UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTONIO RAFAEL TEOFILO DA SILVA

O ESTUDO DA NOÇÃO DE LIMITE E SUAS APLICAÇÕES

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2013

ANTONIO RAFAEL TEOFILO DA SILVA

O ESTUDO DA NOÇÃO DE LIMITE E SUAS APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Msc. Priscila Amara Patrício de Melo

CAMPO MOURÃO

2013

TERMO DE APROVAÇÃO

Antonio Rafael Teofilo da Silva

O Estudo da Noção de Limite e Suas Aplicações

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Priscila Amara Patrício de Melo

Prof. Msc. Raquel Polizeli

Prof. Msc. Tatiane Cazarin da Silva

Campo Mourão, 2013

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou o meu caminho durante esta caminhada. Agradeço também a minha esposa Danieli Patricia da Silva, que de forma especial e carinhosa deu-me força e coragem, apoiando sempre.

Agradeço a minha mãe Maria Terezinha Teofilo e a minha vó Andrelina Maria Teofilo que nos momentos difíceis que pensei em desistir sempre me apoiaram.

Quero agradecer também a Profª Msc. Priscila Amara Patrício de Melo pela paciência e dedicação ao me orientar neste trabalho.

RESUMO

Silva, Antonio Rafael Teofilo. O Estudo da Noção de Limite e Suas Aplicações. 35 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

O principal objetivo deste trabalho é estudar a noção de limite explorando suas propriedades e suas aplicações em alguns segmentos dos campos que o utilizam. Inicialmente faremos uma análise histórica, em seguida relembraremos algumas definições e propriedades básicas. Por fim, apresentaremos algumas aplicações envolvendo o conceito de limite.

Palavras-chave: limite, taxa de variação, aplicações de limite

ABSTRACT

Silva, Antonio Rafael Teofilo. The Study of the Notion of Limit And It's Applications. 35 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2013.

The main objective of this work is to study the concept of limit exploring its properties and their applications in various segments of the fields that use this notion. Initially we do a historical analysis, then we recall some definitions and basic properties. Finally, we present some applications involving the concept of limit.

Keywords: limit, rate of change, limit applications

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A noção de limite constitui a base teórica do calculo diferencial e integral e a sua ideia está presente por quase toda a matemática. Como exemplos de aplicações podemos citar: para determinar a continuidade e descontinuidade de uma função; determinar o comportamento de certas funções quando estas se aproximam de um determinado valor ou tendem a um número infinitamente grande; encontrar a solução de uma integral definida pelo método das somas de Riemann; encontrar a derivada por definição; encontrar a reta tangente a uma curva, etc.

Muitos dos fenômenos, sejam de causa natural ou social, podem ser representados por funções e sabe-se que na natureza, quase tudo encontra-se em constante movimento, sejam movimentos uniformes ou variados. Nesse sentido é viável a utilização da noção de limites para encontrar a taxa de variação de uma determinada função que represente o deslocamento, velocidade ou aceleração de determinado objeto.

Segundo Anton, Bivens e Davis (2007, p. 101):

> O desenvolvimento do Cálculo no século XVII por Newton e Leibniz forneceu aos cientistas seu primeiro entendimento real do que significa uma "taxa de variação instantânea", tal como a velocidade ou a aceleração. Uma vez entendida conceitualmente essa idéia, seguiram-se métodos computacionais eficientes e a Ciência deu um salto quântico para frente. A pedra fundamental sobre a qual se apoia a ideia de taxa de variação é o conceito de "limite", uma ideia tão importante que agora todos os demais conceitos do Cálculo se baseiam nela. (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 101).

Diante disso percebe-se a importância de desenvolver e aplicar a noção de limites, não somente como a base que sustenta o cálculo, mas também como uma técnica que pode contribuir para resolver determinados problemas que envolvem otimização e variações em determinadas grandezas. O principal objetivo desse trabalho é estudar e demonstrar algumas das aplicações do conceito de limite, nos vários segmentos dos campos passíveis de sua aplicação.

Este trabalho está subdividido em quatro capítulos. O Capítulo 1 trata-se de uma introdução na qual é apresentada o objetivo geral e contextualizado o assunto. O Capítulo 2, trata da fundamentação teórica, em que se abordam os principais conceitos, propriedades e notações que utilizaremos ao longo desse trabalho. Já o Capítulo 3 é dedicado a apresentar algumas das aplicações do conceito de limite. O último capítulo traz as considerações finais bem como a conclusão deste trabalho.

2 LIMITES

A noção de limites não se originou num instante. Há, por trás, um longo processo histórico. Neste capítulo a ideia é abordar a origem da noção de limite e sua transformação ao longo do tempo.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Para compreender a origem da ideia de limites e seu contexto histórico foi necessário um estudo teórico em que os livros utilizados foram: Eves (2004), Berlinghoff e Gouveia (2010) e Maor (2008).

Para entender os conceitos de limites é necessários retornar à época dos antigos gregos. Arquimedes de Siracusa (aproximadamente 287-212 A.C.), segundo Eves (2004): "teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limite para calcular área e o volume de várias formas planas e sólidas".

Antes dele, segundo Eves (2004, p. 418):

> Uma das contribuições importantes mais antigas ao problema da quadratura do círculo foi dada por Antífon, o sofista (c. 430 a. C.), um contemporâneo de Sócrates. Consta que Antífon teria antecipado a idéia de que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre o círculo e o polígono ao fim exaurir-se-ia (EVES, 2004, p. 418).

Arquimedes, ao propor um método para encontrar o valor de π, utilizou-se do mesmo método, inscreveu em um círculo um polígono regular e a medida que se aumentava o número de lados, o perímetro do polígono regular se aproximava do perímetro do círculo, em seguida, Arquimedes dividia o perímetro do polígono pelo diâmetro do círculo, encontrando, assim, um valor aproximado para π com a precisão desejada.

