UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RENATA BURGUETTI

UTILIZAÇÕES DOS POLINÔMIOS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2010

RENATA BURGUETTI

UTILIZAÇÕES DOS POLINÔMIOS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

CAMPO MOURÃO

2010

TERMO DE APROVAÇÃO

Renata Burguetti

UTILIZAÇÕES DOS POLINÔMIOS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Wellington José Corrêa

Prof. Msc. Diogo Heron Macowski

Prof. Msc. Priscila Amara Patricio de Melo

Campo Mourão, 2010

Dedico este trabalho a minha tia Edna e a minha avó Helena, que através da bênção de Deus, me deram carinho, amor e dedicação, nunca medindo esforços para me propiciar a melhor Educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre comigo, dando-me sabedoria e força para vencer, paz e tranquilidade em todos os momentos desta trajetória e por ter colocado pessoas maravilhosas em meu caminho.

À minha família, pelos ensinamentos, carinho, momentos compartilhados, incentivos.

Aos colegas da Especialização que muito me ensinaram com suas multiplicidades de formação e experiências de vida; que dividiram comigo os diversos momentos de alegria, de brincadeiras, de risos e de estudos.

Ao professor orientador Msc.Wellington José Côrrea, minha admiração e gratidão, pela paciência, disponibilidade e competência.

Ao professor coordenador Msc.Adilandri Mércio Lobeiro por ter me fomentado o desejo de aprofundar-se nos conhecimentos da Matemática, bem como pela contribuição junto aos trabalhos realizados no decorrer desta especialização, tendo em vista ter sido um dos professores que lecionaram.

Enfim, agradeço aos amigos que de uma forma ou outra, contribuíram para a execução deste trabalho.

“Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência”.
(Irene Albuquerque)

RESUMO

BURGUETTI, Renata. UTILIZAÇÕES DOS POLINÔMIOS. 59 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2010.

No presente trabalho buscamos, inicialmente, uma visão geral das diversas utilizações dos polinômios nas variadas manifestações algébricas, partindo dos pressupostos históricos, em que apresentamos alguns dos pontos mais fundamentais da história do surgimento das fórmulas de resolução das equações de 2º e 4º graus. Em seguida, traçamos, em linhas gerais, um conjunto de informações acerca das diversas operações e respectivamente dos modelos de resolução para determinar as raízes dos polinômios. Por fim, apresentaremos uma prova do teorema fundamental da álgebra que nos garante que todo polinômio $p(z)$ em $\mathbb{C}$ de grau maior ou igual a 1, tem uma raíz em $\mathbb{C}$.

Palavras-chave: Polinômio, raiz, Teorema Fundamental da Álgebra.

ABSTRACT

BURGUETTI, Renata. THE USES OF POLYNOMIALS. 59 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2010.

In the present research we tried initially an overview about the uses of polynomials in the varied algebraic manifestations , based on the historical assumptions in which we present some of the most fundamental formulas of the history of the emergence for resolution of equations of 2 and 4 degrees. Then we trace, in general, a set of information about the various operations and the resolution models respectively to determine the roots of polynomials. Finally, we present a prove of the fundamental algebra theorem that guarantees us that every polynomial $p(z)$ in $\mathbb{C}$ of degree greater than or equal to 1, has a root in $\mathbb{C}$.

Keywords: Polynomial, root, Algebraic Fundamental Theorem.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

UEFS	Universidade Estadual de Feira de Santana
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
T.F.A.	Teorema Fundamental da Álgebra

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$P(x)$	Polinômio na variável x
∂f	Grau do polinômio f
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
Ø	Conjunto Vazio
i	Unidade imaginária
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Compreendemos a matemática como a ciência base de várias áreas do conhecimento, uma área que através de sua prática tende a funcionar como um agente unificador de um mundo completamente globalizado e tecnológico, sendo por sua vez um instrumento indispensável à formulação de teorias que regem o conhecimento, devido sua generalidade, uma área cuja contribuição é inegável ao desenvolvimento das ciências e da tecnologia.

Contudo, não podemos negar também as implicações que a matemática encontra no meio social, especificamente no meio escolar, onde a aprendizagem é muitas vezes refutada pelos alunos, por alegarem não ser contributivo ao seu desenvolvimento bem como à prática social, determinados conteúdos contidos na grade curricular e apresentados na sala de aula pelos professores, o que leva o ensino e até mesmo a matemática a ser vista como algo sem muito sentido à vida despertando um certo repudio quanto a aprendizagem, quando deveria ser de total domínio por parte dos alunos, visto que seu entendimento é fundamental não apenas ao desenvolvimento do indivíduo, a sua inserção e participação no meio tecnológico e os processos de globalização.

Tais fatores evidenciam a necessidade de uma maior eficiência no processo de ensino aprendizagem da matemática no âmbito escolar, o que pode ocorrer através de novas formas de ensinar, mudança de didática e esclarecimentos, ou uma nova concepção de determinados temas.

Partindo deste entendimento o presente estudo visa contribuir ao processo de ensino aprendizagem da matemática na escola, bem como a utilização da matemática pelo indivíduo em sua atuação social, através de um estudo dos polinômios nas variadas manifestações algébricas, propiciando assim, através deste uma forma prática de compreender este segmento da matemática. Desta forma, para um melhor entendimento e visando um conhecimento preciso do tema, o referido trabalho se apresenta em quatro momentos. No primeiro momento apresentamos os objetivos que pretendemos alcançar com a realização deste trabalho, bem como a relevância deste como elemento de informação prática ao leitor. No segundo capítulo, propomos um conhecimento dos polinômios partindo de seus pressupostos históricos, onde contempla alguns dos pontos mais fundamentais da história do surgimento das fórmulas de resolução das equações de 2º a 4º graus. O terceiro capítulo, apresenta de forma geral, um conjunto de informações quanto as diversas operações com polinômios, com modelos de resolução para determinar as raízes dos polinômios. E o quarto capítulo procedemos uma prova do teorema fundamental da álgebra, teorema este que assegura que todo polinômio $p(z)$ em $\mathbb{C}$ de grau maior ou igual a 1 tem raiz em $\mathbb{C}$.

E assim visamos enfatizar de maneira prática a utilização dos polinômios nas mais diversas formas do uso da álgebra, o que consequentemente contribuirá ao processo de aprendizagem deste tema tanto no meio escolar quanto ao uso social do indivíduo.

1.1 MOTIVAÇÃO

A prática mais adequada de ensino à formação do indivíduo é uma questão ainda presente nos mais diversos contextos de formação humana, que no atual contexto encontra-se impulsionada pelas crescentes transformações sociais que consequentemente levam as correções de rumo no ensino, surgindo assim novas propostas de transmissão do conhecimento, aqui enfatizamos o ensino da matemática. Conhecimento esse que para acompanhar as transformações da contemporaneidade e ser de utilidade social ao indivíduo deve ser adquirido de forma que cada conceito seja dotado de um significado para o estudante, de forma que o conteúdo matemático estudado torne significativo, partindo deste entendimento as mudanças ocorrem também nos livros e nas informações fornecidas sobre o assunto.

Conhecer a utilização dos polinômios nas suas variadas manifestações algébricas, com ênfase aos pressupostos históricos, destacando o surgimento das fórmulas de resolução das equações de 2º a 4º graus, consiste em uma forma prática de proporcionar o conhecimento deste segmento da matemática ao estudante bem como ao leitor, além de facilitar o entendimento e utilização destes conceitos na prática.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Apresentar e estudar o conceito de polinômios propiciando um tratamento satisfatório teórico e exemplificado, com vistas a inserir este conceito de maneira prática na utilização social do indivíduo.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar a função polinomial, bem como os pressupostos históricos dos polinômios no contexto escolar.
- Determinar polinômios a partir de informações sobre seu grau e seus coeficientes.
- Compreender a utilização dos polinômios nas quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).
- Entender o conceito de raízes de um polinômio.

2 POLINÔMIOS

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

De acordo com Lisboa (LISBOA, 2008) no decorrer da história vários problemas envolvendo polinômios (equações polinomiais) instigaram a curiosidade de grandes matemáticos como Nicoló Fontana (1500-1557) conhecido como Tartáglia, Ludovico Ferrari (1522-1560), Isaac Newton (1643-1727) dentre muito outros.

Parte muito interessante dessa história envolve as equações polinomiais de 4º grau.

Antigamente eram comuns as disputas entre os matemáticos nas quais se trocavam desafios. Numa dessas ocasiões um certo Zuanne de Tonini da Coi submeteu Girolamo Cardano (1501-1576), um grande "escritor" de matemática, a uma questão que envolvia a equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Após várias tentativas sem êxito, Cardano passou a questão ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou o método geral para a solução das equações de 4º grau, que foi publicado por Cardano no maior compendio algébrico (matemático) da época, Ars Magna (a Grande Arte).

Há um intrigante episódio sobre grandes e, em vida, não conhecidos matemáticos: Niels Henrik Abel (1802-1829) e Évariste Galois (1811-1832).

(a) Gregori Cardano (b) Niels Henrik Abel (c) Évariste Galois

Figura 1: Cardano, Abel e Galois

Fonte: LISBOA 2007, Revista Eletrônica do Colegiado de Matemática da UEFS.

Ambos são grandes matemáticos de vida trágica, o primeiro aos 24 anos morreu de tuberculose, dois dias antes de chegar uma carta do amigo garantindo o emprego, tão esperado, em Berlim. O segundo em um duelo, travado por conta de uma “coquette”, morreu aos 20 anos após ter realizado grandes e marcantes contribuições à Teoria dos Grupos (nome primeiramente usado por ele). Desconhecidos um do outro desenvolveram raciocínio idêntico para provar a impossibilidade de um método geral para a resolução das equações polinomiais de grau maior que 4.

2.2 O ENSINO DE POLINÔMIOS

O estudo de matemática nos ensinos fundamental e médio é baseado na aritmética, geometria e álgebra. Polinômio, como conteúdo basicamente algébrico, é trabalhado na 6ª e 7ª séries do ensino fundamental e muito utilizado a partir daí envolvendo outros conteúdos nas séries seguintes. Na verdade trata-se de um conteúdo onipresente em matemática, por isso é de suma importância que os alunos o dominem com segurança. Hoje em dia, muitas vezes, são deixadas de lado partes essenciais do estudo de polinômios, como o pleno domínio da fatoração, raízes racionais, somas e produtos de raízes, gráficos e polinômios irredutíveis. É comprovada a falta de compreensão do que vem a ser encontrar raízes de uma equação polinomial, além do abuso de fórmulas como a de Bháskara como relata Coxford. Os próprios livros didáticos expressam maior ênfase no processo/método que no conceito (utilizando exercícios maçantes e repetitivos), o que não propõe o PCN que sugere a ênfase no conceito e em sua importância e não em gravar métodos de resolução.

