UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

OLDEMIR BRILL JUNIOR

INTEGRAL IMPRÓPRIA E FUNÇÕES EULERIANAS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2010

OLDEMIR BRILL JUNIOR

INTEGRAL IMPRÓPRIA E FUNÇÕES EULERIANAS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Wellington José Corrêa

CAMPO MOURÃO

2010

TERMO DE APROVAÇÃO

Oldemir Brill Junior

Integral Imprópria e Funções Eulerianas

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Prof. Msc. Diogo Heron Macowski

Prof. Msc. Nayene Michele Pitta Paião

Campo Mourão, 2010

Eu, Oldemir Brill Junior, dedico esse trabalho em primeiro lugar a Deus, que me guardou em todas viagens para Campo Mourão e me deu forças e paciência para finalizar essa especialização. Também dedico aos meus pais, Maria de Lourdes de Freitas Brill e Oldemir Brill, os quais sempre que precisei estavam do meu lado, me acordando de madrugada para ir para as aulas, me insentivando, me orientando e é claro emprestando o carro, aos meus irmãos, aos amigos Roney (piloto de fuga), Willian, Hissai e Elieger(dona do carro) que eram as pessoas que viajavam juntos para assistir as aulas e quem sem elas não seria possível realizar essa especialização, e ela seria só um sonho também não posso esquecer dos outros alunos da classe os quais me ajudaram a estudar, fazer os trabalhos, é me deram uma luz. Aos amigos da República de Cianorte (foi difícil estudar lá), aos amigos de Umuarama que me desviaram bastante dos estudos, mas sem essas distrações talvez eu pirasse. Ao professor Adilandri por ter se lembrado de mim quando ele iniciou essa especialização, ao corpo docente da especialização que foram todos muito bacanas com a turma, e ao meu orientador Wellington que deu rumo a essa pesquisa e me ajudou muito apesar de nos vermos pouco.

”Não cruze os braços diante de uma dificuldade, pois o maior homem do mundo morreu de braços abertos!”Bob Marley.

RESUMO

BRILL, Oldemir. Integral Imprópria e Funções Eulerianas. 51 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2010.

Este documento contêm as definições e classificações das Integrais Impróprias (primeira, segunda e terceira espécie), demonstração de alguns teoremas usados para teste de convergência e divergência dessas Integrais Impróprias (teste de comparação, teste do quociente...), algumas aplicações das Integrais Impróprias em diversas áreas(estatística, economia,...). Também contem a definição e demonstração das Funções Eulerianas, ou seja, Função Gama e Função Beta, que são aplicações da Integrais Impróprias. Esse documento também possui simples abordagem dos temas de Transformação de Laplace e integrais de Dirichlet.

Palavras-chave: Integral, Imprópria, Beta, Gama, Aplicação

ABSTRACT

BRILL, Oldemir. Improper Integral and Eulerian Functions . 51 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2010.

This document contains the definitions and classifications of Improper Integrals (first, second and third kind), demonstration of some theorems used to test for convergence and divergence of Improper Integrals (comparison test, test quotient ...), some applications of Improper Integrals in various areas (statistics, economy,...). It also contains the definition and demonstration of Eulerian Functions , i.e., Gamma function and Beta function, which are applications of Improper Integrals. This document also contains simple approach themes of Laplace transform and Dirichlet integrals.

Keywords: Integral, Improper, Beta, Gamma, Application

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente documento é um material sobre o tema Integral Imprópria e Funções Eulerianas elaborado para ajudar novos pesquisadores que queiram se aprofundar e/ou obter conhecimento desse tema. Esse documento foi baseado em R. Wriede, S. Spiege (SPIEGEL; WREDE, 2002).

1.1 MOTIVAÇÃO

É um tema que merece destaque por sua importância, pois tem uma vasta área de aplicação e com resultados satisfatórios, e por ser um conteúdo pouco abortado nos cursos de matemática.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Prover um material de pesquisa sobre Integral Imprópria e Funções Eulerianas.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Prover um material de fácil compreensão.
- Aumentar o número de material para pesquisa sobre esse tema.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 INTRODUÇÃO À HISTÓRIA DO CÁLCULO INTEGRAL

É curioso que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu a ordem contrária à daquela dos textos e cursos básicos atuais sobre o assunto: ou seja, primeiro surgiu o Cálculo Integral e só muito tempo depois o Cálculo Diferencial. A ideia de integração teve origem em processos somatórios ligados ao cálculo de certa áreas de certos volumes e comprimentos. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes a curvas e de questões sobre máximos e mínimos. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo cada uma delas operação inversa da outra.

PENSAMENTO (PROPOSIÇÕES) QUE IMPULSIONARAM A MATEMÁTICA

É válido admitir-se que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente ou que é formada de um número muito grande de partes atômicas indivisíveis? A primeira suposição parece mais razoável, mas a segunda é tão útil em termos de descobertas que isso faz com que perca sua aparente absurdidade. Há evidências de que na Grécia antiga se desenvolveram escolas de raciocínio matemático que abraçaram uma ou outra dessas premissas.

O filósofo Zenão de Eléia (450 a.C.) chamou a atenção, de maneira candente, para as dificuldades lógicas ocultas em cada uma dessas suposições, através de alguns paradoxos que engendrou com essa finalidade. Esses paradoxos, que tiveram influência profunda na matemática, garantem que, admitindo-se qualquer das suposições consideradas, o movimento é impossível.

MÉTODO DE EXAUSTÃO DE EUDOXO, DEMÓCRITO E ARQUIMEDES

O método de exaustão, que pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão, comumente é creditado a Eudoxo (370 a.C.). O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie.

Demócrito (410 a.C.), segundo Arquimedes, tinha conhecimento de que o volume de uma pirâmide qualquer é um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura. Muito pouco se sabe sobre Demócrito, mas dificilmente ele poderia ter dado uma demonstração rigorosa desse teorema. Lembre-se de que um prisma pode ser decomposto numa soma de prismas de base triangular e que por outro lado, um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares U, V, W tais que U e V tenham bases equivalentes e alturas iguais, o mesmo ocorrendo com V e W. Assim, o ponto crucial do problema de Demócrito é mostrar que duas pirâmides de bases equivalentes e mesma altura têm volumes iguais. Uma demonstração desse fato foi feita por Eudoxo, usando o método de exaustão.

Como, então, poderia ter Demócrito chegado a este último resultado? A chave é fornecida por Plutarco, ao relatar o dilema a que chegou certa vez Demócrito quando considerou a possibilidade de um cone ser formado de uma infinidade de secções planas paralelas à base. Se duas secções "adjacentes"fossem do mesmo tamanho, o sólido seria um cilindro e não um cone. Se, por outro lado, duas secções adjacentes tivessem áreas diferentes, a superfície do sólido seria formada de uma série de degraus, o que certamente não se verifica. Neste caso se assumiu que o volume do cone pode ser subdividido indefinidamente (ou seja, numa infinidade de secções planas atômicas), mas que o conjunto dessas secções é contável, no sentido de que, dada uma delas, há uma outra que lhe é vizinha; suposição que se situa, até certo ponto, entre as duas já consideradas sobre a divisibilidade de grandezas. Demócrito pode ter argumentado que se duas pirâmides de bases equivalentes e alturas iguais são seccionadas por planos paralelos às bases, verificando-se a divisão das alturas numa mesmas razão, então as secções correspondentes assim formadas são equivalentes. Portanto as pirâmedes contêm mesmo número infinito de secções planas equivalentes, o que implica que seus volumes devem ser iguais. Tem se aí o que seria um exemplo primitivo do chamado método dos indivisíveis de Cavalieri, a ser focalizado adiante.

Dos antigos, quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida foi Aquimedes. Na sua abordagem de áreas e volumes, Arquimedes chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que hoje figuram nos textos elementares de cálculo.

PRIMEIROS PASSOS DA INTEGRAÇÃO NA EUROPA

No período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até praticamente os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi ativada. Só por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, através de uma tradução achada em Constantinopla. Mas só por perto do início do século $XVII$ as ideias de Arquimedes passaram por outros desdobramentos.

Dois dos primeiros matemáticos dos tempos moderno a usarem métodos comparáveis aos de Arquimedes foram o engenheiro flamengo Simon Stevin (1548-1620) e o matemático italiano Luca Valerio (1552-1618).

Dos primeiros europeus modernos a desenvolver ideias relativas a infinitésimos em trabalhos com a integração, merece menção especial o nome de Johann Kepler. Kepler teve de recorrer a procedimentos de integração a fim de calcular as áreas envolvidas em sua segunda lei do movimento planetário e os volumes de que se ocupou em seu tratado sobre a capacidade dos barris de vinho.

BONAVENTURA CAVALIERE

Em 1635 aparece uma obra que projetou Bonaventura Cavalieri, sua grande contribuição à matemática, é o tratado Geometria indivisibilibus. Nesse trabalho ele apresenta seu método dos indivisíveis, cujas raízes remontam a Demócrito (410 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.) mas cuja motivação direta talvez se encontre nas tentativas de Kepler de achar certas áreas e certos volumes. Vejamos os Princípios de Cavalieri:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta data determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Os princípios de Cavalieri representam ferramentas poderosas para o cálculo de áreas e volumes, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno.