> A ideia do infinito como um processo sem fim tem sido um instrumento matemático útil por muitos séculos. É a base do "método de exaustão" usado pelos gregos antigos para lidar com quantidades incomensuráveis e achar áreas

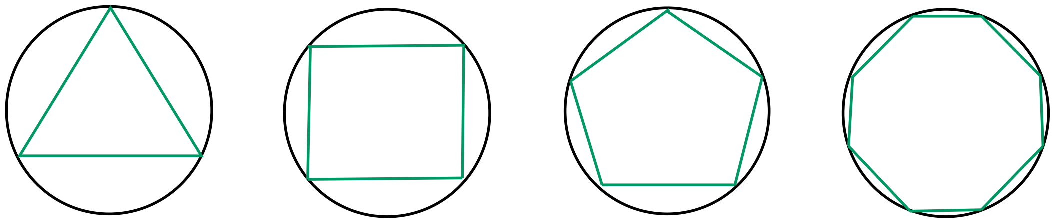


Figura 1: Método da exaustão

> de regiões curvas. É também a ideia subjacente a limite, o conceito fundamental do cálculo. (BERLINGHOFF; GOUVEIA, 2010, p. 243)

Dentre estas ideias de limites como um processo infinito, podemos citar o paradoxo de Zenão:

> Para que um corredor possa mover-se do ponto A para o ponto B, ele precisa primeiro alcançar o ponto médio da distância AB, então o ponto médio da distância remanescente e assim por diante, *ad infinitum*. E como esse processo exige um número infinito de passos, argumentava Zenão, o corredor nunca alcançará seu destino. (MAOR, 2008)

O argumento de Zenão é exposto de forma equivalente ao da dicotomia de um segmento. Tem-se abaixo um figura que descreve o paradoxo de Zenão sobre um corredor que decide caminhar de um determinado ponto A até um ponto B.

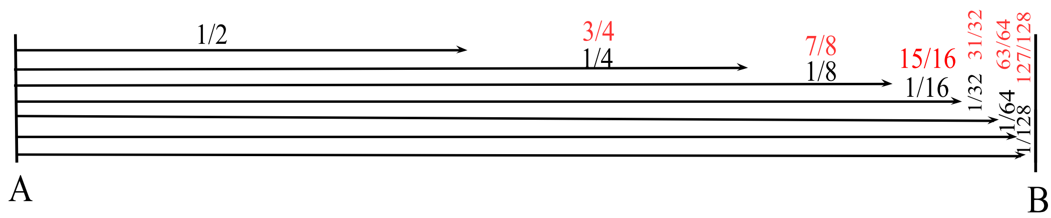


Figura 2: Dicotomia de um segmento

Esta distância a ser percorrida pelo corredor corresponde a 1 (uma) unidade, sendo que à medida que o corredor percorre metade do caminho resta para ele metade do caminho restante para ele percorrer. No desenho, os números na cor preta representam a distância percorrida pelo corredor em um determinado ponto, e os números em vermelho, a ditância total percorrida.

Quando se estudam sequências e séries, as distâncias em preto correpondem a sequências e as distâncias em vermelho representam as séries. Ao analisarmos a série percebemos que o corredor nunca chegará ao ponto B (em tese), devido a série nunca ser igual a 1 (um), distância entre A e B; e a sequência estará cada vez mais próxima de 0 (zero).

Temos portanto a sequência $a_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$ e a série S_n.

Em que

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= \tfrac{1}{2} \\
S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} \\
S_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \\
S_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} \\
&\vdots \\
S_n &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \ldots + \tfrac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

Aparecem em seguida os trabalhos de Descartes (1596 - 1650), Fermat (1601 - 1650), Wallis (1616 - 1703), Pascal (1623 - 1677), terminando todos eles com os trabalhos geniais de Leibniz (1646 - 1716), Newton (1642 - 1727) e Lagrange (1736 - 1813).

Como podemos perceber, os princípios do Cálculo são estimulados pelo desafio de determinar áreas e volumes, explicitados por Antífon e Arquimedes.

Embora aspectos da ideia de limites estejam implícitos nos métodos citados, eles nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Fermat e Barrow, precursores de Newton no desenvolvimento do Cálculo, não usaram limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre limites. A primeira exposição do Cálculo que Newton imprimiu apareceu em 1687, em *Philosophiac Naturalis Principia Mathematica*, o mais admirado tratado científico de todos os tempos. Na mesma época, Gottfried W. Leibniz trabalhou com as quantidades infinitamente pequenas.

Tanto no Cálculo de Newton quanto no Cálculo de Leibniz existiam problemas graves sobre a consistência lógica dos conceitos fundamentais. Somente com os trabalhos de D'Alembert e Cauchy essas dificuldades foram superadas pelo uso de um conceito bem definido de limite.

Apesar da ideia do conceito de limite ter surgido na Grécia antiga há mais de vinte séculos, tal conceito é de instituição recente. A formulação aritimética dessa ideia foi apresentada por John Wallis (1616 - 1703) em seu trabalho *Aritmetica Infinitorum*, 1655.

Mas foi Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) o responsável por conceitos formais básicos de limite e continuidade, devendo-se a ele a definição de derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Segundo Eves (2004, p.610), Cauchy desenvolveu uma teoria de limites aceitável, pois definiu continuidade, diferenciabilidade e integral definida em termos do conceito formal de limite.

O Símbolo *lim* foi, pela primeira vez, empregado por Simon L'Huilier (1750 - 1789) na sua obra *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Supérieurs*, 1786.

Segundo Maor (2008, p. 241) o número "e tornou-se o primeiro número a ser definido por um processo de limite, $e = lim(1+1/n)^n$ conforme $n \to \infty$". E acrescenta: "As origens de e não são tão claras, elas parecem recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $(1+1/n)^n$, que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia a uma certo limite - cerca de 2,71828 - à medida que n aumenta".

Quando aplicamos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, à medida que n tende ao infinito o limite tende a zero. Segundo Maor (2008, p. 9) "Esta é a própria essência do conceito de limite: uma sequência de números pode se aproximar de um limite o quanto quisermos, mas nunca vai chegar até ele realmente."

> Expressões como ∞/∞ ou $\infty-\infty$ são conhecidas como "indeterminações". Estas expressões não possuem um valor predeterminado; elas só podem ser avaliadas através de um processo de limite. Falando de um modo mais mundano, em cada indeterminação existe uma "luta"entre duas quantidades, uma tendendo a tornar a expressão numericamente grande e a outra tendendo a torná-la numericamente pequena. O resultado final vai depender do limite. As indeterminações mais comuns encontradas em matemática são: $0/0$, ∞/∞, $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0 e 1^∞. (MAOR, 2008, p.50)

2.2 O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Quando se quer verificar a existência de um limite em procedimentos científicos, é a definição (ε,δ) que deve ser aplicada. Nesta definição, primeiro fixamos nossa atenção em um intervalo ε para a variável dependente, e em seguida procuramos determinar um intervalo δ adequado para a variável independente. Vejamos:

Definição 2.1 *Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente no próprio a. Então dizemos que o limite de f(x) quando x tende a a é L, e escrevemos* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *se para todo número* $\varepsilon > 0$ *há um número correspondente* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x)-L| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < |x-a| < \delta$.

Essa definição se deve ao matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) e basicamente afirma que por menor que seja $\varepsilon > 0$ sempre pode-se encontrar um $\delta > 0$. Pode-se dizer que há uma correspondência entre os intervalos $a-\delta < x < a+\delta$ e $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$, conforme poderá ser visto no Exemplo 2.1 e Exemplo 2.2 a seguir.

