

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA - DAMAT
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA POR MEIO DA TRAJETÓRIA
HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO

**LONDRINA
2017**

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

**MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES
TRIGONOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA POR MEIO DA TRAJETÓRIA
HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Departamento Acadêmico de Matemática – DAMAT, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Karina
Alessandra Pessoa da Silva

**LONDRINA
2017**



TERMO DE APROVAÇÃO

MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA POR MEIO DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

por

VICTOR HUGO DOS SANTOS GOIS

Este Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização foi apresentado em 30 de maio de 2017 como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Karina Alessandra Pessoa da Silva
Profa. Orientadora

Adriana Helena Borssoi
Membro titular

Pamela Emanuelli Alves Ferreira
Membro titular

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso –

Para Angélica, Patricia e Eduardo, que primeiro me mostraram a dedicação, o amor e a alegria pela docência.

AGRADECIMENTOS

Como colocado na Bíblia, existe um tempo para cada coisa e esse é o tempo que Deus preparou para mim!

Gostaria de um modo singelo agradecerê-Lo e a sua mãe Maria que em tantos momentos nunca me desampararam, acolheram minhas angústias e ouviram minhas orações. É por meio deles que hoje estou aqui concluindo mais esta etapa de minha formação.

Quero agradecer também minha esposa Carolina, que sempre me incentivou e a todo tempo é compreensiva, zelosa e paciente comigo. Auxiliou-me e me apoiou ao longo desta etapa de formação, em especial no desenvolvimento deste trabalho de conclusão. Muito obrigado meu amor!

Em seguida minha gratidão a minha família, que de forma singular e despercebida me fomenta a buscar sempre mais, estudar e conhecer a respeito da importância da educação. Meus pais Anizio e Eliane que primeiro buscaram “diferentes encaminhamentos” para ensinar-me a respeito da “vida”. Meus irmãos Vinicius e Maria que lapidam minha identidade de professor desde sempre. Meus avós Maria, Nelson (*in memoriam*), Messias (*in memoriam*) e Aurora (*in memoriam*) que sempre vibraram com minhas vitórias. Meus tios, em especial à Angélica, que foi uma das minhas inspirações para ser professor, que sempre me dá bons conselhos, com quem dou boas risadas e com quem vibrei e sofri durante o desenvolvimento de seu curso de Mestrado. Enfim, a todos meus familiares que contribuíram para o que sou hoje, meu muito obrigado.

As amigadas que levo dessa especialização minha gratulação, pelos risos, nervos, piras e momentos de descontração. Ajudaram-me a caminhar e a hoje alcançar por meta a titulação de Especialista em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Obrigado Susana, Maria e Sheila; o caminho foi mais fácil junto com vocês.

Um obrigado também às professoras Adriana Borssoi e Pamela Ferreira que compuseram minha banca de avaliação e contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

E, por fim, mas não menos importante agradeço a minha orientadora Karina Alessandra Pessoa da Silva, pelas preciosas orientações, puxões de orelha,

situações de crescimento e suporte. Meu muito obrigado e espero podermos estreitamos os laços de amizade que iniciamos nessa pós-graduação.

*“[...] Procuvo despir-me do que aprendi
Procuvo esquecer-me do modo de lembrar que
me ensinaram,
E raspar a tinta com que me pintaram os
sentidos,
Desencaixotar as minhas emoções
verdadeiras,
Desembrulhar-me e ser eu [...]”*

(Alberto Caeiro)

RESUMO

GOIS, Victor Hugo dos Santos. **Modelagem Matemática no ensino de funções trigonométricas**: uma proposta por meio da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2017. 66 p. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências e Educação Matemática - Universidade Tecnológica Federal do Paraná). Londrina, 2017.

Esse trabalho busca fomentar discussões a respeito dos processos de ensino e aprendizagem em Matemática por meio de propostas de atividades resolvidas no ambiente de aprendizagem da Modelagem Matemática, na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e subsidiada pela Trajetória Hipotética de Aprendizagem proposta por Simon (1995). São propostas três atividades que versam a respeito do ensino de funções trigonométricas, em especial funções do tipo Seno e do tipo Cosseno, que podem ser desenvolvidas pela Modelagem Matemática. Elas são distintas principalmente pela autonomia dos alunos na hora de resolvê-las, o que Silva, Almeida e Gerônimo (2011) classificam como diferentes momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem. Além disso, apresentamos a THA como um instrumento pedagógico que pode ser muito eficaz no planejamento de atividades como as que apresentamos. Para cada atividade, que está inserida em um diferente momento de familiarização dos alunos com a modelagem, as trajetórias têm objetivos e enfoques diferentes. São também apresentados nesse trabalho algumas pesquisas que tratam de modelagem e trigonometria e algumas que tratam da THA no ensino de matemática e também as potencialidades do uso de *applets* no ensino de trigonometria que enriquecem ainda mais as propostas que aqui apresentamos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Funções trigonométricas.

ABSTRACT

GOIS, Victor Hugo dos Santos. **Mathematical Modeling in the teaching of trigonometric functions:** a proposal through the Hypothetical Learning Trajectory. 2017. 66 p. Course Completion Work (Specialization in Science Teaching and Mathematics Education) - Federal Technology University - Paraná. Londrina, 2017.

This work aims to foster discussions about the teaching and learning processes in Mathematics through proposals of activities solved in the learning environment of Mathematical Modeling from the perspective of Almeida, Silva and Vertuan (2012) and subsidized by the Hypothetical Learning Trajectory proposed by Simon (1995). Three activities are proposed that deal with the teaching of trigonometric functions, especially Sine and Cosseno type functions, which can be developed by Mathematical Modeling. They are distinguished mainly by the students' autonomy in solving them, which Silva, Almeida and Gerólomo (2011) classify as different moments of familiarization of students with modeling activities. In addition, we present the HLT as a tool that can be very effective in planning activities such as the ones we present. For each activity, which is inserted in a different moment of familiarization of the students with the modeling, the trajectories have different objectives and approaches. Also presented in this work are some researches that deal with modeling and trigonometry and some that deal with HLT in mathematics teaching. And also the potentialities of the use of applets in the teaching of trigonometry that further enrich the proposals presented here.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Hypothetical Learning Trajectory. Trigonometric functions.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Ciclo de Ensino de Matemática (abreviado)	31
Quadro 2: Descrição de horário e altura das marés do dia 28/07/2016 em Paranaguá.....	36
Quadro 3: Primeira proposta de situação-problema para os alunos.	37
Quadro 4: Segunda proposta de situação-problema para os alunos.	51

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Papel do professor e do aluno X momentos de familiarização em atividades de modelagem	20
--	----

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Esquema das fases da modelagem.	18
Figura 2: Ciclo de uma atividade de modelagem matemática.	19
Figura 3: dados tabelados plotados no Geogebra.	40
Figura 4: Função Seno.	40
Figura 5: Função Cosseno.	41
Figura 6: Círculo trigonométrico e função cosseno.	43
Figura 7: Amplitude da função.	44
Figura 8: Frequência da função.	44
Figura 9: Período da função.	45
Figura 10: Transladação horizontal da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em -2 unidades.	45
Figura 11: Transladação vertical da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em 3 unidades.	46
Figura 12: Gráfico da função $a(t) = 0,35 \cdot \cos(t)$	46
Figura 13: Gráfico da função $a(t) = 0,35 \cdot \cos(\pi/6 \cdot t)$	47
Figura 14: Gráfico da função $a(t) = 0,35 \cdot \cos(\pi/6 \cdot t) + 0,75$	48
Figura 15: Gráfico da função $a(t) = 0,35 \cdot \cos(\pi/6 \cdot t - 1,75\pi) + 0,75$	49
Figura 16: nível dos hormônios femininos em função do tempo é periódico.	53
Figura 17: Gráfico que relaciona pressão sanguínea com o tempo.	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE ABREVIATURAS

MM	Modelagem Matemática
THA	Trajatória Hipotética de Aprendizagem
EM	Educação Matemática

LISTA DE SIGLAS

PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio
LDBEN	Leis de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional
EPMEM	Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	16
1.2 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	22
1.2.1 O USO DO COMPUTADOR E O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	23
1.3 MODELAGEM MATEMÁTICA E TRIGONOMETRIA: TRABALHOS DESENVOLVIDOS.....	25
2 ENCAMINHAMENTOS DA NOSSA PROPOSTA	28
2.1 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM.....	28
2.2 RELAÇÃO DE ALGUNS TRABALHOS QUE TRATAM DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM	33
3 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PROPOSTAS	34
3.1 AS MARÉS DE PARANAGUÁ	34
3.2 CICLO RESPIRATÓRIO DE UM ADULTO	50
3.3 TRIGONOMETRIA E MEDICINA.....	53
CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS	59

INTRODUÇÃO

Dentre os percalços que se encontra no ensino de matemática podemos destacar o desinteresse por parte dos alunos e a desmotivação por parte dos professores. Podemos pensar que não há relação alguma entre esses fatores, porém essas ligações existem. Enquanto os alunos recebem uma grande quantidade de conteúdos ao longo da formação básica, em um número reduzido de aulas e passam por avaliações por meio de exames, os professores têm uma jornada extensa de trabalho, desvalorização profissional, limitação e restrição às matrizes escolares nos espaços em que atuam.

Criar diferentes maneiras de avaliar os alunos, ou tornar acessíveis ao professor diferentes tipos de metodologias de ensino que melhorem de forma qualitativa e quantitativa o seu domínio a respeito dos conteúdos, são peças fundamentais e primordiais para o desenvolvimento da educação (D'AMBROSIO, 1996). Para tanto:

É necessário dispormos de um sistema de informações que permita aquilatar os efeitos do sistema escolar com os objetivos de aprimorar a gestão da qualidade e o rumo a ser dado à política educacional e ao seu financiamento (D'AMBROSIO, 1996, p.61).