A GRANDE POLÊMICA

Uma polêmica envolve dois grandes matemáticos Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, a qual amargurou os últimos anos da vida de ambos, essa polêmica diz a respeito da primazia da criação do cálculo.

As pesquisas de Leibniz em torno de sua characteristica generalis levaram-no a conceber planos de uma teoria da lógica matemática, estruturada em regras formais, que obviaria as necessidades do raciocínio. Leibniz formulou as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades de inclusão de classes e a implicação de proposições.

Leibniz inventou o seu cálculo entre 1673 e 1676. Leibniz havia chamado o cálculo integral de calculus summatorius; em 1696 Leibniz e Johann Bernoulli acordaram em chamá-lo de calculus integralis. Usou pela primeira vez o símbolo de integral, um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina summa (soma) em 29 de outrubro de 1675. O objetivo era indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois ele já escrevia diferenciais e derivadas como o fazemos hoje, assim como escrevia $\int x dy$ e $\int y dx$ para integrais.

Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton.

Por algum tempo depois de Newton e Leibniz, os fundamentos do cálculo permaneceram obscuros e despercebidos, pois era a enorme aplicabilidade da matéria o que atraía os primeiros pesquisadores. Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já fora estabelecida, juntamente com tópicos mais avançados, como o cálculo de variações.

LEONHARD EULER

Leonhard Euler um suíço que nasceu na Basiléia em 1707, foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática. As contribuições de Euler à matemática são demasiado numerosas e não há ramo da matemática em que seu nome não figure.

Aqui citaremos algumas de suas contribuições.

Deve-se a Euler a implantação das seguintes notações:

(a) $f(x)$ para funções,

(b) e para a base dos logaritmos naturais,

(c) a, b, c para os lados de um triângulo ABC,

(d) s para o semiperímetro do triângulo ABC,

(e) r para o inraio do triângulo ABC,

(f) R para o cincunraio do triângulo ABC,

(g) $\sum$ para somatórios,

(h) i para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Na geometria plana aparece a reta de Euler; nos cursos de teoria das equações encontra-se às vezes o método de Euler de resoluções das quárticas; e nos cursos de teoria dos números, mesmo os mais elementares, são presenças certas o teorema de Euler e a função ϕ de Euler. Atribuem-se a Euler as funções beta e gama do cálculo avançado, embora elas tenham sido prenunciadas por Wallis. Euler empregou a ideia do fator integrante na resolução de equações diferencias, deu-nos o método sistemático usado hoje para resolver equações lineares com coeficientes constantes e distinguiu entre equações diferenciais lineares homogêneas e não-homogêneas.

Euler foi um escritor magistral, caracterizando-se seus livros pela grande clareza, riqueza de detalhes e abrangência. Uma obra extremamente rica o aparentado Institutiones calculi integralis, em três volumes (1768-74). A enorme fertilidade de ideias de Euler é deveras surpreendente, não sendo de admirar, portanto, que muitos dos grandes matemáticos posteriores a ele admitiram ter recebido sua influência.

2.2 INTEGRAL IMPRÓPRIA

Esta seção trata em apresentar um pré material para que possamos compreender melhor o desenvolvimento das demonstrações das funções eulerianas, que possui suas bases e definições nas integrais impróprias. E assim prosseguimos.

Definição 2.1. *As funções que geram as integrais de Riemann são contínuas em intervalos fechados. Assim, as funções são limitadas e o intervalo finito. Integrais com essas características são chamadas integrais própria. Quando uma ou mais dessas restrições é desmazelada, a integral é dita imprópria.*

Categorias de integrais impróprias são estabelecidas abaixo:
A integral $\int_a^b f(x)dx$ é chamada de imprópria se satisfazer uma das definições abaixo:

Definição 2.2. *$a = -\infty$ ou $b = \infty$ ou ambos, um ou ambos limites das integrações é infinito.*

Definição 2.3. *Seja $f(x)$ limitada em um ou mais pontos do intervalo $a \leq x \leq b$. Tais pontos são chamados de singularidade de x.*

Integrais correspondentes a Definição 2.2 e Definição 2.3 são chamadas integrais impróprias de primeira e segunda espécie respectivamente. Integrais com ambas condições dessas definições são chamadas integrais impróprias de terceira espécie (é o caso da função gama).

Exemplo 2.1. *A integral $\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2\, dx$ é uma integral imprópria de primeira espécie.*

Exemplo 2.2. *A integral $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ é uma integral imprópria de segunda espécie.*

Exemplo 2.3. *A integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ é uma integral imprópria de terceira espécie.*

Exemplo 2.4. *A integral $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ é uma integral própria, pois $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$*

2.2.1 INTEGRAL IMPRÓPRIA DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Se f é integrável sobre um dos domínios adequados, a integral indefinida $\int_a^x f(t)dt$ e $\int_x^a f(t)dt$ são funções. Através delas definimos três formas de integrais impróprias de primeira espécie:

Definição 2.4. *Se f é integrável em $a \leq x < \infty$, então $\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\, dt$*

Definição 2.5. *Se f é integrável em $-\infty < x \leq a$, então $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\, dt$*

Definição 2.6. *Se f é integrável em $-\infty < x < \infty$, então,*

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx$$

Em parte a Definição 2.6 é importante observar que

$$\lim_{x\to-\infty}\int_a^x f(t)\,dt + \lim_{x\to\infty}\int_x^a f(t)\,dt$$

e

$$\lim_{x\to\infty}\left[\int_{-x}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right]$$

não são necessariamente iguais.

Isso pode ser ilustrado pela função $f(x) = xe^{x^2}$. A primeira expressão não é definida pois nenhuma das integrais impróprias é definida, enquanto a segunda forma tem valor 0 (zero).

CONVERGÊNCIA OU DIVERGÊNCIA DAS INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Definição 2.7. *Seja $f(x)$ limitada e integrável em todo intervalo finito $a \leq x \leq b$. Então definimos:*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

onde b é um número real positivo.

A integral na esquerda é chamada convergente ou divergente de acordo se o limite da direita existir ou não existir. Note que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ tem estreita analogia com as series infinitas $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, onde $u_n = f(n)$, enquanto $\int_a^b f(x)\,dx$ corresponde a soma parcial de tais séries infinitas. Nós escrevemos frequentemente M no lugar de b em (1).

Analogamente temos:

Definição 2.8. *A integral imprópria definida por*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

onde a é um número real negativo é dita convergente ou divergente de acordo se o limite do lado direito de (2) existir ou não existir, respectivamente.

Exemplo 2.5. *Verifiquemos que a integral imprópria* $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ *é convergente. De fato,*

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

então $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ *converge para 1.*

Exemplo 2.6. *Averigúe o que ocorre na integral* $\int_{-\infty}^{u} \cos x\, dx$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{u} \cos x\, dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^{u} \cos x\, dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} a). \end{aligned}$$

Esse limite não existe, $\int_{-\infty}^{u} \cos x\, dx$ *é divergente.*

Definição 2.9. *A integral imprópia dada por*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x)\, dx \tag{3}$$

onde x_0 é um número real, e a integral da esquerda é convergente ou divergente se as integrais da direita converge ou diverge como nas definições (1) e (2). (Vimos anteriormente na parte 2.6 das definições de integral imprópria de primeira espécie).

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS ESPECIAIS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

1. Integral geométrica ou exponencial $\int_a^{\infty} e^{-tx}\, dx$, onde t é uma constante, converge se $t > 0$ e diverge se $t < 0$. Note analogia com séries geométricas se $r = e^{-t}$ de modo que $e^{-tx} = r^x$

2. Integral p de primeira espécie $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$, p é constante e $a > 0$, converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$. Análoga as séries p.

TESTE DE CONVERGÊNCIA PARA INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE

Os testes a seguir são dados por casos quando o limite da integração é infinito (∞). Teste similares existem quando o limite da integração é menos infinito (-∞) (uma troca de variável $x = -y$ para recair no caso em que o limite da integração é (∞). A menos que seja especificado, nós devemos assumir que $f(x)$ é continua e assim integrável em todo intervalo finito $a \leq x \leq b$.

1. Teste de comparação para integrais com integrantes não negativos.

   (a) Convergência. Seja $g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$, e supondo que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Então se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \geq a$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ também converge.

   Demonstração:

   Seja $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$, pela propriedade de Integral

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

   Mas pela hipótese que a ultima integral existe. Então

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ existe, consequentemente } \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge.}$$

   Exemplo 2.7. *Avaliemos se* $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ *converge ou diverge.*

   Solução: *com efeito, seja* $g(x) = \dfrac{1}{e^x+1}$. *Note que* $g(x) \geq 0$ *para todo* $x \geq 0$.