2.3 FUNÇÃO POLINOMIAL

Inicialmente, daremos a definição formal de função polinomial conforme Iezzi (IEZZI, 1980).

Definição 2.1 *Dados os números reais $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$, de modo que $n \in \mathbb{N}$ denominamos **função polinomial** à função:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

definida para todo x real.

À luz da definição (2.1), os números a_i, $i = 0, 1, \dots, n$ são chamados **coeficientes** da função (1). E ainda, cada parcela de $P(x)$ é dita **termo**. O maior expoente inteiro não-negativo n da incógnita de uma expressão algébrica em sua forma canônica é dito grau do polinômio.

Equações envolvendo expoentes negativos ou fracionários não são polinômios, portanto não faz sentido algum falar em grau, já que essa noção está diretamente ligada à de polinômios.

Exemplo 2.1 *Dadas as funções polinomiais $P_0(x) = a_0, P_1(x) = a_1x + a_0$, $(a_1 \neq 0)$ e $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $(a_2 \neq 0)$ denominadas, respectivamente, função constante, função do 1º grau e função do 2º grau. Como outros exemplos de funções polinomiais podemos considerar:*

(a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, *onde* $a_3 = 2, a_2 = -3, a_1 = 4$ *e* $a_0 = 5$

(b) $P(x) = 5x^3 + 3$, *tal que* $a_3 = 5, a_2 = a_1 = 0$ *e* $a_0 = 3$, *pois* $5x^3 + 3 = 5x^3 + 0x^2 + 0x + 3$

(c) $P(x) = 3x^4 - x^3 + 2x - 4$, *de modo que* $a_4 = 3, a_3 = -1, a_2 = 0, a_1 = 2$, *e* $a_0 = -4$

Observe que no polinômio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 6$, temos que seus coeficientes são 3,-2,1,1,-6, enquanto que seus termos são $3x^4, -2x^3, x^2, x, -6$.

2.4 VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Definição 2.2 *Dado o polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, fazendo $x = \alpha$, obtemos o número real $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0$ que é denominado **valor numérico** de $P(x)$ para $x = \alpha$.*

Exemplo 2.2 *Os valores numéricos de* $P(x) = x^2 - 2x + 3$ *para* $x = -1, x = 0$ *e* $x = 2$ *são, respectivamente:*

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^2 - 2(-1) + 3 = 6 \\ P(0) &= 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \\ P(2) &= 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Quando $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é um *zero* ou *raiz* do polinômio $P(x)$. Assim, 1 e -2 são raízes de $P(x) = x^3 - 3x + 2$, pois $P(1) = 0$ e $P(-2) = 0$.

2.5 POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Definição 2.3 *Denominamos* ***polinômio identicamente nulo*** *aqueles cujos coeficientes são todos iguais a zero. Indicamos o polinômio identicamente nulo por* $P(x) \equiv 0$ *(lê-se P(x) idêntico a zero).*

Assim, para que $P(x) = (a+1)x^3 + (b+2)x^2 + cx + d$ seja identicamente nulo devemos impor:

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 2 = 0 \\ c = d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = d = 0 \end{cases}$$

É importante observar que se um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo, então, para qualquer x, seu valor numérico é sempre igual a zero e, reciprocamente, se o valor numérico de um polinômio $P(x)$ é igual a zero para todo x, podemos concluir que $P(x)$ é identicamente nulo.

Simbolicamente:

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, \forall x.$$

2.6 POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Definição 2.4 *Dados os polinômios* $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$ *e* $P_2(x) = b_n x_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ *dizemos que* $P_1(x)$ *é idêntico a* $P_2(x)$ *e escrevemos* $P_1(x) \equiv P_2(x)$*, quando*

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Assim, o polinômio $P_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é idêntico a $P_2(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ quando $a = 2, b = -4, c = 1$ e $d = -1$.

Notemos que dois polinômios idênticos assumem os mesmos valores numéricos qualquer que seja x, e, reciprocamente, se dois polinômios $P_1(x)$ e $P_2(x)$ assumem os mesmos valores numéricos para todo x, então, $P_1(x)$ é idêntico a $P_2(x)$, ou seja:

$$P_1(x) \equiv P_2(x) \Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x), \forall x.$$

Resumindo os itens polinômio identicamente nulo e polinômios idênticos, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0 \\ P_1(x) \equiv P_2(x) \Leftrightarrow a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0 \end{array}}$$

2.7 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

2.7.1 Adição

Definição 2.5 *Dados dois polinômios:*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \\ g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i \end{aligned}$$

Chama-se soma de f com g, o polinômio

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i \end{aligned}$$

Isto é,

$$(f+g)(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

Exemplo 2.3 *Ao somar os polinômios* $f(x)=4+3x+x^2$ *e* $g(x)=5+3x^2+x^4$*, note que*

$$f(x)=4+3x+x^2+0x^3+0x^4 \text{ e } g(x)=5+0x+3x^2+0x^3+x^4.$$

Então,

$$(f+g)(x)=(4+5)+(3+0)x+(1+3)x^2+(0+0)x^3+(0+1)x^4=9+3x+4x^2+x^4.$$

2.7.2 Subtração

Tendo em vista o teorema anterior, tem sentido a seguinte definição:

Definição 2.6 *Dados dois polinômios*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \\ g(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx_n, \end{aligned}$$

chama-se diferença $f-g$*, o polinômio* $f+(-g)$*, isto é:*

$$(f-g)(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x_n,$$

em outras palavras,

$$(f-g)(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)x^i$$

2.7.3 Multiplicação

Definição 2.7 *Dados dois polinômios*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m \\ g(x) &= b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx_n, \end{aligned}$$

denota-se produto $f\cdot g$*, ao polinômio*

$$(f\cdot g)(x) \;=\; a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\ldots+a_mb_nx^{m+n}$$

Notemos que o produto $f\cdot g$ é um polinômio

$$h(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{m+n}x^{m+n},$$

cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$$

Notemos ainda que $f\cdot g$ pode ser obtido multiplicando-se cada termo a_ix^i de f por cada termo b_jx^j de g, segundo a regra $(a_ix^i).(b_jx^j)=a_ib_jx^{i+j}$, e somando os resultados obtidos.

Exemplo 2.4 *Ao multiplicar o polinômio* $f(x)=x+2x^2+3x^3$ *pelo polinômio* $g(x)=4+5x+6x^2$ *obtemos:*

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)(x) &= (x+2x^2+3x^3)\cdot(4+5x+6x^2)\\
&= x\cdot(4+5x+6x^2)+2x^2\cdot(4+5x+6x^2)+3x^3\cdot(4+5x+6x^2)\\
&= (4x+5x^2+6x^3)+(8x^2+10x^3+12x^4)+(12x^3+15x^4+18x^5)\\
&= 4x+13x^2+28x^3+27x^4+18x^5
\end{aligned}$$

A seguir, apresentaremos um recurso que facilitará operar polinômios que denotaremos por dispositivo prático

Dispositivo prático

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 4 & + & 5x & + & 6x^2 & \longleftarrow & g & & & & \\
 & x & + & 2x^2 & + & 3x^3 & \longleftarrow & f & & & & \\
\hline
 & 4x & + & 5x^2 & + & 6x^3 & \longleftarrow & & & & & x\cdot g\\
+ & & & 8x^2 & + & 10x^3 & + & 12x^4 & \longleftarrow & & & 2x^2\cdot g\\
 & & & & & 12x^3 & + & 15x^4 & + & 18x^5 & \longleftarrow & 3x^3\cdot g\\
\hline
 & 4x & + & 13x^2 & + & 28x^3 & + & 27x^4 & + & 18x^5 & \longleftarrow & f\cdot g
\end{array}$$

2.8 GRAU

Definição 2.8 *Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ um polinômio não-nulo. Chama-se grau de f, e representa-se por ∂f ou gr f, o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$. Dito de outro modo,*

$$\partial f = p \Leftrightarrow \begin{cases} ap & \neq 0 \\ a_i & = 0, \quad \forall i > p \end{cases}$$

Assim, grau de um polinômio f é o índice do "último" termo não nulo de f.

Exemplo 2.5 *Dados os polinômios abaixo, calculemos os seus respectivos graus.*

1. $f(x) = 4 + 7x + 2x^3 - 6x^4 \Rightarrow \partial f = 4$
2. $g(x) = -1 + 2x + 5x^2 \Rightarrow \partial g = 2$
3. $h(x) = 1 + 5x - 3x^2 + (a-4)x^3 \Rightarrow \begin{cases} \partial h & = 2, \quad se \quad a \quad = \quad 4 \\ \partial h & = 3, \quad se \quad a \quad \neq \quad 4 \end{cases}$

Se o grau do polinômio f é n, então a_n é chamado coeficiente dominante de f. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, f é chamado polinômio unitário.

Teorema 2.1 *Se f, g e $f+g$ são nulos então o grau de $f+g$ é menor ou igual ao maior dos números ∂f e ∂g.*

$\partial(f+g) \leq \max\{\partial f, \partial g\}$

Demonstração:

Com efeito, dados os polinômios $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i, g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_jx^j$, cujos respectivos graus são $\partial f = m$ e $\partial g = n$ com $m \neq n$.

Sem perda de generalidade, suponha que $m > n$. Assim, temos

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 \neq 0,$$

e

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0, \forall i > m,$$

portanto, $\partial(f+g) = m = \max\{\partial f, \partial g\}$.

Agora, se admitirmos que $m = n$, temos:

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0, \forall i > m,$$

de modo que $c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, portanto, $\partial(f+g) \leq \max\{\partial f, \partial g\}$.

$\square$

Exemplo 2.6 *Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ abaixo, encontre $\partial(f+g)$, recorrendo ao teorema precedente.*

1. *$f(x) = 1 + x + x^2$ e $g(x) = 2 + 3x$. Como $(f+g)(x) = 3 + 4x + x^2$, temos que $\partial(f+g) = 2$, já que $\partial f = 2$ e $\partial g = 1$.*

2. *$f(x) = 1 + x + x^2$ e $g(x) = 2 + 3x + 2x^2$. Observe que $(f+g)(x) = 3 + 4x + 3x^2$, donde $\partial(f+g) = 2$, em virtude que $\partial f = \partial g = 2$.*

3. *Considere agora os polinômios com coeficientes complexos. Todos os resultados obtidos até então, são válidos para este tipo de polinômios. Sejam $f(x) = 2 + ix + 5x^2$ e $g(x) = 3 + 5x - 5x^2$. Note que $(f+g)(x) = 5 + (i+5)x$, o que nos diz que $\partial(f+g) = 1 \leq \max\{\partial f, \partial g\} = 2$.*

Teorema 2.2 *Se f e g são dois polinômios não nulos, então o grau de f e g é igual à soma dos graus de f e g, ou seja,*

$$\partial(f \cdot g) = \partial f + \partial g$$

Demonstração:

De fato, dados os polinômios $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, cujos respectivos graus são $\partial f = m$ e $\partial g = n$.

