UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FERNANDO FELIX DA SILVA DE SENA

ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

CAMPO MOURÃO

2011

FERNANDO FELIX DA SILVA DE SENA

ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de "Especialista em Ciências" – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Msc. Sara Coelho da Silva

CAMPO MOURÃO

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Fernando Felix da Silva de Sena

Origem dos Números Complexos

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de “Especialista em Ciências” – Área de Concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Msc. Sara Coelho da Silva

Profa. Msc. Viviane Colucci

Prof. Msc. Wellington Jose Correa

Campo Mourão, 2011

AGRADECIMENTOS

À maravilhosa turma desta especialização, que ajudou a tornar agradável cada momento. Em especial aos grandes amigos Michael de Oliveira e Jéssica Leni Vedovelli, que por muitos momentos me deram força para não desistir. À minha orientadora Sara Coelho da Silva pela fé que teve em mim, mesmo quando cheguei a pensar que tudo estava perdido. E também ao coordenador do Curso professor Adilandri Mércio Lobeiro, pela paciência e colaboração.

‘Mas tenho medo do que é novo e tenho medo de viver o que não entendo - quero sempre ter a garantia de pelo menos estar pensando que entendo, não sei me entregar à desorientação.’(Clarice Lispector)

RESUMO

SENA, Fernando. Origem dos Números Complexos. 41 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

Neste trabalho busca-se estudar as razões históricas pelas quais, aos poucos e por meio de muitos estudos de diferentes áreas, foi construído o conceito do conjunto dos números complexos, buscando justificar a sua necessidade para o progresso da matemática e áreas afins; e desmitificar este conjunto, facilitando o seu entendimento, tornando seus conceitos menos imaginários e mais concretos e aplicáveis.

Palavras-chave: Números complexos, história, equação diferencial.

ABSTRACT

SENA, Fernando. Origin of complex numbers. 41 f. Monografia – Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2011.

In this paper seeks to study the historical reasons why, slowly and through many different areas of studies, the concept was built the set of complex numbers, seeking to justify their need to progress in mathematics and related fields, and demystify this set, facilitating their understanding, making the concepts more concrete and less imaginary and enforceable.

Keywords: Complex numbers, history, differential equation

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na 8.ª série quando nos deparamos com as equações do segundo grau e a famosa fórmula de Bháskara $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$, para resolvê-la, como por exemplo: $x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Encontramos o resultado $\sqrt{-12}$ que nos leva ao término do problema, com a seguinte solução $x \notin \mathbb{R}$, ou seja a equação não é solúvel. E assim aconteceu com os grandes algebristas que ao se depararem com uma raiz negativa, de imediato relacionavam este fato a não existência de uma solução, porém seus espíritos audazes e grande capacidade de raciocínio matemático os levavam a questionar o fato; e por vezes a acreditar que existia algo além do conjunto dos números reais. Esta busca não seguiu um caminho fácil, e muito menos linear, na época em que as descobertas foram acontecendo a humanidade não dispunha dos meios rápidos e eficientes que temos hoje de compartilhar informações. Nesta época era importante manter segredo acerca daquilo que se descobria como forma de garantir poder.

Muitas descobertas na área dos imaginários foram ignoradas por grandes nomes da época da descoberta, e retomadas anos mais tarde num vaivém, que retardou a formulação do que hoje conhecemos de forma bem definida como o conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), ao contrário do que nos é apresentado didaticamente nas escolas.

Neste trabalho buscar-se-á, mostrar como em momentos e situações diferentes, grandes estudiosos se deparavam com as desconhecidas raízes negativas, cuja falta de solução emperrava grandes descobertas; e como pouco a pouco foi formulado o importante corpo dos Complexos.

2 AS MUITAS HISTÓRIAS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O problema a que se chegava quando algebristas se deparavam com raízes negativas de índice par como $\sqrt{-1}$, causava muita estranheza o que levou ao uso do termo imaginário para denominar tais possíveis resultados, o que se considera uma denominação equivocada, mas hoje arraigada à terminologia e em relação à qual não há o que se fazer. A não ser provar que é concreta, e não imaginária, a existência das raízes quadradas (e por consequência as demais de índice par) de números negativos.

Apresentamos a seguir alguns matemáticos e/ou físicos que contribuíram na formulação do conjunto dos números complexos.

2.1 CARDANO

Girolamo Cardano é dos mais extraordinários personagens da história da matemática, iniciou sua vida profissional como médico e paralelamente dedicava-se à matemática, vindo a ocupar cadeiras nas universidades de Pávia e Bolonha; chegou a passar um período preso acusado de heresia por ter feito e publicado um horóscopo de Jesus Cristo. Após abandonar sua cadeira em Bolonha, mudou-se para Roma onde tornou-se um notável astrólogo, prestando serviços até mesmo ao Papa e recebendo pensão por isso; conta-se que suicidou-se em 1576 para concretizar uma previsão astrológica que o mesmo fez acerca da data de sua morte.(EVES, 2004)

A existência de uma solução para a equação $x^2 + 1 = 0$, usando notação atual, foi objeto de questionamento de muitos matemáticos e algebristas, em especial Cardano na sua obra prima Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis Liber Unicus (Arte Magna ou sobre as Regras Algébricas Únicas) publicado em 1545. Esta obra é considerado o primeito tratado em latim dedicado exclusivamente à algebra, com atenção especial ao estudo das raízes negativas de uma equação e ao cálculo com números imaginários.

Matemáticos italianos desta época descobriram solução algébrica de equações cúbicas e quárticas, e aí se tem uma novelesca faceta da vida de Cardano.

Por volta de 1515 Scipione del Ferro conseguiu resolver algebricamente a equação cúbica $x^3 + mx = n$, sem publicar seus estudos, mas revelando seu segredo ao seu díscipulo Antonio Fior. Nicolo Fontana de Brescia, conhecido como Tartaglia anunciou ter descoberto um método para resolver a equação cúbica $x^3 + px^2 = n$, Fior acreditanto tratar-se de um blefe, desafiou Tartaglia e este empenhado em seus estudos conseguiu também encontrar solução para a equação cúbica $x^3 + mx = n$, como soube resolver dois tipos de cúbicas, Tartaglia sagrou-se vencedor deste desafio. Prometendo segredo, tempos depois Cardano conseguiu descobrir o método. Mas na Ars Magna, ele publicou o método para a resolução da cúbica, gerando muita polêmica.

O método que Cardano publicou para a resolução de uma equação cúbica do tipo $x^3 + mx = n$, é o seguinte:

Dada a identidade

$$(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$$

se forem escolhidos a e b tal que: $3ab = m$ e $a^3 - b^3 = n$ então, x será dado por $a-b$, resolvendo o sistema para a e b chegamos às seguintes equações:

$$a = \sqrt[3]{(\frac{n}{2}) + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 + (\frac{m}{3})^3}}$$

$$b = \sqrt[3]{-(\frac{n}{2}) + \sqrt{(\frac{n}{2})^2 + (\frac{m}{3})^3}}$$

Ao aplicar esta fórmula para solucionar a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, que deixamos na forma $x^3 - 15x = 4$, temos:

$$a = \sqrt[3]{(\frac{4}{2}) + \sqrt{(\frac{4}{2})^2 + (\frac{-15}{3})^3}}$$

$$a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 + (-5)^3}}$$

$$a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}}$$

$$a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

E segundo o conhecimento matemático da época finalizaria-se os cálculos, pois a raíz quadrada de um número negativo era inexistente e continua sendo no conjunto dos números reais. Porém observa-se facilmente que 4 é uma solução para a cúbica: $4^3 - 15(4) - 4 = 0$. Fato este que estimulou os estudos destas raízes, e evidenciou a existência de um conjunto mais amplo que $\mathbb{R}$, no qual seria possível operar com as raízes negativas.