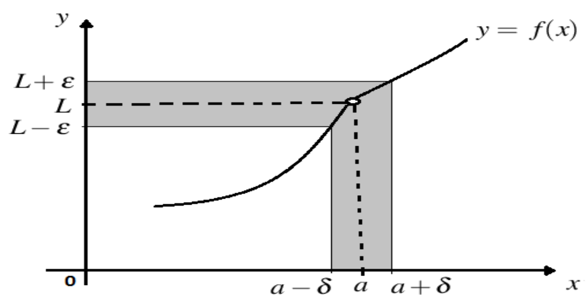


Figura 3: Gráfico - noção de limite

Exemplo 2.1 *Seja uma função f definida por $f(x) = 8x-3$ e $\lim_{x\to 2} f(x) = 13$. Para um $\varepsilon = 0,02$, existe um $\delta > 0$.*

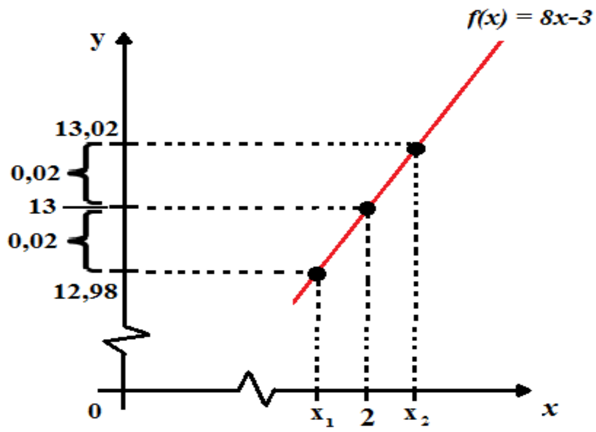


Figura 4: Gráfico - noção de limite (2)

Veja a Figura 4 e observe o comportamento de x. A figura indica que precisamos de um valor de x_1, tal que $f(x_1) = 12,98$ e um valor de x_2, tal que $f(x_2) = 13,02$, ou seja, precisamos de x_1 e x_2 tais que

$$\begin{array}{cc} 8x_1 - 3 = 12,98 & 8x_2 - 3 = 13,02 \\ x_1 = \frac{15,98}{8} & x_2 = \frac{16,02}{8} \\ x_1 = 1,9975 & x_2 = 2,0025 \end{array}$$

Como $2 - 1,9975 = 0,0025$ e $2,0025 - 2 = 0,025$, escolhemos $\delta = 0,0025$ de modo que se $0 < |x-2| < 0,0025$ então $|f(x) - 13| < 0,01$

Como $f(x) = 8x-3$

$$\begin{aligned} |f(x) - 13| &= |(8x-3) - 13| \\ &= |8x - 16| \\ &= 8\,|x-2| \end{aligned}$$

Precisamos determinar um $\delta > 0$, tal que

$$
\begin{aligned}
& se \quad 0 < |x-2| < \delta \quad então \quad |f(x) - 13| < 0,02 \\
\Leftrightarrow \; & se \quad 0 < |x-2| < \delta \quad então \quad 8|x-2| < 0,02 \\
\Leftrightarrow \; & se \quad 0 < |x-2| < \delta \quad então \quad |x-2| < 0,0025
\end{aligned}
$$

Uma escolha adequada para δ é 0,0025. Então temos a seguinte contrução:

$$
\begin{aligned}
& 0 < |x-2| < 0,0025 \\
\Rightarrow \; & 8|x-2| < 8(0,0025) \\
\Rightarrow \; & |8x-16| < 0,02 \\
\Rightarrow \; & 0 < |(8x-3) - 13| < 0,02 \\
\Rightarrow \; & 0 < |f(x) - 13| < 0,02
\end{aligned}
$$

Portanto, se $0 < |x-2| < 0,0025$ temos que $|f(x) - 13| < 0,02$.

A solução do exemplo esta em encontrar um δ para um ε determinado. Se para todo $\varepsilon > 0$ conseguirmos determinar um $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x-2| < \delta$ então $|f(x) - 13| < \varepsilon$, teremos estabelecido que o limite é 13.

Podemos notar que qualquer número positivo menor do que 0,0025 pode ser empregado como sendo o δ, conforme observado na Figura 4.

Ou Seja, se $0 < \gamma < 0,0025$ e a afirmativa "se $0 < |x-2| < 0,0025$ então $|f(x) - 13| < 0,02$" for verdadeira, temos que: se $0 < |x-2| < \gamma$ então $|f(x) - 13| < 0,02$, pois todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x-2| < \gamma$ satisfará também a desigualdade $0 < |x-2| < 0,0025$.

Exemplo 2.2 *Usando a Definição 2.1 podemos provar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$*
Solução

Qualquer intervalo contendo o número 3 satisfará o primeiro requisito da Definição 2.1. Então, precisamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, de modo que

$$
\begin{aligned}
& se \quad 0 < |x-3| < \delta \quad então \quad \left|x^2 - 9\right| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow \; & se \quad 0 < |x-3| < \delta \quad então \quad |x-3|\,|x+3| < \varepsilon
\end{aligned}
\tag{1}
$$

No primeiro membro da última desigualdade, além do fator $|x-3|$ temos o fator $|x+3|$. Assim para provar (1) devemos restringir δ o que implicará numa desigualdade envolvendo

$|x+3|$. *A restrição é necessária para que possa ser selecionado o intervalo requerido pela Definição 2.1 como sendo o intervalo* $(2,4)$ *o que acarreta* $\delta \leq 1$.

$$\begin{aligned} & 0<|x-3|<\delta \ e \ \ \delta \leq 1 \\ \Rightarrow \ \ & |x-3|<1 \\ \Rightarrow \ \ & -1<x-3<1 \\ \Rightarrow \ \ & 5<x+3<7 \\ \Rightarrow \ \ & |x+3|<7 \end{aligned} \tag{2}$$

Então

$$\begin{aligned} & 0<|x-3|<\delta \ \ e \ \ |x+3|<7 \\ \Rightarrow \ \ & |x-3|\,|x+3|<\delta \cdot 7 \end{aligned} \tag{3}$$

O objetivo é conseguir $|x-3|\,|x+3|<\varepsilon$, *sendo que a afirmativa(3) implica* $\delta \cdot 7 \leq \varepsilon$, *isto é,* $\delta \leq \varepsilon/7$. *Isso significa que devemos impor duas restrições sobre* δ *tal que* $\delta \leq 1$ *e* $\delta \leq \varepsilon/7$. *As duas restrições estarão satisfeitas se* $\delta = min(1, \varepsilon/7)$. *Como* δ *é o menor dos dois números, temos:*

$$\begin{aligned} & 0<|x-3|<\delta \\ \Rightarrow \ \ & |x-3|\,|x+3|<\delta\,|x+3| \\ \Rightarrow \ \ & |(x-3)(x+3)|<\delta\,|x+3| \\ \Rightarrow \ \ & \left|x^2-9\right|<\delta\,|x+3| \end{aligned} \tag{4}$$