Considere

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

um coeficiente qualquer de $(f \cdot g)(x)$.

Temos que:

$c_{m+n} = a_m \cdot b_n \neq 0.$

$c_k = 0$ para todo $k > m+n$ então

$\partial(fg) = m+n = \partial f + \partial g.$

$\square$

Exemplo 2.7 *Dados os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ abaixo, encontre $\partial(f \cdot g)$, recorrendo ao teorema precedente.*

1. *$f(x) = 4+3x$ e $g(x) = 1+2x+5x^2$. Pelo fato que $(f \cdot g)(x) = 4+11x+26x^2+15x^3$, temos que $\partial(f \cdot g) = \partial(f+g) = 3$, já que $\partial f = 1$ e $\partial g = 2$.*

2. *$f(x) = 1+2x+x^2+5x^3$ e $g(x) = 3-6x+7x^2+8x^3$. Perceba que $(f \cdot g)(x) = 3-2x^2+31x^3-7x^4+43x^5+40x^6$, donde $\partial(f \cdot g) = \partial f + \partial g = 6$.*

2.9 DIVISÃO

Definição 2.9 *Dados dois polinômios f (dividendo) e $g \neq 0$ (divisor), dividir f por g é determinar as duas condições seguintes:*

I) $q \cdot g + r = f$ (o polinômio q é dito quociente).

II) $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$, caso este em que a divisão é chamada exata).

Exemplo 2.8

1. *Ao dividir o polinômio $f(x) = 3x^4-2x^3+7x+2$ pelo polinômio $g(x) = 3x^3-2x^2+4x-1$, obtemos $q(x) = x$ e $r(x) = -4x^2+8x+2$ que satisfazem as duas condições:*

   I) $q \cdot g + r = x \cdot (3x^3-2x^2+4x-1)+(-4x^2+8x+2) = 3x^4-2x^3+7x+2 = f(x)$.

   II) $\partial r = 2$ e $\partial g = 3$, então, $\partial r < \partial g$.

2. *Quando dividimos o polinômio $f(x) = 5x^3+x^2-10x-24$ por $g(x) = x-2$ obtemos $q(x) = 5x^2+11x+12$ e $r(x) = 0$ que satisfazem às duas condições da definição anterior:*

   I) $q \cdot g + r = (5x^2+11x+12)(x-2)+0 = 5x^3+x^2-10x-24 = f(x)$.

II) $r(x) = 0$.

No caso em que a divisão é exata, dizemos, então, que $f(x)$ é divisível por $g(x)$ ou $g(x)$ é divisor de $f(x)$.

2.9.1 Divisões Imediatas

Inicialmente, examinemos o polinômio $qg+r$, onde $g \neq 0$ e $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$):

I) Se $q = 0$ e $r = 0$, então $qg + r = 0g + 0 = 0$.

II) Se $q = 0$ e $r \neq 0$, então $qg + r = 0g + r = r$, portanto, $\partial(qg + r) = \partial r < \partial g$.

III) Se $q \neq 0$, então $\partial(qg) = \partial q + \partial g \geq \partial g$, portanto, $\partial(qg + r) \geq \partial g$, pois a parcela r tem grau menor que g ou é nula.

Observação 2.1 *Há dois casos em que a divisão de f por g é imediata:*

1º Caso: $f = 0$.

Temos $qg + r = 0$, então $q = r = 0$ e, como acabamos de ver, na condição (I) acima, que se $q = r = 0$ então $f = 0$. Em resumo temos:

$$\boxed{f = 0 \Longleftrightarrow q = 0 \quad e \quad r = 0}$$

2º Caso: $\partial f < \partial g$.

Temos que

$$\begin{aligned} qg + r = f \quad &\Rightarrow \quad \partial(qg + r) = \partial f \\ &\Rightarrow \quad \partial(qg + r) < \partial g \end{aligned}$$

E, conforme vimos, isto ocorre somente se $q = 0$ e $r \neq 0$.

É imediato que:

$$\left.\begin{array}{rcl} q & = & 0 \\ f & \neq & 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot g + r = f$$
$$\Rightarrow \quad r = f.$$

Portanto $r \neq 0$ *e em suma, se* $\partial f < \partial g$*, então,* $q = 0$ *e* $r = f$*.*

Exemplo 2.9 *1. Ao dividir o polinômio* $f = 0$ *por* $g = x^2 + 3x + \sqrt{2}$ *obtemos* $q = 0$ *e* $r = 0$*.*

2. Dividindo $f = \pi x + \sqrt{3}$ *por* $g = x^3 + 4x^2 + x + \sqrt{2}$*, resulta que* $q = 0$ *e* $r = \pi x + \sqrt{3}$*.*

Deste ponto em diante, admitiremos sempre $\partial f \geq \partial g$, isto é, excluiremos da teoria os dois casos em que a divisão é trivial. Para responder à pergunta: como obter q e r? No caso em que $\partial f \geq \partial g$ explicaremos dois métodos: Método de Descartes e Método da Chave. Neste último provaremos a existência e a unicidade do quociente e do resto.

2.9.2 Método de Descartes

Este método, também conhecido com o nome de método dos coeficientes à determinar, baseia-se nos fatos seguintes:

i) $\partial q = \partial f - \partial g$, o que é consequência da definição, pois:

$$qg + r = f \Rightarrow \partial(qg + r) = \partial f \text{ então } \partial q + \partial g = \partial f$$

ii) $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$).

O método de Descartes é aplicado da seguinte forma:

1. Calculam-se ∂q e ∂r.

2. Constroem-se os polinômios q e r deixando incógnitos seus coeficientes.

3. Determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $qg + r = f$.

Exemplo 2.10 *Consideremos no que segue dois exemplos:*

1. *Ao dividir* $f = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ *por* $g = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ *temos:*

$$\begin{aligned} \partial q = 4 - 3 = 1 &\Rightarrow q = ax + b \\ \partial q < 3 &\Rightarrow \partial r = 2 \quad \textit{(na pior das hipóteses)} \\ &\Rightarrow r = cx^2 + dx + e \\ qg + r &= (ax+b)(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (cx^2 + dx + e) \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2 = f \end{aligned}$$

Desenvolvendo, temos para todo x:

$$3ax^4 + (3b - 2a)x^3 + (4a - 2b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$$

Deste modo, como desejamos que os polinômios acima sejam idênticos, resulta que

$$\begin{cases} 3a = 3 \Rightarrow a = 1 \\ 3b - 2a = -2 \Rightarrow 3b = -2 + 2(1) = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - 4a \Rightarrow c = -4 \\ 4b - a + d = 7 \Rightarrow d = a - 4b + 7 \Rightarrow d = 8 \\ e - b = 2 \Rightarrow e = b + 2 \Rightarrow r = 2 \end{cases}$$

Resposta: $q = x$ *e* $r = -4x^2 + 8x + 2$

2. *Dividindo* $f = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$ *por* $g = x - 2$, *obtemos:*

$$\begin{aligned} \partial q = 3 - 1 = 2 &\Rightarrow q = ax^2 + bx + c \\ \partial r < 1 &\Rightarrow \partial r = 0 r = d \\ qg + r &= (ax^2 + bx + c) \cdot (x - 2) + d = 5x^3 + x^2 - 10x - 24 = f \end{aligned}$$

Desenvolvendo, temos para todo x:

$$ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x + (d - 2c) = 5x^3 + x^2 - 10x - 24$$

De forma análoga ao exemplo anterior, como os polinômios acima são idênticos, vem que

$$\begin{cases} a = 5 \\ b - 2a = 1 \Rightarrow b = 2a + 1 \Rightarrow b = 11 \\ c - 2b = -10 \Rightarrow c = 2b - 10 \Rightarrow c = 12 \\ d - 2c = -24 \Rightarrow d = 2c - 24 \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$

Resposta: $q = x^2 + 11x + 12$ *e* $r = 0$.

No que segue, um importante resultado que trata sobre existência e unicidade de polinômios via algoritmo da divisão.

Teorema 2.3 *Dados os polinômios*

$$\begin{aligned} f &= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \ (a_m \neq 0) \\ g &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 \ (b_n \neq 0) \end{aligned}$$

existem um único polinômio q *e um único polinômio* r *tais que* $qg + r = f$ *e* $\partial r < \partial g$ *(ou* $r = 0$).

Demonstração:

Existência: inicialmente, reuniremos nosso labor em grupos de operações.

1º grupo de operações: vamos formar o monômio $a_m \cdot x^{m-n} = q_0 x^{m-n}$ e construir o polinômio b_n. Denotaremos o primeiro resto parcial o seguinte polinômio

$$r_1 = f - (g_0 x^{m-n})g \tag{2}$$

Notemos que:

$$r_1 = (a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots) - \frac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} \cdot (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots)$$

o que prova o cancelamento de $a_m x^m$ (pelo menos) portanto, $\partial r_1 = \alpha < m$

Para maior comodidade, façamos:

$$r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + c_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \ldots + c_1 x + c_0$$

2^{o} grupo de operações: vamos formar o monômio $\dfrac{c_\alpha}{b_n} \cdot x^{\alpha-n} = q_1 x^{\alpha-n}$ e construir o polinômio

$$r_2 = r_1 - (q_1 x^{\alpha-n}) \cdot g \tag{3}$$

chamado 2^{o} resto parcial.

Notemos que:

$$r_2 = (c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + \ldots) - \frac{c_\alpha}{b_n} \cdot x^{\alpha-n} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \ldots)$$

o que prova o cancelamento de $c_\alpha x^\alpha$ (pelo menos), portanto, $\partial r_2 = \beta < \alpha$.

Para maior comodidade, façamos:

$$r_2 = d_\beta x^\beta + d_{\beta-1} x^{\beta-1} + d_{\beta-2} x^{\beta-2} + \ldots + d_1 x + d_0$$

3^{o} grupo de operações: o nosso intuito agora é formar o monômio $\dfrac{d_\beta}{b_n} x^{\beta-m} = q_2 x^{\beta-n}$ e construir o polinômio

$$r_3 = r_2 - (q_2 x^{\beta-n}) \cdot g \tag{4}$$

chamado 3^{o} resto parcial.