Segundo as Leis de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (LDBEN) é papel fundamental da escola “capacitar as habilidades e competências para enfrentar o mundo moderno” (BRASIL, 1996).

Sendo assim, os alunos que se encontram na Educação Básica devem construir conhecimentos que promovam o entendimento das relações sociais e a autonomia de buscar diferentes tipos de informações e serem críticos a respeito delas.

Dessa maneira, as LDBEN têm a expectativa de que alunos relacionem a teoria escolar à prática da vida social.

Ao ingressar no magistério do Estado do Paraná em 2013 pude ter um maior contato com as inquietações de equipes pedagógicas a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem tais como: existem ambientes de ensino¹ que são

¹ Também chamados de ambientes de aprendizagem escolar é caracterizado como “[...] um lugar previamente organizado para promover oportunidades de aprendizagem e que se constitui de forma única na medida em que é socialmente construído por alunos e professores a partir das interações que estabelecem entre si e com as demais fontes materiais e simbólicas do ambiente” (MOREIRA, 2007).

facilitadores da aprendizagem dos alunos? Nas preparações das aulas há algum recurso que auxilie e potencialize as mesmas? Existe alguma maneira de organizar os conteúdos propostos nos currículos de Matemática de modo contextualizado e interdisciplinar? Dentre outras, essas aflições passaram a ser minhas também.

Considerando o quadro educacional brasileiro e suas dificuldades nos ambientes de ensino e de aprendizagem, em especial nas aulas de matemática, temos que, pesquisas que fomentem melhorias se fazem necessárias, ainda mais se essas facilitam e intensificam o trabalho de professores em sala de aula e possam estimular o interesse do aluno a partir de diferentes recursos.

Estudar diferentes maneiras de aprender, como e quando se dão, quais são os facilitadores e o que interfere nesse processo é a preocupação de muitos pesquisadores na Educação. Esses são questionamentos que, apesar de antigos, se fazem atuais e exigem uma constante atualização.

Para Moreira (1999), as Teorias de Aprendizagem são:

uma construção humana para interpretar sistematicamente a área do conhecimento que chamamos de aprendizagem. Representa o ponto de vista de um autor/pesquisador sobre como interpretar o tema aprendizagem, quais as variáveis independentes, dependentes e intervenientes. Tenta explicar o que é aprendizagem e porque funciona como funciona. Uma das finalidades da educação escolar é propiciar ao aluno meios para que aprenda de forma que se lembre do que aprende quando precisar, quer para a aprendizagem de novos conteúdos, quer para resolver problemas com que se depara na sua vida acadêmica ou fora dela (MOREIRA, 1999, p. 12).

O pesquisador Martin A. Simon (1995), concentra suas pesquisas na área de Educação Matemática e procura entender de que maneiras os alunos desenvolvem os conceitos matemáticos a partir de atividades matemáticas e o que pode fortificar essas aprendizagens, além de extenso estudo por quais meios os docentes ensinam e aprendem matemática. Ao introduzir as “Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem” Simon (1995, p.114, tradução nossa) coloca que “apesar de o construtivismo ter fornecido maneiras úteis para que os educadores matemáticos entendam a aprendizagem e os aprendizes, a tarefa de reconstruir a pedagogia da matemática baseada no ponto de vista da aprendizagem construtivista é um grande desafio”².

² “Although constructivism has provided mathematics educators with useful ways to understand learning and learners, the task of reconstructing mathematics pedagogy on the basis of a constructivist view of learning is a considerable challenge”.

Sob esses inquietamentos, discutimos e analisamos as vicissitudes do planejamento de atividades de modelagem em sala de aula, prevendo as possibilidades de exploração das mesmas a partir das THA de Simon (1995), incentivando o uso da Modelagem Matemática como ambiente de aprendizagem escolar.

Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15) caracterizam que a Modelagem Matemática “visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos” e “independente da finalidade, o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente, mas se ‘torna presente’ por meio deste modelo” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13).

Assim, esse trabalho tem por intuito promover aquilo que as LDBEN propõem, possibilitando, subsidiados por Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, relacionar a teoria da sala de aula com a prática do cotidiano a partir de atividades de Modelagem Matemática.

Iremos apresentar e desenvolver a construção de três Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem em atividades de Modelagem Matemática no ensino e/ou aplicação da Matemática.

Para tanto, esta monografia é constituída, além desta introdução, de quatro capítulos, sendo o primeiro a apresentação da fundamentação teórica de nosso trabalho, em que estabelecemos a caracterização de Modelagem Matemática. Fazemos, também, alguns apontamentos a respeito do ensino de trigonometria e de uso de computadores, em especial de *applets* no ensino de funções trigonométricas, e alguns trabalhos envolvendo MM e trigonometria são apresentados. A seguir, versamos a respeito dos encaminhamentos presentes em nossas propostas, que no caso, baseiam-se nas pesquisas de Simon (1995), no que ele chama de Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Nesse capítulo também apresentamos alguns trabalhos que tratam desta temática. No terceiro capítulo, apresentamos então as propostas de três atividades de modelagem, que se inserem nos três momentos de familiarização de atividades de modelagem. Para cada atividade apresentamos uma THA com enfoques diferentes. E por fim, trazemos as considerações finais deste trabalho.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo versaremos a respeito da caracterização de Modelagem Matemática, como proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2012) dada pelas fases da modelagem e pelos diferentes momentos de familiarização. Na sequência, serão apresentados os objetivos e algumas dificuldades no ensino de trigonometria no Ensino Médio, em particular no conteúdo de funções trigonométricas. Depois disso, são apresentadas as potencialidades do uso de computador no ensino de funções trigonométricas e por fim, alguns trabalhos que envolvem esta temática e que são desenvolvidos por meio da Modelagem Matemática.

1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A partir da prerrogativa de formar cidadãos críticos, a EM se faz necessária para aprimorar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, de modo que, por meio desta disciplina, os alunos consigam ser agentes ativos na construção do conhecimento. Sendo assim, a MM como um ambiente de aprendizagem, permite a possibilidade de explorar a Matemática a partir de situações do interesse dos alunos.

Para Bassanezi (2002, p.16), Modelagem Matemática é definida como sendo a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

A Modelagem Matemática “[...] constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano de ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões” (BURAK, 1992, p. 62).

Desse modo a MM

[...] busca trabalhar os conteúdos matemáticos de uma forma que possibilite a construção dos conceitos matemáticos, buscando as relações destes com o dia-a-dia, sua aplicação, utilização e importância (BURAK; BARBIERI, 2005, p.2).

De forma geral a Modelagem Matemática na Educação Matemática é entendida por diferentes pesquisadores constituída por diferentes configurações, tais

como: metodologia de ensino e de aprendizagem, ambiente de aprendizagem, alternativa pedagógica, entre outras abordagens. Porém, todas essas convergem em ensinar Matemática com o uso de modelos matemáticos, em que os alunos buscam uma solução para problemas dentro e fora da Matemática.

Desse modo, um modelo matemático consiste em um

[...] sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 13).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) os modelos matemáticos não consistem apenas de expressões algébricas, mas podem ser construídos a partir de diferentes representações, tais como gráficos, tabelas e até textos ou imagens, dependendo do nível de escolaridade a qual a atividade de MM está atrelada e os objetivos do professor. Burak (2010) extrapola a ideia de modelo, afirmando que listas de compra, croquis, maquetes, projetos estruturais ou plantas baixa de casas também podem ser considerados modelos, mas tudo depende da perspectiva adotada.

Ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática, uma situação-problema é traduzida para símbolos matemáticos, cujo objetivo é otimizar a busca por uma solução a partir de uma análise minuciosa dos dados que compõem esse problema, por meio da compreensão e levantamento de hipóteses que possam solucionar o mesmo (BIEMBENGUT; HEIN, 2007).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) uma atividade de modelagem consiste no intermeio entre uma situação inicial (problemática), e a situação final desejada (elaboração de um modelo para descrever a situação ou os fenômenos além de uma solução para a problemática). E a MM, nesta perspectiva, pode perpassar por cinco fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação (não necessariamente nessa ordem). Na Figura 1, apresentamos um esquema proposto por esses mesmos autores para melhor elucidar essas divisões propostas.

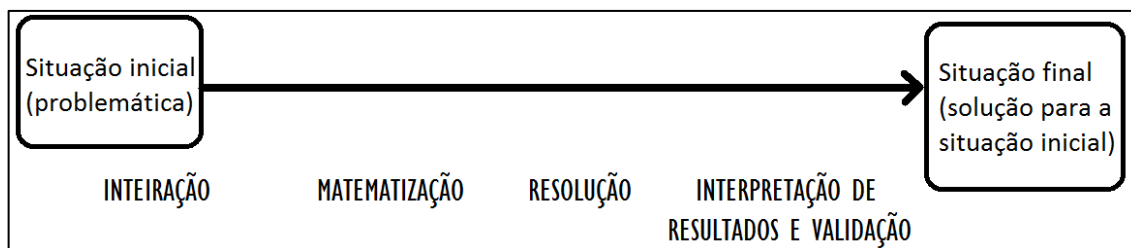


Figura 1: Esquema das fases da modelagem.

Fonte: ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15.

A inteiração é o primeiro contato com a situação-problema, em que são identificadas suas características por meio da coleta de dados quantitativos ou qualitativos; a matematização é a transição da linguagem natural da problemática (seja ela “dentro” ou “fora” da matemática) em linguagem matemática, utilizando símbolos e objetos matemáticos; a resolução é a formulação de um modelo matemático que represente a situação; a interpretação dos resultados e validação visam aplicar o modelo matemático construído, e consistem em responder as perguntas formuladas na problemática avaliando o modelo construído e suas interpretações.