Verificou-se em (2) que se $\delta \leq 1$ *e* $0<|x-3|<\delta$, *então* $|x+3|<7$, *ou seja,* $\delta\,|x+3|<\delta \cdot 7$. *Avançando, do item (4), obtemos*

$$\begin{aligned} & \left|x^2-9\right|<\delta\,|x+3| \quad e \ \ \delta\,|x+3|<\delta \cdot 7 \\ \Rightarrow \ \ & \left|x^2-9\right|<\delta \cdot 7 \\ \Rightarrow \ \ & \left|x^2-9\right|<\tfrac{\varepsilon}{7} \cdot 7 \qquad (pois \ \ \delta \leq \varepsilon/7) \\ \Rightarrow \ \ & \left|x^2-9\right|<\varepsilon \end{aligned}$$

Portanto,verificamos que se $\delta = min(1, \varepsilon/7)$ $, \forall \ \varepsilon > 0$, *temos que a afirmativa é verdadeira se* $0<|x-3|<\delta$ *então* $\left|x^2-9\right|<\varepsilon$. *Isso prova que* $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

2.3 PROPRIEDADES DE LIMITE

Nessa seção são apresentadas, de forma resumida, algumas propriedades de limites, chamadas Leis de Limite. Omitiremos aqui sua demonstrações, mas estas podem ser facilmente encontradas em (LEITHOLD, 1994) e demais livros de Cálculo.

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então:

1. $\lim_{x\to a} b = b;$ b é constante
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a}[kf(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$
6. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
7. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, $se \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^p = [\lim_{x\to a} f(x)]^p$ para todo n inteiro
9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
10. $\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a}[f(x)-L] = 0$
11. $\lim_{x\to a} ln[f(x)] = ln[\lim_{x\to a} f(x)]$, se $\lim_{x\to a} f(x) > 0$
12. $\lim_{x\to a} cos[f(x)] = cos\,[\lim_{x\to a} f(x)]$
13. $\lim_{x\to a} sen[f(x)] = sen\,[\lim_{x\to a} f(x)]$
14. $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$

3 LIMITE E FUNÇÕES

Limite é um conceito que para ser aplicado requer o estudo de algumas noções que serão vistas neste capítulo. Dentre as noções é importante citar: o estudo do comportamento, a continuidade e descontinuidade, a reta tangente, as derivadas e as integrais de determinadas funções.

3.1 ESTUDO DO COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO

Na Definição 2.1, exigimos que x tende a "a". Isso significa que ao procurarmos o limite de uma função quando x tende a "a"a única coisa que importa é como f está definida próximo de "a", na realidade, $f(x)$ não precisa sequer estar definida em "a".

Sendo assim, uma das aplicações para limites é o estudo do comportamento de certas funções, quando estas se aproximam de um número real ou o valor da função quando x cresce ou decresce indefinidamente. Um exemplo que ilustra esta situação é o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Aplicando o limite à função, obtemos:

- uma assíntota vertical quando $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- uma assíntota horizontal quando $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Uma assíntota horizontal é uma reta horizontal $y = B$ em que a função $y = f(x)$ se aproxima quando x se aproxima de um número infinitamente grande (ou pequeno), enquanto que uma assíntota vertical segundo Anton, Bivens e Davis (2007, p.45): "diferentemente dos polinômios, as funções racionais podem ter números nos quais não estão definidas. Perto desses pontos, muitas funções racionais têm gráficos que se aproximam bastante de uma reta vertical, denominada assíntota vertical".

Pode ocorrer de existir uma assíntota oblíqua quando a função tiver, por exemplo, a forma: $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$. Reescrevendo tem-se: $f(x) = x + \frac{2}{x}$. Aplicando-se o limite quando $x \to +\infty$ a função $f(x)$, tem-se a fórmula $y = x$. Ou seja

$$f(x) = p(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$$

em que a assíntota será $y = p(x)$.

3.2 CONTINUIDADE E DESCONTINUIDADE

Os fenômenos contínuos desempenham um papel importante na natureza. O crescimento de uma árvore e o movimento de um foguete são exemplos de fenômenos contínuos. Por este motivo, as funções contínuas são a classe mais importante de funções estudadas em Cálculo.

Uma outra aplicação de limites é o estudo da continuidade e descontinuidade de uma função. Esta continuidade é analisada aplicando se a Definição 3.1, nos casos de funções de uma variável e a Definição 3.2 para funções de mais de uma variável. Como exemplo de funções descontínuas mais comuns podemos citar as funções racionais, que são funções da forma $f(x)/g(x)$, onde $g(x) \neq 0$. Ao aplicar a Definição 3.1 às funções racionais chegamos ao Teorema 3.1 que afirma que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, ou seja, o limite não existe.

Definição 3.1 *Dizemos que a função f é contínua no número a se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*
(i) f(a) existe;
(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe;*
(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será dita descontínua em a.

Definição 3.2 *Suponha que f seja uma função de n variáveis e A, um ponto de* R^n. *Então, dizemos que f será contínua em um ponto A se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*
(i) f(A) existe;
(ii) $\lim\limits_{P \to A} f(P)$ *existe;*
(iii) $\lim\limits_{P \to A} f(P) = f(A)$.
Se uma ou mais dessas condições não for satisfeita no ponto A, então f será descontínua em A.

Teorema 3.1 (Teorema de limite) *Se a for um número real qualquer e se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, *onde c é uma constante não-nula, então:*

(i) se $c > 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *por valores positivos de f(x)*

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

(ii) se $c > 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *por valores negativos de f(x),*

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iii) se $c < 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *por valores positivos de f(x),*

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

(iv) se $c < 0$ *e se* $f(x) \to 0$ *por valores negativos de f(x),*

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

O teorema também será válido se "$x \to a$" for substituido por "$x \to a^+$"ou "$x \to a^-$"

Outro tipo de descontinuidade que pode ocorrer em um função é aquela que se origina quando efetuamos a aplicação do limite pela direta e pela esquerda de um determinado valor, conforme definição 3.3 e observamos que para que o limite exista, devemos ter $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