O famoso problema de se dividir 10 em duas partes tais que o produto seja 40, foi outra proeza de Cardano que mesmo julgando a princípio impossível, operou e chegou às soluções $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, que como se vê tem soma 10 e produto 40:

$$5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}=5+5+\sqrt{-15}-\sqrt{-15}=10$$

e

$$(5+\sqrt{-15})\times 5-\sqrt{-15})=25-5\sqrt{-15}+5\sqrt{-15}-\sqrt{(-15)^2}=25-(-15)=40$$

Nesta época grandes matemáticos tinham uma visão predominantemente geométrica. Para Cardano e Bombelli a questão de uma raíz quadrada era descobrir o lado do quadrado dada a sua área, ou seja, a $\sqrt{9}$ significava calcular o lado do quadrado cuja área era nove, daí a dificuldade de se aceitar a existência de raiz quadrada negativa.

Rafael Bombelli deu sequência ao trabalho de Cardano, que o próprio achou inútil, e a partir da equação $x^2+a=0$ chegou às respostas $+\sqrt{-a}$ e $-\sqrt{-a}$. Em particular para o caso de $a=1$, ou seja $x^2+1=0$ temos:
$x^2=-1 \rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$.

2.2 WALLIS

John Wallis, foi um grande matemático britânico, destacando-se especialmente nos estudos de cálculo, sendo precursor de Newton. Dentre suas várias e importantes obras merece destaque o Arithmetica Infinitorum (Aritmética do Infinito) de 1655, no qual trata do cálculo de áreas sob curvas do tipo x^n, para n inteiro ou fracionário, sendo que antes dele Roberval e Cavalieri já haviam coseguido integrar x^n para n inteiro. O método encontrado para calcular esta área é o seguinte: Dada uma curva do tipo x^n, definida no domínio $[0,b]$ dividido em k intervalos de comprimento $\frac{b}{k}$, conforme gráfico a seguir.

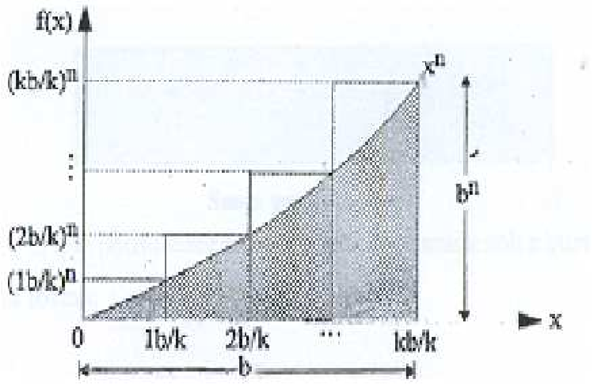

Figura 1: Gráfico discretizado.

No qual a área rachurada é aproximada pela soma das áreas dos retângulos $R_1, R_2, \cdots, R_k$, ou seja, tem-se que a área A, é dada por:

$$A = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_k$$
$$A = \frac{b}{k} \cdot \frac{1^n b^n}{k^n} + \frac{b}{k} \cdot \frac{2^n b^n}{k^n} + \frac{b}{k} \cdot \frac{3^n b^n}{k^n} + \cdots + \frac{b}{k} \cdot \frac{k^n b^n}{k^n}$$
$$A = \frac{b^{n+1}}{k^{n+1}} \cdot (1^n + 2^n + 3^n + \cdots + k^n)$$

Ou seja:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^4}{4} + \frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{4}$$

Isto é:

$$\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + k}{k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$$
$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2}{k^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}$$
$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3}{k^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k^2}$$

Para k muito grande, retângulos infinitesimais, $\frac{1}{2} \cdot k$, $\frac{1}{4} \cdot k^2$ e $\frac{1}{6} \cdot k^2$ aproximam-se de zero e, portanto, são desprezíveis. Isto é:

$$\frac{1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

A soma para k grande seria dada por:

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n = \frac{n^{n+1}}{n+1}$$

o que permite escrever a área sob a curva x^n na forma:

$$A = \frac{b^{n+1}}{k^{n+1}} \cdot (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + \ldots + k^n)$$

$$A = \frac{b^{n+1}}{k^{n+1}} \cdot (\frac{k^{n+1}}{n+1})$$

Assim chega-se à identidade de Roberval-Cavalheri:

$$A = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Em 1667 Wallis se viu diante de um importante fato decorrente desta identidade, que não conseguiu explicar: impossibilidade de resolver $x^2 + 1 = 0$, que surge da sua tentativa de igualar as áreas das duas figuras:

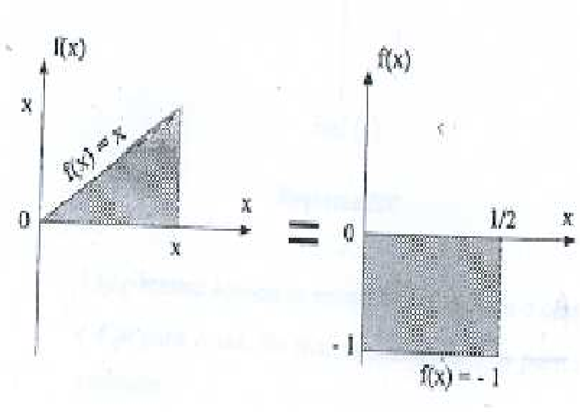

Figura 2: Igualdade de áreas.

O problema apresentado seria descobrir qual o valor de x no gráfico da esquerda para que a área do triângulo seja igual a área do retângulo à direita. Para resolver esta questão Wallis usou o resultado de Roberval-Cavalheri, substituindo $b = x$ e $n = 1$ em $A = \frac{b^{n+1}}{n+1}$, isto é: Área do triângulo=área do retângulo, ou seja

$$\frac{x^{1+1}}{1+1} = -1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$x^2 = -1$$

O que consistia no problema de se encontrar o lado x, de um quadrado de área negativa -1, problema para o qual se sabia que a solução não poderia ser 1, pois $1 \cdot 1 = 1$ e também não poderia ser -1, pois $(-1) \cdot (-1) = 1$, o que gerava uma inquietante questão.