Ainda que muitas pesquisas tenham sido feitas a respeito do uso de Modelagem Matemática sob diferentes aspectos, não há uma fórmula ou paradigma único, pelo contrário, encontram-se algumas características semelhantes dentre as diferentes perspectivas.

Ferri (2006), apresenta um esquema para as atividades de modelagem matemática por meio de um ciclo que parte de uma situação real inserida na realidade, em que esta realidade não tem uma forma bem definida, e essa situação é transposta à Matemática em busca de formatá-la a um modelo matemático e por fim, esse modelo volta para realidade buscando entender e interpretar a situação inicial. Este ciclo é uma interpretação do ciclo proposto por Blum e Leiss (2007) *apud* Ferri (2006) estendendo-o a uma interpretação construtivista. Ferri (2006), propõe que este ciclo acontece por meio de seis etapas e destaca ações cognitivas entre as mesmas conforme disposto na Figura 2.

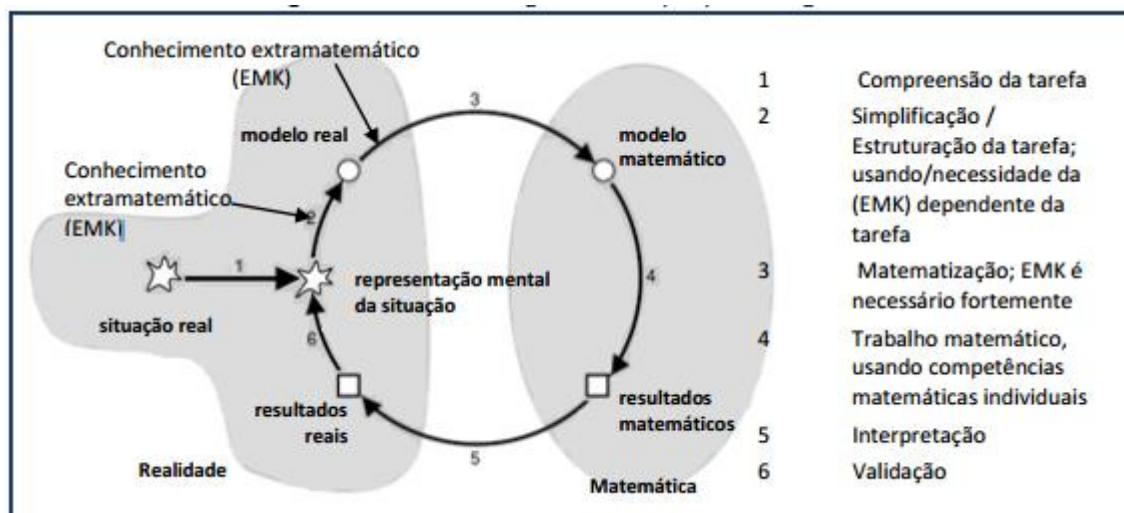


Figura 2: Ciclo de uma atividade de modelagem matemática.

Fonte: FERRI, 2006, p. 92, tradução nossa.

Silva, Almeida e Gerônimo (2011) e Almeida, Silva e Vertuan (2012) descrevem que ao trabalhar com atividades de modelagem em sala de aula o professor pode “ensinar o aluno a trabalhar com modelagem” familiarizando o mesmo com atividades de MM. Esses autores categorizam três momentos diferentes de trabalho em sala com atividades deste tipo, valorizando a autonomia dos alunos. No primeiro momento de familiarização o professor já apresenta uma situação-problema com dados necessários e um problema matemático já definido, segundo Silva, Almeida e Gerônimo (2011, p. 30-31), “o próprio professor apresenta essas informações e os alunos realizam a investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, assessorados pelo professor”. É incentivado o trabalho em grupo com os alunos e cabe a eles perpassarem pelas fases da modelagem matemática de forma autônoma do professor, em que este os auxilia em suas dúvidas. Para atividades desse primeiro momento, ainda que os grupos trabalhem separadamente, geralmente as resoluções acabam sendo as mesmas.

O segundo momento de familiarização com atividades de modelagem já traz uma maior independência dos alunos em relação ao professor. Nesta etapa, são apresentados uma situação e alguns dados, porém cabe ao aluno determinar um problema, as hipóteses que serão consideradas, se necessário coletar mais dados e definir as variáveis. Para Silva, Almeida e Gerônimo (2011, p. 33) “O que muda, essencialmente, do primeiro momento para o segundo é a independência dos alunos

no que se refere ao uso ou obtenção de dados, bem como à definição de procedimentos extra matemáticos e matemáticos adequados”.

Assim, ao trabalharem com atividades desses dois momentos, os alunos podem ir desenvolvendo confiança em formular modelos, definindo aquilo que é necessário para sua situação-problema e verificando que é possível diferentes modelos responderem a uma situação inicial e a partir de então, trabalhar com atividades de modelagem matemática caracterizadas como de terceiro momento de familiarização. “O professor neste [terceiro] momento já pode atuar como alguém que orienta, que sugere ponderações, ou simplesmente aquele que atende quando é solicitado” (SILVA; ALMEIDA; GERÔLOMO, 2011, p. 35) e cabe ao aluno desenvolver desde a escolha de uma situação-problema, definição dos dados, variáveis e hipóteses até a resolução da situação respondendo seu problema inicial.

Desse modo podemos sintetizar estes momentos de familiarização conforme Tabela 1.

Tabela 1: Papel do professor e do aluno e os momentos de familiarização em atividades de modelagem

As atividades de Modelagem Matemática inseridas de forma gradativa nas aulas:			
	<i>1º Momento</i>	<i>2º Momento</i>	<i>3º Momento</i>
Papel do professor	<ul style="list-style-type: none"> • Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as possíveis variáveis. <p>Professor dá suporte no papel do aluno, confirmando aquilo que eles fazem e questionando para estimulá-lo a chegar a situação final.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Propõe situação-problema; • Traz alguns dados pertinentes à situação proposta. <p>Professor passa ao papel de auxiliar e procura ajudar os alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades dando uma maior autonomia do que nas atividades de primeiro momento.</p>	<p>Professor dá maior autonomia aos alunos desenvolvendo o papel de orientador para as atividades em desenvolvimento. O docente pode ou não indicar uma temática para a turma ou ainda deixar que os discentes, em grupos, escolham alguma temática que desejam explorar.</p>
Papel do aluno	<ul style="list-style-type: none"> • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. <p>O aluno amparado pelo professor faz a matematização da</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Estabelece um problema; • Identifica as variáveis. • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. <p>Nesse momento os alunos já</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Propõe situação-problema; • Apresenta o problema; • Apresenta as variáveis; • Formula as hipóteses; • Deduz o modelo para a situação; • Valida o modelo; • Responde o problema. <p>Nesse momento os alunos já trabalharam com atividades caracterizadas como de</p>

	situação-problema, válida e responde a atividade.	trabalharam com atividade de modelagem antes e já tem certa segurança e desenvolvem alguma autonomia do professor para tentarem resolver o problema.	momentos anteriores, tem autonomia na resolução e veem no professor um orientador no processo de criação e desenvolvimento de atividades de MM.
--	---	--	---

Fonte: Os autores.

Silva, Almeida e Gerônimo (2011, p.35) ressaltam ainda que “as nossas práticas escolares enquanto professores podem nos requerer nesse momento também a busca de consensos em relação à definição de temas, de procedimentos e ao uso de conceitos matemáticos”, porém cabe ao estudante a tomada de decisões.

Kaiser e Sriraman (2006), embasados em pesquisas de âmbito nacional e internacional, reforçam a ideia de que não há uma única definição à Modelagem, tão pouco definições “corretas”. Eles apresentam cinco perspectivas “globais” de classificação a partir do objetivo da MM que se busca:

Modelagem realista ou aplicada: com objetivos pragmáticos-utilitaristas, isto é: resolver problemas do mundo real, a compreensão do mundo real, promoção e modelagem de competências;

Modelagem contextual: possui objetivos psicológicos relacionados ao assunto, ou seja, resolvendo problemas do contexto do aluno.

Modelagem Educacional: dividida em:

a) **Modelagem didática:** com objetivos pedagógicos relacionados à estruturação e aprendizagem de processos;

b) **Modelagem conceitual:** com objetivos pedagógicos relacionados à introdução e desenvolvimentos de conceitos.

Modelagem sócio-crítica: possui objetivos pedagógicos como compreensão crítica do mundo que nos rodeia;

Modelagem teórica ou epistemológica: com objetivos de teoria-orientada, ou seja, a promoção e desenvolvimento da teoria.

(KAISER; SRIRAMAN, 2006, p.304, tradução nossa).

A partir dessas classificações vemos que não há uma única maneira de desenvolver Modelagem Matemática, mas sim diversas propostas e aplicações que dependem do fim que se busca. Com isso, os pesquisadores podem explorar os mais diferentes usos desta tendência no ensino, visando otimizar o trabalho em sala de aula com alunos e professores, melhorando as atividades, analisando a reação dos alunos e propondo diretrizes que potencializem o trabalho do docente dentro e fora de sala, e dentro e fora da abordagem Matemática.

Desse modo, o professor pode analisar, a partir de seus objetivos, de que maneira pretende utilizar as atividades de modelagem com seus alunos a partir das necessidades do mesmo para os processos de ensino e aprendizagem. Ainda que

com diferentes abordagens, a MM em todos os casos segue a premissa de trazer para sala de aula situações com dados baseados na realidade.