Observando que:

$$r_3 = (d\beta x^\beta + d_{\beta-1} x^{\beta-1} + \ldots) - \frac{d_\beta}{b_n} \cdot x^{\beta-n} \cdot b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots)$$

resulta que podemos cancelar, pelo menos, $d_\beta x^\beta$, e, portanto, $\partial r_3 = \gamma < \beta$.

De maneira idêntica ao grupo de operações anterior, façamos:

$$r_3 = e_\gamma x^\gamma + e_{\gamma-1} x^{\gamma-1} + e_{\gamma-2} x^{\gamma-2} + \ldots + e_1 x + e$$

4^{o} grupo em diante: de modo análogo feito aos grupos anteriores, a obter o polinômio r_p.

Notando que, cada grupo de operações, o grau do resto parcial diminui de, ao menos, uma unidade, concluímos que após um certo número p de operações resulta um resto parcial r_p de grau inferior ao de g (ou então $r_p = 0$) e

$$r_p = r_{p-1} - (q_{p-1} x^{\in-n}) g \tag{p}$$

Vamos adicionar membro a membro as igualdades de 2 a (p):

$$
\begin{array}{lcl}
r_1 & = & f-(q_0x^{m-n})g \\
r_2 & = & r_1-(q_1x^{\alpha-n})g \\
r_3 & = & r_2-(q_2x^{\beta-n})g \\
 & \vdots & \\
r_p & = & r_{p-1}-(q_{p-1}x^{\in-n})g \\
\hline
\underbrace{r_p}_{r} & = & \underbrace{f-(q_ox^{m-n}+q_1x^{\alpha-n}+q_2x^{\beta-n}+\ldots+q_{p-1}^{\in-n})\cdot g}_{q}
\end{array}
$$

e então, $f=qg+r$ com $\partial r<\partial g$ (ou $r=0$).

2.9.3 Unicidade

Admitamos a existência de dois quocientes q_1 e q_2, e dois restos r_1 e r_2 na divisão de f por g, isto é:

$$
\begin{array}{r|l} f & g \\ \cline{2-2} r_1 & q_1 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{r|l} f & g \\ \cline{2-2} r_2 & q_2 \end{array}
$$

e provemos que $q_1=q_2$ e $r_1=r_2$.

Pela definição de divisão, temos:

$$
\left.\begin{array}{l} q_1g+r_1=f \\ q_2g+r_2=f \end{array}\right\} \Rightarrow q_1g+r_1=q_2g+r_2 \Rightarrow (q_1-q_2)g=r_2-r_1
$$

Se $q_1\neq q_2$ ou $r_2\neq r_1$, provemos que a igualdade $(q_1-q_2)g=r_2-r_1$ não se verifica. De fato,

$$
\left.\begin{array}{l} \partial[(q_1-q_2)g]=\partial(q_1-q_2)+\partial g\geq\partial g \\ \partial(r_2-r_1)\leq\max\{\partial r_2,\partial r_1\}<\partial g \end{array}\right\} \Rightarrow \partial[(q_1-q_2)g]\neq\partial(r_2-r_1)
$$

então, para evitar a contradição, devemos ter: $q_1=q_2$ e $r_1=r_2$.

$\square$

2.9.4 Método da Chave

A prova da existência de q e r vista no teorema 2.3 nos ensina como construir esses dois polinômios a partir de f e g. Vejamos, por exemplo, como proceder se $f = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ e $g = x^2 - 2x + 3$.

1º grupo de operações:

Formamos o primeiro termo de q pela operação $\dfrac{3x^5}{x^2} = 3x^3$ e construímos o primeiro resto parcial $r_1 = f - (3x^3 g = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ que tem grau maior que ∂g.

2º grupo de operações:

Nesse grupo pela operação $\dfrac{4x^5}{x^2} = 4x$ formaremos o segundo termo de q e obteremos o segundo resto parcial $r_2 = r_1 - (4x)g = -x^2 - x - 1$ que tem grau igual à ∂g.

3º grupo de operações:

Analogamente, pela operação $\dfrac{-x^2}{x^2} = -1$ formaremos o terceiro termo de q e construiremos o terceiro resto parcial $r_3 = r_2 - (-1)g = -3x + 2$ que tem grau menor que ∂g, portanto, está encerrada a divisão.

Resposta: $q = 3x^2 + 4x - 1$ e $r = -3x + 2$.

A disposição prática das operações indicadas acima é a seguinte:

$$
\begin{array}{r}
f \Rightarrow 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \qquad \\
-3x^5 + 6x^4 - 9x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
r_1 \Rightarrow 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 \quad \\
-4x^3 + 8x^2 - 12x \qquad \\
\hline
r_2 \Rightarrow -x^2 - x - 1 \quad \\
x^2 - 2x + 3 \quad \\
\hline
-3x + 2 \Leftarrow r
\end{array}
$$

que pode ser significada assim:

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
3 & -6 & 13 & -9 & 11 & -1 & 1 & -2 & 3 & \\
\cline{7-10}
-3 & 6 & -9 & & & & 3 & 0 & 4 & -1 \\
\cline{1-6}
& 4 & -9 & 11 & -1 & & & & & \\
& -4 & 8 & -12 & & & & & & \\
\cline{1-6}
& & -1 & -1 & -1 & & & & & \\
& & 1 & -2 & 3 & & & & & \\
\cline{1-6}
& & & -3 & 2 & & & & &
\end{array}
$$

Aplicações do Método da Chave

1ª) Dividir $f = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$ por $g + x^3 - x^2 + x - 1$.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -3 & 4 & 0 & -6 & 7 & 1\ -1\ \ 1\ -1 \\
\cline{7-7}
-2 & 2 & -2 & 2 & & & 2\ -1\ \ 1 \\
\hline
 & -1 & 2 & 2 & -6 & 7 & \\
 & 1 & -1 & 1 & -1 & & \\
\hline
 & & 1 & 3 & -7 & 7 & \\
 & & -1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & & & 4 & -8 & 8 &
\end{array}
$$

Resposta: $q = 2x^2 - x + 1$ e $r = 4x^2 - 8x + 8$.

2ª) Dividir $f = x^4 - 16$ por $g = x + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 0 & 0 & 0 & -16 & 1\ -1 \\
\cline{6-6}
-1 & -1 & & & & 1\ -1\ \ 1\ -1 \\
\hline
 & -1 & 0 & 0 & -16 & \\
 & -1 & 1 & & & \\
\hline
 & & -1 & 0 & -16 & \\
 & & -1 & -1 & & \\
\hline
 & & & -1 & -16 & \\
 & & & 1 & 1 & \\
\hline
 & & & & -15 &
\end{array}
$$

Resposta: $q = x^3 - x^2 + x - 1$ e $r = -15$.

2.10 DIVISÃO POR BINÔMIOS DO 1º GRAU

Trataremos neste tópico das divisões em que o dividendo é um polinômio f, com $\partial f \geq 1$, e o divisor é um polinômio g, com $\partial g = 1$.

Observemos o que ocorre quando dividimos $f = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ por $g = x - 4$.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 7x^2 + 4x - 1 & x - 4 \\
\cline{2-2}
-2x^3 + 8x^2 \qquad\qquad & 2x^2 + x + 8 \\
\hline
x^2 + 4x - 1 & \\
-x^2 + 4x \qquad & \\
\hline
8x - 1 & \\
-8x + 32 & \\
\hline
31 &
\end{array}
$$

Como já sabemos, neste tipo de divisão r é um polinômio constante, pois:

$$\partial g = 1 \Rightarrow \partial r = 0 \text{ ou } r = 0$$

Vemos que o valor numérico de r não depende do número a substituído no lugar de x, isto é, $r(a) = r, \forall\, a \in \mathbb{C}$.

Notemos, finalmente que:

$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 7 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 1 = 128 - 112 + 16 - 1 = 31 = r$$

Teorema 2.4 *(Teorema do Resto) O resto da divisão de um polinômio f por $x - a$ é igual ao valor numérico de f em a.*

Demonstração: De acordo com a definição de divisão:

$$q \cdot (x - a) + r = f$$

onde q e r são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $x - a$ tem grau 1, o resto r ou é nulo, ou tem grau zero, portanto, r é um polinômio constante.

Calculando os valores dos polinômios da igualdade acima em a:

$$q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{0} + \underbrace{r(a)}_{r} = f(a)$$

Portanto, $r = f(a)$.

$\square$

Exemplo 2.11 *O resto da divisão de $f = 5x^4 + 3x^2 + 11$ por $g = x - 3$ é:*

$$f(3) = 5 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^2 + 11 = 405 + 27 + 11 = 443$$

Exemplo 2.12 *O resto da divisão de $f = (x + 3)^7 + (x - 2)^2$ por $g = x + 3$ é:*

$$f(-3) = (-3 + 3)^7 + (-3 - 2)^2 = 0^7 + (-5)^2 = 25$$

Teorema 2.5 *(Teorema de D'ALEMBERT) Um polinômio f é divisível por $x-a$ se, e somente se, a é raiz de f.*

Demonstração: De acordo com o teorema do resto, temos $r = f(a)$, então:

$$\begin{array}{ccc} r = 0 & \Leftrightarrow & f(a) = 0 \\ \text{(divisão exata)} & & (a \text{ é raiz de } f) \end{array}$$

□

Aplicações do Teorema de D'Alembert

Exemplo 2.13 *Verificar que $f = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ é divisível por $g = x - 1$. Com efeito,*

$$f(1) = 1^5 - 4\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2 + 7\cdot 1 - 1 = 1 - 4 - 3 + 7 - 1 = 0,$$

então, f é divisível por g.

2.11 DISPOSITIVO PRÁTICO DE BRIOT-RUFFINI

Dados os polinômios

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a + n - 1x + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

$g = x - a$

vamos determinar o quociente q e o resto r da divisão de f por g.

Façamos:

$$q = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} + \ldots + q_{n-1}$$

e apliquemos o método dos coeficientes a determinar:

$$\begin{array}{r}
q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\ldots+q_{n-2}x+q_{n-1} \\
x-a
\end{array}\Big\} X$$

$$\begin{array}{l}
\hline
q_0x^n+q_1x^{n-1}+q_2x^{n-2}+\ldots+q_{n-2}x^2+q_{n-1}x \\
\quad -aq_0x^{n-1}-aq_1x^{n-2}-\ldots-aqn-3x^2-aq_{n-2}x-aq_{n-1} \\
\hline
q_0x^n+(q_1-aq_0)x^{n-1}+(q_2-aq_1)x^{n-2}+\ldots+(q_{n-1}-aq_{n-2})x-aq_{n-1}
\end{array}$$

Figura 2: Uso do método dos coeficientes a determinar

Impondo a condição $q\cdot(x-a)+r=f$, resultam as igualdades:

$q_0=a_0$

$q_1-aq_0=a_1 \Longrightarrow q_1=aq_0+a_1$

$q_2-aq_1=a_2 \Longrightarrow q_2=aq_1+a_2$

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

$q_{n-1}-aq_{n-2}=a_{n-1} \Longrightarrow q_{n-1}=aq_{n-2}+a_{n-1}$

$r-aq_{n-1}=a_n \Longrightarrow r=aq_{n-1}+a_n$

Os cálculos indicados acima para obter q e r tornam-se mais rápidos com a aplicação do seguinte dispositivo prático de Briot-Ruffini.