Definição 3.3 *Escrevemos*

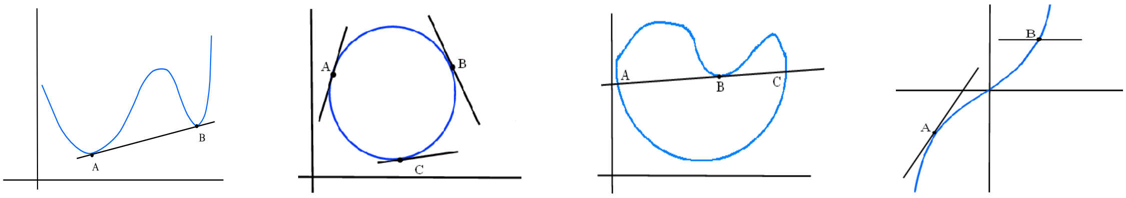
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \textit{se e somente se} \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Há casos em que o limite existe, mas não ocorre a continuidade. Estes casos ocorrem geralmente em funções que são definidas por partes como por exemplo:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & se \quad x \neq 2; \\ f(x) = 8 & se \quad x = 2. \end{cases}$$

3.3 RETA TANGENTE

Quando se estuda derivadas, uma das questões fundamentais é o encontro da reta tangente. A reta tangente a um círculo é simplesmente a reta que toca o círculo em um único ponto, porém, quando tentamos generalizar esta definição, verificamos que não é toda reta que toca uma função em um único ponto que é a reta tangente naquele ponto.



(a) (b) (c) (d)

Figura 5: Retas tangente

Nas Figuras 5(a) e 5(c) temos uma reta tangente ao ponto A e B respectivamente, mas se tomarmos a ideia que a reta tangente é a reta que toca a equação em um único ponto, esta definição não se aplica. Na Figura 5(c) esta noção se aplica independentemente do ponto que tomarmos na equação, enquanto que na Figura 5(d) temos duas retas, a reta sobre o ponto A e a reta sobre o ponto B, apesar de ambas as retas tocarem a equação em um único ponto, somente a reta A é a reta tangente a curva no ponto A.

A Seção 3.4 trata o limite como um instrumento para o cálculo de derivadas, e as derivadas como o coeficiente de inclinação da reta tangente a curva em um determinado ponto.

Definição 3.4 *Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A reta tangente a função f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é a reta que passa por P e tem inclinação dada por*

$$m(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

se o limite existir.

Foi devido a Augustin-Louis Cauchy que o problema de definir uma reta tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $P(x_1, f(x_1))$ foi resolvido utilizando a definição de derivadas.

3.4 DERIVADAS

O limite serve como intrumento para o cálculo de derivadas quando por algum motivo se desconheça a técnica correta ou para a demonstração de determinado processo de integração.

Para Anton, Bivens e Davis (2007, p. 165), derivada é: “a ferramenta matemática para estudar a taxa segundo a qual varia uma quantidade em relação a outra”, e acrescenta: “O estudo de taxas de variação está bastante relacionado com o conceito geométrico de uma reta tangente a uma curva” (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 165).

Definição 3.5 (Derivada) *Se o limite existir, a derivada de uma função f é a função denotada por f', em que para qualquer x no domínio de f seu valor seja dado por*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Trabalhando a definição de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Tomando: $x_1 + \Delta x = x$ implica $\Delta x = x - x_1$, ou seja: quando $\Delta x \to 0$ do mesmo modo $x \to x_1$. Obtemos a seguinte equação:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Portanto: a inclinação da reta tangente dada pela derivada da função $m(x_1) = f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Com base nisso, temos que $m(x_1) = f'(x_1)$, ou seja, a derivada é a inclinação da reta tangente no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

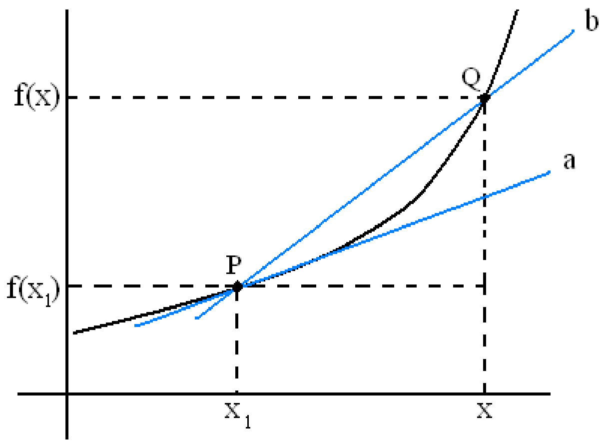


Figura 6: Inclinação da reta tangente

Conforme pode ser visto nesta Seção, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

A seguir é feita a derivada da função $f(x) = x^n$, usando o conceito de limite.

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + x\,a^{n-2} + a^{n-1})$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\\
&= \lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+x\,a^{n-2}+a^{n-1})\\
&= (a^{n-1}+a^{n-2}a+\cdots+a\,a^{n-2}+a^{n-1})\\
&= n\,a^{n-1}
\end{aligned}
$$

3.5 INTEGRAIS DEFINIDAS

O limite tem contribuição tanto para o cálculo de derivadas quanto para o de integrais. A Integração constitui-se no inverso da Derivação e em ambos os casos é possível se chegar ao resultado aplicando limites. No caso da integração, este processo consiste em aplicar as somas de Riemann para o cálculo da integral. Tem-se a seguir a equação e o gráfico que exemplifica o método de Riemann para o cálculo de áreas.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi i)\Delta_i x$$

Segue abaixo o gráfico

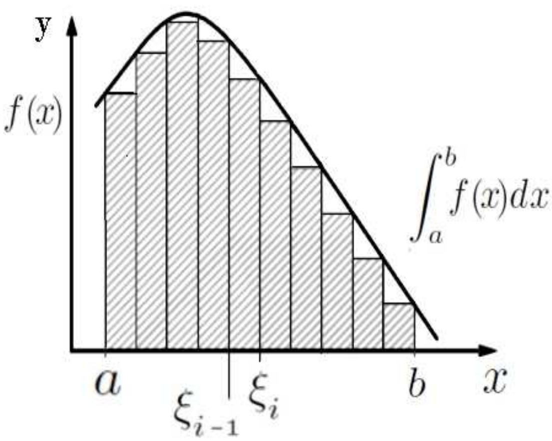


Figura 7: Método das somas de Riemann

Em que: a é o extremo esquerdo do intervalo, b o extremo direito do intervalo, ξi é o valor de x na extremidade (direita ou esquerda) do subintervalo, $f(\xi i)$ o valor da função nesse extremo, $\Delta_i x$ o tamanho da base do subintervalo.

4 APLICAÇÕES

Antes de iniciar o estudo da aplicação de limites é preciso estabelecer que: este trabalho consiste na resolução/discussão de alguns exercícios de cunho teórico; que uma das grandezas variáveis se refere a velocidade e aceleração, mas não somente a essas; e que neste trabalho foi empregado a noção de velocidade e aceleração nas aplicações.