   Por outro lado, observemos que

$$\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x} \qquad \text{para todo } x \geq 0$$

   e do fato que $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ *converge, pelo teste de comparação para integrais com integrantes não negativos a integral* $\int_0^\infty \dfrac{dx}{e^x+1}$ *também converge.*

   (b) Divergência. Se $g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$, e supondo que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge. Então se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \geq a$ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ também diverge.

   Demonstração:

   Seja $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \geq a$, pela propriedade de Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

   Mas pela hipótese que a ultima integral diverge. Então

$$\lim_{b\to\infty} f(x)\,dx \text{ não existe, com isso } \int_a^{\infty} fx\,dx \text{ diverge.}$$

Exemplo 2.8. *Vejamos se* $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ *converge ou diverge.*

Solução: *de fato, seja* $g(x) = \frac{1}{x}$. *Note que* $g(x) \geq 0$ *para todo* $x \geq 2$.

No entanto, temos que

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \quad \text{para todo } x \geq 2$$

e do fato que a integral $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ *diverge (integral p com* $p = 1$*),* $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$ *também diverge.*

2. Teste do quociente para integrais com integrantes não negativos.

(a) Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$, e se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ ou ∞, então $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ ou ambas convergem ou divergem.

Demonstração:

Pela hipótese, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N tal que $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon$ quando $x \geq N$. Dai para $x \geq N$, temos

$$A - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq A + \varepsilon \quad \text{ou } (A-\varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (A+\varepsilon)g(x)$$

Assim

$$(A-\varepsilon)\int_N^b g(x)\,dx \leq \int_N^b f(x)\,dx \leq (A+\varepsilon)\int_N^b g(x)\,dx \tag{4}$$

Não há perda de generalidade em trocar $A - \varepsilon > 0$

Se $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, então pela inequação da direita de (6),

$$\lim_{b\to\infty} \int_N^b f(x)\,dx \quad \text{existe, então} \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{converge}$$

Se $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge, então pela inequação da direita de (6),

$$\lim_{b\to\infty} \int_N^b f(x)\,dx = \infty \quad \text{então} \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{diverge}$$

(b) Se $A = 0$ em (a) e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.
Demonstração:
Pela hipótese, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N tal que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$ quando $x \geq N$. Dai para $x \geq N$, temos

$$\varepsilon \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq \varepsilon \quad \text{ou } (\varepsilon)g(x) \geq f(x) \geq (\varepsilon)g(x)$$

Assim

$$(-\varepsilon)\int_N^b g(x)\,dx \geq \int_N^b f(x)\,dx \geq (\varepsilon)\int_N^b g(x)\,dx \tag{5}$$

Como pela hipótese $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, então pela inequação da direita de (6),

$$\lim_{b\to\infty}\int_N^b f(x)\,dx \quad \text{existe, então} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{converge}$$

(c) Se $A = \infty$ em (a) e $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge, então $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.
Demonstração:
Pela hipótese, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \infty$. Dado $M > 0$, podemos encontrar N tal que $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > M$ quando $x \geq N$. Dai para $x \geq N$, temos

$$\frac{f(x)}{g(x)} > M \quad \text{ou } f(x) > Mg(x)$$

Assim,

$$\int_N^b f(x)\,dx > M\int_N^b g(x)\,dx \tag{6}$$

Como pela hipótese $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge, então pela inequação da direita de (6),

$$\int_N^b f(x)\,dx \quad \text{diverge, logo} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{também diverge.}$$

Este teste está relacionado com o teste de comparação e é muitas vezes uma alternativa útil. Em particular tomando $g(x) = \frac{1}{x^p}$, temos dos fatos conhecidos sobre a integral p, os seguintes teoremas:

Teorema 2.1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^p f(x) = A$

i) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge se $p > 1$ e A é finito.

ii) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge se $p \leq 1$ e $A \neq 0$ (A pode ser infinito)

Exemplo 2.9. *A integral* $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{4x^4+25}$ *converge, visto que* $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4}$ *converge pelo Teorema 2.1.(i) .*

Exemplo 2.10. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ *diverge, visto que* $\lim\limits_{x\to\infty} x \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$ *diverge pelo Teorema 2.1.(ii) .*

3. Teste de Series para integrais com integrantes não negativos. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge ou diverge de acordo com $\sum u_n$, onde $u_n = f(n)$, converge ou diverge.

4. Convergência absoluta e condicional.

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é chamada de absolutamente convergente se $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge. Se $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge mais $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ diverge, então $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ é chamada condicionalmente convergente.

Teorema 2.2. *Se* $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ *converge, então* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *converge. Em palavras, se é absolutamente convergente a integral converge.*

Demonstração:

Temos que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, *ou seja,* $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$.

Então,

$$0 \leq \int_a^b [f(x) + |f(x)|]\,dx \leq 2\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Se $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ *converge, segue que* $\int_a^{\infty} [f(x) + |f(x)|]\,dx$ *converge. Consequentemente, pela subtração de* $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, *que converge, vemos que,* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *converge.*

Exemplo 2.11. *A intregal* $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx$ *é absolutamente convergente e, portanto, converge visto que* $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| dx \leq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ *e* $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ *converge.*

Exemplo 2.12. *A integral* $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ *converge, mas* $\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ *não converge . Assim,* $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ *é condicionalmente convergente.*

Solução:

Seja $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ *convergente (porque* $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *é contínua em* $0 < x \leq 1$ *e* $\lim_{x\to o^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$*) nós precisamos somente mostrar que* $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ *converge.*

Método 1: Integração por partes

$$\int_1^M \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^M + \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}dx = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} + \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}dx$$

ou tomando o limite dos ambos os lados da igualdade acima como $M \to \infty$ *e usando o fato que* $\lim_{M\to\infty} \frac{\cos M}{M} = 0$*,*

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \cos 1 + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

Desde a integral no lado direito da igualdade acima converge pelo problema 1.2 da secção de exercícios, os resultados pretendidos seguem.

A técnica de integração por partes para estabelecer a convergência é frequentemente útil na prática.

Método 2:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + \ldots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx + \ldots = \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$$

Deixando $x = v + n\pi$*, a somatória se torna*

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v+n\pi}dv = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v}dv - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v+\pi} + \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} v}{v+2\pi}\cdots$$

Esta é uma serie alternada. Seja $\dfrac{1}{v+n\pi} \pm \dfrac{1}{(n+1)\pi}$ *e* $\operatorname{sen} v \geq 0$ *em* $[0,\pi]$*, segue que*

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{v+n\pi}\, dv \leq \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{v+(n+1)\pi}\, dv$$

Também,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{v+n\pi}\, dv \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{dv}{n\pi} = 0$$

Assim, cada termo da série alternada é em valor absoluto menor ou igual ao termo anterior, e o n-enésimo termo aproxima de zero com $n \to \infty$*. Assim, pelo teste de série alternada, temos que a série e a integral converge.*

Temos que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ *converge condicionalmente.*

Seja pelo problema anterior que a integral dada converge, devemos mostrar que ela não é absolutamente convergente, ou seja, $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ *diverge.*

Como no problema anterior, pelo Método 2 nós temos:

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{v+n\pi}\, dv \tag{7}$$

Agora $\dfrac{1}{v+n\pi} \geq \dfrac{1}{(n+1)\pi}$ *para* $0 \leq v \leq \pi$*. Assim,*

$$\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} v}{v+n\pi}\, dv \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} v\, dv = \frac{2}{(n+1)\pi} \tag{8}$$

Temos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)\pi}$ *diverge, pois a serie da direita de (7) diverge por teste de comparação. Assim,* $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ *diverge pelos resultado obtidos.*

Qualquer um dos teste usados para integrais com integrando não negativo pode ser usado para testar convergência absoluta.

2.2.2 INTEGRAL IMPRÓPRIA DE SEGUNDA ESPÉCIE

Definição 2.10. *Se $f(x)$ se tornar ilimitada somente no ponto $x = a$ do intervalo $a \leq x \leq b$, então definimos:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \tag{9}$$

define o que seja uma integral imprópria de segunda espécie. Se o limite da direita de (9) existir, nós chamamos a integral da esquerda de convergente; por outro lado, ela é divergente.

Definição 2.11. *Analogamente se $f(x)$ se torna ilimitada no ponto $x = b$ do intervalo $a \leq x \leq b$, então nós estendemos a categoria da integral imprópria de segunda espécie.*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{10}$$

Observação 2.1. *Esteja alerta com a palavra ilimitada que é distinta de indefinida. Por exemplo, $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ é uma integral própria, seja $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e portanto é limitada com $x \to 0$ porém a função é indefinida em $x = 0$. No caso da integral da esquerda de (10) é dita convergente ou divergente de acordo se o limite da direita existe ou não existe.*

Definição 2.12. *Finalmente, a categoria de integrais impróprias de segunda espécie também inclui o caso onde $f(x)$ se torna ilimitada somente em um ponto interior $x = x_0$ do intervalo $a \leq x \leq b$, então definimos:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx \tag{11}$$

A integral da esquerda de (11) converge ou diverge de acordo se os limites da direita existir ou não existir.

Extensões dessa definição podem ser feitas em caso $f(x)$ se tornar ilimitada em dois ou mais pontos no intervalo $a \leq x \leq b$.

VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY

Isso pode acontecer quando os limites da direita de (11) não existirem quando ε_1 e ε_2 aproximarem de zero independentemente. Neste caso é possível fazer $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ em (11), escrevendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right] \tag{12}$$

o limite existe. Se o limite da direita de (12) existir, nós chamamos este valor limite de valor principal de Cauchy da integral da esquerda. Para ilustrar esse tema temos como exemplo

1) Determine se $\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$ converge (a) no modo usual, (b) no valor principal de Cauchy.

(a) Pela definição,

$$\int_{-1}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{1+\varepsilon_2}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}$$
$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\varepsilon_1^2}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left(\frac{1}{2\varepsilon_2^2}-\frac{1}{32}\right)$$

e assim os limites não existem, e a integral não converge pelo modo usual.

(b) Seja

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\int_{-1}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\varepsilon}^{5}\frac{dx}{(x-1)^3}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\frac{1}{8}-\frac{1}{2\varepsilon^2}+\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{32}\right\} = \frac{3}{32}$$

a integral existe no valor principal de Cauchy. E o valor principal é $3/32$.

2) O logaritmo natural pode ser definido como:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \qquad 0 < x < \infty$$

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ é ilimitada com $x \to 0$, esta é uma integral de segunda espécie. Também, $\int_0^\infty \frac{dt}{t}$ é uma integral de terceira espécie, visto que o intervalo da direita é ilimitado.

Agora $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon\to 0}[\ln 1 - \ln\varepsilon] \to -\infty$ com $\varepsilon \to 0$; portanto, esta integral imprópria de segunda espécie é divergente. Também $\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty}[\ln x - \ln 1] \to \infty$; está integral também diverge.

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS ESPECIAIS DE SEGUNDA ESPÉCIE

1. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$.

2. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge se $p < 1$ e diverge se $p \geq 1$

Estas podem ser chamadas de integrais p de segunda espécie. Note que quando $p \geq 0$ as integrais são próprias.

TESTE DE CONVERGÊNCIA PARA INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE SEGUNDA ESPÉCIE

Os teste a seguir são dados em caso em que $f(x)$ é ilimitada somente quando $x = a$ e no intervalo $a \leq x \leq b$. Testes análogos são válidos se $f(x)$ é ilimitada no ponto $x = b$ ou em $x = x_0$ quando $a < x_0 < b$.

1. Teste de comparação para integrais com integrantes não negativos.

(a) Convergência. Seja $g(x) \geq 0$ para $a < x \leq b$, e supondo que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge. Então se $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $a < x \leq b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ também converge.
Demonstração: Análoga ao teste de comparação para integrais impróprias de primeira espécie.

Exemplo 2.13. $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ *para* $x > 1$. *Então visto que* $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ *converge (integral* p *com* $a = 1$, $p = 1/2$*),* $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ *também converge.*

(b) Divergência. Seja $g(x) \geq 0$ para $a < x \leq b$, e supondo que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge. Então se $f(x) \geq g(x)$ para $a < x \leq b$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ também diverge.
Demonstração: análoga ao teste de comparação para integrais impróprias de primeira espécie.

Exemplo 2.14. $\dfrac{\ln x}{(x-3)^4} > \dfrac{1}{(x-3)^4}$ *para* $x > 3$. *Então visto que* $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4}$ *diverge (integral p com* $a = 0$, $p = 4$*),* $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$ *também diverge.*

2. Teste do quociente para integrais com integrantes não negativos.

(a) Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ para $a < x \leq b$, e se $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ ou ∞, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ ou ambas convergem ou divergem.

Demonstração: análoga ao teste do quociente para integrais impróprias de primeira espécie.

(b) Se $A = 0$ em (a), e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ converge, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Demonstração: análoga ao teste do quociente para integrais impróprias de primeira espécie.

(c) Se $A = \infty$ em (a), e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Demonstração: análoga ao teste do quociente para integrais impróprias de primeira espécie.

Este teste está relacionado com o teste de comparação e é muitas vezes uma alternativa útil. Em particular tomando $g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$, temos dos fatos conhecidos sobre a integral p, os seguintes teoremas:

Teorema 2.3. *Seja* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x) = A$. *Então*

i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge se $p < 1$ e A finito

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge se $p \geq 1$ e $A \neq 0$ (A pode ser infinito)

Se $f(x)$ se tornar ilimitado somente no limite superior estas condições são substituídas por:

Teorema 2.4. *Seja* $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (b-x)^p f(x) = B$. *Então*

i) $\int_a^b f(x)\,dx$ converge se $p<1$ e B finito

ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge se $p\geq 1$ e $B\neq 0$ (B pode ser infinito)

Exemplo 2.15. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ *converge, visto que* $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(x^4-1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$

Exemplo 2.16. $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ *diverge, visto que* $\lim_{x\to 3^-}(3-x)\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

3. Convergência absoluta e condicional.

$\int_a^b f(x)\,dx$ é dita absolutamente convergente se $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge. Se $\int_a^b f(x)\,dx$ converge mas $\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverge, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é dita condicionalmente convergente.

Teorema 2.5. *Se* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *converge, então* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge. Em palavras, se é absolutamente convergente então a integral converge.*

Demonstração: *Análoga ao teorema de absoluta convergência para integrais impróprias de primeira espécie.*

Exemplo 2.17. *Seja* $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ *e* $\int_\pi^{4\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ *converge (integral p com* $a=\pi$, $p=1/3$*), segue que* $\int_\pi^{4\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right|dx$ *converge e assim* $\int_\pi^{4\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ *converge (absolutamente).*

Qualquer dos testes usados para integrais com integrantes não negativos pode ser usado em testes para convergência absoluta.

2.2.3 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS DE TERCEIRA ESPÉCIE

Integrais impróprias de terceira espécie podem ser expressas em termos de integrais impróprias de primeira e segunda espécie, e portanto a questão de convergência e divergência é respondida suando os resultados já estabelecidos de integrais impróprias de primeira e segunda espécie.

2.2.4 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS CONTENDO UM PARÂMETRO, CONVERGÊNCIA UNIFORME

Seja

$$\phi(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx \tag{13}$$

Esta integral é análoga à funções de series infinitas. Na busca de condições sob as quais podemos diferenciar ou integrar $\phi(\alpha)$ com relação a α, é conveniente introduzir o conceito de convergência uniforme para integrais, por analogia com séries infinitas.

Nós devemos supor que a integral (13) converge para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, ou resumidamente $[\alpha_1, \alpha_2]$.

Definição 2.13. *A integral (13) é dita uniformemente convergente em* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *se para cada* $\varepsilon > 0$*, podemos achar um número N dependente de* ε*, mas não de* α*, tais que*

$$\left|\phi(\alpha) - \int_a^u f(x,\alpha)dx\right| < \varepsilon \text{ para todo } u > N \text{ e todo } \alpha \text{ em } [\alpha_1, \alpha_2]$$

Isto pode ser corrigido por $\left|\phi(\alpha) - \int_a^u f(x,\alpha)\,dx\right| = \int_u^\infty f(x,\alpha)\,dx$, que é análogo em uma série infinita ao valor absoluto do restante após N termos.

A definição acima e as propriedades de convergência uniforme a serem desenvolvidas são formuladas através das integrais impróprias de primeira espécie. No entanto, resultados análogos podem ser dados pelas integrais impróprias de segunda espécie.

TESTES ESPECIAIS PARA CONVERGÊNCIA UNIFORME DE INTEGRAIS

1. Weierstrass M teste. Se nós podemos achar uma função $M(x) \geq 0$, tal que

(a) $|f(x,\alpha)| \leq M(x)$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, x > a$

(b) $\int_a^\infty M(x)\,dx$ converge, então $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ é uniformemente e absolutamente convergente em $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, x > a$

Exemplo 2.18.

Exemplo: seja $\left|\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}$ *e* $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ *converge, segue que* $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{x^2+1}dx$ *é uniformemente e absolutamente convergente para todo valor real de* α*.*

Como no caso de séries infinitas, é possível para integrais ser uniformemente sem serem absolutamente convergente, reciprocamente.

2. Teste de Dirichlet. Supondo que

(a) $\psi(x)$ é uma função monótona decrescente positiva que se aproxima de zero com $x \to 0$.

(b) $\left| \int_a^u f(x,\alpha)\,dx \right| = P$ para todo $u > a$ e $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Então a integral $\int_a^\infty f(x,\alpha)\psi(x)\,dx$ é uniformemente convergente para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

TEOREMAS SOBRE INTEGRAIS UNIFORMEMENTE CONVEGENTES

Teorema 6. Se $f(x,\alpha)$ é contínua para $x \geq a$ e $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, e se $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ é uniformemente convergente para $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, então se $\phi(x) = \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ é contínua em $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$. Em particular se α_0 é um ponte de $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, podemos escrever

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \phi(\alpha) = \lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx = \int_a^\infty \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx \tag{14}$$

Se α_0 é um dos pontos da extremidade, nós usamos os limites da direita ou da esquerda.