Wallis no Theatrise of Algegra (Tratado de Álgebra), em 1685, volta a pensar em uma representação para os quadrados de área negativa, esta obra tratava de um estudo sobre as representações de direções, ou seja, a área negativa estaria relacionada a existência de um lado com direção negativa. Por meio do seguinte exemplo Wallis demonstra sua descoberta:

'... Suponha que um homem se movimente 3m para o leste e 4m para o norte. Se diz então que seu deslocamento foi 5m para o nordeste(NE). Se o mesmo homem se movimentar 3m para o oeste e 4m para o sul, ele terá se deslocado 5m para o sudoeste(SO)...'

$$NE = \sqrt{(+3)^2 + (4)^2} = \sqrt{(+1)^2 \times (3^2 + 4^2)}$$
$$NE = \sqrt{(+1)^2 \times 25} = +5$$
$$SO = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(-1)^2 \times (3^2 + 4^2)}$$
$$SO = \sqrt{(-1)^2 \times 25} = -5$$

Concluindo que direção, seria a verdadeira interpretação das raízes dos números negativos.(RICIERI, 1993)

O topógrafo Jean Robert Argand estendeu as idéias de Wallis para o uso em demarcações de terrenos, sendo esta a primeira aplicação da teoria dos complexos. Na época estes estudos foram desprezados, por serem muito práticos, face a dominante teoricidade dos matemáticos daquele tempo. O que levou a uma demora de 16 anos para a publicação destes estudos, graças à empolgação de Gauss.

2.3 GAUSS

O 'Plano de Gauss', é a grande obra do matemático alemão Karl Friedrich Gauss e significou uma revolução na história das exatas, por sinalizar todo o futuro desenvolvimento da Matemática. Gauss mostrou seus teoremas sobre a solução de equações algébricas, e indicou uma forma elementar, criativa e prática para representar um número complexo. As idéias de Gauss foram divulgadas por Mittag Leffler na revista Acta Mathematica. Gauss percebeu que um número complexo $z = x + iy$ requer uma representação bidimensional, enquanto os reais podem ser representados em uma reta, ou seja representação monodimensional.

O eixo imaginário foi representado perpendicular ao eixo dos reais, devido ao cálculo da altura do triângulo feito por Albert Girard.

A partir da definição desta prática forma de se representar um número complexo, Gauss concluiu que o conjunto dos complexos tem como subconjuntos os números naturais($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$) e reais ($\mathbb{R}$).

Usando o plano de Gauss, também chamado de plano de Argand-Gauss em decorrencia da contribuição de Argand na divulgação desta forma de representar os complexos (1806) com aplicação à topografia, foi definido o módulo de um complexo z, representado por $|z|$, ou a distância entre a origem dos eixos coordenados $(0,0)$ e o ponto representado por z denotado por ρ, como segue:

$$z = z + iy$$

$$|z| = |x + iy|$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

.

2.4 EULER

Leonhard Euler suiço da Basiléia, decidiu-se pela matemática após tentativa de estudos na teologia, aprendeu os princípios com o próprio pai, o qual teve como professor Jakob Bernoulli. Aos 20 anos o jovem matemático conseguiu ingressar na recém criada academia de São Petersburgo na Rússia onde permaneceu por 14 anos. Sendo convidado na sequência para a renomada academia de Berlim, por Frederico o Grande, imperador da Prússia; porém não se adaptou bem ao estilo de sua nova academia. Como havia conquistado grande prestígio na Rússia, foi convidado por Catarina, a Grande, e retornou a São Petersburgo onde permaneceu até o fim de seus dias.

Nem a cegueira total que o acometeu o impediu de ser um dos mais prolíficos escritores da história, com uma memória excepcional e grande poder de concentração ele seguiu escrevendo com o auxílio de um secretário.

Vale citar uma importante comtribuição de Argand, que em 1806 conseguiu demonstrar de forma rigorosa o teorema fundamental da álgebra, estendendo a sua validade para polinômios com coeficientes complexos e não apenas para polinômios com coeficientes reais.

Quanto aos complexos deve-se ressaltar a importância do estudo de Euler, no livro Pesquisa sobre as Raízes Imaginárias de uma equação, ele conseguiu mostrar que se $a+\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação então $a-\sqrt{-1}$ também o é. Concluindo que se uma equação tem raiz complexa, possui um fator da forma $x^2+k\times x+r$. Isso em decorrência do teorema fundamental da álgebra, estendido para os polinômios com coeficientes complexos, por Argand.

Euler compreendia e dominava as operações com os complexos, mesmo tendo dúvidas quanto à legitimidade de tais números, que chamou de impossíveis, e por carecerem de existencia palpável foram nominados de imaginários, existentes apenas na imaginação.

Chamando o resultado $\sqrt{-1}$ de i, Euler responsável pela notação, chegou aos seguintes resultados:

$i=\sqrt{-1}$

$i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$

$i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$

$i^4=i^2\times i^2=-1\times -1=1$

$i^5=i^2\times i^3=-1\times -i=i$

Com este procedimento, pode-se observar que é possível estender à todas as potências de i, bastando para tal dividir a potência por quatro.

2.5 WESSEL

Em 1797 Gaspar Wessel apresentou seu trabalho On the Analytical Representation of Direction (Uma Representação Analítica de Direção), antecipando em várias décadas as principais noções elementares de vetores concebidos por Hamilton.

Wessel rotulou de $\sqrt{-1}$ a orientação espacial perpendicular ao segmento de reta designado por $+1$. Provavelmente estas idéias de Wessel tenham sido influência de Albert Girard, o qual considerou um triângulo retângulo e sua altura relativa à hipotenusa que chamou de w. Conforme se vê na figura, (que pode ser decomposta em dois triângulos retângulos).

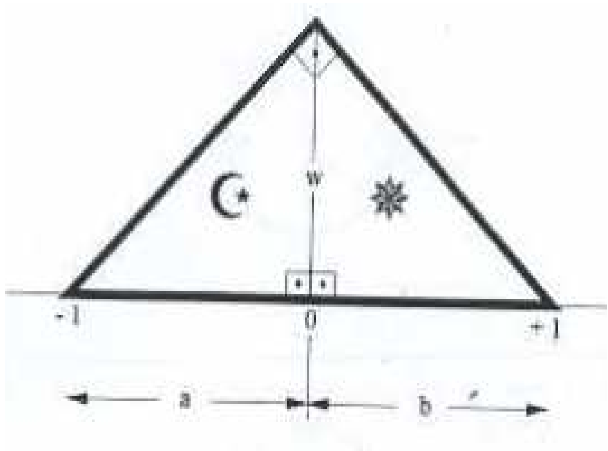

Figura 3: Triângulo de Wessel.

Aplicando semelhança de triângulos:

$$w/a = b/w$$

$$w^2 = a \times b$$

Fazendo $a = -1$ e $b = +1$:

$$w^2 = (-1) \times (+1)$$

$$w = \sqrt{-1}$$

Este é o chamado rótulo de Wessel. A partir dos estudos de Wessel e Girard, surgiu o conceito de $\sqrt{-1}$ ser perpendicular à reta dos reais.