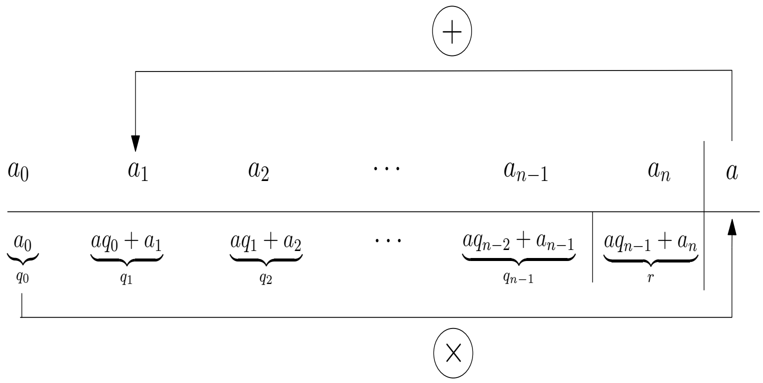

Figura 3: Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Exemplo 2.14 *1.* $f=2x^4-7x^2+3x-1 \quad e \quad g=x-3$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
2 & & 0 & -7 & 3 & -1 & 3 \\
\hline
\downarrow & & & & & & \\
2 & & \underbrace{2 \cdot 3+0}_{6} & \underbrace{6 \cdot 3-7}_{11} & \underbrace{11 \cdot 3+3}_{36} & \underbrace{36 \cdot 3-1}_{107} &
\end{array}
$$

Figura 4: Dispositivo prático de Briot-Ruffini do exemplo 2.14.(1)

portanto: $q = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36 \qquad r = 107$

2. $f = 625x^4 - 81 \quad e \quad g = x - \dfrac{3}{5}$

$$
\begin{array}{cccccc|c}
625 & & 0 & 0 & 0 & -81 & \frac{3}{5} \\
\hline
\downarrow & & & & & & \\
625 & & \underbrace{625 \cdot \frac{3}{5}}_{375} & \underbrace{375 \cdot \frac{3}{5}}_{225} & \underbrace{225 \cdot \frac{3}{5}}_{135} & \underbrace{135 \cdot \frac{3}{5} - 81}_{0} &
\end{array}
$$

Figura 5: Dispositivo prático de Briot-Ruffini do exemplo 2.14.(2)

portanto: $q = 625x^3 + 375x^2 + 225x + 135 \qquad r = 0$

3. $f = 9x^3 + 5x^2 + x - 11 \quad e \quad g = x + 2$

$$
\begin{array}{ccccc|c}
9 & & 5 & 1 & -11 & -2 \\
\hline
\downarrow & & & & & \\
9 & & \underbrace{9\,(-2)\,+5}_{-13} & \underbrace{(-13)\,(-2)\,+1}_{27} & \underbrace{27\,(-2)\,-11}_{-65} &
\end{array}
$$

Figura 6: Dispositivo prático de Briot-Ruffini do exemplo 2.14.(3)

portanto: $q = 9x^2 - 13x + 27 \qquad r = -65$

Generalização

Para obtermos rapidamente o quociente q e o resto r da divisão de um polinômio f, com $\partial f \geq 1$, por $g = bx - a$ onde $b \neq 0$, notemos que:

$$(bx-a)q + r = f \quad \text{então} \quad (x - \frac{a}{b})\underbrace{(bq)}_{q'} + r = f$$

do que decorre a seguinte regra prática:

1. divide-se f por $x-\dfrac{a}{b}$ empregando o dispositivo de Briot-Ruffini;
2. divide-se o quociente encontrado (q') pelo número b, obtendo q.

Exemplo 2.15 *1. Dividir* $f=3x^4-2x^3+x^2-7x+1$ *por* $g=3x-5=3(x-\dfrac{5}{3})$.

$$\begin{array}{ccccc|c|c} 3 & -2 & 1 & -7 & & 1 & \frac{5}{3} \\ \hline 3 & 3 & 6 & 3 & & 6 & \end{array}$$

$$q'=3x^3+3x^2+6x+3 \Longrightarrow q=\frac{q'}{3}=x^3+x^2+2x+1 \quad e \quad r=6$$

2. Dividir $f=4x^3+5x+25$ *por* $g=2x+3=2(x+\dfrac{3}{2})$.

$$\begin{array}{ccc|c|c} 4 & 0 & 5 & 25 & -\frac{3}{2} \\ \hline 4 & -6 & 14 & 4 & \end{array}$$

$$q'=4x^2-6x+14 \Longrightarrow q=\frac{q'}{2}=2x^2-3x+7 \quad e \quad r=4$$

3. Dividir $f=8x^5+6x^4+4x^3+3x^2-4x-3$ *por* $g=4x+3=4(x+\dfrac{3}{4})$.

$$\begin{array}{ccccc|c|c} 8 & 6 & 4 & 3 & -4 & -3 & -\frac{3}{4} \\ \hline 8 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$q'=8x^4+4x^2-4 \Longrightarrow q=\frac{1}{4}\cdot q'=2x^4+x^2-1 \quad e \quad r=0$$

Teorema 2.6 *Se um polinômio f é divisível separadamente por $x-a$ e $x-b$, com $a\neq b$, então f é divisível pelo produto $(x-a)(x-b)$.*

Demonstração:

Sejam q o quociente e $r=cx+d$ o resto da divisão de f por $(x-a)(x-b)$, então:

$$q(x-a)(x-b)+(cx+d)=f$$

Calculando os valores numéricos desses polinômios em a, temos:

$$[q(a)]\underbrace{(a-a)}_{0}(a-b)+(ca+d)=f\underbrace{(a)}_{0} \tag{1}$$

pois f é divisível por $x-a$

Calculando os valores numéricos em b, temos:

$$[q(b)]\underbrace{(b-a)}_{0}(b-b)+(cb+d)=f\underbrace{(b)}_{0} \tag{2}$$

pois f é divisível por $x-b$

Resulta então o sistema:

$$\begin{cases} ca+d &= 0 \\ cb+d &= 0 \end{cases}$$

donde vem $c=0$ e $d=0$, portanto $r=0$.

3 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

3.1 AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Segundo Cremm (CREMM, 2007), devido a registros muito antigos, os chamados papiros, sabemos que as equações algébricas existem há aproximadamente 4000 anos. Foram várias as maneiras utilizadas pelos egípcios para resolver tais equações. Mas foi a partir dos axiomas enunciados na obra 'Os Elementos de Euclides' que se chegou ao método de resolução da equação do 1º grau utilizado até hoje. A obra de Euclides influenciou toda a produção científica posterior a ela e é o livro-texto mais antigo e que continua em vigor até os dias atuais.

Os axiomas enunciados por Euclides no início dos Elementos e em que está fundamentada a resolução das equações são:

(i) Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si ($a = c$ e $b = c \Rightarrow a = b$).

(ii) Se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais ($a = b \Rightarrow a \pm c = b \pm c$).

(iii) A parte é menor que o todo $\left(\dfrac{1}{m} < 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}^*\right)$.

Além destes usamos também um outro axioma que não foi enunciado diretamente por Euclides, mas que facilmente aceitamos sua veracidade:

(iv) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais ($a = b \Rightarrow ac = bc$).

Uma vez encontrada a maneira de resolver as equações do 1º grau, um grande passo foi dado, pois os métodos utilizados para resolver as equações de 2º e 4º graus foram obtidos na tentativa de se reduzir o grau da equação de modo a deixá-la solúvel pelo método já encontrado.

E foi a partir da fórmula de Bháskara, no século XII, que se viu pela primeira vez tal problema. Uma vez resolvido o problema das equações do 2º grau, os matemáticos buscavam agora resolver as equações do 3º grau. Essa curiosidade inesgotável levou os matemáticos a uma busca que durou séculos para ser cessada.

Girolamo Cardano (1501-1576) italiano, talentoso cientista, dedicado à astrologia e autor de várias obras, acreditando ainda na impossibilidade da resolução das equações do 3º grau, Cardano não pretendia tocar no assunto em seu livro.

Quando Cardano ficou sabendo que Tartaglia havia encontrado a solução para o problema, resolveu procurá-lo e pedir que revelasse seu método para ser publicado. Tartaglia não aceitou a proposta de Cardano, alegando que pretendia publicar ele mesmo mais tarde. Cardano voltou a procurar Tartaglia várias vezes e após juras de fidelidade, conseguiu que ele revelasse seu segredo.

Como já era de esperar, Cardano traiu todos os juramentos feitos a Tartaglia e em 1545, publicou na Ars Magna sua fórmula, embora tenha feito vários elogios e Tartaglia, acrescentou que alguns anos antes Scipione Del Ferro havia chegado aos mesmos resultados.

Tartaglia publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por trair juramentos feitos sobre a Bíblia. Após trocar ofensas, o que prevaleceu foi que a fórmula deduzida por Tartaglia, a qual ao invés de receber o seu nome é hoje conhecida como Fórmula de Cardano. O mesmo que havia acontecido com a fórmula de Bháskara.

Mas o que nem Cardano, nem Tartaglia poderiam imaginar é que sua fórmula traria mais perguntas do que respostas. A fórmula descoberta por Tartaglia exibia apenas uma solução para a equação, mas se a fórmula de Bháskara dava as duas soluções para a equação do 2º grau, não poderia a equação do 3º grau também ter mais de uma solução? Outra questão, é que uma equação do 3º grau que tenha as três soluções reais, implica em trabalhar com raiz quadrada de números negativos na aplicação da fórmula de Cardano, como na época este tipo de operação não estava definida, este foi um problema que demorou muito tempo para ser solucionado.

É importante esclarecer que a raiz quadrada dos números negativos apareceu pela primeira vez na resolução de equação do 2º grau, mas que isto era tomado como a impossibilidade de solução da mesma. Apenas quando chegamos à resolução das equações do 3º grau é que isto se tornou um problema concreto, pois podemos facilmente tomar exemplos de equações do 3º grau com soluções reais em que aparecem as raízes de números negativos quando aplicamos a fórmula de Cardano.