Logo, podemos entender a Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem para o professor nos processos de ensino e de aprendizagem, que visa ensinar matemática a partir da solução de problemas por meio de modelos matemáticos.

1.2 O ENSINO DE TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O estudo de funções trigonométricas é considerado importante e é um dos conteúdos básicos do conteúdo estruturante de funções no currículo de Matemática do Ensino Médio, que requer a realização de um trabalho que conecte esse tema a outros conteúdos. De forma geral, investe-se muito tempo no cálculo algébrico das identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes que envolvem as funções trigonométricas e a análise de seus respectivos gráficos. O ensino da trigonometria não é tarefa fácil, ainda mais no ambiente escolar baseado no uso de quadro e giz, o que dificulta relacionar as múltiplas representações, podendo gerar uma visão fragmentada dos conceitos trigonométricos. Nas palavras de Gravina e Santarosa,

O mundo físico é rico em objetos concretos para o início da aprendizagem em Matemática, no geral de caráter espontâneo. Mas se o objetivo é a construção de conceitos mais complexos, e abstratos, estes não têm suporte materializado, entrando em jogo a 'concretização mental', que nem sempre é simples, mesmo para o matemático profissional. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.8).

As orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 1999) colocam um papel formativo no ensino da Matemática, que não se restringe a repetição de procedimentos, mas que leve o aluno a pensar e resolver problemas. Além disso, a sociedade atual exige que a Matemática proporcione a aplicação do seu conhecimento nas atividades cotidianas. Os conceitos apresentam diversas representações equivalentes, que precisam ser reconhecidas, relacionadas e aplicadas em situações oportunas.

No que diz respeito ao que deve ser ensinado os PCNEM propõem que:

É preciso atenção à transição do seno e do co-seno no triângulo retângulo (em que a medida do ângulo é dada em graus), para o seno e o cosseno, definidos como as coordenadas de um ponto que percorre um arco do

círculo de raio unitário com medida em radianos. As funções trigonométricas devem ser entendidas como extensões das razões trigonométricas então definidas para ângulos com medida entre 0° e 180° . Os alunos devem ter a oportunidade de traçar gráficos referentes às funções trigonométricas, aqui se entendendo que, quando se escreve $f(x) = \text{seno}(x)$, usualmente a variável x corresponde à medida de arco de círculo tomada em radianos. As funções trigonométricas seno e co-seno também devem ser associadas aos fenômenos que apresentam comportamento periódico. (BRASIL, 2006, p.74).

É necessária uma mudança no ensino estanque e isolado da matemática, sendo assim, o ensino de trigonometria deve estar relacionado às aplicações, à análise das funções trigonométricas seno, cosseno, tangente e seus gráficos, evitando-se o uso excessivo de cálculos algébricos. Devemos considerar que muitos alunos não seguirão carreira acadêmica na área de exatas, logo, em consonância com os PCNEM, precisamos garantir a esses alunos a aprendizagem do conteúdo de trigonometria para que eles possam resolver problemas que envolvam medições, cálculo de distâncias inacessíveis e construção de modelos relativos a fenômenos periódicos. Tais estudos, independentemente do caminho seguido após o Ensino Médio, serão úteis em seu dia-a-dia.

No ensino da matemática deve ser incentivado o uso e elaboração de modelos e das várias formas de representação do objeto matemático para analisar situações reais, assim como indicado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio de Matemática. Ou seja, segundo Bassanezi (2002) a matemática é desenvolvida mais facilmente quando é motivada por interesses e estímulos externos, vindos do real e do cotidiano dos alunos.

Consideramos que a abordagem de conteúdos matemáticos para o Ensino Médio está em caráter de aprimoramento e constituirá a Base Nacional Comum Curricular.

1.2.1 O USO DO COMPUTADOR E O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para aprimorar o ensino da trigonometria, são necessárias novas abordagens, segundo Silva e Frota (2010) usar recursos tecnológicos tem se mostrado uma das possíveis abordagens. Além disso, Bezerra (2010) afirma que a matemática é uma ciência viva e isso possibilita a construção de seu conhecimento, sendo assim, a

utilização de tecnologias computacionais torna-se uma possibilidade de mediação e interação entre os alunos, com os professores e o conteúdo a ser abordado. Outros autores também simpatizam com essas ideias, como Pietrobon, Costa e Souza (2010), Franchi (2007) e Della Nina (2007), que comentam sobre a possibilidade, no uso do computador, do aluno se concentrar nas relações específicas presentes no objeto matemático enquanto o computador se encarrega da construção do objeto, além de proporcionar a realização de vários experimentos em pouco tempo.

A internet possui um papel fundamental de aproximação geográfica que pode inteirar os alunos com objetos distantes. Porém, o uso do computador em sala de aula não exclui outras metodologias de ensino e recursos pedagógicos e pode inclusive potencializar o ensino quando unida a outros ambientes de aprendizagem.

Um dos *softwares* importantes para se explorar gráficos são os de Geometria Dinâmica, que são classificados como *softwares* educativos, que trazem tutoriais de construção, possibilidade de exercícios e prática, jogos educacionais entre outros. Esses *softwares* possuem objetivo de favorecer os processos de ensino e aprendizagem. Além desses, existem os *softwares* educacionais de simulação que de acordo com Valente (1999, p.11) “utilizam a pedagogia da exploração autodirigida e permite ao aluno a possibilidade de criar hipóteses e testá-las”.

Dentre os *softwares* dinâmicos que podem facilitar o desenvolvimento de um trabalho integrado entre as várias formas representativas dos modelos trigonométricos, temos o *Cabri Géomètre*, *Geogebra*, *Thales*, *Descartes*, *Régua e Compasso*, *Geometricks*, *Lemat*, entre outros. Os *softwares* *Régua e Compasso* e o *Geogebra* são *softwares* matemáticos bastante utilizados, pois combinam conceitos de Geometria e Álgebra. Tratam-se, também, de programas gratuitos que estão disponíveis na web por meio dos endereços eletrônicos: <<https://www.geogebra.org/download>> e <<http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/>>. Todos podem ser instalados em computadores pessoais e utilizados por alunos e professores.

Caso haja dificuldades na instalação de *softwares*, ainda há a possibilidade da utilização dos *applet* que se configuram como pequenos aplicativos dinâmicos, escritos em linguagem Java que são disponibilizados prontos. Os *applets* são úteis na matemática, pois permitem investigar, levantar hipóteses, testar conjecturas e auxiliar na construção de conhecimentos (BARCELOS *et al*, 2009). Eles podem ser

executados em qualquer computador com *Windows* e *Linux*, sendo este último o sistema operacional mais disponibilizado nos computadores comprados pelos governos Estaduais. Os *applets* favorecem a materialização e visualização de conhecimentos e falas abstratas expostas durante as aulas.

Alguns autores como Barcelos *et al* (2009) e Santos (2008) afirmam que os *applets* permitem investigações e experimentações através dessa ferramenta tecnológica, o que possibilita a visualização de padrões, verificação de propriedade, estabelecimento de conjecturas e a construção de conceitos de forma ampla e consistente. Os *applets* também são chamados de *mathets* por alguns autores.

Nos *applets* produzidos por *softwares* de Geometria Dinâmica, como o *Geogebra*, os professores e alunos não precisam ter conhecimentos de programação para utilizá-los, além de possibilitar a articulação entre os aspectos algébricos, geométricos e gráficos dos conceitos trigonométricos. Também são oferecidos por estes *softwares interface* simples, permitindo exploração e manipulação rápida dos objetos; menu de ajuda; medição de ângulos, distâncias; construção de retas paralelas, perpendiculares, dentre outras possibilidades.

Dado a importância do uso da tecnologia, também é preciso considerar que elas em si não garantem a aprendizagem e nem a melhoria da qualidade do ensino. Como diz Fiorentini e Miorim (1990) é necessária uma profunda reflexão a respeito do que se quer atingir com o uso de cada um deles antes de utilizá-los, a fim de se aproveitar suas potencialidades e obter resultados positivos de sua aplicação.

O uso do computador se constitui como um recurso que pode ser integrado ao projeto pedagógico das escolas como auxiliar na mediação do processo educativo, utilizado pelos professores. Mas de forma alguma dispensa a figura do professor (OLIVEIRA; COSTA; MOREIRA, 2001).

1.3 MODELAGEM MATEMÁTICA E TRIGONOMETRIA: TRABALHOS DESENVOLVIDOS

A respeito dos temas Modelagem Matemática e trigonometria vemos na literatura, que algumas pesquisas já têm sido desenvolvidas com essas temáticas e buscamos juntos com estas pesquisas fomentar a discussão a respeito desses tópicos e estimular que mais estudos sejam feitos com o objetivo de obter materiais

que possam subsidiar os trabalhos de professores em sala de aula, otimizando os processos de ensino e de aprendizagem.

Sendo assim, apresentamos alguns desses trabalhos encontrados e um resumo dos mesmos.

Intitulado “Trigonometria, modelagem e tecnologias: um estudo sobre uma sequência didática”, Silva (2011) trabalha com o ensino de trigonometria por meio de sequências didáticas e atividades de modelagem aliadas ao uso de tecnologia, em especial por meio de *applets* desenvolvidos no *Geogebra*. Tem como metodologia a Engenharia Didática.

A pesquisa de Oliveira (2013) cujo título é “A trigonometria na Educação Básica com foco na sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas” em que a autora se propõe fazer um levantamento histórico do desenvolvimento da trigonometria, suas relações com a astronomia e algumas aplicações na atualidade. Faz também uma revisão nos livros didáticos a respeito deste tema e propõe algumas atividades por meio de uma sequência didática, que envolvem modelagem matemática, resolução de problemas, o uso de tecnologias e alguns recortes da história da matemática.