Na natureza é frequente a ocorrência de movimentos variáveis, que são aqueles em que a velocidade pode se alterar. Quando se observa o marcador do velocímetro de um carro em movimento, a cada instante percebe-se um valor diferente. Disso podemos tirar a noção de velocidade média e velocidade instantânea.

A velocidade média depende de dois fatores, distância total percorrida e tempo gasto no percurso. Se a distância percorrida por um automóvel for de 180 Km durante 4 horas, tem se a velocidade média, em km/h:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_i}{t_f - t_i} = \frac{180}{4} \tag{4.0.1}$$

Neste caso s_f é a posição final, s_i é a posição inicial, t_f é o tempo final, t_i é o tempo inicial. Durante o percurso, a velocidade do automóvel varia tanto para mais quanto para menos. Se durante o trajeto a velocidade do automóvel for medida durante um determinado espaço de tempo muito pequeno, tem-se a velocidade instantânea, que é a velocidade média $v_m = s/t$, em que t é o menor possível.

$$v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{180}{4} = 45Km/h$$

Enquanto a velocidade está ligada a idéia de variação no deslocamento s, a aceleração está relacionada a variação na velocidade de um determinado objeto. A aceleração pode ser traduzida como:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

Em que v_f é a velocidade final e v_i a velocidade inicial.

Tabela 1: Velocidade

Posição	A	B	C	D	E	F	G	H
Tempo	0	1	2	3	4	5	6	7
Deslocamento	0	3	4	5	5	5	6	8

Fonte: Autoria Própria

A Tabela 1 indica o deslocamento de um determinado objeto em função do tempo. Percebe-se que a velocidade do objeto foi positiva ou seja a velocidade v, tal que $v > 0$ nos instantes A até H. Já nos instantes de C até D, de D até E e de E até F a velocidade se manteve constante, ou seja, não houve uma aceleração.

Tabela 2: Aceleração

Posição	A	B	C	D	E	F	G	H
Tempo	0	1	2	3	4	5	6	7
Velocidade	15	20	20	25	30	35	45	60

Fonte: Autoria Própria

A Tabela 2 indica a variação na velocidade de um objeto que se desloca sobre uma superfície. Percebe-se que a aceleração foi crescente na maioria dos pontos, exceto entre os pontos B e C. Neste caso a velocidade foi constante, a aceleração foi nula e o deslocamento foi crescente. Quando um objeto move-se com aceleração constante, conforme apresentado na Figura 8, percebe-se um deslocamento cada vez maior durante o mesmo intervalo de tempo. A velocidade é crescente e a aceleração é constante.

A Tabela 3 traz alguns exemplos de taxas antes e após a aplicação da noção de limite.

A função horária dos espaços no Movimento Uniformemente Variado (MUV) é uma função de grau 2 determinada pela Equação 4.0.2. Por se tratar de uma equação do segundo grau, tem-se que a função é uma parábola e que a concavidade é determinada pelo valor de a, se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima, caso contrario é voltada para baixo. Caso a aceleração seja igual a zero, temos então uma função que depende exclusivamente da velocidade.

$$S_f = s_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (4.0.2)$$

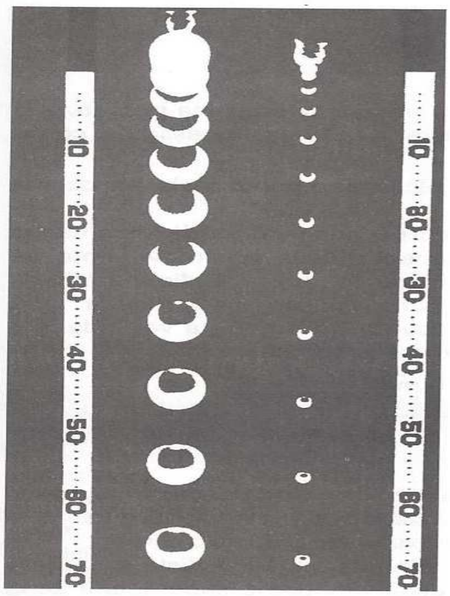


Figura 8: Movimento - Aceleração
Fonte: Máximo e Alvarenga

Aplicando limite a equação 4.0.2, temos a equação 4.0.3, que é a equação da velocidade do objeto.

$$V_f = V_i + a \cdot t \tag{4.0.3}$$

$$S'_f = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[s_i + v_i(t+\Delta t) + \frac{1}{2}a \cdot (t+\Delta t)^2\right] - \left[S_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2\right]}{\Delta t}$$

$$S'_f = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[s_i + v_i \cdot t + v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a \cdot t^2 + a \cdot t \cdot \Delta t + \frac{1}{2}a \cdot \Delta t^2\right] - \left[s_i + v_i \cdot t + \frac{1}{2}a \cdot t^2\right]}{\Delta t}$$

$$S'_f = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(v_i + a \cdot t + \frac{1}{2}a\Delta t)}{\Delta t}$$

$$S'_f = v_i + a \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad V_f = v_i + a \cdot t$$

Exemplo 4.1 *Um automóvel aproxima-se de um cruzamento a uma velocidade de 30 m/s. Quando o automóvel está a 120 m do cruzamento, um caminhão a uma velocidade de 40 m/s atravessa o cruzamento. O automóvel e o caminhão estão em ruas que se cruzam em ângulo reto. Com que velocidade o automóvel e o caminhão estarão se afastando um do outro, 2 s após o caminhão ter passado pelo cruzamento?*

Tabela 3: Aplicações utilizando a taxa de variação

x denota	y denota	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Mede a	$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ Mede a
Tempo	Concentração de uma droga na corrente sanguínea no instante x	Taxa variação média da concentração da droga no intervalo de tempo [a, a + h]	Taxa de variação instantânea da concentração da droga na corrente sanguínea no instante x=a
Número de artigos vendidos	Receita resultante da venda de x unidades	Taxa de variação média da receita quando o nível de vendas está entre x=a e x=a+h	Taxa de variação instantânea da receita quando o nível de vendas é de a unidades
Tempo	Volume de vendas no instante x	Taxa de variação média do volume de vendas no intervalo de tempo [a, a+h]	Taxa de variação instantânea do volume de vendas no instante x=a
Tempo	População de Drosophila (mosca-das-frutas) no instante x	Taxa de crescimento médio da população de moscas no intervalo [a, a+h]	Taxa de crescimento instantâneo da população de moscas no instante x=a
Temperatura em uma reação química	Quantidade de produto formado na reação química quando a temperatura é de x graus	Taxa de formação média do produto químico no intervalo de temperatura [a, a+h]	Taxa de formação instantânea do produto químico quando a temperatura for de a graus

Fonte: Flemming (1992)