Teorema 7. Sob as condições do teorema 6, nós podemos integrar $\phi(x)$ com relação a α de α_1 para α_2 para obter

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \phi(\alpha)\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx \right] d\alpha = \int_a^\infty \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)d\alpha \right] dx \tag{15}$$

que corresponde a troca da ordem das integrações.

Teorema 8. Se $f(x,\alpha)$ é contínua e tem uma derivada parcial contínua com relação a α para $x \geq a$ e $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, e se $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ converge uniformemente em $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$, então se a não depende de α,

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx \tag{16}$$

Se a depende de α, este resultado é facilmente modificado.

2.2.5 DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

O desenvolvimento das integrais definidas que são impróprias pode ser alcançado por uma variedade de técnicas. Uma técnica útil consiste em introduzir um parâmetro devidamente colocado na integral e então diferenciar ou integrar com relação ao parâmetro, empregando as propriedades acima de uniformemente convergente.

2.2.6 TRANSFORMAÇÕES DE LAPLACE

Operadores que transformam um conjunto de objetos em outro são comuns na matemática. Derivada e integral indefinida são exemplos. Logaritmos fornecem uma vantagem aritmética imediata por substituir multiplicações, divisões, e atribuições, por simples processos de adição, subtração, e multiplicação. Após a obtenção de um resultado com logaritmos um processo anti-logaritmo é necessário encontrar a sua imagem no quadro original. Transformações de Laplace têm um papel semelhante ao dos logaritmos, mas no mundo mais sofisticado de equações diferenciais.

A transformação de Laplace de uma função $F(x)$ é definida como

$$f(s) = \mathscr{L}\{F(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} F(x)\, dx$$

é análoga à série de potências como pode ser visto através da substituição e^{-s} por t então que $e^{-sx} = t^x$. Muitas propriedades de séries de potência também requerem transformações de Laplace. A pequena tabela que se tem no final deste assunto de transformações de Laplace é útil. Em cada caso que a é uma constante real.

Temos como exemplo:

1) Verifique os resultados: $(a)\ \mathscr{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}, s > a$; $(b)\ \mathscr{L}\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}, s > 0$.

(a)

$$\mathscr{L}\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-(s-a)x}\, dx$$
$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1 - e^{-(s-a)M}}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

se $s > a$

$(b)\ \mathscr{L}\{\cos ax\} = \int_0^\infty e^{-sx}\cos ax\, dx = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

Da fórmula de integração 34 das funções elementares de integração, temos

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-sx}\cos ax\, dx = \lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{-sx}(a\,\text{sen}\,ax - s\cos ax)}{s^2+a^2}\right|_0^m = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Outro método, usando números complexos.

Da parte (a), $\mathscr{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$. Trocando a por ai. Então

$$\mathscr{L}\{e^{aix}\} = \mathscr{L}\{\cos ax + i\sin ax\} = \mathscr{L}\{\cos ax\} + i\mathscr{L}\{\sin ax\}$$
$$= \frac{1}{s-ai} = \frac{s+ai}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

Separando a parte da real e imaginária da equação temos: $\mathscr{L}\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $\mathscr{L}\{\sin ax\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

O método formal acima pode ser justificado usando os métodos de funções de uma variável complexa.

2) Resolva a equação diferencial $Y''(x) + Y(x) = x$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 2$.

Fazendo a Transformação de Laplace em ambos os lados da equação diferencial dada. Pelo exercício 12.35 da seção de exercícios temos

$$\mathscr{L}\{Y''(x) + Y(x)\} = \mathscr{L}\{x\}$$
$$\mathscr{L}\{Y''(x)\} + \mathscr{L}\{Y(x)\} = 1/s^2$$

então

$$s^2\mathscr{L}\{Y(x)\} - sY(0) - Y'(0) + \mathscr{L}\{Y(x)\} = 1/s^2$$

Resolvendo por $\mathscr{L}\{Y(x)\}$ usando as condições dadas, encontramos

$$\mathscr{L}\{Y(x)\} = \frac{2s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} \tag{17}$$

pelo métodos de frações parciais.

Seja $\dfrac{1}{s^2} = \mathscr{L}\{x\}$ e $\dfrac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}\{\sin x\}$, segue que $\dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}\{x+\sin x\}$.

Assim, de (17), $\mathscr{L}\{Y(x)\} = \mathscr{L}\{x+\sin x\}$, disto podemos concluir que $Y(x) = x+\sin x$ que é de fato uma solução.

Outro método:

Se $\mathscr{L}\{F(x)\} = f(s)$, chamamos $f(s)$ a inversa da transformação de Laplace de $F(x)$ e escreve $f(s) = \mathscr{L}^{-1}\{F(x)\}$.

Pelo Problema 12.78, $\mathscr{L}^{-1}\{f(s)+g(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{g(s)\}$. Então de (17)

$$Y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = x + \sin x$$

Inversa da Transformação de Laplace pode ser vista na tabela abaixo.

$F(x)$	$\mathscr{L}\{F(x)\}$
a	$\frac{a}{8}$, $8>0$
e^{ax}	$\frac{1}{8-a}$, $8>a$
sen ax	$\dfrac{a}{8^2+a^2}$ $8>0$
cos ax	$\dfrac{8}{8^2+a^2}$ $8>0$
$x^n; n=1,2,3...$	$\dfrac{n!}{8^{n+1}}$ $8>0$
$Y'(x)$	$8\mathscr{L}\{Y(x)\} - Y(0)$
Y''	$8^2L\{Y(x)\} - 8Y(0) - Y'(0)$

LINEARIDADE

A transformação de Laplace é um operador linear,

$$\zeta\{F(x)+G(x)\} = \zeta\{F(x)\} + \zeta\{G(x)\}.$$

Esta propriedade é essencial para retornar a solução depois de ter calculado na forma de transformação.

CONVERGÊNCIA

A exponencial e^{-st} contribui para a convergência da integral imprópria. É necessário que $F(x)$ não se aproxime de infinito tão rapidamente com $x \to \infty$. Isso é formalmente declarado a seguir:

Se existe uma constante a tal que $|F(x)| \leq e^{ax}$ para todo valor suficientemente grande de x, então $f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}F(x)\,dx$ converge quando $s > a$ e f tem derivadas de todas as ordens.

2.3 APLICAÇÕES

Segue nessa seção algumas aplicações das integrais impróprias.

1.Cálculo do comprimento de uma circunferência

Deduzir a fórmula $C = 2\pi r$ para o cálculo do comprimento da circunferência de um círculo de raio r.

Para simplificar os cálculos vamos admitir que a cincunferência tem o centro na origem e raio r, assim, sua equação será $x^2 + y^2 = r^2$. Iremos considerar o comprimento do arco que está no primeiro quadrante e depois multiplicar o resultado por 4, obtendo o comprimento total da circunferência.

Como o semicírculo superior é dado por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, temos que o comprimento de curva procurado será dado por:

$$C = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Esta última integral é imprópria, pois existe uma descontinuidade infinita em $x = r$, assim:

$$C = 4r \lim_{b \to r^-} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4r \lim_{b \to r^-} \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{b}\right)\right]_0^b = 4r \lim_{b \to r^-} \left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{r}\right) - \operatorname{arcsen}(0)\right]$$

$$C = 4r \lim_{b \to r^-} \left[\operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(0)\right] = 4r\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi r$$

2. Aplicação em estatística

As integrais imprórpias são amplamente utilizadas na teoria das probabilidades.

Por exemplo, a função cuja regra é $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ é chamada de função da densidade de probabilidade normal, com média μ e desvio padrão σ. O número μ indica onde a distribuição de probabilidades está centralizada, enquanto que o parâmetro σ indica a dispersão em torno da média.

Esta função possui, entre outras, as seguintes características:

a) a distribuição é simétrica em relação a $x = \mu$, pois f é uma função par;

b) a função f tem um ponto de máximo para $x = \mu$;

c) a função f é duplamente assintótica ao eixo das abscissas, ou seja, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$;

d) a função admite dois pontos de inflexão para $x = \mu \pm \sigma$;

e) a área sob a curva normal entre dois pontos é a probabilidade de uma variável normalmente distribuída tomar um valor entre estes pontos;

Da teoria das probabilidades é mostrado que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

3. Integrais Impróprias no campo da economia

São muitas as aplicações das integrais impróprias na economia. Por exemplo, suponha que exista um fluxo contínuo de receita para o qual o juro é acumulado continuamente à taxa de 100 i por cento e $f(t)$ reais é a receita por ano, em qualquer tempo de t anos. Se a receita continuar indefinidamente, o valor atual, V reais, de toda receita futura é dado pela seguinte integral imprópria:

$$V = \int_0^{\infty} f(t)e^{-it}\,dt$$

4. Aplicações em transformadas integrais

Sejam $f(t)$ e $g(p,t)$, funções de variáveis t e p, a integral imprópria $\int_0^\infty f(t)g(p,t)\,dt = F(p)$ produz uma nova função da variável p, indicada por $F(p)$ e chamada de Transformada Integral de $f(t)$.