Selecionamos outro trabalho que tem como título “Contribuições da Modelagem Matemática para o Ensino Médio: ângulo de visão das cores do arco-íris” que está presente nos anais do III EPMEM. Os autores, Bisognin, Pereira, Marques e Marques (2008), apresentam um relato de experiência em uma disciplina do mestrado profissionalizante em que trabalharam com uma atividade no ambiente de modelagem matemática utilizando-se de tecnologias para trabalhar conceitos, dentre outros, de trigonometria, que estão relacionados a formação das cores do arco-íris.

Outro artigo que destacamos aqui tem como título “Explorando modelos matemáticos trigonométricos a partir de *applets*” de Silva e Frota (2012) que traz resultados de suas pesquisas trabalhando com sequências didáticas, modelagem matemática e tecnologias (*applets* no *Geogebra*) que estão subsidiadas pela Engenharia Didática.

Linck (2010) desenvolveu o trabalho “Música e Matemática: experiências didáticas em dois diferentes contextos” que busca por meio de modelos matemáticos e uso de tecnologia ensinar funções trigonométricas a partir do estudo de ondas na música.

Desse modo, buscamos apresentar alguns trabalhos que versam a respeito de MM e trigonometria com o objetivo de ressaltar que há pesquisas sendo desenvolvidas relacionando esses temas e que ainda se faz necessário continuar estudos que versam a respeito deles, pois em todos os trabalhos aqui apresentados as considerações e conclusões feitas são em geral que a Modelagem Matemática e o uso de Tecnologias otimizam os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Borssoi (2013) trabalhou em sua pesquisa “Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: articulações em diferentes Contextos Educacionais” investigando de que maneiras são utilizados os recursos tecnológicos em ambientes de atividades de modelagem matemática seguindo os pressupostos presentes na teoria da aprendizagem significativa a partir de três diferentes Contextos Educacionais. Há também o artigo “Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com atividades de Modelagem Matemática” que trata de resultados parciais de pesquisa a respeito de atividades de modelagem em que são utilizadas tecnologias, analisando a partir de pressupostos da teoria da Aprendizagem Significativa analisados por Borssoi e Almeida (2015).

2 ENCAMINHAMENTOS DA NOSSA PROPOSTA

Neste capítulo será apresentada a concepção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem proposto por Martin Simon (1995) que descreve o ciclo de ensino e aprendizagem da Matemática. Em seguida, apresentamos alguns trabalhos que tratam de THA na Educação Matemática. Será por meio dessa teoria que daremos encaminhamento para as atividades propostas.

2.1 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Durante o planejamento das aulas, cabe ao professor avaliar constantemente o quanto seus estudantes já aprenderam ou ainda que bases esses têm para poder se aprofundar a respeito de determinado conteúdo e, a partir disso, traçar estratégias para que alcancem aquilo que o docente espera. Sob essa ótica, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem se apresenta como um instrumento pedagógico que auxilia o professor a alcançar esses objetivos.

Ao desenvolver suas pesquisas em ensino de Matemática, Martin Simon (1995) analisa, a partir de tarefas matemáticas, como é feito o ensino dos conteúdos matemáticos e como o professor os conduz em sala de aula. Para propor o que Simon (1995) chama de Ciclo de Ensino de Matemática e Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, ele se baseia em uma perspectiva de ensino construtivista e discute a importância de uma pedagogia da Matemática.

Esse mesmo autor ao falar da discussão de ensino construtivista no meio acadêmico da EM, coloca que diferentes pesquisas moldam a ideia de construtivismo a partir de seus objetivos.

De expressões como “Construtivismo Radical” e “Construtivismo Social” derivam algumas orientações, caracterizando a existência de uma diversidade de perspectivas epistemológicas semelhantes dentro dessas categorias. Consequentemente, parece importante uma descrição aprofundada da perspectiva construtivista na qual nossa pesquisa está baseada (SIMON, 1995, p. 4).

Simon (1995) caracteriza o construtivismo dizendo que o sujeito constrói seus conhecimentos de mundo a partir de suas experiências e vivências, buscando

a partir daquilo que já sabe, galgar ideias mais profundas e complexas. “O ensino é um processo pelo qual adapta suas experiências de mundo (SIMON, 1995, p.5)”.

Nosso interesse está no trabalho (adaptação com a nossa experiência de mundo). Para esclarecer essa concepção de trabalho precisamos fazer uma extensão: construir nosso senso de percepção ou dados, construir um prognóstico adequado para resolver um problema ou para realizar uma meta (SIMON, 1995, p. 4).

Ao tratar da Pedagogia da Matemática, Simon (1995) questiona como o construtivismo pode contribuir com a mesma, fomentando que comumente usamos o termo “ensino construtivista” enquanto essa teoria não traz uma solução para resolver os problemas nos processos de ensino e de aprendizagem e nem como aplicar esse tipo de ensino.

É preciso ter cuidado, segundo Simon (1995), ao tratar como teoria epistemológica o construtivismo, haja vista que ele não descreve parâmetros práticos de ensino, mas discorre a respeito do desenvolvimento do conhecimento, que pode se manifestar tanto na prática pedagógica, no professor ou ainda no aluno. Não há uma fórmula que possa sintetizar totalmente de forma basilar os processos de ensino e aprendizagem. Sendo assim, pode-se dizer que epistemologicamente o construtivismo não dita a utilização e a não utilização de diferentes estratégias de ensino.

Simon (1995) vê a Matemática desenvolvida a partir de interações cognitivas sócio-culturais por comunidades críticas. Desse modo, Simon (1995), *apud* Pires (2009) trata o processo de aprendizagem como “um processo de construção individual e social mediados por professores com a concepção de um trabalho estruturado na qual se entende a aprendizagem dos alunos” (Simon, 1995, p.7).

O termo “Trajetória Hipotética de Aprendizagem” fora introduzido pela primeira vez por Simon (1995) com o objetivo de auxiliar no trabalho em sala de aula e considerar todas as experiências e conhecimentos dos professores. Nas palavras do autor

Eu uso o termo “trajetória hipotética de aprendizagem” para me referir a previsão do professor como um caminho pelo qual a aprendizagem pode ocorrer. É hipotético porque a trajetória real de aprendizagem não é conhecida previamente. Ela caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. É assumido que uma aprendizagem individual tem alguma regularidade, que a sala de aula limita a atividade matemática frequentemente de formas previsíveis, e que muitos

estudantes na mesma sala podem se beneficiar da mesma tarefa matemática³ (SIMON, 1995, p. 135, tradução nossa).

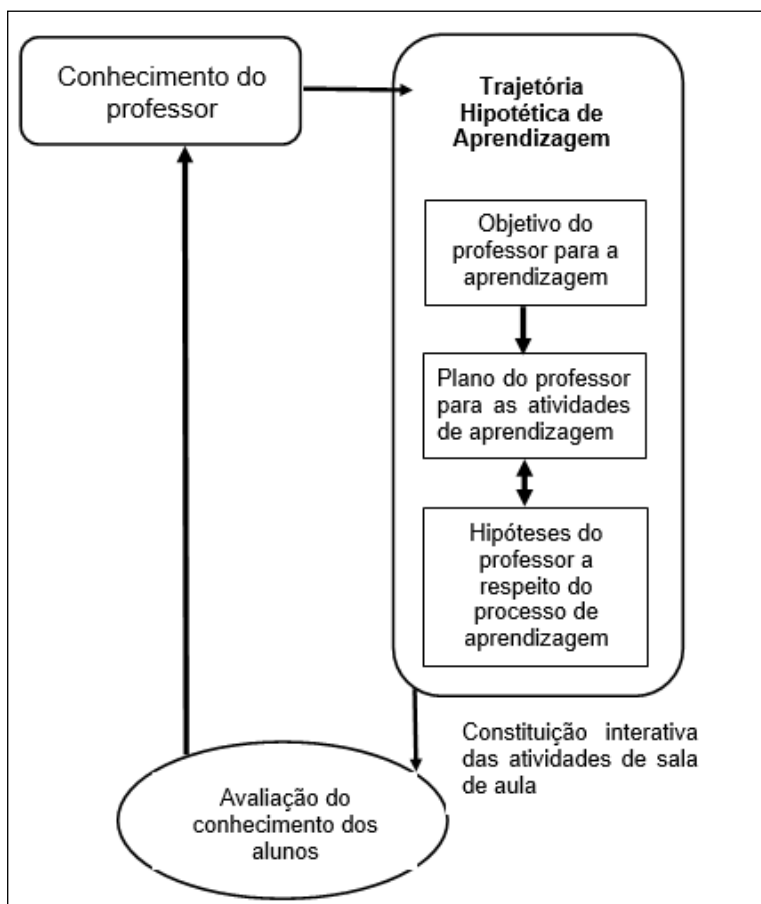
Ainda de acordo com Simon (1995), o professor a partir de suas experiências pedagógicas e conteudistas, pode bem escolher de que maneira a aprendizagem dos alunos poderá melhor ocorrer, analisando racionalmente aquilo que irá propor.

Assim, (1) o professor define o objetivo de aprendizagem de seus alunos de forma clara e concisa, (2) constrói as tarefas para o ensino e (3) desenvolve de forma hipotética como serão resolvidas essas atividades, tentando supor de que maneiras os alunos irão pensar possíveis dúvidas e diferentes maneiras de resolução da mesma situação-problema. Para Pires (2009), essa tríade é basilar no desenvolvimento de THA e é fundamental para o que Simon (1995) denomina como Ciclo de Ensino de Matemática que inter-relaciona os conhecimentos do professor, o pensamento dos alunos e a interação entre estes.

