstração.* Dado um grafo qualquer  $G$ , o algoritmo de McConnell (2003) verifica em tempo linear se  $G$  é arco-circular. Em caso positivo, o mesmo algoritmo apresenta uma representação arco-circular  $R$  para  $G$  em tempo  $O(n + m)$ . Em caso negativo, o algoritmo termina.

Então suponha que  $G$  é arco-circular. Neste caso, determinar o tamanho da maior clique em  $G$  pode ser feito em tempo  $O(nm)$ , como apresentado por Golubic (1980)

Uma vez que se conheça uma representação arco-circular  $R$  para  $G$  e o valor de  $\omega(G)$ , encontrar um ponto  $I$  tal que os vértices em  $V_{R,I}(G)$  têm grau no máximo  $\omega(G)$ , se existir, pode ser feito em tempo  $O(n + m)$ . De fato, qualquer alteração no padrão de arcos da circunferência ocorre quando um arco começa ou quando ele termina. Portanto, basta verificar o ponto de início de cada arco  $a$  menos  $\epsilon$  e o ponto de fim de cada arco  $a$  mais  $\epsilon$ , em que  $\epsilon$  representa uma distância suficientemente pequena entre o arco  $a$  e qualquer arco próximo e não adjacente a ele. Em cada ponto  $I$  da circunferência que for verificado, deve-se avaliar os graus dos vértices correspondentes aos arcos que intersectam  $I$ .

Caso exista um ponto  $I$  em que o grau dos vértices correspondentes aos arcos que intersectam  $I$  seja menor que  $\omega(G)$ , então  $G$  é arco-circular de Barchi. Se o ponto  $I$  não existir na representação  $R$ , então não existirá em nenhuma representação arco-circular do grafo  $G$ , pois qualquer que seja a representação arco-circular de  $G$ , as adjacências dos vértices de  $G$  são as mesmas e devem estar representadas nas interseções dos arcos da circunferência. Portanto, se  $I$  não existe na representação  $R$  dada pelo Algoritmo de McConnell (2003), o algoritmo de reconhecimento dos grafos arco-circulares de Barchi pode responder negativamente. Caso contrário, pode responder positivamente em tempo polinomial.  $\square$

## 5.2 ADAPTAÇÃO DA CONTRAÇÃO DE DUPLA DE VÉRTICES

Como visto na Seção 4.1, a técnica de Contração de Dupla de Vértices pode ser aplicada com sucesso em grafos fracamente cordais, resultando em uma coloração de vértices ótima.

Considere um grafo arco-circular  $G$  e uma representação arco-circular  $R$  de  $G$ . Pelo Corolário 5.4, para qualquer ponto  $I$  da circunferência de  $R$ , o subgrafo  $G[V(G) \setminus V_{R,I}(G)]$  é um grafo de intervalos. Sabe-se que todo grafo de intervalos é fracamente cordal (GOLUMBIC, 2004). Então, vale o seguinte corolário.

**Corolário 5.9.** *Considere um grafo arco-circular  $G$  e uma representação arco-circular  $R$  de  $G$ . Para qualquer ponto  $I$  da circunferência de  $R$ , o subgrafo  $G[V(G) \setminus V_{R,I}(G)]$  é um grafo fracamente cordal.*

Então, a mesma estratégia aplicada na adaptação do Algoritmo Guloso pode ser usada com a Contração de Dupla Dois: considera-se o subgrafo induzido  $G' = G[V(G) \setminus V_{R,I}(G)]$ . Note que  $G'$  é fracamente cordal. Aplica-se a técnica de coloração de vértices por Contração de Dupla Dois em  $G'$ . Então,  $G'$  terá uma coloração de vértices com  $\chi(G')$  cores. Quando cada vértice em  $V_{R,I}(G)$  tem grau limitado a  $\omega(G) - 1$ , sempre existe uma cor disponível para que seja colorido. Neste caso,  $\chi(G) = \omega(G)$ . Conclui-se mais uma vez que o resultado apresentado no Teorema 5.5 é válido. Porém, utilizando-se uma técnica diferente para a coloração de vértices do grafo  $G[V(G) \setminus V_{R,I}(G)]$ , que pode ser executada em tempo  $O((n + m)n^3)$ .



## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o Problema da Coloração de Vértices em grafos arco-circulares. Tendo em vista que tal problema é NP-completo para esta classe, o trabalho teve como objetivo apresentar um subconjunto da classe arco-circular para o qual é possível obter uma coloração ótima em complexidade de tempo polinomial.

Nos Capítulos 3 e 4 foram apresentadas técnicas de coloração de vértices que resolvem parcialmente o Problema da Coloração de Vértices, ou seja, oferecem uma coloração ótima em complexidade de tempo polinomial para algumas classes de grafos. A técnica apresentada no Capítulo 3, Algoritmo Guloso, já era utilizada como técnica de coloração de vértices para os grafos bipartidos e cordais, que têm interseção com a classe dos grafos arco-circulares.

No Capítulo 4 foi apresentada a técnica de Contração de Dupla de Vértices que é aplicável às classes dos grafos fracamente cordais, grafos de Meyniel e, segundo Figueiredo (1991), a outras classes de grafos.

No Capítulo 5 são apresentados os resultados obtidos da aplicação das técnicas adaptadas. Considere a família  $\mathcal{A}$  de grafos arco-circulares que tenham uma representação arco-circular  $R$  em que um dos pontos da circunferência é coberto somente por arcos que representam vértices com grau menor que  $\omega(G)$ . Provamos que todo grafo  $G \in \mathcal{A}$  tem uma coloração de vértices com  $\omega(G)$  cores. Também mostramos que esses grafos podem ser coloridos utilizando adaptações tanto do Algoritmo Guloso quando da Contração de Dupla Dois e que a adaptação do Algoritmo Guloso é melhor já que tem complexidade de tempo  $O(n+m)$  enquanto a adaptação da Contração de Dupla Dois toma tempo  $O((n+m)n^3)$ .

Chamamos os grafos da família  $\mathcal{A}$  de grafos arco-circulares de Barchi e mostramos que esta classe tem algoritmo de reconhecimento polinomial. Na classe dos arco-circulares de Barchi existem grafos que não estavam contemplados pelos resultados já existentes em Chen, Hu e Zang (2005) e Bhattacharya, Hell e Huang (1996), como o grafo da Figura 29.

As adaptações apresentadas neste trabalho não podem ser aplicadas com êxito em potências de ciclo, devido à sua estrutura. Entretanto, potências de ciclos são grafos arco-circulares próprios para os quais o Problema da Coloração de Vértices já está resolvido por Bhattacharya, Hell e Huang (1996).

Para trabalhos futuros é recomendado averiguar se há outras condições em que é possível aplicar as adaptações apresentadas neste trabalho. Além de se tentar caracterizar a classe de grafos arco-circulares em que as técnicas apresentadas não funcionam (casos em que o Problema da Coloração de Vértices pode estar em aberto).