Esquematizando suas idéias geometricamente Wessel enunciou a regra de orientação espacial de segmentos de reta:

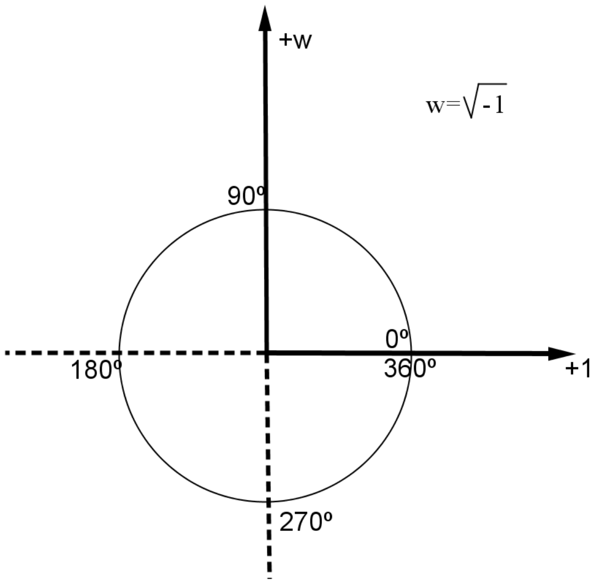

Figura 4: Orientações de Wessel (i).

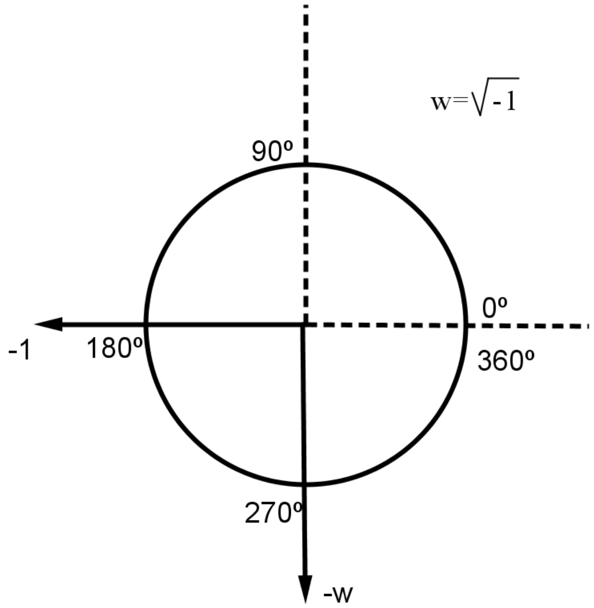

Figura 5: Orientações de Wessel (ii).

‘O ângulo de direção resultante da produtória de duas direções distintas é igual à soma dos ângulos de cada uma das direções envolvidas.’

Tabela 1: Tabela de Ângulos.

Direção	+1	-1	+w	-w
Ângulo	0^o=360^o	180^o	90^o	270^o

Fonte: Autoria própria.

2.6 LAPLACE

Pierre-Simon Laplace nascido em 1749 de família humilde, conseguiu progredir nos estudos graças ao seu talento para a matemática. Publicou importantes trabalhos nas áreas de mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodésia. É considerado o mais importante cientista francês de todos os tempos. Seu oportunismo em relação à política o levou a ter acesso a diversas facções que ocuparam o poder durante o conturbado período da revolução francesa. Faleceu em 1827 e relata-se que suas últimas palavras teriam sido: 'O que sabemos é insignificante. o que não sabemos é imenso.' Sua relação com os complexos, acontece nos estudos de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais, que o levaram à criação da técnica que leva seu nome chamada de Transformada de Laplace, a qual transforma EDOs em equações algébricas.(RICIERI, 1993)

A Transformada de Laplace é assim definida:

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

Na derivação de $\mathscr{L}$ em relação ao parâmetro s, Laplace obteve os seguintes resultados:

Derivada primeira de $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f(x)] = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\frac{d}{ds}\mathscr{L}[f(x)] = -\int_0^\infty e^{-sx} x f(x)dx$$

$$\frac{-d}{ds}\mathscr{L}[f(x)] = [xf(x)]$$

Derivada segunda de $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}[f(x)] = \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}[f(x)] = -\int_0^\infty e^{-sx}x^2 f(x)dx$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}[f(x)] = [x^2 f(x)]$$

Derivada terceira de $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\mathscr{L}[f(x)] = \frac{d^2}{ds^3}\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\mathscr{L}[f(x)] = -\int_0^\infty e^{-sx}x^3 f(x)dx$$

$$-\frac{d^3}{ds^3}\mathscr{L}[f(x)] = [x^3 f(x)]$$

Para $n = 1,2,3,\cdots$ tem-se:

$$\mathscr{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}[f(x)]$$

Ao deparar-se com estes resultados Laplace sentiu-se tentado a questionar a possibilidade de n ser fracionáio, especificamente $\frac{1}{2}$, que levaria a $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$. Ou seja, novamente o progresso da matemática tropeça na deficiência do conjunto $\mathbb{R}$.

2.7 BESSEL

Friedrich Wilhelm Bessel foi um importante matemático e astrólogo alemão, nascido em 22 de julho de 1784, precisou parar de estudar aos 15 anos devido a dificuldades financeiras, porém, prosseguiu de forma autodidata, e alcançou bastante sucesso nas duas áreas. As funções de Bessel, a desigualdade de Bessel, os polinômios de Bessel, os filtros de Bessel, a transformada de Bessel, a cratera de Bessel e o asteróide 1552 Bessel foram batizados em sua honra. No Abhandlugnen Akademie der Wissenschaft, de 1824 Bessel apresenta uma nova equação diferencial:

$$x^2\frac{d^2J}{dx^2} + x\frac{dJ}{dx} + x^2J = 0$$

Equação diferencial de Bessel.

A solução $J(x)$ dessa equação, designada Função de Bessel, é dada por:

$$J(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\frac{x}{2})^{2r}}{r!r!}$$

$$J(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \cdots$$

Alfred Pringsheim e Jaques Halamard, fizeram uma das primeiras aplicações dos estudos de Bessel, ao estudar a distribuição de temperatura (T) em uma aleta tipo faca:

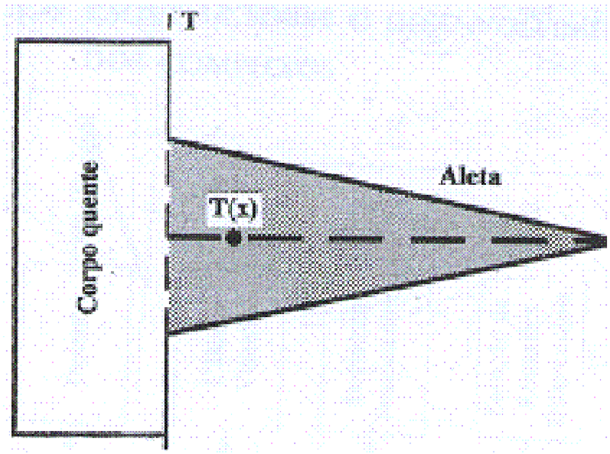

Figura 6: Aleta tipo faca.

Observaram que a função $T(x)$, que dá a distribuição de temperatura ao longo do eixo x, é a solução da seguinte equação diferencial:

$$x^2\frac{d^2T}{dx^2}+x\frac{dT}{dx}-c^2xT=0,$$

chamada equação diferencial da aleta. Para que as equações diferenciais de Bessel e da aleta fossem resolvidas uma em função da outra, Pringsheim e Hamamard adotaram o seguinte procedimento:

$$x^2\frac{d^2J}{dx^2}+x\frac{dJ}{dx}+(X)^2J=0$$

$$x^2\frac{d^2T}{dx^2}+(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x}\cdot c)^2T=0$$

A introdução do $\sqrt{-1}$, unidade imaginária, permitiria então resolver a equação da aleta com base no trabalho de Bessel pois as duas equações tornaram-se similares. Mais uma vez se evidenciando a necessidade de dar vida ao conjunto $\mathbb{C}$.