Nesse trabalho iremos propor atividades de Modelagem Matemática por meio da THA em que a tríade da trajetória hipotética perpassa pelas fases da modelagem, sendo propostos inicialmente os objetivos esperados pelo professor com aquela atividade, de acordo com (1); em seguida, a construção e apresentação do problema proposto pelo professor, as possíveis dúvidas e as possíveis soluções dadas pelo professor conforme (2) e (3).

Além disso, o Ciclo de Ensino de Matemática (Quadro 1), envolve ainda os conhecimentos do professor e a avaliação do conhecimento dos alunos. Este primeiro, no nosso trabalho será considerado o conhecimento específico dos autores; mas para outros professores que possam vir a desenvolver essas THA, é possível modificar e aperfeiçoar as atividades de acordo com os conhecimentos daquele que desenvolve essas trajetórias. E no caso da avaliação dos conhecimentos dos alunos, não apresentaremos aqui uma avaliação nossa, cabendo ao professor que as utilizar desenvolver esta etapa do ciclo.

³ "I use the term "hypothetical learning trajectory" to refer to the teacher's prediction as to the path by which learning might proceed. It is hypothetical because the actual learning trajectory is not knowable in advance. It characterizes an expected tendency. Individual students' learning proceeds along idiosyncratic, although often similar, paths. This assumes that an individual's learning has some regularity to it, that the classroom community constrains mathematical activity often in predictable ways, and that many of the students in the same class can benefit from the same mathematical task".



Quadro 1: Ciclo de Ensino de Matemática (abreviado)

Fonte: Simon, 1995, p. 136.

Simon (1995) faz alusão da THA a uma viagem, em que você recolhe informações a respeito dos lugares que pretende conhecer e formula um plano para essa viagem, de maneira que busque esgotar suas dúvidas a respeito de cada lugar que desejará passar. Porém, no decorrer podem acontecer alguns fatores que influenciem nesse planejamento. Sendo assim, segundo Simon (1995), o caminho pelo qual você viaja é a sua trajetória e o caminho que você havia planejado é a sua trajetória hipotética.

A compreensão matemática do professor e suas hipóteses a respeito do conhecimento dos alunos é uma das características da THA. O educador não consegue acessar diretamente o conhecimento dos seus alunos, assim como reforça Simon (1995), que não é possível que os professores conheçam o entendimento real dos estudantes. Então, o professor consegue comparar seus entendimentos a respeito de um determinado conceito com base em sua constituição hipotética de como os alunos irão aprender, mas não sabe por quais fins os alunos o alcançarão realmente.

Contudo no que diz respeito aos saberes do docente de Matemática, tudo pode contribuir e expandir a THA proposta. Conhecimento de diferentes teorias de aprendizagem, encaminhamentos metodológicos, representações da matemática, materiais didáticos e prática de ensino fortalecem o trabalho do professor à medida que define os objetivos de sua trajetória hipotética, extrapolando as possíveis dúvidas e diferentes rumos que determinado conteúdo pode tomar. Então, por meio da interação professor e aluno, esses objetivos podem ser alterados de forma contínua no desenvolvimento do trabalho em sala, sendo aprimorado ou refinado. O aluno tem papel primordial, por meio de suas impressões, de possibilitar ao professor os possíveis desvios que lhes proporcione uma “melhor viagem”.

Simon (1995) discorre que a Trajetória Hipotética de Aprendizagem não necessariamente vai considerar alcançar um único objetivo por vez, ou ainda uma única trajetória. É de suma importância a definição de objetivo e de um caminho, porém, o que importa são as análises que o professor faz no decorrer da atividade e suas decisões quanto a elas. Desse modo,

[...] o desenvolvimento de um processo de trajetória hipotética de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem têm um relacionamento simbiótico; a geração de ideias para atividades de aprendizagem é dependente das hipóteses do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem dos estudantes, além disso, a geração de hipóteses do desenvolvimento conceitual do estudante depende da natureza de atividades antecipadas (SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa).

Assim, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem pode ser entendida também como um recurso para o professor nos processos de ensino e de aprendizagem, que visa ensinar matemática estabelecendo objetivos, em seguida, utilizando toda sua identidade profissional para traçar hipóteses para atingir esses objetivos, interagindo com os alunos e formatando a trajetória no desenvolver das atividades pelos discentes.

Neste trabalho utilizaremos as THA para subsidiar as propostas de atividades que podem ser desenvolvidas no ambiente de aprendizagem da modelagem. Serão apresentadas três diferentes atividades a serem trabalhadas por meio da Modelagem Matemática, porém cada uma está inserida em um momento de familiarização de acordo com as características e objetivos apresentados para cada uma delas e autonomia do aluno. Para cada proposta apresentamos uma THA cujos enfoques são explorados de forma distinta, o que para nós é intrínseco aos diferentes momentos de familiarização.

2.2 RELAÇÃO DE ALGUNS TRABALHOS QUE TRATAM DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Assim como apresentamos anteriormente trabalhos que tratam de modelagem e trigonometria, neste tópico apresentaremos alguns trabalhos pesquisados, que agora tratam do tema THA, além apresentar de forma sucinta um resumo dos mesmos.

Barbosa (2009) versa a respeito de “Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem relacionada à razões e às Funções Trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista” em que disserta a respeito do uso de THA no ensino de razões e funções trigonométricas na perspectiva de ensino construtivista. São propostas atividades, THA para essas atividades e também há uma fase de aplicação dessas com os alunos do Ensino Médio.

Oliveira (2015) escreve a respeito de “Uma trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Logaritmos na Perspectiva da Resolução de Problemas” que trata de propor atividades com enfoque na Resolução de Problemas subsidiadas pela THA proposta por Simon (1995), cujo objetivo é ensinar a respeito de logaritmos e suas propriedades. A pesquisa busca analisar as possíveis contribuições das trajetórias hipotéticas no ensino de matemática.

Por fim, apresentamos um terceiro trabalho desenvolvido por Silva e Ferreira (2016) que tratam de Modelagem Matemática e Trajetória Hipotética de Aprendizagem cujo trabalho “É possível hipotetizar uma aula com modelagem matemática?” foi apresentado no formato de minicurso no XII Encontro Nacional de Educação Matemática. As autoras argumentam as potencialidades do uso das THA para o professor que deseja preparar aulas pautadas na MM.

3 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA PROPOSTAS

Neste capítulo são apresentadas três atividades distinguidas pelos momentos de familiarização da Modelagem Matemática, na perspectiva da MM educacional didática, de acordo com Kaiser e Sriraman (2006). Para a primeira atividade é apresentada uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem e para as outras duas atividades são apresentadas apenas indicações de como poderiam ser desenvolvidas as THA, na perspectiva de Simon (1995), não sendo caracterizadas propriamente como Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

3.1 AS MARÉS DE PARANAGUÁ

O problema a seguir, denominado como “As marés de Paranaguá”, é baseado no contexto semelhante ao proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.54) conhecido como “A matemática do vai e vem das marés”. Nesse caso, a escolha pelas praias de Paranaguá se deve por se situar no mesmo estado em que moram os autores da atividade. A situação, além de descrever a respeito de como o movimento periódico das águas dos oceanos e rios, entre outros, são influenciadas pelo Sol, Lua e pela própria Terra, relaciona este a uma aplicação de conceitos trigonométricos, tais como função seno e função cosseno.

A proposta, indicada para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, é por meio da leitura do texto, iniciar a atividade considerada como de modelagem matemática, avaliada como de primeiro momento de familiarização, pelas características que apresenta.

Desse modo, para essa THA são apresentados os seguintes objetivos que o professor possa ter para com as aprendizagens dos alunos a partir dessa trajetória:

- Reconhecer o uso de funções trigonométricas para a referida situação-problema;

- Aplicar a definição de função do tipo seno ou função do tipo cosseno a partir da situação proposta;
- Introduzir a definição de cada parâmetro e suas influências em funções do tipo seno ou cosseno;
- Relacionar a interpretação algébrica com a interpretação geométrica;
- Interpretar os resultados obtidos, ou seja, o que eles representam.

Pensamos que não só por meio de funções trigonométricas os discentes poderão apresentar um modelo matemático, mas considerando esta atividade como uma aplicação de conteúdo, espera-se que os estudantes priorizem o uso dos conceitos trigonométricos. Contudo, caso sejam apresentadas outras soluções, cabe ao professor a retomada dos conceitos de funções trigonométricas, em especial de funções do tipo seno e/ou cosseno, (elucidaremos na THA logo abaixo).

Nesta Trajetória Hipotética de Aprendizagem traçamos uma divisão linear das fases de uma atividade de modelagem conforme propõem Almeida, Silva e Vertuan (2012), em que são articuladas as hipóteses feitas pelo professor a respeito do processo de aprendizagem do aluno e as possíveis dúvidas que esses possam vir a apresentar no transcorrer da resolução, ou seja, no desenvolvimento das fases de modelagem, serão apresentados o plano do professor para a aprendizagem e as hipóteses do professor, de acordo com aquilo que é proposto por Simon (1995) no ciclo de Ensino Matemático.