## REFERÊNCIAS

- APPEL, Kenneth; HAKEN, Wolfgang. The solution of the four-color-map problem. **Scientific American**, JSTOR, v. 237, n. 4, p. 108–121, 1977.
- BERGE, Claude. Les problèmes de coloration en théorie des graphes. **Publ. Inst. Stat. Univ. Paris**, Université de Paris VI, Institut de Statistique, Paris, v. 9, p. 123–160, 1960. ISSN 0553-2930.
- BHATTACHARYA, Binay; HELL, Pavol; HUANG, Jing. A linear algorithm for maximum weight cliques in proper circular arc graphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, Society for Industrial and Applied Mathematics Publications, v. 9, n. 2, p. 274–289, 1996. ISSN 08954801.
- BRANDSTADT, Andreas; SPINRAD, Jeremy P; LE, Van Bang. **Graph classes: a survey**. [S.l.]: Siam, 1999. v. 3.
- BROOKS, Rowland Leonard. On colouring the nodes of a network. In: **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. [S.l.: s.n.], 1941. v. 37, n. 2, p. 194–197.
- CARLSON, J; JAFFE, A; WILES, A. **The Millennium Prize Problems**. Providence: American Mathematical Society, 2006. 161 p.
- CHARTRAND, Gary; ZHANG, Ping. **Chromatic graph theory**. [S.l.]: CRC press, 2008.
- CHEN, Xujin; HU, Zhiquan; ZANG, Wenan. Perfect circular arc coloring. **Journal of Combinatorial Optimization**, v. 9, n. 3, p. 267–280, 5 2005. ISSN 13826905.
- CHUDNOVSKY, Maria *et al.* The strong perfect graph theorem. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 51–229, 2006.
- DIRAC, Gabriel Andrew. On rigid circuit graphs. In: **Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg**. [S.l.: s.n.], 1961. v. 25, n. 1, p. 71–76.
- FIGUEIREDO, Celina M. Herrera de. **Um Estudo de Problemas Combinatórios em Grafos Perfeitos**. 107. p. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.
- FULKERSON, D. R.; GROSS, O. A. Incidence matrices and interval graphs. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 15, n. 3, p. 835–855, 1965. ISSN 00308730.
- GAREY, Michael R; JOHNSON, David S. **Computers and intractability**. [S.l.]: wh freeman New York, 2002. v. 29.
- GAREY, Michael R *et al.* The complexity of coloring circular arcs and chords. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, SIAM, v. 1, n. 2, p. 216–227, 1980.
- GOLUMBIC, Martin Charles. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. 1980. Computer Science and Applied Mathematics; New York etc.: Academic Press. A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XX, 284 p. \$ 45.00 (1980).
- \_\_\_\_\_. **Algorithmic graph theory and perfect graphs**. 2.. ed. [S.l.]: Elsevier, 2004. v. 57.

HAJNAL, András; SURÁNYI, János. Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen. **Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math**, v. 1, p. 113–121, 1958.

HAYWARD, Ryan; HOÀNG, Chinh; MAFFRAY, Frédéric. Optimizing weakly triangulated graphs. **Graphs and Combinatorics**, Springer-Verlag, v. 5, n. 1, p. 339–349, 12 1989. ISSN 09110119.

HEAWOOD, Percy John. Map-Colour Theorem. **Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 24, p. 332–338, 1890.

KARP, Richard M. Reducibility among combinatorial problems. In: **Complexity of computer computations**. [S.l.]: Springer, 1972. p. 85–103.

KEMPE, Alfred Bray. On the Geographical Problem of the Four Colours. **American Journal of Mathematics**, Johns Hopkins University Press, v. 2, n. 3, p. 193–200, 1879. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2369235>>.

KÖNIG, Dénes. Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre. **Mathematische Annalen**, v. 77, n. 4, p. 453–465, 12 1916. ISSN 1432-1807. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01456961>>.

KRISHNAMOORTHY, M S. An NP-hard Problem in Bipartite Graphs. **SIGACT News**, ACM, New York, NY, USA, v. 7, n. 1, p. 26, 1 1975. ISSN 0163-5700. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/990518.990521>>.

LIMA, Alane Marie de. Algoritmos exatos para o problema da coloração de grafos. 2017. Disponível em: <<http://www.acervodigital.ufpr.br/handle/1884/49429>>.

LOVÁSZ, László. A characterization of perfect graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 95–98, 1972.

MCCONNELL, Ross M. Linear-Time Recognition of Circular-Arc Graphs. **Algorithmica**, v. 37, n. 2, p. 93–147, 10 2003. ISSN 1432-0541. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00453-003-1032-7>>.

MEYNIEL, H. The graphs whose odd cycles have at least two chords. **Topics on Perfect Graphs**, Ann. Disc. Math, v. 21, p. 115–120, 1984.