Há vários tipos de transformadas integrais, por exemplo as Transformadas de Laplace (já citada) e as Transformadas de Fourier, que são muito utilizadas para encontrar soluções de equações diferenciais.

A característica da transformada de Laplace que (quando combinada com a linearidade), estabelece isto como uma ferramenta para resolver equações diferenciais é revelada através da aplicação de integração por partes para $f(s) = \int_0^x e^{-st}F(t)\,dt$ Ao deixar $u = F(t)$ e $dv = e^{-st}dt$, nós obtemos após $x \to 0$

$$\int_0^x e^{-st}F(t)\,dt = \frac{1}{s}F(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt.$$

Condições devem ser satisfeitas que garantem a convergência da integral (por exemplo, $e^{-st}F(t) \to 0$ com $t \to 0$.

Este resultado de integração por partes deve ser posto na forma:

(a) $\zeta\{F'(t)\} = s\zeta\{F(t)\} + F'(0)$ Repetição do procedimento combinado com um pouco de álgebra concede

(b) $\zeta\{F''(t)\} = s^2\zeta\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$ A representação de Laplace das derivadas de ordem necessária podem ser obtidas pela repetição do processo

Para ilustrar a aplicação, considere a equação diferencial

$\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 3\,\mathrm{sen}\,t$, aonde $y = F(t)$ e $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$. Usamos

$\zeta\{\mathrm{sen}\,at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $\zeta\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ redefinimos para

$f(s) = \zeta\{F(t)\}\zeta\{F''(t)\} + 4\zeta\{F(t)\} = 3\zeta\{\sin t\}$ usando (b) obtemos

$s^2f(s) - s + 4f(s) = \dfrac{3}{s^2+1}$. Resolvendo por $f(s)$

$$f(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4}$$

Referindo a tabula de transformações de Laplace, vemos que esta última expressão pode ser escrita como

$$f(s) = \zeta\{\,\text{sen}\,t\} - \frac{1}{2}\zeta\{\,\text{sen}\,2t\} + \zeta\{\cos 2t\}$$

usando a linearidade da transformação de Laplace:

$$f(s) = \zeta\{\,\text{sen}\,t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + \cos 2t\}$$

Achamos que

$$F(t) = \,\text{sen}\,t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t + \cos 2t$$

satisfaz a equação diferencial.

5. Função Gama e Beta

Essas funções serão tratadas de uma forma mais abrangente e detalhada nas seções seguintes.

2.3.1 INTEGRAIS IMPRÓPRIAS MÚLTIPLAS

A definição e resultado para integrais impróprias singulares podem ser estendidas para integrais impróprias múltiplas.

2.4 FUNÇÃO GAMA

A função gama pode ser considerada como uma generalização do $n!$ (N fatorial), onde n é qualquer número positivos inteiro para $x!$, onde x é qualquer número real. (Com exceções limitadas, a discussão que se segue, será restrita aos números reais positivos.) Essa extensão não parece razoável, ainda, em certos aspectos, a função gama definida pela integral imprópria

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{18}$$

responde ao desafio. Esta integral provou seu valor em aplicações. No entanto, porque ela não pode ser representado através de funções elementares, o estabelecimento de suas propriedades leva algum esforço. Duas das mais importantes são descritas abaixo.

1) A função gama é convergente para $x > 0$.

Demonstração:

Escreva a integral como

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{19}$$

- Se $x \geq 1$, a primeira integral de (19) converge desde que seja continua em $0 \leq t \leq 1$.

- Se $0 < x < 1$, a primeira integral de (19) é uma integral imprópria de segunda classe com $t = 0$. Visto que

$$\lim_{t\to 0} t^{1-x} t^{x-1} e^{-t} = \lim_{t\to 0} t^0 e^{-t} = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$$

  a integral converge pelo Teorema 2.3.i de integrais impróprias, com $p = 1 - x$ e $a = 0$, então a primeira integral de (19) converge para $x > 0$.

- Se $x > 0$, a segunda integral de (19) é uma integral imprópria de primeira classe. Visto que

$$\lim_{t\to\infty} t^2 t^{x-1} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t}$$

  como ocasiona uma indeterminação usamos L'Hospital, ou seja derivamos o numerador e o denominador até tirarmos a indeterminação, e teremos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(x+1)!}{e^t} = 0$$

a integral converge pelo Teorema 2.1.i de integrais impróprias.

Então, a segunda integral também converge para $x > 0$, e então a integral dada em (18) converge para $x > 0$

Voltando à função gama Temos que para $x = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{e^t}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^0} - \frac{1}{e^b}\right) = 1$$

2) A propriedade fundamental

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{20}$$

Esta expressão pode determinar $\Gamma(x)$ para todo $x > 0$. Em particular, se x é um número inteiro positivo, então:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x!$$

Desenvolvimento:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{x+1-1} e^{-t}\, dt$$

Utilizando integração por parte temos:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = t^x \Rightarrow du = xt^{x-1}\,dt$

$dv = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$

Voltado ao desenvolvimento temos:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x e^{-t}\, dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_0^b u\,dv = \lim_{b\to\infty} [uv]\Big|_0^b - \lim_{b\to\infty} \int_0^b v\,du \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-t^x}{e^t}\right]\Bigg|_0^b + \lim_{b\to\infty} x \int_0^b t^{x-1} e^{-t}\, dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}$$

Pois,

$$\lim_{b\to\infty} \left[\frac{-t^x}{e^t}\right]\Bigg|_0^b = 0$$

e

$$\lim_{b\to\infty} x\int_0^b t^{x-1}e^{-t} = x\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)$$

Então, por recorrência

$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.1 = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2.1 = 1!$

$\vdots$

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x.(x-1)...3.2.1 = x!$

Logo $\Gamma(x+1) = n\Gamma(x) = x!$

TABELA DE VALORES DA FUNÇÃO GAMA

n	$\Gamma(n)$
1.00	1.0000
1.10	0.9514
1.20	0.9182
1.30	0.8975
1.40	0.8873
1.50	0.8862
1.60	0.8935
1.70	0.9086
1.80	0.9314
1.90	0.9618
2.00	1.0000

A equação (20) é uma relação de recorrência que leva ao conceito fatorial. Primeiro observe que se $x = 1$, então (19) pode ser avaliada e, em particular,

$$\Gamma(1) = 1$$

De (20)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = ...x(x-1)(x-2)...(x-k)\Gamma(x-k)$$

Se $x = n$, onde n é um inteiro positivo, então

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)...1 = n! \tag{21}$$

Se x é um número real, então $x! = \Gamma(x+1)$ é definida por $\Gamma(x+1)$. O valor dessa identificação é de orientação intuitiva.

Se a relação de recorrência (20) é caracterizada como uma equação diferencial, então a definição de $\Gamma(x)$ pode ser estendida para os números reais negativos por um processo chamado continuação analítica. A ideia fundamental é que embora $\Gamma(x)$ é definido em (18) não é convergente para $x < 0$, a relação $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ permite que a ideia pode ser estendida para o intervalo $1 < x < 0$, e de lá para $2 < x < 1$, e assim por diante. Assim como podemos ver a seguir

Para o intervalo de $0 < x < 1$, obtém-se a relação dos complementos dada por:

$$\Gamma(x).\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} x\pi}$$

$$n = \frac{1}{2} \quad , \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \pi$$

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Para $x < 0$, da relação de recorrência $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, que toma $\Gamma(x)$ como definição para $x > 0$, podemos generalizar a função gama para $x < 0$, isolando $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

Então:

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{(\frac{-1}{2})} = -2\sqrt{\pi}$$

Podemos ver mais exemplos a seguir:

Calcular: (a) $\Gamma(-1/2)$, (b) $\Gamma(-5/2)$

Nós usamos a generalização aos valores negativos definido por

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

(a) Deixando $x = -1/2$, $\Gamma(-1/2) = \dfrac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -2\sqrt{\pi}$

(b) Deixando $x = -3/2$, $\Gamma(-3/2) = \dfrac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = \dfrac{-2\sqrt{\pi}}{-3/2} = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{3}$,
usando (a), temos

$$\Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-3/2)}{-5/2} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

A noção de fatorial nos guia para a informação sobre uma $\Gamma(x+1)$ em mais de um caminho. No século XVIII, Sterling apresenta a fórmula (para valores inteiros positivos n)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi}n^{n+1}e^{-n}}{n!} = 1 \tag{22}$$

Isso é chamado de fórmula de Sterling e isso indica que $n!$ assintoticamente abordagens $\sqrt{2\pi}n^{n+1}e^{-n}$ para os grandes valores de n. Esta informação é muito útil, pois $n!$ é difícil de calcular para grandes valores de n.

Há uma outra consequência da fórmula de Sterling. Ele sugere a possibilidade de que para suficientemente grandes valores de x,

$$x! = \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi}x^{x+1}e^{-x} \tag{23}$$

(Um argumento que justifica está é feita no Exercício 2.1). Sabe-se que $\Gamma(x+1)$ satisfaz a desigualdade

$$\sqrt{2\pi}x^{x+1}e^{-x} < \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}x^{x+1}e^{-x}e^{\frac{1}{12(x+1)}} \quad (24)$$

Desde que o fator $e^{\frac{1}{12(x+1)}} \to 0$ para grandes valores de x, o valor sugerido (23) para $\Gamma(x+1)$ é consistente com (24).