Ao iniciar o trabalho com esta THA, propomos uma contextualização da situação-problema, dialogando a respeito do uso consciente das praias, respeitando os horários que não são recomendados entrarem nas águas e a influência das condições climáticas também nas pescas e como isso afeta o comércio de regiões litorâneas. Depois dessa introdução, pode-se apresentar então o problema do Quadro 2:

As marés de Paranaguá

As marés ocorrem tanto nos oceanos quanto em rios e lagos, e podem ser definidas como oscilações que se repetem em determinado tempo, ou seja, movimentos periódicos que ocorrem devido à força gravitacional de atração que o sol e a lua exercem sob as partículas líquidas das águas doce e salgada. O ciclo das marés é de aproximadamente 24 horas e nesse tempo há duas marés altas e duas marés baixas. O resultado dessas forças atrai mais as águas porque elas estão mais

“próximas” desses astros do que as partículas sólidas do nosso planeta, que compõem nossa crosta terrestre e, por isso, nas regiões que estão mais próximas desses corpos celestes há um acúmulo maior de água, que são também chamadas de marés altas. Nos lugares que não estão mais próximos do sol e da lua o nível das águas tende a ficar mais baixo que a média, causando o fenômeno que conhecemos como maré baixa e pelas leis da física, nos pontos onde há marés altas e baixas por inércia, os pontos opostos a estes no globo terrestre tendem a seguir os mesmos comportamentos de marés altas e baixas respectivamente.

Foram feitas as previsões dos horários de maré alta e baixa para o dia 28 de julho de 2016 nas praias de Paranaguá, Paraná, conforme mostra o quadro 3.

Quadro 2: Descrição de horário e altura das marés do dia 28/07/2016 em Paranaguá.

Dia	Horário	Altura (m)
28/07/2016	03:45	0,4
	10:30	1,1
	16:25	0,4
	22:30	1,1

Fonte: Clima Tempo – Disponível em: < <http://www.climatempo.com.br/tabua-de-mares>>. Acesso em 15 jul. 2016.

Existe um modelo matemático que possa descrever a altura das marés nas praias de Paranaguá, PR, Brasil, no dia 28 de julho de 2016? Se sim, qual seria esse modelo?

Hipóteses:

Variáveis:

Dedução do modelo matemático:

Solução:

Quadro 3: Primeira proposta de situação-problema para os alunos.
Fonte: os autores.

Em seguida, descrevemos um possível encaminhamento para a atividade e possíveis dúvidas que estudantes possam manifestar, a partir das cinco fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

1. Inteiração

Para a leitura da situação-problema pode-se fazer uma primeira leitura individual e na sequência uma coletiva e, em seguida, o docente questiona os alunos para saber o que entenderam do problema. Em caso de dúvidas a respeito do significado de alguma palavra, esta pode ser sanada consultando um dicionário para melhor entendimento.

Quanto à dinâmica de sala de aula, o professor pode pedir para que resolvam por meio de pequenos grupos, em que o professor acompanhará as resoluções desses passando pelas carteiras, instigando, questionando e tirando dúvidas dos alunos, para que possam refletir por quais caminhos estão optando na resolução da situação-problema e estabelecerem um modelo matemático que é o objetivo do trabalho.

Em relação ao enunciado proposto, espera-se que os alunos sejam fomentados a buscar uma solução para o problema proposto. Nesse sentido, o docente pode instigar sua turma a analisar o texto e verificar que informações são relevantes, tais como a tabela com horários e alturas, o dia observado nas praias de Paranaguá, que as marés têm movimento periódico e qual é a pergunta que devemos responder, concluindo assim, a primeira etapa do processo de modelagem conhecida como inteiração.

2. Matematização

Depois de inteirados, os alunos deverão formular suas hipóteses para poderem então, apresentar um modelo. As hipóteses a seguir são fundamentais para que os discentes estabeleçam uma resolução a partir de funções trigonométricas, como é um dos objetivos dessa THA.

Hipóteses:

- O movimento descrito pelas marés é periódico;
- Os ciclos de duas marés altas e duas baixas são, de forma simplificada, de 24 horas;
- Os dados tabelados dos horários e alturas das marés das praias de Paranaguá e no dia 28 de julho de 2016;
- O modelo poderá descrever, relacionar altura e tempo durante o período de um único dia, ou seja, 24 horas.

Dessa forma, podemos associar esses movimentos periódicos a alguma função que descreva uma ideia semelhante e assim, os alunos podem propor encontrar alguma função do tipo seno ou do tipo cosseno que possa descrever a altura das marés.

Para esta THA vamos utilizar, como uma quarta hipótese, que uma curva que pode ser associada às alturas das marés nas praias é a associada a função do tipo cosseno, porém todo o desenvolvimento pode ser feito de forma análoga a funções do tipo seno.

Possível dúvida dos professores: os estudantes podem não associar estas hipóteses a funções trigonométricas.

Possível solução: para esta dúvida há, pelo menos, duas possíveis soluções.

A primeira seria deixar que os alunos tentem estabelecer um modelo matemático sem associá-lo a funções trigonométricas (apresentaremos um modelo na etapa de resolução).

A segunda seria por meio de questionamentos e/ou direcionamentos, proporcionar aos alunos refletirem e considerarem funções trigonométricas como uma ferramenta para a resolução do problema.

Possível dúvida dos alunos: que informações têm relevância na minha hipótese?

Possível solução: o professor pode, por meio de questionamentos e indicações, levar seus alunos a refletirem que como a situação-problema refere-se a um modelo que relaciona altura e horário, os dados tabelados são informações importantes a serem consideradas e, além disso, levar os alunos a pensarem que o modo como as marés se movimentam pode influenciar no modelo proposto.

As variáveis utilizadas nesta situação são:

- Variável dependente: “a” - altura, dada em metros;
- Variável independente: “t” - tempo, dado em horas.

Como serão relacionadas as duas variáveis, para simplificar as interpretações no caso de metros ou horas não inteiras, o valor será dado como número decimal, conforme quadro abaixo.

Quadro 2: Descrição de horário e altura das marés por meio de números decimais.

Dia	Horário (h)	Altura (m)
28/07/2016	3,75	0,4
	10,5	1,1
	16,42	0,4
	22,5	1,1

Possível dúvida dos alunos: o que são números decimais?

Possível solução: o professor pode, por meio de exemplos, retomar que números decimais são números que contém uma parte inteira e uma parte fracionária.

Possível dúvida dos alunos: as alturas já estão na forma decimal, mas como transformar horas não inteiras em valores decimais?

Possível solução: o professor pode, por meio de exemplos, mostrar que horas não inteiras podem ser convertidas em números decimais, utilizando regra de três simples e se julgar necessário, converter um dos valores junto com a turma.

Utilizando-se do *software* GeoGebra, os alunos podem, trabalhando em pequenos grupos, plotar os pontos que associam os horários das marés mais altas no dia 28/07, (10:30 ou ainda como valor decimal, 10,5 para abscissa e uma altura de 1,1 m, valor associado a ordenada do ponto; 22:30 ou ainda como valor decimal, 22,5 para abscissa e uma altura de 1,1 m, valor associado a ordenada do ponto) e das marés mais baixas nesse dia (03:45 ou ainda 3,75 para abscissa e uma altura

de 0,4 m, valor associado a ordenada do ponto; 16:25 ou ainda 16,42 para abscissa e uma altura de 0,4 m, valor associado a ordenada do ponto) conforme a seguir.

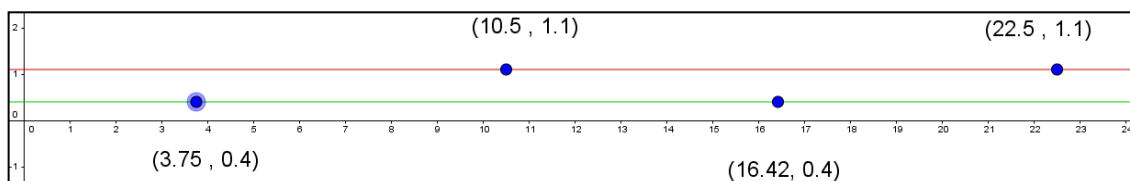


Figura 3: dados tabelados plotados no Geogebra.

Ao visualizarem os pontos plotados, é desejável que os alunos percebam que há um limitante superior e inferior, evidenciados pelas linhas vermelha e verde, respectivamente.

Acreditamos que, para que os alunos tenham maior intimidade com os conceitos trabalhados, nada melhor do que eles mesmos construam e analisem o problema geometricamente. Para isso, construiremos no GeoGebra um modelo que representa muito bem a relação existente entre as coordenadas do círculo unitário e o gráfico da função cosseno.

Possível dúvida dos alunos: lembrar parcialmente qual a definição de função seno e/ou cosseno.

Possível solução: o professor pode ir ao quadro e junto com a turma apresentar qual a definição de função seno e/ou cosseno.

Função Seno e Função Cosseno

Seja f uma função seno e g uma função cosseno temos que:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{sen } x$$

Em que sua imagem está contida no intervalo $[-1, 1]$, conforme Figura 4.

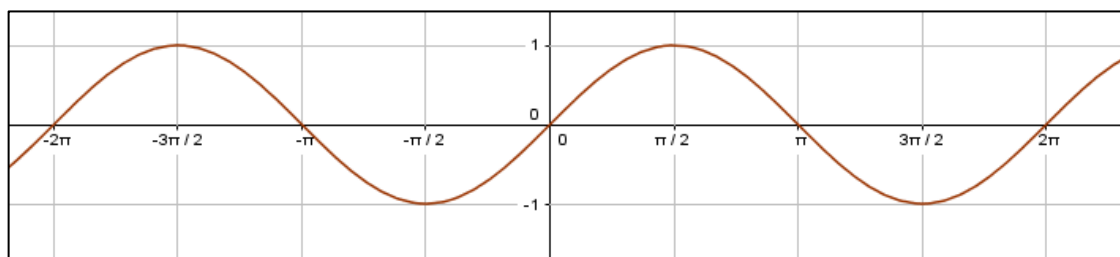


Figura 4: Função Seno

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \text{cos } x$$

Em que sua imagem está contida no intervalo $[-1, 1]$, conforme Figura 5.