ORLIN, James B; BONUCCELLI, Maurizio A; BOVET, Daniel P. An  $O(n^2)$  Algorithm for Coloring Proper Circular Arc Graphs. **SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods**, SIAM, v. 2, n. 2, p. 88–93, 1981.

ROGERS, Leo. **The Four Colour Theorem**. 2011. Disponível em: <<https://nrich.maths.org/6291>>.

ROSE, Donald J.; TARJAN, R. Endre; LUEKER, George S. Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs. **SIAM Journal on Computing**, v. 5, n. 2, p. 266–283, 6 1976. ISSN 0097-5397. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0205021>>.

SZPILRAJN-MARCZEWSKI, Edward. Sur deux propriétés des classes d'ensembles. In: . [S.l.: s.n.], 1945.

TUCKER, Alan. Matrix characterizations of circular-arc graphs. **Pacific Journal of mathematics**, Mathematical Sciences Publishers, v. 39, n. 2, p. 535–545, 1971.

\_\_\_\_\_. COLORING A FAMILY OF CIRCULAR ARCS. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 29, n. 3, p. 493–502, 1975. ISSN 00361399.

VALENCIA-PABON, Mario E. Revisiting Tucker's algorithm to color circular-arc graphs. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 7, p. 198–201, 4 2001. ISSN 15710653.

## ÍNDICE

- Algoritmo
  - Guloso, 13, 14, 21–25, 27, 35–37, 39, 40
- Busca em Largura, 13, 23, 24
  - Lexicográfica, 26, 27, 36, 37
- caminho, 15, 17, 28
  - induzido, 28–31
- ciclo, 16, 25, 33
  - ímpar, 16–18, 22–24, 32, 33, 37
  - induzido, 19, 20, 30
    - ímpar, 19, 32
  - par, 16
- clique, 18, 26, 27, 29, 31, 32, 38
  - máxima, 18, 28, 36
  - maximal, 27
- coloração, 9, 10, 13, 20, 22, 29, 32, 33, 35, 36
  - ótima, 16
  - de vértices, 10, 11, 13–17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 39, 40
    - ótima, 13, 15, 17–19, 22, 24, 25, 27, 29, 33, 37, 40
  - própria, 15, 17, 21–23, 27, 35
  - mínima, 29, 30
- complemento de um grafo, 19
- conjunto independente, 23
- Contração
  - de Dupla de Vértices, 13, 14, 28, 30, 32, 35, 39, 40
- corda, 25, 33
- dupla
  - dois, 31, 32, 39, 40
  - par, 28, 29
- grafo, 15, 23
  - arco-circular, 11–14, 19, 20, 25, 35–37, 39, 40
    - de Barchi, 37
    - perfeito, 20, 37
    - potência de ciclo, 20
    - próprio, 20, 37, 40
  - bipartido, 11, 13, 14, 16, 17, 22–24, 40
  - ciclo, 11, 16, 17
  - completo, 11, 18, 22, 29, 30, 32, 33
  - cordal, 13, 14, 22, 24–27, 35–37, 40
  - de Berge, 19
  - de interseção, 11, 12, 35
  - de intervalos, 35, 36, 39
  - de Meyniel, 14, 30, 32, 33, 40
  - fracamente cordal, 13, 14, 30, 32, 39, 40
  - peixe, 29
  - perfeito, 18, 19, 32
  - planar, 10
  - potência de ciclo, 40
  - simples, 15, 21
  - trivial, 16–18
- grau, 21, 37–40
  - máximo, 18, 21
- limitante
  - inferior, 18
  - superior, 20–22
- número cromático, 13, 15–18, 20, 21, 28, 29, 33
- ordem, 21–23, 26, 28
  - perfeita de eliminação, 26, 27
- subgrafo, 15, 18, 25, 27, 35, 36, 39
  - induzido, 18, 19, 26, 31
- vértice

simplicial, 26, 27  
vertice  
simplicial, 26

vizinhança, 21, 22, 33  
aberta, 21  
fechada, 21, 27