Uma representação exata de $\Gamma(x+1)$ é sugerido pela manipulação das seguintes $n!$. (Depende de $(n+k)! = (k+n)!$.)

$$n! = \lim_{k\to\infty} \frac{12...n(n+1)(n+2)...(n+k)}{(n+1)(n+2)...(n+k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^n}{(n+1)...(n+k)} \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k+2)...(k+n)}{k^n}$$

Uma vez que n é fixado o segundo limite é um, portanto, $n! = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k!k^n}{(n+1)...(n+k)}$. (Isso deve ser lido como uma produto infinito.)

Esta representação fatorial de números inteiros positivos sugere a possibilidade de que

$$\Gamma(x+1) = x! = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^n}{(n+1)...(n+k)} x \neq -1, -2, -k \quad (25)$$

Gauss verificou essa identificação no século XIX.

Este produto infinito é simbolizado por $\Pi(x,k)$, ou seja, $\Pi(x,k) = \dfrac{k!k^x}{(x+1)...(x+k)}$. É chamada de Função de Gauss e através deste simbolismo,

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \Pi(x,k) \quad (26)$$

A expressão para $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ (Que tem alguma vantagem em desenvolver a derivada de $\Gamma(x)$) resultados como segue. Coloque (25) sob a forma

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^x}{(1+x)(1+x/2)...(1+x/k)}$$

$$x \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}$$

Em seguida, introduzir

$$\gamma_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{k} - \ln k$$

Então

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \gamma_k$$

é a constante Euleriana. Esta constante foi calculada para muitos lugares, alguns dos quais são

$\gamma = 0.57721566....$

Ao deixar $k^x = e^{x\ln k} = e^{x(-\gamma_k + 1/2 + ... + 1/k)}$ A representação (25) pode ser modificado para que

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= e^{-\gamma x}\lim_{k\to\infty}\frac{e^x}{1+x}\frac{e^{x/2}}{1+x/2}...\frac{e^{x/k}}{1+x/k} = e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}e^{\gamma x}e^{x\ln k}/(1+\frac{x}{k})\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}k^x k!(k+x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1.2.3...k}{(x+1)(x+2)...(x+k)}x^x = \lim_{k\to\infty}\prod(x,k)\end{aligned} \tag{27}$$

Seja $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{k\to\infty}\frac{1+x}{e^x}\frac{1+x/2}{e^{x/2}}...\frac{1+x/k}{e^{x/k}} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}(1+x/k)e^{-x/k} \tag{28}$$

Outro resultado de especial interesse emana de uma comparação entre $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ com a "famosa"fórmula

$$\frac{\pi x}{\sin \pi x} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-(x/2)^2}...\frac{1}{(1-x/k)^2} = \prod_{k=1}^{\infty}1-(x/k)^2 \tag{29}$$

$\Gamma(1-x)$ é obtido de $\Gamma(y) = \frac{1}{y}\Gamma(y+1)$ ao deixar $y = -x$, ou seja,

$$\Gamma(-x) = -\frac{1}{x}\Gamma(1-x)$$

ou

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)$$

Agora usando (27) pra produzir

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \left(x^{-1}e^{-\gamma x}\lim_{k\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}(1+x/k)^{-1}e^{x/k}\right)\left(e^{\gamma x}\lim_{k\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}(1-x/k)^{-1}e^{-x/k}\right)\\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}(1-(x/k)^2)\end{aligned}$$

Então

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen } \pi x}, 0 < x < 1 \tag{30}$$

Observe que (30) proporciona o resultado

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{31}$$

Outra representação exata de $\Gamma(x+1)$ é

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^{x+1}e^{-x}\left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \frac{139}{51840x^3} + ...\right\} \tag{32}$$

O método de obtenção deste resultado está intimamente relacionado com a série assintótica Sterling para a função gama. (Veja os Exercícios 2.1 e 2.2)

A fórmula de duplicação

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x) \tag{33}$$

Demonstração: Fazendo $I = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2p} x\, dx$, $I = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2p} 2x\, dx$.

Então $I = \frac{1}{2}B(p+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})) = \dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$

Deixando $2x = u$, encontramos

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \text{sen}^{2p} u\, du = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2p} u\, du = I$$

$$\begin{aligned}\text{Mas} \quad J &= \int_0^{\pi/2} (2\,\text{sen}\, x\cos x)^{2p}\, dx = 2^{2p}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{2p} x \cos^{2p} x\, dx \\ &= 2^{2p-1}B(p+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}) = \frac{2^{2p-1}\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\}^2}{\Gamma(2p+1)}\end{aligned}$$

Então assim $I = J$,

$$\frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2p\Gamma(p)} = \frac{2^{2p-1}\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\}^2}{2p\Gamma(2p)}$$

como queríamos demonstrar. (O exercício 2.2 tem uma visão mais simples para os inteiros positivos.)

A fórmula de duplicação é um caso especial $(m = 2)$ da fórmula do produto a seguir:

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{m}\right)...\Gamma\left(X+\frac{m-1}{m}\right) = m^{\frac{1}{2}-mx}(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}\Gamma(mx) \tag{34}$$

Pode-se mostrar que a função gama tem derivadas contínuas de todas as ordens. Eles são obtido através da diferenciação (no que diz respeito ao parâmetro), sob o sinal de integral.

Ela ajuda a lembrar que $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-\gamma t}dt$ e que se $y = t^{x-1}$, então $\ln y = \ln t^{x-1} = (x-1)\ln t$. Assim, $\frac{1}{y}y' = \ln t$.

Segue que

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t dt. \tag{35}$$

Este resultado pode ser obtido (depois de fazer suposições sobre o intercâmbio de diferenciação com limites), tomando o logaritmo de ambos os lados (28) e, em seguida, de diferenciação. Em particular,

$$\Gamma'(1) = -\gamma \quad (\gamma \text{ é a constante euleriana.}) \tag{36}$$

Também pode ser demonstrado que

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right) + ...\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right) \tag{37}$$

Demonstração:

Sugestão: observe que $\Gamma = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$, então $\ln\Gamma(x) = \ln\Gamma(x+1) - \ln x$, e

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{1}{x}$$

Além disso, de acordo com a equação (25)

$$\Gamma x + 1 = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^x}{(x+1)...(x+k)}$$

Agora pegar o logaritmo dessa expressão e então diferenciar. Também recorda a definição da constante euleriana, γ.

2.5 FUNÇÃO BETA

A função beta é uma composição de dois parâmetros de funções gama que tem sido bastante útil na aplicação para ganhar seu próprio nome. Sua definição é

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \tag{38}$$

Se $x \geq 1$ e $y \geq 1$, é uma integral própria. Se $x > 0$, $y > 0$ e algum ou ambos $x < 1$ ou $y < 1$, a integral é imprópria mas convergente.

A função beta pode ser expressa através de funções de gama da seguinte forma

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{39}$$

Demonstração:

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} \quad u,v > 0$$

Deixando $z^2 = x^2$, temos $\Gamma(u) = \int_0^\infty z^{u-1}e^{-z}\,dz = 2\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2}\,dx.$

Similarmente, $\Gamma(v) = 22\int_0^\infty y^{2v-1}e^{-y^2}\,dy$. Então

$$\begin{aligned}
\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\left(\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{2v-1}e^{-y^2}\,dy\right)\\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}y^{2v-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

Transformando em coordenadas polares, $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(u)\Gamma(v) &= 4\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^{2(u+v)-1}e^{-\rho^2}\cos^{2u-1}\phi\,\operatorname{sen}^{2v-1}\phi\,d\rho\,d\phi \\
&= 4\left(\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^{2(u+v)-1}e^{-\rho^2}\,d\rho\right)\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\cos^{2u-1}\phi\,\operatorname{sen}^{2v-1}\phi\,d\phi\right) \\
&= 2\Gamma(u+v)\int_{0}^{\pi/2}\cos^{2u-1}\phi\,\operatorname{sen}^{2v-1}\phi\,d\phi \\
&= \Gamma(u+v)B(u,v)
\end{aligned}$$

usando os resultado do Exercício 2.5, resolvido na seção seguinte. Assim conseguimos o resultado requerido.

Muitas integrais podem ser expressas através de funções beta e gama. Duas são de especial interesse

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}B(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{40}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \Gamma(p)\Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p}, \quad 0 < p < 1 \tag{41}$$

Demonstração da Equação (41):

Dado $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}p\pi}$, mostre que $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}p\pi}$, quando $0 < p < 1$.

Deixando $\dfrac{x}{1+x} = y$ ou $x = \dfrac{y}{1-y}$, a integral dada se torna

$$\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy = B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p)$$

e o resultado segue.