3.1.1 Equações do 4º grau e a fórmula de Ferrari

Ludovico Ferrari (1522-1560), nascido em Bolonha, era de família muito humilde e aos 15 anos de idade foi trabalhar como servo na residência de Cardano, o qual percebendo sua notável inteligência, o promoveu a seu secretário.

Como já dissemos, os matemáticos daquela época tinham costume de promover desafios e um certo Zuanne de Tonini da Coi propôs a Cardano uma questão que envolvia a equação:

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0$$

Após inúmeras tentativas, Cardano não obteve êxito e passou a questão a seu aluno Ferrari, que acabou por encontrar a fórmula geral para a solução das equações do 4º grau. Este método encontrado por Ferrari também foi publicado por Cardano na Ars Magna, em continuidade à solução as equações do 3º grau.

Podemos destacar no raciocínio de Ferrari, ele buscou reescrever a equação, usando as operações permitidas pelos axiomas de Euclides, de modo a obter quadrados perfeitos e assim reduzir o problema a resolução de uma equação do 2º grau que era possível usando a fórmula de Bháskara. Este método permite a exibição das quatro raízes da equação, assim a fórmula de Bháskara permite a exibição das duas raízes da equação do 2º grau.

A partir daí os matemáticos começaram a pensar, que se as equações do 2º grau podem ter 2 soluções e as do 4º grau, 4 soluções, então uma equação de grau n possuiria n soluções? Nada foi provado, mas eles acreditavam ser verdade e buscavam uma maneira de demonstrar tal fato.

Foi apenas em 1799 que o brilhante matemática alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) apresentou como sua tese de doutorado o famoso Teorema Fundamental da Álgebra que foi intitulado desta maneira pelo próprio Gauss. Este teorema dizia que toda equação polinomial tem ao menos uma solução x_k no campo complexo, e fazendo as sucessivas divisões do polinômio pelo binômio $(x - x_k)$, temos uma decomposição em n fatores, sendo que n é o grau do polinômio. Estava assim provado que todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes, contando com as suas multiplicidades.

Definição 3.1 *Uma equação polinomial é toda equação que pode ser apresentada sob a forma:*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,$$

em que

$$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$

é um polinômio de grau $n, n \geq 1$.

Observação 3.1 *Temos que:*

1. *Uma equação polinomial pode ser também denominada equação algébrica.*

2. *O grau do polinômio $P(x)$ é também o grau da equação polinomial $P(x) = 0$.*

3. *As raízes do polinômio $P(x)$ são também as raízes da equação polinomial $P(x) = 0$.*

4. *No universo dos números complexos, o conjunto formado pelas raízes da equação polinomial $P(x) = 0$ é o conjunto solução (S) ou conjunto verdade (V) da equação.*

5. *O coeficiente a_n é chamado de coeficiente dominante de $P(x)$.*

Exemplo 3.1 *Analisemos os seguintes casos:*

(a) *Note que $2x - 6 = 0$ é uma equação polinomial do 1º grau na variável x, cuja raiz é 3. O conjunto solução dessa equação é $S = \{3\}$.*

(b) *A equação $x^2 - 3x + 8 = 2x + 2$ pode ser apresentada sob a forma $x^2 - 5x + 6 = 0$ e, portanto é uma equação polinomial do 2º grau na variável x. Suas raízes são 2 e 3 e, por isso, seu conjunto solução é S=$\{$2,3$\}$.*

(c) *Temos que $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ é uma equação polinomial do 3º grau na variável x. Para determinarmos suas raízes complexas podemos fatorar o primeiro membro, ou seja, $x^2(x-2) + (x-2) = 0$, então, $(x-2)(x^2+1) = 0$.*

Pela propriedade do produto nulo (dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $a \cdot b = 0$, então devemos ter que $a = 0$ ou $b = 0$), concluímos que:

$$\begin{aligned} x - 2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 2 \ \ ou \ \ x^2 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = -1 \\ &\therefore \quad x = \pm i \end{aligned}$$

Assim, as raízes da equação são $2, i$ e $-i$. Temos, então, como conjunto solução $S = \{2, i, -i\}$.

Duas equações polinomiais são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto-solução, isto é, toda raiz de uma equação é também raiz da outra e reciprocamente. Assim, por exemplo, as equações

$x^3 + x^2 - x - 1 = 3x^2 - 3$ e $x^2 - 2x - x + 2 = 0$ são equivalentes, pois $S_1 = \{1, 2, -1\}$ e $S_2 = \{1, 2, -1\}$.

Há duas operações que não alteram o conjunto-solução de uma equação polinomial, isto é, há duas maneiras de transformar uma equação polinomial em outra, equivalente à primeira:

Primeira operação: somar aos dois membros a mesma função polinomial

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

Exemplo 3.2 *Seja a equação*

$$\underbrace{3x^2 - 4x + 11}_{f(x)} = \underbrace{2x^2 + x + 5}_{g(x)} \tag{1}$$

adicionemos $h(x) = -g(x) = -2x^2 - x - 5$ *aos dois membros:*

$$\underbrace{(3x^2 - 4x + 11)}_{f(x)} + \underbrace{(-2x^2 - x - 5)}_{h(x)} = \underbrace{(2x^2 + x + 5)}_{g(x)} + \underbrace{(-2x^2 - x - 5)}_{h(x)}$$

e façamos as simplificações:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{2}$$

decorre que (1) *é equivalente a* (2)*, portanto:*

$$S_1 = S_2 = \{2, 3\}.$$

Na prática, aplicamos esta propriedade com o seguinte enunciado: "em toda equação polinomial, transpor um termo de um membro para outro, trocando o sinal do seu coeficiente, não altera o conjunto-solução". Em outras palavras:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

Segunda operação: multiplicar os dois membros pelo mesmo número complexo $k\,(k \neq 0)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k \cdot f(x) = k \cdot g(x)$$

Exemplo 3.3 *As equações polinomiais* $\dfrac{3x^2}{32} - \dfrac{1}{64} = 0$ *e* $\dfrac{3x^2}{4} - \dfrac{1}{8} = 0$ *são equivalentes pois a segunda foi obtida da primeira através de uma multiplicação por 8.*

Na resolução de uma equação polinomial procuramos sempre transformá-la em outra, equivalente e mais "simples", em que o conjunto-solução possa ser obtido com maior facilidade. Assim, empregando os artifícios descritos acima é possível transformar qualquer equação $f(x) =$

$g(x)$ numa equação equivalente $P(x) = f(x) - g(x) = 0$, isto é, toda equação polinomial é redutível à forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Quando transformamos uma equação polinomial para a forma $P(x) = 0$, podem ocorrer dois casos notáveis:

Primeiro caso: O polinômio $P(x)$ é identicamente nulo, isto é, estamos diante da equação

$$0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \ldots + 0 \cdot x + 0 = 0$$

que é uma sentença verdadeira para todo número complexo que seja colocado no lugar de x, portanto:

$$S = \mathbb{C}$$

Segundo caso: O polinômio $P(x)$ é constante e não-nulo, ou seja, estamos diante da equação

$$0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + 0 \cdot x^{n-2} + \ldots + 0 \cdot + k = 0$$

que é uma sentença falsa para todo número complexo que seja colocado no lugar de x, portanto:

$$S = \ \emptyset$$

Exemplo 3.4 *Transforme as equações polinomiais para a forma $P(x) = 0$ e verifique quais casos descritos acima ocorrem.*

1. *Dado $(x-1)(x^2+1) + x^2 = x^3 + x - 1$, temos:*

$$x^3 - \cancel{x^2} + x - 1 + \cancel{x^2} = x^3 + x - 1,$$

isto é,

$$(x^3 + x - 1) - (x^3 + x - 1) = 0,$$

assim,

$$0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0,$$

portanto, $S = \mathbb{C}$.

2^o Resolver Considere a equação polinomial $x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$. Note que:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x^3 - 3x^2 + 2x - 7,$$

ou seja,

$$(x^3 - 3x^2 + 2x) - (x^3 - 3x^2 + 2x - 7) = 0,$$

donde

$$0x^3 + 0x^2 + 0x + 7 = 0,$$

o que acarreta que $S = \emptyset$.

3.2 NÚMERO DE RAÍZES

Como toda equação polinomial pode ser colocada na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

é evidente que as seguintes proposições são equivalentes:

1. r é raiz da equação $P(x) = 0$.
2. r é raiz da função polinomial $P(x)$.
3. r é raiz do polinômio P

e as três proposições são sintetizadas por $P(r) = 0$.

Diremos também que a equação $P(x) = 0$ é de grau n, se, e só se, $P(x)$ e P são de grau n.

3.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

O estudo das equações polinomiais é alicerçado no **Teorema Fundamental da Álgebra** (T.F.A.), cujo enunciado é:

Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz completa.

A demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no ano de 1798. Embora outros matemáticos já tivessem tentado essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Adiamos, neste momento, a demonstração do teorema fundamental da álgebra que será apresentada no capítulo seguinte.

3.4 TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Teorema 3.1 *(Teorema da decomposição) Todo polinômio de grau $n \, (n \geq 1)$ pode ser decomposto em n fatores do 1^o grau, a menos de ordem e essa decomposição será única.*

Demonstração: Seja P, um polinômio de 1^o grau, de acordo com o T.F.A., teremos pelo menos uma raiz, no qual denotemos por r_1, assim, pela definição de raiz, $P(r_1) = 0$;

Segundo o teorema D'Alembert (2.5), P é divisível por $x - r_1$, pois o resto, $P(r_1) = 0$ significando que existe o polinômio Q_1, tal que $P = Q_1(x - r_1)$, mas, sendo P do primeiro grau, $Q_1 = a_n x^{1-1} = a_n$, logo, $P = a_n(x - r_1)$.

Resulta em $P = (x - r_1)(x - r_2)Q_2$, entretanto, para $n = 2, Q_2$ tem grau $n - 2 = 2 - 2 = 0$, o que resulta que

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2).$$

Aplicando-se sucessivamente o T.F.A. podemos chegar a igualdade:

$$P = Q_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n),$$

novamente, observe que Q_n, tem grau $n - n = 0$ logo, $Q_n = a_n$

e

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n).$$

Com os procedimentos acima, provamos a existência da decomposição. Para provarmos sua unicidade, vamos supor que nosso polinômio admita duas decomposições:

$$P = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$
$$P = a'_m(x - r'_1)(x - r'_2)(x - r'_3)\ldots(x - r'_m)$$

Supondo reduzidos e ordenados os dois segundos membros da igualdades têm:

$$a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + \ldots = a'_m x^m - a'_m S'_1 x^{m-1} + \ldots$$

e, pela definição de igualdade de polinômios, temos necessariamente:

$$\boxed{n = m} \qquad \text{e} \qquad \boxed{a_n = a'_m}$$

Cancelando os termos iguais, ficamos com a igualdade:

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) = (x-r'_1)(x-r'_2)(x-r'_3)\dots(x-r'_m) \tag{1}$$

Atribuindo a x o valor de r_1, temos:

$$0 = (r_1-r'_1)(r_1-r'_2)(r_1-r'_3)\dots(r_1-r'_n)$$

e se o produto é nulo, um dos fatores é necessariamente nulo, operando uma mudança de ordem, podemos fazer $r_1 = r'_1$.