Seja x a distância do carro ao cruzamento e y a distância do caminhão ao cruzamento em t=0 o momento em que o caminhão passa pelo cruzamento. Seja z a distância entre o carro e o caminhão. No tempo t=0, a distância z=120 m. No tempo t qualquer: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, *mas x = 120 - 30 t e y = 40 t, portanto:*

$$z = \sqrt{(120-30t)^2+(40t)^2}$$

$$z = \sqrt{14400-7200t+2500t^2}$$

Aplicando o limite, temos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{14400 - 7200t - 7200\Delta t + 2500t^2 + 5000\Delta t \cdot t + 2500\Delta t^2} - \sqrt{14400 - 7200t + 2500t^2}}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{14400 - 7200t - 7200\Delta t + 2500t^2 + 5000\Delta t \cdot t + 2500\Delta t^2 - 14400 - 7200t + 2500t^2}{\Delta t(\sqrt{14400 - 7200t - 7200\Delta t + 2500t^2 + 5000\Delta t \cdot t + 2500\Delta t^2} - \sqrt{14400 - 7200t + 2500t^2})}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta t(-7200 + 5000t + 2500\Delta t)}{\Delta t(\sqrt{14400 - 7200t - 7200\Delta t + 2500t^2 + 5000\Delta t \cdot t + 2500\Delta t^2} - \sqrt{14400 - 7200t + 2500t^2})}$$

$$= \frac{-7200 + 5000t}{\sqrt{14400 - 7200t + 2500t^2} + \sqrt{14400 - 7200t + 2500t^2}}$$

$$= \frac{-7200 + 5000t}{2\sqrt{14400 - 7200t + 2500t^2}}$$

Substituindo t na equação acima por t=2, temos:

$$\frac{-7200 + 5000 \cdot 2}{2\sqrt{14400 - 7200 \cdot 2 + 2500 \cdot 2^2}} = 14m/s$$

Portanto o automóvel e o caminhão estarão se afastando um do outro, 2 s após o caminhão ter passado pelo cruzamento a uma velocidade de 14 m/s.

Exemplo 4.2 *Uma partícula se move de modo que no instante t a distância percorrida é dada por $s(t) = 2t^2 - t$. Em que instante a velocidade é igual a zero? Qual é a aceleração da partícula?*

A equação $s(t) = 2t^2 - t$ é uma função que determina a posição em função do tempo, sabe-se que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{[2(t + \Delta t)^2 - (t + \Delta t)] - (2t^2 - t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2 - t - \Delta t - 2t^2 + t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(4t + 2\Delta t - 1)}{\Delta t}$$

$$= 4t - 1$$

Igualando a função encontrada $f(t) = 4t - 1$ *a zero, encontramos o ponto* $P(t, s(t))$ *onde a velocidade é zero.*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{4(t + \Delta t) - 1 - (4t - 1)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{4t + 4\Delta t - 1 - 4t + 1}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{4\Delta t}{\Delta t}$$

$$= 4$$

A aceleração da partícula pode ser encontrada pela equação acima, que neste caso é igual a 4 unidades.

Exemplo 4.3 *Modelou-se a velocidade desenvolvida por um objeto ao longo do tempo, após t segundos, por*

$$V(t) = 5000 + \frac{500t}{t^2 + t + 2} \tag{4.0.4}$$

Determine a velocidade do objeto nos instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. *Qual é o comportamento do objeto a longo prazo?*

Esta função é continua, portanto a velocidade durante os instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ *pode se observada na tabela 2:*

Tabela 4: Velocidade em função do tempo

t	V(t)
0	5000,00
1	5125,00
2	5125,00
3	5107,14

Fonte: Autoria Própria

Aplicando $\lim\limits_{t \to \infty}$ *a equação 4.0.4, temos:*

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = \lim_{t \to \infty} \left[5000 + \frac{500t}{t^2 + t + 2} \right] = 5000$$

Pode se concluir que a velocidade do objeto deve se aproximar de 5000 a medida que t se aproxima de um número infinitamente grande.

Exemplo 4.4 *A velocidade de um objeto é descrita pela equação abaixo, em que v é a velocidade e t o intervalo de tempo. Utilizando a noção de limite: Qual a velocidade deste após um intervalo de tempo relativamente grande? Qual fórmula que pode ser utilizada para descrever a taxa de variação na velocidade?*

$$v(t) = \frac{50t+5}{t+2}$$

Neste exemplo pode-se utilizar a noção de limites tanto para calcular o comportamento da função quando t tende a um número relativamente grande, quanto derivada.

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{50(t+\Delta t)+5}{(t+\Delta t)+2} - \frac{50t+5}{t+2}}{\Delta t}$$

$$v'(t) = \frac{95}{(t+2)^2}$$

Portanto, para qualquer valor de t, a taxa de variação da velocidade pode ser dada pela equação acima.

Do mesmo modo, pode-se descobrir o valor de $v(t)$ quando t se aproxima de um valor extremamente grande. Neste caso tem-se:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{50t+5}{t+2} = 50$$

Exemplo 4.5 *Seja f uma função definida por partes:*

$$f(x) = \begin{cases} 5x & se \quad 0 \leq x \leq 60 \\ 6,25x - 175 & se \quad 60 < x \leq 140 \\ 2,5x + 150 & se \quad 140 < x \leq 300 \\ 6,3x - 1190 & se \quad 300 < x \end{cases}$$

1. *Esboçe o gráfico.*

2. *Determine $\lim\limits_{x \to 60^-}$, $\lim\limits_{x \to 60^+}$, $\lim\limits_{x \to 140^-}$ e $\lim\limits_{x \to 140^+}$:*

1. *Um esboço para o gráfico de f é a figura 9.*

2. *Resolvendo tem-se que:* $\lim\limits_{x\to 60^-} = 300$, $\lim\limits_{x\to 60^+} = 200$, $\lim\limits_{x\to 140^-} = 700$ *e* $\lim\limits_{x\to 140^+} = 500$*:*

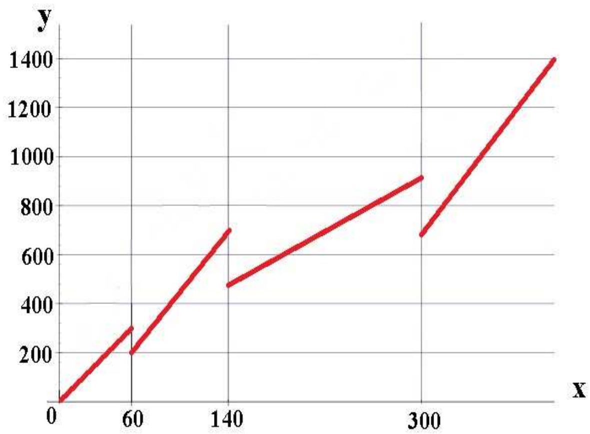


Figura 9: Continuidade e descontinuidade

Exemplo 4.6 *Seja g outra função definida por partes*

$$g(x) = \begin{cases} 7,9x & se \quad 0 \leq x \leq 140 \\ 0,63x + 1017,8 & se \quad 140 < x \end{cases}$$

1. *Esboce o gráfico de* $g = g(x)$.