2.8 OUTRAS CONTRIBUIÇÕES

É importante entender o siginificado de alguns rótulos frequentemente usados no estudo dos números complexos: módulo e conjugado. A palavra **módulo** é derivada da palavra latina modulus, que significa comprimento, por conseguinte positivo; é atribuido a Cauchy o primeiro uso deste termo na matemática no livro Exercices de mathèmatiques, 1829. E a representação usando duas barras foi sugerida por Karl Weierstrass na revista alemã Mathematische Werke, vol. I, pág. 67.

O termo **conjugado** também deriva do latim, conjugare, e significa oposto. Este termo foi introduzido por Charles Hermite em 1865, durante suas aulas na Escola Normal Superior de Paris.

O *i* como rótulo para $\sqrt{-1}$ como já visto foi sugestão de Euler por volta de 1747.

3 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo apresentaremos a formulação teórica do conjunto dos números complexos, como apresentada nos livros didáticos.

3.1 NÚMEROS REAIS

Para entender o conjunto dos complexos que será indicado por $\mathbb{C}$, se faz necessário rever as propriedades dos números reais, indicados por $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ é um corpo, ou seja, nele estão definidas a adição e a multiplicação:
$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \rightarrow x+y$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \rightarrow x \cdot y$
sendo que para quaisquer $x,y,w \in \mathbb{R}$ temos:

i) Associatividade da adição:

$$x+(y+w) \quad = \quad (x+y)+w;$$

ii) Comutatividade da adição:

$$x+y \quad = \quad y+x$$

iii) Existência do elemento neutro para adição: Existe em $\mathbb{R}$, um elemento , o qual denotamos por 0 que:

$$x+0 \quad = \quad x, \forall x \in \mathbb{R}$$

iv) Existência do oposto: Todo $x \in \mathbb{R}$ possui inverso aditivo (ou oposto) denotado por $-x \in \mathbb{R}$

tal que

$$x + (-x) \quad = \quad 0$$

v) Associatividade da multiplicação

$$x \cdot (y \cdot w) \quad = \quad (x \cdot y) \cdot w$$

vi) Comutatividade da multiplicação

$$x \cdot y \quad = \quad y \cdot x$$

vii) Existência de elemento neutro para multiplicação: Existe em $\mathbb{R}$ um elemento, o qual denotamos por $1 (1 \neq 0)$, tal que

$$x \cdot 1 \quad = \quad x, \forall x \in \mathbb{R}$$

viii) Existência do inverso: Todo $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$; possui inverso multiplicativo denotado por $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \cdot x^{-1} \quad = \quad 1$$

ix) Distributividade

$$x \cdot (y + w) \quad = \quad x \cdot y + x \cdot w$$

Destas propriedades decorre que qualquer número real elevado ao quadrado $a^2 = a \cdot a$ nunca terá como resultado um número negativo, e por conseguinte assegura que em $\mathbb{R}$ é impossível extrair a raiz quadrada de um número negativo. E foi esta dificuldade que fez surgir o conjunto dos números complexos.(IEZZI; DOLCE, 1973)

Considerando $\mathbb{R}^2 = \{z = (x, y), \text{tais que } x, y \in \mathbb{R}\}$. A adição e a multiplicação em $\mathbb{R}^2$ são definidas como segue:

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(z, w) \mapsto z + w = (x + u, y + v)$

$\cdot : \mathbb{R} \times R^2 \to \mathbb{R}^2$

$(a, w) \mapsto a \cdot w = (a.x, a.y)$

3.2 NÚMEROS COMPLEXOS $\mathbb{C}$

Seja $i = \sqrt{-1}$. O conjunto $\mathbb{C} = \{z = a + ib, \text{tais que } a, b \in \mathbb{R}\}$ é denominado conjunto dos números complexos.

Para facilitar a representação do conjunto $\mathbb{C}$ faremos a seguinte associação:

$$z = a + ib = (a, b)$$

no qual a é dita parte real de z $(Re(a+bi) = a)$ e b é a parte imaginária de z $(Im(a+bi) = b)$. Fato este que deixa claro que $\mathbb{R}$ está contido em $\mathbb{C}$, em outras palavras todo número real é um número complexo no qual a parte imaginária é nula, $Imz = 0$.

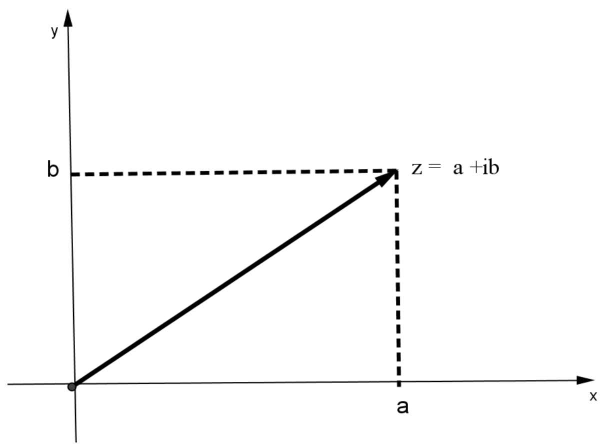

Figura 7: Plano de Gauss.

Observação: Da definição $i = \sqrt{-1}$ temos: $i^2 = -1$, o que garante que em $\mathbb{C}$ a equação $z^2 + 1 = 0$ tem solução.

3.2.1 Adição e subtração

Antes de operarmos com os complexos se faz necessário conceituar a igualdade de números complexos, representados na forma $z = a + bi$:

Definição 3.1 *Dois números complexos são iguais quando suas partes reais e imaginárias forem respectivamente iguais.*

$$a + bi = c + di \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Para somar ou subtrair números complexos deve-se somar ou subtrair respectivamente suas partes reais e imaginárias, separadamente.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Exemplos:

$$(2+3i)+(6+4i)=(2+6)+(3i+4i)=8+7i$$

$$(6+5i)-(2+3i)=(6-2)+(5i-3i)=4=2i$$

3.2.2 Multiplicação

A multiplicação de dois números complexos obedece à regra para multiplicação de binômios, relembrando que $i^2=-1$, temos:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$

$$=ac+adi+bci-bd$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\cdot i$$

Exemplo:

$$(2+4i)\cdot(1+3i)=2+6i+4i+12i^2$$

$$=2+6i+4i-12$$

$$=-10+10i$$

3.2.3 Conjugado

O termo conjugado foi sugerido em 1865 por Charles Hermite (conjugatio), também costuma ser chamado de simétrico de um número complexo, e significa exatamente isto, o simétrico de um complexo em relação ao eixo $0x$, ou seja, dado um complexo $z=a+bi$ seu conjugado é dado por $\overline{z}=a-bi$, Hermite descobriu as seguintes propriedades do conjugado, que levam seu nome:

propriedade da soma:

$$\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$$

propriedade da subtração:

$$\overline{(z_1 - z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

propriedade da multiplicação:

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

propriedade da divisão:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

3.2.4 Divisão

Para se obter o quociente de dois números complexos z_1 e z_2, basta aplicar a seguinte regra multiplica-se numerador e denominador pelo conjugado do denominador.$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ Exemplo:

Calcular $\frac{3+2i}{1+i}$.

$$\begin{aligned} \frac{3+2i}{1+i} &= \frac{(3+2i)\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} \\ &= \frac{(3+2)+(2-3)i}{1+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Teorema 3.1 *O conjunto $\mathbb{C}$ é um corpo.*

Para demonstrar este teorema é necessário mostrar que as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$ satisfazem às nove propriedades de um corpo; para tal consideremos $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$, $z_3 = (e,f)$ três elementos quaisquer fixados em $\mathbb{C}$, $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$. Então teremos:

i) Associatividade da adição:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (a,b) + ((c,d) + (e,f)) \\ &= (a,b) + (c+e, d+f) \\ &= (a + (c+e), b + (d+f)) \\ &= ((a+c)+e, (b+d)+f) \\ &= (a+c, b+d) + (e,f) = ((a,b)+(c,d)) + (e,f) \\ &= (z_1 + z_2) + z_3. \end{aligned}$$

ii) Comutatividade da adição:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a,b) + (c,d) \\ &= (a+c, b+d) \\ &= (c+a, d+b) \\ &= (c,d) + (a,b) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

iii) Existência de elemento neutro para adição: Existe $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ tem-se:

$$\begin{aligned} z + 0 &= (x,y) + (0,0) \\ &= (x+0, y+0) \\ &= (x,y) \\ &= z \end{aligned}$$

iv) Existência do oposto: Dado $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ então existe $-z = (-x,-y) \in \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{aligned} z + (-z) &= (x,y) + (-x,-y) \\ &= (x + (-x), y + (-y)) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

v) Associatividade da multiplicação:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f)) \\ &= (a,b) \cdot (ce - df, cf + de) \\ &= (a \cdot (ce - df) - b \cdot (cf + de), a \cdot (cf + de) + b \cdot (ce - df)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= ((ac - bd) \cdot e - (ad + bc) \cdot f, (ac - bd) \cdot f + (ad + bc) \cdot e) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e,f) \\ &= ((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) \\ &= ((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3. \end{aligned}$$

vi) Comutatividade da multiplicação.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a,b)\cdot(c,d) \\ &= (ac-bd, ad+bc) \\ &= (ca-db, cb+da) \\ &= (c,d)\cdot(a,b) \\ &= z_2 z_1 \end{aligned}$$

vii) Existência de elemento neutro para multiplicação. Existe em $\mathbb{C}$ o elemento $1=(1,0)$ tal que para todo $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ tem se:

$$\begin{aligned} z\cdot 1 &= (x,y)\cdot(1,0) \\ &= (x,y) \\ &= z. \end{aligned}$$

viii) Existência do inverso: Seja $z=(x,y)\neq(0,0)$ um elemento arbitratiamente fixado em $\mathbb{C}$. Então como $(x,y)\neq(0,0)$ devemos ter que $(x^2+y^2)>0$. Desta forma está bem definido o elemento $\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\in\mathbb{C}$ o qual satisfaz:

$$\begin{aligned} z\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right) &= (x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \\ &= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},0\right) \\ &= 1; \end{aligned}$$

Logo para todo $z=(x,y)\neq(0,0)$, existe $z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\in\mathbb{C}$, tal que, $z\cdot z^{-1}=1$.

ix) Distributividade.

$$\begin{aligned} z_1\cdot(z_2+z_3) &= (a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) \\ &= (a,b)\cdot(c+e,d+f) \\ &= (a(c+e)-b(d+f),a(d+f)+b(c+e)) \\ &= (ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)) \\ &= ((ac-bd)+(ae-bf),(ad+bc)+(af+be)) \\ &= (ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be) \\ &= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f) \\ &= z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3. \end{aligned}$$

3.2.5 Forma Polar

Consideremos o número complexo $z = a + bi$, e o ponto P que o representa no plano de Argand Gauss.

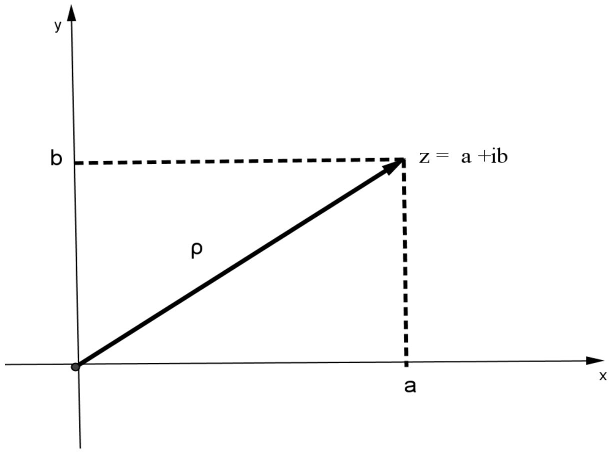

Figura 8: Forma polar.

Aplicando-se o teorema de Pitágoras temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Esta distância ρ de P até a origem 0, é chamado módulo de z. Denomina-se argumento do complexo z a medida do ângulo θ, formado pelo segmento de reta $\overline{OP}$ com o eixo real Ox, medido no sentido anti-horário, indicado por:

$$\theta = arg(z)$$

Este ângulo θ deve satisfazer a condição $0 \leq \theta < 2\pi$, aplicando-se as relações trigonométricas ao triângulo retânguo da figura 8 temos:

$cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{\rho}$

O que nos leva a:

$cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho cos\theta$

$sen\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho sen\theta$

substituindo em $z = a + bi$ temos:

$$z = \rho cos\theta + \rho sen\theta \cdot i$$

$$z = \rho(cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Esta expressão é denominada forma trigonométrica ou polar do complexo z.

Exemplo 3.1 *Dado o complexo $z = 1 + \sqrt{3} \cdot i$, sua forma trigonométrica ou polar será dada por:*

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
&= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \\
&= \sqrt{1+3} \\
&= 2 \\
cos\theta &= \frac{a}{\rho} \\
cos\theta &= \frac{1}{2} \\
sen\theta &= \frac{b}{\rho} \\
sen\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\theta &= \frac{\pi}{3} \\
z &= 2 \cdot \left(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Teorema 3.2 *O módulo de z, $|z|$ tem a seguinte propriedade:*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Prova:

Seja $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ temos,

$$\begin{aligned}
|(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)| &= |(x_1 + iy_1)| \cdot |(x_2 + iy2)| \\
|x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (x_1 z \cdot y_2 + x_2 \cdot y1)| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
\sqrt{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)^2 &= (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$1 = 1$$

3.2.6 Potenciação: Fórmula de Moivre

Em 1730 Abraham Moivre, mostrou no seu Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis (Coletânea de Séries e Quadraturas) rudimentos do importantíssimo resultado dos estudos da potenciação de um número complexo, que acabou por receber seu nome, Fórmula de Moivre.