2.5.1 INTEGRAIS DE DIRICHLET

Se V denota a região fechada no primeiro octante limitado pela superfície $\left(\dfrac{x}{a}\right)^p + \left(\dfrac{y}{b}\right)^q + \left(\dfrac{z}{c}\right)^r = 1$ e as coordenadas planas, então, se todas as constantes são positivas,

$$\int\int_V\int x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dx\,dy\,dz = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{pqr}\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\dfrac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{q}+\dfrac{\gamma}{r}\right)} \tag{42}$$

Integrais deste tipo são chamados integrais Dirichlet e muitas vezes são úteis na avaliação de várias integrais (veja o Exercício 2.6).

2.6 EXERCÍCIOS

Exercício 2.1. *Mostre que por grandes valores inteiros positivos* $n, n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ *aproximadamente.*

Pela definição $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-t} e^{-t}\, dt$. *Deixando* $z = x+1$ *então*

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t+\ln t^x}\, dt = \int_0^\infty e^{-t+x\ln t}\, dt \tag{43}$$

Para um valor fixo de x *a função* $x\ln t - t$ *tem um máximo relativo para* $t = x$*(como é demonstrado pela idéias elementares de cálculo). A substituição* $t = x+y$ *rende*

$$\Gamma(x+1) = e^{-x} \int_{-x}^\infty e^{x\ln(x+y)-y}\, dy = x^x e^{-x} \int_{-x}^\infty e^{x\ln(1+\frac{y}{x})-y}\, dy \tag{44}$$

Até este ponto, a análise foi rigorosa. Os seguintes passos formais podem ser feitos rigorosamente por procedimentos apropriados de limitações; onde, por causa da dificuldade das provas, elas serão omitidas.

Em (44) introduzir a expansão logarítmica

$$\ln\left(1+\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y^3}{3x^3} - + \ldots \tag{45}$$

e também deixando

$$y = \sqrt{x}v, \quad dy = \sqrt{x}dv$$

Então

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{-x}^\infty e^{-v^2/2+(v^2/3)\sqrt{x}\ldots}\, dv \tag{46}$$

Para grande valores de x

$$\Gamma(x+1) \approx x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{-x}^\infty e^{-v^2/2}\, dv = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$$

Quando x é substituído por valores inteiros n, então a relação de Stirling

$$n! = \Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \tag{47}$$

é obtido.

Exercício 2.2. *A fórmula de duplicação já provada. Para melhor vislumbramento , desenvolva ela para inteiros positivos, ou seja, mostre que*

$$2^{2n-1}\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n) = \Gamma(2n)\sqrt{\pi}$$

Sugestão: relembrando que $\Gamma\frac{1}{2} = \pi$, *então mostre que*

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)...5.3.1}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Observe que

$$\frac{\Gamma(2n+1)}{2^n\Gamma(n+1)} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)...5.3.1$$

Assim substituindo e refinando, teremos o que queríamos demonstrar.

Exercício 2.3. *1.2 Prove que* $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ *converge.*

Método 1:

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ *para* $x \geq 1$. *Então por teste de comparação, seja* $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ *converge, segue que* $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ *converge, ou seja,* $\int_{x^2}^{\cos x} dx$ *absolutamente convergente, e então converge pelo exercício anterior.*

Método 2:

Seja $\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ *converge, e assim* $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ *converge (absolutamente).*

Exercício 2.4. *Prove que (a)* $\mathscr{L}\{Y'(x)\} = s\mathscr{L}\{Y(x)\} - Y(0)$, *(b)* $\mathscr{L}\{Y''(x)\} = s^2\mathscr{L}\{Y(x)\} -$

$sY(0) - Y'(0)$

(a) *Pela definição (e com a ajuda da integração por partes)*

$$\mathscr{L}\{Y'(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} Y'(x)\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-sx} Y'(x)\, dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ e^{-sx} Y(x) \Big|_0^M + s \int_0^M e^{-sx} Y(x)\, dx \right\}$$

$$\int_0^M e^{-sx} Y(x)\, dx - Y(0) = s\mathscr{L}\{Y(x)\} - Y(0)$$

assumindo que s é tal que, $\lim_{M\to\infty} e^{-sM} Y(M) = 0.$

(b) *Deixando* $U(x) = Y'(x)$. *Pelo exercício* (a) *deste problema temos,* $\mathscr{L}\{U'(x)\} = s\mathscr{L}\{U(x)\} - U(0)$. *Assim*

$$\mathscr{L}\{Y''(x)\} = s\mathscr{L}\{Y'(x)\} - Y'(0) = s[s\mathscr{L}\{Y(x)\} - Y(0)] - Y'(0)$$

$$= s^2 \mathscr{L}\{Y(x)\} - sY(0) - Y'(0) \quad \blacksquare$$

Exercício 2.5. *Prove que (a)* $B(u,v) = B(v,u)$, *(b)*$B(u,v) = 2\int_0^\infty \operatorname{sen}^{2u-1}\theta \cos^{2v-1}\theta\, d\theta$.

(a) Usando a transformação $x = 1 - y$, *temos*

$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\, dx = \int_0^1 (1-y)^{u-1} y^{v-1}\, dy = \int_0^1 y^{v-1}(1-y)^{u-1}\, dy = B(v,u)$$

(b) Usando a transformação $x = \operatorname{sen}^2\theta$, *temos*

$$\begin{aligned} B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\, dx &= \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2\theta)^{u-1} (\cos^2\theta)^{v-1} 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2u-1}\theta \cos^{2v-1}\theta\, d\theta \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercício 2.6. *Calcular* $I = \int\int_V\int x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1}\, dx\, dy\, dz$ *onde* V *é a região do primeiro oc-*

tante limitado pela esfera $x^2+y^2+z^2=1$ *e coordenadas planas.*

Deixando $x^2=u, y^2=v, z^2=w$. *Então*

$$\begin{aligned} I &= \int\int_{\mathbb{R}}\int u^{(\alpha-1)/2}v^{(\beta-1)/2}w^{(\gamma-1)/2}\frac{du}{2\sqrt{u}}\frac{dv}{2\sqrt{v}}\frac{dw}{2\sqrt{w}} \\ &= \frac{1}{8}\int\int_{\mathbb{R}}\int u^{(\alpha/2)-1}v^{(\beta/2)-1}w^{(\gamma/2)-1}\,du\,dv\,dw \end{aligned}$$

quando $\mathbb{R}$ *é a região no espaço uvw limitado pelo plano* $u+v+w=1$ *e* uv, vw *e* uw *planos como na figura abaixo Assim,*

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1-u}\int_{w=0}^{1-u-v}u^{(\alpha/2)-1}v^{(\beta/2)-1}w^{(\gamma/2)-1}\,du\,dv\,dw \\ &= \frac{1}{4\gamma}\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1-u}u^{(\alpha/2)-1}v^{(\beta/2)-1}(1-u-v)^{\gamma/2}\,du\,dv \\ &= \frac{1}{4\gamma}\int_{u=0}^{1}u^{(\alpha/2)-1}\left\{\int_{v=0}^{1-u}v^{(\beta/2)-1}(1-u-v)^{\gamma/2}\right\}du \end{aligned}$$

Deixando $v=(1-u)t$, *temos*

$$\begin{aligned} \int_{v=0}^{1-u}v^{(\beta/2)-1}(1-u-v)^{\gamma/2}dv &= (1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\int_{t=0}^{1}t^{(\beta/2)-1}(1-t)^{\gamma/2}dt \\ &= (1-u)^{(\beta+\gamma)/2}\frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]} \end{aligned}$$

voltando e substituindo temos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}\int_{u=0}^{1}u^{(\gamma/2)-1}(1-u)^{(\beta+\gamma)/2}du \\ &= \frac{1}{4\gamma}\frac{\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2+1)}{\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma[(\beta+\gamma)/2+1]}{\Gamma[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1]} = \frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma(\beta/2)\Gamma(\gamma/2)}{8\Gamma[(\alpha+\beta+\gamma)/2+1]} \end{aligned}$$

quando usamos $(\gamma/2)\Gamma(\gamma/2)=\Gamma(\gamma/2+1)$.

3 CONCLUSÃO

Espera-se que o uso deste documento com o tema Integral Imprópria e Funções Eulerianas facilite a compreensão dos que buscam informações e conhecimento deste conteúdo. Para melhor aproveitamento desse trabalho o pesquisador que vier a estuda-lo recomenda-se o curso de Cálculo 1, cujo alguns textos bases são Leithold (LEITHOLD, 1994), Stewart (STEWART, 2009a), (STEWART, 2009b), Anton (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007), Swokowski (SWOKOWSKI, 1994), Thomas (THOMAS, 2003), Guidorizzi (GUIDORIZZI, 1999), dentre outros.

Recomenda-se também um curso básico de inglês, caso o pesquisador desse assunto queira se aprofundar nas principais fontes de pesquisa deste trabalho.

Este documento foi elaborado por Oldemir Brill Junior, com orientação de Wellington José Corrêa.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994.

SPIEGEL, M. R.; WREDE, R. **Theory and Problems of Advanced Calculus (Schaum's Outlines)**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

STEWART, J. **Cálculo - Vol.1**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

STEWART, J. **Cálculo - Vol.2**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2003.