2. *Determine* $\lim\limits_{x\to 140^-} g(x)$, $\lim\limits_{x\to 140^+} g(x)$.

3. $g = g(x)$ *é contínua em* $x = 140$*?*

1. *O esboço do gráfico pode ser visto na figura 10.*

2. *Resolvendo tem-se que:* $\lim\limits_{x\to 140^-} g(x) = 1106$, $\lim\limits_{x\to 140^+} g(x) = 1106$.

3. *Para determinar a continuidade ou descontinuidade da função, utiliza-se a Definição 3.1. Neste caso, pela Definição 3.1, tem-se que a função é contínua, pois:*

   (i) $g(140) = 1106$*;*

   (ii) $\lim\limits_{x\to 140} g(x) = 1106$

   (iii) $\lim\limits_{x\to 140} g(x) = g(140)$.

   Como as três condições estão satisfeitas, temos que a função $g = g(x)$ *é contínua para* $x = 140$.

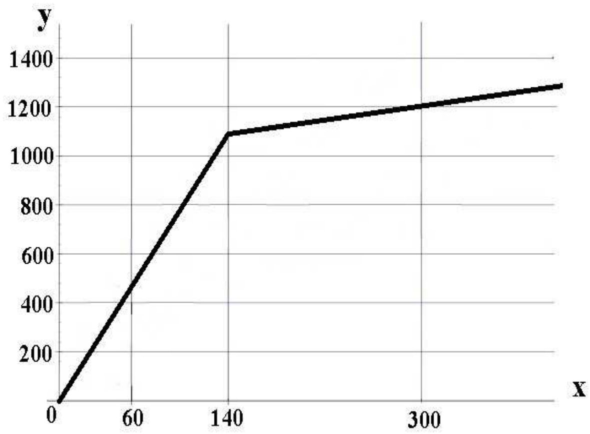


Figura 10: Continuidade e descontinuidade (2)

Exemplo 4.7 *Ache o valor exato da integral definida* $\int_1^3 x^2 dx$. *Interprete geometricamente o resultado.*

Considere uma partição regular do intervalo fechado $[1,3]$ *em n subintervalos. Então* $\Delta x = 2/n$.

Se escolhermos ξ_i *como o extremo direito de cada subintervalo, teremos:*

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n}, \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \cdots, \xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right), \cdots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

Como $f(x) = x^2$,

$$\begin{aligned} f(\xi_i) &= \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^2 dx &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (n^2+4ni+4i^2) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n(2n^2+3n+1)}{3} \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2} \right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right] \\
&= 6+0+\tfrac{8}{3}+0+0 \\
&= \tfrac{26}{3}
\end{aligned}$$

Interpretando geometricamente o resultado: como $x^2 \geq 0$ *para todo* x *em* $[1,3]$, *a região limitada pela curva* $y = x^2$, *pelo eixo* x *e pelas retas* $x = 1$ *e* $x = 3$ *tem* $\frac{26}{3}$ *unidades quadradas de área.*

Exemplo 4.8 *Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por* $y = x^3 - 3x + 4$ *no ponto* (x_1, y_1).

$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 4$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4$$

tem-se

$$\begin{aligned}
m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1+\Delta x)^3 - 3(x_1+\Delta x) + 4 - (x_1^3 - 3x_1 + 4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3x_1 - 3\Delta x + 4 - x_1^3 + 3x_1 - 4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 3\Delta x}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por Δx e obter

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[3x_1^2 + 3x_1\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\right]$$

$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3$$

Exemplo 4.9 *Ache uma equação da reta tangente à curva do Exemplo 4.8 no ponto $(2,6)$.*

Como a inclinação da reta tangente em qualquer ponto (x_1, y_1) é dada por

$$m(x_1) = 3x_1^2 - 3$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(2,6)$ é $m(2) = 9$. Logo, uma equação da reta pedida na forma de ponto-inclinação é

$$y - 6 = 9(x-2)$$

$$9x - y - 12 = 0$$

5 CONCLUSÃO

Ao se estudar limites, percebe-se que esta é uma ferramenta fundamental para o estudo e compreensão do cálculo, contribuindo para resolução de diversos problemas tanto da física quanto de outros ramos da ciência como Engenharia, Economia, Geologia, Astronomia, Biologia, etc.

Percebe-se que a noção de limite como é definida atualmente, constituiu-se de um longo processo que surgiu na época de Arquimedes e Siracusa (aproximadamente 287 - 2012 A.C.) e que com o tempo foi sendo trabalhada por diversos matemáticos, sendo Cauchy o responsável pela definição de continuidade, diferenciabilidade e integral usando o conceito de limite.

Neste trabalho nota-se que o conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma seqüência de números reais, à medida que o índice (da seqüência) vai crescendo, tende para infinito.

Aborda-se também a aplicação de limites no estudo de taxas de variação de funções que descrevem o deslocamento, velocidade e aceleração. Sendo possível determinar taxa de variação do lucro de uma empresa, crescimento populacional, taxa de variação de vendas, etc. Mas as principais aplicações dizem respeito a derivada e a continuidade de funções, reta tangente e problemas que envolvem áreas de determinadas figuras.

Tendo em vista os aspectos observados, conclui-se que podemos utilizar limites em várias situações oriundas do dia-dia, muitas das quais o individuo leigo sequer imaginaria a possível quantificação matemática. E ainda sabendo-se que boa parte do aprendizado do cálculo se faz por intermédio de resolução de exercícios com aplicação, em contato com a infinidade de aplicações as quais são permissíveis, torna nossa noção matemática muito mais dinâmica e propensa a um ágil raciocínio.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre-SC: Bookman, 2007.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEIA, F. Q. **A Matemática Através dos Tempos: Um Guia Fácil e Prático Para Professores e Entusiastas**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FLEMMING, D. M.; GONçALVES, M. B. **Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração**. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1992.

LANG, S. **Cálculo 1**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.

LEITHOLD, L. **O Cálculo Com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Editora HARBRA LTDA, 1994.

MAOR, E. **e: A História de Um Número**. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

MáXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Física: Volume Único**. São Paulo: Editora: Scipione, 1997.

TAN, S. T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

VERAS, L. L. **Matemática Aplicada à Economia: Sínteses da Teoria: Mais de 300 Exercícios Resolvidos e Propostos Com Respostas**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1999.