Dado um número complexo $z = a + bi$, e um número natural n, $n \neq 0$, a potência z^n é definida por:

$$z^n = z \cdot z \cdot z \ldots z$$

um produto com n fatores iguais ao número z.

Exemplo 3.2 *Calcular z^5 para $z = 2 - 3i$*

$$(2-3i)^5 = (2-3i)\cdot(2-3i)\cdot(2-3i)\cdot(2-3i)\cdot(2-3i)$$

$$= (2-3i)^2 \cdot (2-3i)^2 \cdot (2-3i)$$

$$= (-5-12i)\cdot(-5-12i)\cdot(2-3i)$$

$$= (-119+120i)\cdot(2-3i)$$

$$= 122+597i$$

A partir deste exemplo é possível verificar o quanto é trabalhoso calcular potências de complexos, utilizando apenas as propriedades da multiplicação. Para valores maiores de n, a dificuldade será muito maior. Moivre simplificou estes cálculos, usando a representação trigonométrica ou polar dos complexos.

Antes de partirmos para a potenciação se faz necessário um breve estudo das operações utilizando-se a forma trigonométria dos complexos.

Consideremos dois complexos $z_1 = \rho_1 \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2)$, o cálculo do produto $z_1 \cdot z_2$ segue abaixo:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot \rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(cos\theta_1 + isen\theta_1)(cos\theta_2 + isen\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 + icos\theta_1 sen\theta_2 + isen\theta_1 cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1 sen\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2) + i(cos\theta_1 sen\theta_2 + sen\theta_1 cos\theta_2)]$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Donde observamos que o módulo do produto é o produto dos módulos, e o argumento do produto é a soma dos argumentos dos complexos dos fatores.

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ será dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)} \cdot \frac{\rho_2(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{\rho_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 - icos\theta_1 sen\theta_2 + isen\theta_1 cos\theta_2 - i^2 sen\theta_1 sen\theta_2)}{\rho_2^2(cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\rho_2(cos\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2 + isen\theta_1 cos\theta_2 - icos\theta_1 sen\theta_2)}{\rho_2^2(cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))$$

Donde pode-se observar que o módulo do quociente é o quociente dos módulos e o argumento do quociente é a diferença dos argumentos do dividendo e do divisor. Resumindo, para dividir dois números complexos na forma trigonométrica basta dividir os seus módulos e subtrair seus argumentos.

Exemplo 3.3 *Dados* $z_1 = 6(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4})$ *e* $z_2 = 2(cos\frac{\pi}{5} + isen\frac{\pi}{5})$, *calcular o quociente* $\frac{z_1}{z_2}$. *Basta aplicar a fórmula:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}(cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5}) + isen(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5}))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 3(cos\frac{\pi}{20} + isen\frac{\pi}{20})$$

Teorema 3.3 *Dados o número complexo* $z = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$, *não nulo e o número inteiro* n, *então a primeira fórmula de Moivre é:*

$$z^n = \rho^n \cdot (cosn\theta + isenn\theta)$$

Demonstração:

i) Provemos que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio da indução finita.

Se $n = 0$, então

$$z^0 = 1$$

$$\rho^0 \cdot (cos0 + isen0) = 1$$

ii) Admitamos a validade da fórmula para $n = k - 1$:

$$z^{k-1} = \rho^{k-1} \cdot (cos(k-1)\rho + isen(k-1)\rho)$$

e provemos para $n = k$: como

$$z^k = z^{k-1} \cdot z$$

então

$$= \rho^{k-1} \cdot (cos(k-1)\theta + isen(k-1)\theta) \cdot \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$$

$$= (\rho^{k-1} \cdot \rho) \cdot (cos((k-1)\theta + \theta) + isen((k-1)\theta + \theta))$$

$$= \rho^k (cosk\theta + isenk\theta)$$

iii)Vamos estender a propriedade para $n \in \mathbb{Z}_-$. Se $n < 0$, então $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$, portanto a m se aplica a fórmula:

$$z^n = z^{-m}$$

$$\frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m \cdot (cosm\theta + isenm\theta)}$$

$$= \frac{1}{\rho^m} \cdot \frac{cosm\theta - isenm\theta}{(\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta)(\cos m\theta - i \operatorname{sen} m\theta)}$$

$$= \frac{1}{\rho^m} \cdot \frac{\cos(m\theta) - i \operatorname{sen}(m\theta)}{\cos^2(m\theta) + \operatorname{sen}^2(m\theta)}$$

$$= \rho^{-m} \cdot (\cos(-m\theta) + i \operatorname{sen}(-m\theta))$$

$$= \rho^n \cdot \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta$$

Para a radiciação teremos:

Definição 3.2 *Dado um número complexo z, chama-se raiz enézima de z, e denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo z_1 tal que $z_1^n = z$.*

$$\sqrt[n]{z} = z_1 \Leftrightarrow z_1^n = z$$

Teorema 3.4 *Dados o número complexo $z = \rho \cdot (cos\theta + isen\theta)$ e o número natural n $(n \geq 2)$, então a segunda fórmula de Moivre é:*

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot [cos(\frac{n}{\theta} + k \cdot \frac{2\pi}{n}) + isen(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})]$ *onde* $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_{+}$ *e* $k \in \mathbb{Z}$

Demonstração:

Determinemos todos os complexos z_1 tais que $\sqrt[n]{z} = z_1$. Se $z_1 = r \cdot (\cos w + i \operatorname{sen} w)$, nossas incógnitas são r e w. apliquemos a definição de $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = z_1 \leftrightarrow z_1^n = z$$

então

$$r^n \cdot (\cos nw + i \operatorname{sen} nw) = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$$

Portanto é necessário:

$$\begin{cases} \cos n\omega & = & \cos \theta \\ \operatorname{sen} n\omega & = & \operatorname{sen} \theta \end{cases} \Rightarrow n\omega = \theta + 2k\pi \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de ω compreendidos entre 0 e 2π:

$$k = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n}$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$$

$$k = 2 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}$$

.

$$\vdots$$

$$k = n-1 \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Estes n valores de ω não são congruentes por estarem todos no intervalo $0 \rightarrow 2\pi$, portanto, dão origem a n valores distintos para $\sqrt[n]{z}$. Consideremos agora o valor de ω obtido para $k = n$:

$$k = n \Rightarrow \omega = \frac{\theta}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Este valor de ω é dispensável por ser congruente ao valor obtido com $k = 0$. Fato análogo ocorre para $k = n+1, n+2, n+3, \cdots$ e $k = -1, -2, -3, \cdots$ Então para obter todos os valores de $\sqrt[n]{z}$ é suficiente fazer $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. Conclusão: todo número complexo z não nulo admite n raízes enézimas distintas as quais tem todas o mesmo módulo $(\sqrt[n]{|z|})$ e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

4 FÓRMULA DE EULER: UMA APLICAÇÃO DOS COMPLEXOS

Dados os preliminares históricos e os conceitos teóricos sobre o conjunto dos números complexos, apresentaremos neste capítulo uma das suas aplicações na resolução de equações diferenciais.