A igualdade (1) se transforma em:

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) = (x-r'_1)(x-r'_2)(x-r'_3)\dots(x-r'_m)$$

Cancelando os termos iguais,

$$(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)\dots(x-r_n) = (x-r'_2)(x-r'_3)(x-r'_4)\dots(x-r'_m)$$

podemos atribuir x o valor de r_2 e daí teremos:

$$0 = (r_2-r'_2)(r_2-r'_3)\dots(r_2-r'_n)$$

Da mesma forma, um dos fatores $r_2 - r'_k$ é necessariamente nulo, novamente usando o artifício de mudar a ordem dos fatores de forma conveniente, podemos colocar:

$$r_2 = r'_2$$

continuando este processo para $r_i = r'_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, obtemos as igualdades, $m = n, a'_m = a_n, r'_n = r_n$, que são a prova que a decomposição é única.

$\square$

Como consequência do teorema da decomposição é que toda equação polinomial de grau $n \geq 1$, admite n e somente n raízes complexas.

3.4.1 Consequência do Teorema da Decomposição

Consideremos a equação polinomial de grau n, na variável x:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$$

Pelo teorema da decomposição, essa equação pode ser apresentada sob a forma:

$$a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdot\ldots\cdot(x-r_n) = 0$$

Temos, então, que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes dessa equação.

Assim sendo, podemos concluir o seguinte:

Uma equação polinomial de grau n **admite exatamente** n **raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.**

3.4.2 Multiplicidade de uma Raiz

Seja a equação polinomial de grau n, variável x e raízes $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$:

$$a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdot\ldots\cdot(x-r_n) = 0$$

- Se uma raiz r_j comparece uma única vez dentre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de **raiz simples** da equação.
- Se uma raiz r_j comparece k vezes, $k > 1$, dentre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de **raiz de multiplicidade k** da equação.

Exemplo 3.5 *A equação* $(x-2)^3(x-5)(x-4)^2 = 0$ *pode ser escrita como:*

$$(x-2)(x-2)(x-2)(x-5)(x-4)(x-4) = 0$$

Assim, temos que:

- *a raiz 2 tem multiplicidade 3, ou podemos dizer ainda que 2 é* ***raiz tripla*** *da equação;*
- *o número 5 é* ***raiz simples*** *da equação;*
- *a raiz 4 tem multiplicidade 2, ou podemos dizer ainda que 4 é* ***raiz dupla*** *da equação.*

3.5 RAÍZES IMAGINÁRIAS

Vamos estudar agora um teorema de acordo com Paiva (PAIVA, 1999) que diz respeito às raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais. Lembre-se de que **número**

imaginário é todo número complexo z não real, isto é, $z = a + bi$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$.

Teorema 3.2 *Se o número imaginário $z = a + b\ i, a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, é raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, então o conjugado de $z, \bar{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.*

Demonstração:

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que o número imaginário $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, seja raiz da equação $P(x) = 0$.

Temos que $P(z) = 0$, ou seja:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0 \tag{2}$$

Se dois complexos são iguais, então seus conjugados são iguais. Por isso, podemos concluir da sentença (2) que:

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0} = \overline{0}$$

Pelas propriedades do conjugado de um complexo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0} \\
\Leftrightarrow\ & a_n \overline{z^n} a_{n-1} \overline{z^{n-1}} a_{n-2} \overline{z^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + a_{n-2}(\bar{z})^{n-2} + \ldots + a_0 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & P(\bar{z}) = 0
\end{aligned}$$

ou seja, $\bar{z}$ é raiz da equação $P(x) = 0$.

□

Consequências:

- Se um número imaginário z é raiz de multiplicidade k de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de z também é raiz de multiplicidade k dessa equação.
- O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.
- Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real.

3.6 RAÍZES RACIONAIS

Teorema 3.3 *Seja $\frac{p}{q}$ com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$.*
*Se $\frac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, na variável x e com **coeficientes inteiros**, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.*

Demonstração: Sendo $\frac{p}{q}$ uma raiz da equação, devemos ter:

$$\begin{aligned} & a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por q^n ambos os membros, obtemos:

$$\begin{aligned} a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n &= 0 \qquad (3) \\ \Leftrightarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_1 pq^{n-1} &= -a_0 q^n \\ \Leftrightarrow p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}) &= -a_0 q^n \end{aligned}$$

Como o produto de inteiros é inteiro e a soma de inteiros também é inteiro, concluímos que o primeiro membro da igualdade anterior é um número inteiro. Portanto o segundo membro, $-a_0 q^n$, é inteiro e múltiplo de p, pois é igual ao produto de p por um inteiro k_1, ou seja, $pk_1 = -a_0 q^n, k_1 \in \mathbb{Z}$.

Como p e q são primos entre si, temos que p e q^n também o são. Logo, p é **divisor** de a_0. Temos, ainda, que a igualdade (3) é equivalente a:

$$\begin{aligned} a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_0 q^n &= -a_n p^n \\ \Leftrightarrow q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + a_0 p^{n-1}) &= -a_n p^n \end{aligned}$$

Como a expressão entre parênteses é um número inteiro k_2, podemos escrever:

$$qk_2 = -a_n p^n, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Como q e p são primos entre si, temos que q e p^n também o são. Logo, q é **divisor** de a_n.

$\square$

Observação 3.2 *No que se refere a raízes racionais, temos:*

1. *Nem toda equação polinomial de coeficientes inteiros admite raiz racional. Por exemplo, a equação* $x^2 - 2 = 0$ *não admite raiz racional.*

2. *Se a equação polinomial de coeficientes inteiros* $P(x) = 0$ *tem o polinômio* $P(x)$ *com coeficiente dominante igual a 1, e admite raízes racionais, então essas raízes são inteiras. Por exemplo, se* $\frac{p}{q}$*, com p e q inteiros primos entre si e* $q \neq 0$*, é raiz da equação* $x^2 - 5x + 6 = 0$*, então p é divisor de 6,* $p \in (\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6)$*, e q é divisor de 1,* $q \in (\pm 1)$*. Logo,*$\frac{p}{q} \in (\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6)$.

3.7 RELAÇÕES DE GIRARD

Albert Girard (1590-1633), flamengo, em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre*, apresentou um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial. Antes de estudar esse teorema em sua forma geral, vamos abordá-lo particularmente para equações do 2º e do 3º grau.

3.7.1 As relações de Girard em uma equação do 2º grau

Consideremos o polinômio do 2º grau $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$ cujas raízes são r_1e r_2 e $a \neq 0$. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\equiv a(x - r_1)(x - r_2) \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &\equiv (x - r_1)(x - r_2) \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &\equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(r_1 + r_2) = \dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1 e r_2 da equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são obtidas pelas relações:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

3.7.2 As relações de Girard em uma equação do 3º grau

Consideremos, agora, o polinômio do 3º grau $P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujas raízes são r_1, r_2 e r_3 e $a \neq 0$. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &\equiv a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \\ \Leftrightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} &\equiv (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3) \\ \Leftrightarrow x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a} &\equiv x^3-(r_1+r_2+r_3)x^2 \\ &+ (r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3)x-r_1r_2r_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(r_1+r_2+r_3)=\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\dfrac{c}{a} \\ -r_1r_2r_3=\dfrac{d}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1+r_2+r_3=-\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1, r_2 e r_3 da equação polinomial do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são tais que:

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=-\dfrac{b}{a} \\ r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\dfrac{c}{a} \\ r_1r_2r_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

3.7.3 As relações de Girard em uma equação de grau n

Finalmente, repetindo os mesmos argumentos realizados nas equações de segundo e terceiro grau temos as relações de Girard em sua forma geral:

Teorema 3.4 *Em toda equação polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, de grau n, $n > 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, tem-se que:*

1. *a soma das raízes é igual a $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$, ou seja,*

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

2. *a soma dos produtos das raízes, tomadas duas a duas, é igual a* $\frac{a_{n-2}}{a_n}$*, ou seja,*

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

3. *a soma dos produtos das raízes, tomadas três a três, é igual a* $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$*, ou seja,*

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

4. *o produto de todas as raízes é igual a* $\frac{(-1)^n(a_0)}{a_n}$*, ou seja,*

$$r_1r_2r_3\ldots r_n = \frac{(-1)^n(a_0)}{a_n}.$$

Faremos alguns exemplos dos muitos que se encontram em Iezzi (IEZZI, 1977):

Exemplo 3.6 1. *Calcular a soma e o produto das raízes da equação*

$$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{3}{2} \qquad r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = (-1)^4\,\frac{a_0}{a_4} = \frac{6}{2} = 3$$

2. *Se* r_1, r_2, r_3 *é o conjunto-solução da equação*

$$2x^3 + 5x^2 + 8x + 11 = 0, \textit{ calcular } r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

Temos:
$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3} = -\frac{5}{2}$
$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = +\frac{a_1}{a_3} = \frac{8}{2} = 4$
$r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -\frac{11}{2}$
portanto: $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = (-\frac{5}{2})^2 - 2(4) = \frac{25}{4} - 8 = -\frac{7}{4}$

3. *Resolver a equação* $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$*, sabendo que a soma de duas raízes é 1.* *Temos:*

(I) $r_1+r_2+r_3=-\dfrac{a_2}{a_3}=6$ *(III)* $r_1r_2r_3=-\dfrac{a_0}{a_3}=-10$

(II) $r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=\dfrac{a_1}{a_3}=3$ *(IV)* $r_1+r_2=1$

$$(IV)\,em\,(I)\Longrightarrow 1+r_3=6\Longrightarrow r_3=5$$

$$\left.\begin{aligned}(III)r_1r_2= & \quad -\frac{10}{5}=-2\\ (IV)r_1+r_2= & \quad 1\end{aligned}\right\}\underbrace{\Longrightarrow}_{resolvendo}\quad r_1=-1\ e\ r_2=2,$$

portanto, S={-1,2,5}.

4 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

A prova elementar que apresentaremos é basicamente a prova dada Argand em 1814, encontrada por exemplo em Andrade (ANDRADE, 2000). Existem muitas outras provas. A primeira prova deste teorema foi dada por Gauss em sua tese de doutorado em 1799. Existe uma prova usando variáveis complexas, veja em Titchimarsh e outra usando teoria de Galois devido a Legendre e ainda outra mais quase inteiramente algébrica devido a Clifford. A prova de Clifford é interessante, a sua ideia é mostrar que os polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{R}$ são da forma $px+q$ ou ax^2+bx+c com $a^2-4ac<0$, e sabemos que este último é redutível sobre $\mathbb{C}$.

Teorema 4.1 *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio $p(z)$ em $\mathbb{C}$ de grau maior ou igual a 1, tem uma raiz em $\mathbb{C}$. Isto é, $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.*

Observamos que um polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos pode ser escrito da forma

$$p(z) = p(x+iy) = p_1(x,y) + ip_2(x,y),$$

onde $p_1(x,y)$ e $p_2(x,y)$ são polinômios reais nas variáveis reais x,y. Segue que

$$|p(z)| = \sqrt{p_1(x,y)^2 + p_2(x,y)^2},$$

que é claramente função contínua nas variáveis x,y. Na prova usaremos o fato básico do Cálculo que uma função contínua num disco fechado e limitado D do plano tem um mínimo em D. A prova está dividida em duas partes, provaremos que:

1. existe um ponto z_0 no plano complexo tal que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)| \ \forall z \in \mathbb{C},$$

2. se z_0 é o ponto de mínimo global determinado na primeira parte, então $p(z_0) = 0$.

Primeiramente vamos provar um lema que será útil na prova do Teorema fundamental.

Lema 4.1 *Se $f(z) \in \mathbb{C}$ é polinômio de grau maior ou igual a 1, então dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que se $|z| > R$, então $|f(z)| > M$.*

Demonstração: A prova é feita por indução sobre o grau de f. Se o grau de f é igual a 1, então $f(z) = a + bz$, $b \neq 0$. Logo,

$$|f(z)| = |a + bz| \geq |bz| - |a| = |b| \cdot |z| - |a|.$$

Dado $M > 0$, escolha

$$R = \frac{M + |a|}{|b|}$$

e assim se $|z| > R$ então $|f(z)| > M$.

Assuma que o lema é verdadeiro para polinômios de grau $(d-1)$. Então $f(z)$ pode ser escrito na forma $f(z) = a + zf_1(z)$, onde $f_1(z)$ tem grau $(d-1)$. Dado $M + |a| > 0$ existe, da hipótese de indução, $R \geq 1$ tal que para $|z| > R$, $|f_1(z)| > M + |a|$. Então, para $|z| > R$,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a + zf_1(z)| \\ &\geq |zf_1(z)| - |a| \\ &= |z| \cdot |f_1(z)| - |a| \\ &\geq |f_1(z)| - |a| \\ &> M + |a| - |a| = M, \end{aligned}$$

provando assim o lema.

□

Agora estamos prontos para provar o teorema (4.1).

Seja

$$p(z) = z^m + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

Dado $M = 1 + |a_0|$, temos do lema 4.1 que existe $R > 0$ tal que se $|z| > R$, então, $|p(z)| > 1 + |a_0|$, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > R$.

Seja

$$D = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}.$$

Como D é fechado e limitado no plano, então sabemos que existe $z_0 \in D$ tal que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \forall z \in D.$$

Pela escolha de D, temos que

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \forall z,$$

pois se $z \notin D$, então $|z| > R$ e deste modo, $|p(z)| \geq 1 + |a_0| > |p(0)|$. Como $0 \in D$, resulta que $|p(0)| \geq |p(z_0)|$. Assim,

$$|p(z_0)| \leq |p(z)|, \forall z \in D \text{ ou } z \notin D.$$

Agora provaremos que $p(z_0) = 0$. Fazendo a mudança de variáveis $w = z - z_0$, então,

$$p(z) = p(w + z_0) = q_1(w)$$

é um polinômio em w e

$$|q_1(0)| = |p(z_0)| \leq |p(z)| = |q_1(w)|, \forall w.$$

Assim q_1 tem mínimo global em $w = 0$.

Provaremos que $q_1(0) = 0$. Se $q_1(0) = a \neq 0$, chegaremos a uma contradição. Suponha $a \neq 0$ e seja $q_2(w) = \dfrac{1}{a} q_1(w)$. Então, $|q_2(w)|$ tem um mínimo em $w = 0$ se e, somente se, $|q_1(w)|$ tem um mínimo em $w = 0$.

Agora $q_2(w)$ tem forma

$$q_2(w) = 1 + bw^m + b_1 w^{m+1} + \cdots + b_k w^{m+k},$$

onde $m + k = n$.

Seja r a m-ésima raiz de $(-\frac{1}{b})$. Então, $br^m = -1$. Seja $w = ru$ e $q(u) = q_2(ru) = q_2(w)$. Então, $|q(u)|$ tem um mínimo e $u = 0$ se e, somente se, $|q_2(w)|$ tem um mínimo em $w = 0$. Agora, $q(u)$ tem a forma

$$\begin{aligned} q(u) &= 1 + b(ru)^m + \cdots + b_k (ru)^{m+k} \\ &= 1 - u^m + u^{m+1} Q(u), \end{aligned}$$

onde,

$$Q(u) = c_1 + c_2 u + \cdots + c_k u^{k-1}$$

é um polinômio em u com $c_j = b_j r^{m+j}$, $1 \leq j \leq k$. Note que $q(0) = 1$, assim 1 é um valor mínimo de $|q(u)|$.

Seja $t > 0$ real. Fazendo $u = t$, temos

$$\begin{aligned} |Q(t)| &= \left|c_1 + c_2 t + \cdots + c_k t^{k-1}\right| \\ &\leq |c_1| + |c_2| t + \cdots + |c_k| t^{k-1}. \end{aligned}$$

Considere

$$Q_0(t) = |c_1| + |c_2| t + \cdots + |c_k| t^{k-1}.$$

Quando $t \to 0$, temos que $tQ_0(t) \to 0$. Segue que existe $0 < t < 1$ tal que $tQ_0(t) < 1$.

Vamos mostrar que para esta escolha de t, fazendo $u = t$, dá $|q(t)| < 1 = |q(0)|$, contrariando a hipótese que $|q(u)|$ tem seu mínimo em $u = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} |q(t)| &= \left|1 - t^m + t^{m+1} Q(t)\right| \\ &\leq |1 - t^m| + \left|t^{m+1} Q(t)\right| \\ &= (1 - t^m) + t^m t\, |Q(t)| \\ &\leq (1 - t^m) + t^m (t\, Q_0(t)). \end{aligned}$$

Como t é escolhido de modo que $tQ_0(t) < 1$, este último número é menor do que

$$(1 - t^m) + t^m = 1 = |q(0)|.$$

Como $t \neq 0$, $|q(u)|$ não tem seu mínimo em $u = 0$. Contradição. Logo, $a = 0$ o que implica que $q_1(0) = 0$ e portanto, $p(z_0) = 0$.

$\square$

Exemplo 4.1 *Considere o polinômio $p(x) = x^2 + 1$. É notório que p não possui raiz real. No entanto, ao tomarmos o polinômio $p(z) = z^2 + 1$, donde os coeficientes são complexos, o Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que este polinômio possui ao menos uma raiz. Como se pode ver, tal polinômio possui duas raízes, a saber i e $-i$.*

5 CONCLUSÃO

A realização deste trabalho possibilitou uma reflexão sobre a necessidade de se aprender polinômios, conteúdo este que é basicamente algébrico, trabalhado na 6ª e 7ª séries do ensino fundamental e muito utilizado a partir daí envolvendo outros conteúdos nas séries seguintes.

A matemática auxilia no processo de construção do conhecimento e consequentemente na aprendizagem, o que a torna indispensável para o aluno.

Nos dias de hoje, ainda existem pessoas que têm pensamentos negativos e preconceituosos expostos no trabalho sobre a matemática, mas para mudar estes pensamentos, exige-se a mediação e a experiência do professor, peça fundamental para a construção do conhecimento matemático.

A educação de uma nova escola exige um novo professor, pois alguns professores continuam cobrando memorizações que não fazem sentido ao aluno, já que estes simplesmente decoram a matéria, como no caso do algebrista, ou seja, há uma aprendizagem mecânica, fazendo destes alunos, depósitos de signos sem significados, sem relações primordiais com seu contexto. Desse modo a construção do conhecimento exige novas metodologias e ambientes diferenciados de aprendizagem, pois, cada sala é formada por um grupo heterogêneo de alunos.

Observa-se também que é preciso trazer partes essenciais do estudo de polinômios que muitas vezes, são deixadas de lado, como o pleno domínio da fatoração, raízes racionais, somas e produtos de raízes, gráficos e polinômios irredutíveis. Ressaltando que os cálculos da divisão tornam-se mais rápidos com a aplicação do dispositivo prático de Briot-Ruffini e que o Teorema do Resto nos possibilita a verificação das raízes.

Neste trabalho percebemos que a maior importância do Teorema Fundamental da Álgebra reside no fato de ter sido possível demonstrá-lo, pois a suspeita de que um polinômio de grau n possui n raízes já existia à muito tempo, então, a sua demonstração abriu caminho para o reconhecimento e desenvolvimento dos números complexos (saliente-se um outro enunciado do referido teorema é que todo polinômio de grau n possui pelo menos uma raiz nos complexos). Além disso, o Teorema Fundamental da Álgebra destaca que na busca de soluções de uma equação polinomial, que sempre existe como o próprio teorema afirma, nunca saímos fora do corpo dos números complexos, isto é, $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado.

Por fim, cabe ressaltar, que, com este trabalho, percebemos que o estudo dos polinômios engloba uma gama de conhecimentos interligados pelas noções da álgebra, quer dizer, mergulhar nas estruturas dos polinômios é mergulhar em paralelo no corpo dos números complexos bem como nas estruturas algébricas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, D. **Estruturas Algébricas**. Maringá: Notas de aula, 2000.

CREMM, R. **Um Estudo Analítico dos Polinômios e Equações Polinomiais**. 2007. Disponível em: <http://www.inf.unioeste.br/ rogerio/02d-Estudo-analitico-polinomios.pdf>. Acesso em: 01 de outubro de 2010.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar 6**. São Paulo: Atual Editora, 1977.

IEZZI, G. **Matemática: 3ª série, 2º Grau: 135 exemplos, 184 exercícios resolvidos, 434 exercícios propostos**. São Paulo: Atual Editora, 1980.

LISBOA, V. de J. **Polinômios com Coeficientes da Sequência de Fibonacci**. 2008. Disponível em: <http://www2.uefs.br/sigma/arquivos/COP/COPO2-2008-VivianeLisboa.pdf>. Acesso em: 23 de julho de 2010.

PAIVA, M. **Coleção Base: Matemática: Volume Único**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, 1999.