Sabemos que as equações diferenciais modelam vários fenômenos físicos, portanto são de grande utilidade para várias áreas, em particular, as engenharias. A seguir o teorema 4.1 relacionará as raízes complexas de uma equação do 2º grau com a solução de uma equação diferencial, portanto evidenciará uma das aplicabilidades dos números complexos.

Para tanto, necessitaremos de alguns conceitos do Cálculo, em especial as séries de Maclaurin:

i)

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + \ldots$$

ii)

$$\operatorname{sen} x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

iii)

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

para $x \in \mathbb{R}$.

O estudo detalhado destas séries pode ser encontrado em livros de um segundo curso de Cálculo, como: (SWOKOWSKI, 1994)

Euler estendeu estas séries para $z \in \mathbb{C}$:

i)

$$e^z = 1+z+\tfrac{z^2}{2!}+\cdots+\tfrac{z^n}{n!}+\ldots$$

ii)

$$\operatorname{sen} z = z-\tfrac{z^3}{3!}+\tfrac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\tfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

iii)

$$\cos z = 1-\tfrac{z^2}{2!}+\tfrac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\tfrac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Em particular, tomando $z = i\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = e^z &= 1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\ldots \\ &= 1+i\theta+i^2\frac{\theta^2}{2!}+i^3\frac{\theta^3}{3!}+i^4\frac{\theta^4}{4!}+i^5\frac{\theta^5}{5!}+\ldots \end{aligned}$$

Substituindo as potências de i, temos:

$$e^{i\theta} = 1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-i\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+i\frac{\theta^5}{5!}-\ldots$$
$$e^{i\theta} = \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\ldots\right)$$

e ao aplicarmos (iii) e (ii) para $z = i\theta$, teremos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \qquad (4.1)$$

A identidade (4.1) é conhecida como a famosa **identidade de Euler**.

Definição 4.1 *Uma equação diferencial linear de ordem 2 homogênea é uma equação da forma* $y'' + by' + cy = 0$

Teorema 4.1 *Se $y = f(x)$ e $y = g(x)$ são soluções de $y'' + by' + cy = 0$, então $y = C_1 f(x) + C_2 g(x)$ é uma solução, para todos os reais C_1 e C_2.*

Cuja demonstração pode ser vista em (SWOKOWSKI, 1994).

Definição 4.2 *A equação auxiliar da equação diferencial* $y'' + by' + cy = 0$ *é* $m^2 + bm + c = 0$.

Teorema 4.2 *Se as raízes* m_1 *e* m_2 *da equação auxiliar são reais e distintas, então a solução geral de* $y'' + by' + cy = 0$ *é*

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

Teorema 4.3 *Se a equação auxiliar tem a raiz dupla m, então a solução geral de* $y'' + by' + cy = 0$ *é*

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

As leis dos expoentes são válidas para os números complexos. Além disso, as fórmulas para derivadas podem ser estendidas a funções de uma variável complexa z. Por exemplo, $D_z e^{kz} = k e^{kz}$, onde z é um número complexo. Se a equação auxiliar de $y'' + by' + cy = 0$ tem raízes complexas $s \pm ti$, então a solução geral desta equação pode ser escrita nas seguintes formas equivalentes:

$$y = C_1 e^{(s+ti)x} + C_2 e^{(s-ti)x}$$

$$y = C_1 e^{sx+txi} + C_2 e^{sx-txi}$$

$$y = C_1 e^{sx} e^{txi} + C_2 e^{sx} e^{-txi}$$

$$y = e^{sx}(C_1 e^{itx} + C_2 e^{-itx})$$

e podemos simplificar usando a fórmula de Euler.

$$e^{itx} = \cos tx + i \,\mathrm{sen}\, tx$$

e

$$e^{-itx} = \cos tx - i \,\mathrm{sen}\, tx$$

Donde decorre que:

$$\cos tx = \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{2}$$

e

$$\mathrm{sen}\, tx = \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2i}$$

Fazendo $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ no que precede e aplicando então a fórmula de $\cos tx$, obtemos

$$y = \frac{1}{2} e^{5x}(e^{itx} + e^{-itx})$$

$$= \frac{1}{2}e^{5x}(2\cos tx)$$
$$= e^{5x}\cos tx$$

Assim $y = e^{5x}\cos tx$ é uma solução particular de $y'' + by' + cy = 0$. Fazendo $C_1 = -C_2 = \frac{i}{2}$ somos conduzidos à solução particular $y = e^5 x \operatorname{sen} tx$. Isto constitui uma demonstração parcial do seguinte teorema.

Teorema 4.4 *Se a equação auxiliar $m^2 + bm + c = 0$ tem raízes complexas conjugadas $s \pm ti$, então a solução geral de $y'' + by' + cy = 0$ é*

$$y = e^{sx}(C_1 \cos tx + C_2 \operatorname{sen} tx)$$

Exemplo 4.1 *Resolva a equação diferencial $y'' - 10y' + 41y = 0$. As raízes da equação auxiliar $m^2 - 10m + 41 = 0$ são*

$$m = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 164}}{2}$$
$$m = \frac{10 \pm 8i}{2}$$
$$m = 5 \pm 4i$$

Aplicando o teorema 4,1, obtemos a solução geral da equação diferencial:

$$y = e^{5x}(C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x)$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A maneira pela qual os alunos, em geral no ensino médio, são introduzidos no estudo do conjunto dos números complexos os priva de conhecerem os porquês deste conjunto, aprendendo apenas uma saída para solucionar equações de segundo grau, no caso de discriminante negativo, e um recurso diferencial para os concursos vestibular, como se fosse apenas um adendo, independente.

Neste estudo buscamos esclarecer como as raízes quadradas de números negativos, imperravam importantes estudos em diversas áreas, como o cálculo, a álgebra e a física. Para transpor esta deficiência em $\mathbb{R}$, os grandes matemáticos mesmo contrariados operavam com estes números, imaginários, pois acreditavam estar perdendo seu tempo com algo que não existia, e por vezes se surpreenderam com os resultados a que chegaram, como o método para as cúbicas de Cardano, que funcionava, mas por vezes apresentava raíz negativa como resultado intermediário, mesmo em equações com todas as raízes reais. Vimos que a construção do conceito tal qual o conhecemos hoje foi longa, demorada e procuramos aqui apresentar alguns (entre muitos) estudiosos que contribuiram nesta formulação.

Desta luta para entender estes números, restou uma equivocada terminologia, imaginários. Ficou clara a importância da transposição desta barreira, para o progresso das ciências, sem os complexos muitas descobertas físicas importantes não seriam possíveis, o que nos deixa um questionamento quanto a forma como o ensino é conduzido na matemática, em geral cabe à este importante conjunto apenas um pequeno capítulo, em que o mesmo é tratado como se fosse independente de qualquer outro, e na verdade como explicitamos neste trabalho ele constitui uma ampliação de $\mathbb{R}$, e o contém mantendo suas propriedades.

REFERÊNCIAS

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

IEZZI, G.; DOLCE, O. **Álgebra III**. São Paulo: Moderna, 1973.

RICIERI, A. P. **Assim Nasceu o imaginário**. São josé dos Campos: Prandiano, 1993.

SWOKOWSKI, E. w. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron books, 1994.