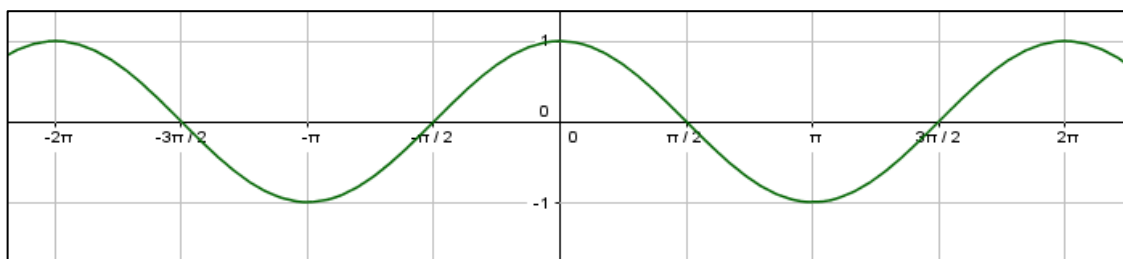


Figura 5: Função Cosseno

Cada passo descrito pode ser feito pelos próprios alunos, em pequenos grupos e em seus respectivos computadores, contando sempre com o auxílio do professor. A construção se dará da seguinte maneira:

PASSO 1 – Inicialmente, os alunos selecionam a ferramenta “*Novo Ponto*” e com o cursor do mouse, clicam em qualquer lugar da “*Janela de Visualização*” para criarem os pontos A e B . Selecionando a ferramenta “*Mover*” e clicando duas vezes sobre o ponto A , eles alteram suas coordenadas para $(0,0)$, ou seja, movem o ponto A para a origem. Devem fazer a mesma coisa com o ponto B , movendo-o para as coordenadas $(1,0)$.

PASSO 2 – Agora, selecionando a ferramenta “*Círculo Dados Centro e Um de Seus Pontos*”, eles clicam primeiro sobre o ponto A e depois sobre o ponto B . Criando assim, uma circunferência centrada na origem com raio igual a 1.

PASSO 3 – Selecionam novamente a ferramenta “*Novo Ponto*” e, agora, clicam sobre a circunferência criada, determinando o ponto C que se move somente sobre essa circunferência.

PASSO 4 – Com a ferramenta “*Segmento Definido por Dois Pontos*”, clicam primeiro sobre o ponto A e depois sobre o ponto B , criando assim, o segmento \overline{AB} . Repetindo o mesmo procedimento, criam o segmento \overline{AC} , clicando sobre A e depois sobre C .

PASSO 5 – Com a ferramenta “*Ângulo*”, clicam sobre os pontos B , A e C , nesta mesma ordem, criando o ângulo $B\hat{A}C$.

PASSO 6 – Utilizando a ferramenta “*Reta Perpendicular*”, clicam sobre o eixo y e, logo após, sobre o ponto C , determinando uma reta perpendicular ao eixo y sempre passando pelo ponto C .

PASSO 7 – Com a ferramenta “*Interseção de Dois Objetos*”, clicam sobre a reta que acabam de criar e sobre o eixo y , determinando, assim, o ponto D .

PASSO 8 – Utilizando novamente a ferramenta “*Novo Ponto*”, criam o ponto E , e mudam suas coordenadas para $(\alpha, \cos(\alpha))$.

PASSO 9 – Clicam com o botão direito do mouse sobre o ponto E , ativando o rastro do ponto clicando sobre a opção “*Habilitar Rastro*”.

PASSO 10 – Clicando com o botão direito sobre o ponto C , selecionam a opção “*Animar*”.

Neste momento, o professor pode discutir com os alunos a respeito do caminho percorrido pelo ponto E e suas similaridades com os pontos C e D . Dessa forma, podendo perceber que, na medida em que o ponto E se move, os pontos C e D acompanham seu movimento, ficando sempre na mesma “altura” (pode-se perceber isso, pois todos os pontos em questão pertencem à reta criada no PASSO 6). O professor os auxilia a tentativa de concluir que o caminho percorrido pelo ponto E descreve o gráfico da função cosseno. Caso os alunos não consigam visualizar isso, o professor plota o gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ para mostrar-lhes que o ponto E percorre o exato caminho.

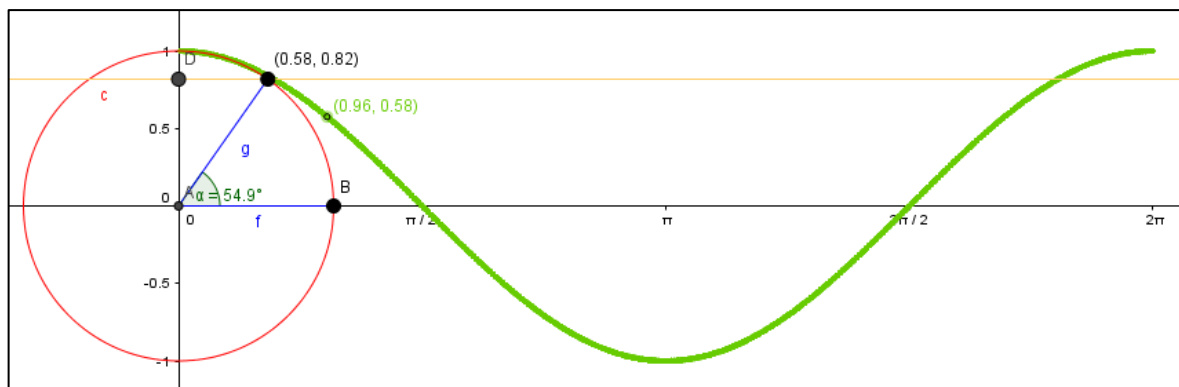


Figura 6: Círculo trigonométrico e função cosseno

3. Resolução

A partir de tudo o que foi construído anteriormente, ao modelar matematicamente por meio de uma função trigonométrica, os alunos devem perceber então, que a função tem como imagem $[0,4, 1,1]$ e que pode ser modelada por uma função do tipo seno ou cosseno, ficando a critério deles decidirem por qual delas desejam criar um modelo.

Depois de todo o trabalho inicial com funções periódicas, caso os alunos não consigam desenvolver o modelo a partir de funções do tipo seno e/ou cosseno, o professor pode fazer uma breve sistematização de alguns conceitos.

Em funções periódicas, como as que foram trabalhadas até então, pode-se analisar alguns aspectos especiais, e o docente pode explorar esses aspectos conforme são apresentados a seguir:

- Amplitude

A **amplitude** é a medida da distância entre uma extremidade do gráfico (pico mais alto ou mais baixo) e o eixo x (eixo horizontal). Na fórmula geral da função do tipo cosseno $f(x) = a * \cos(bx + c) + d$, a amplitude é representada pela constante

a. Ou ainda pode-se calcular a amplitude como sendo a diferença entre os valores máximo e mínimo da função dividida por dois.

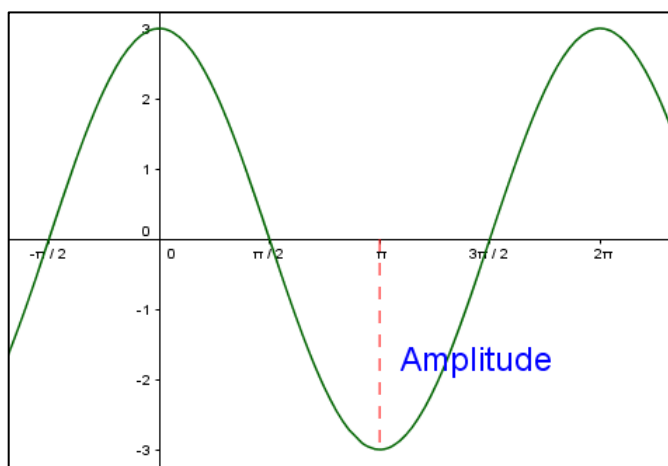


Figura 7: Amplitude da função

- Frequência

A **frequência** é a quantidade de vezes que a função se repete em determinado intervalo. Na fórmula geral da função do tipo cosseno $f(x) = a * \cos(bx + c) + d$, a frequência é dada por $\frac{b}{2\pi}$.

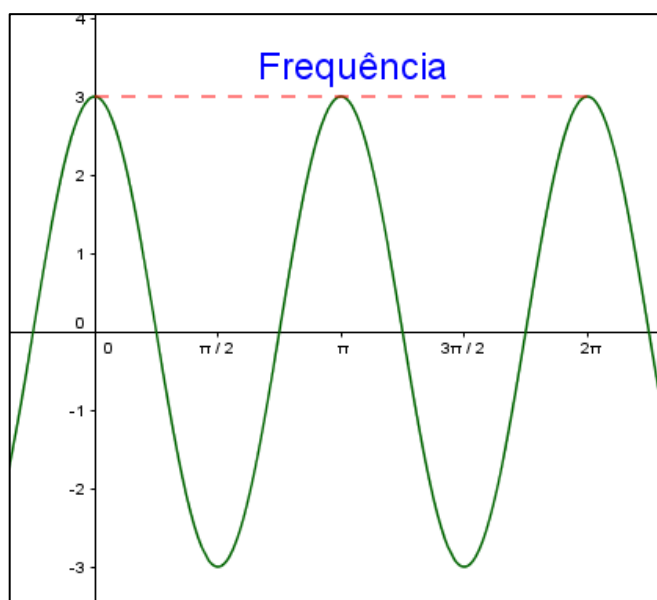


Figura 8: Frequência da função

- Período

O **período** é a medida que determina o quanto o gráfico da função “demora”, ou seja, quantas unidades são necessárias para completar um ciclo completo. O período é determinado pela seguinte fórmula:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{b}$$

Onde T representa o período e f representa a frequência.

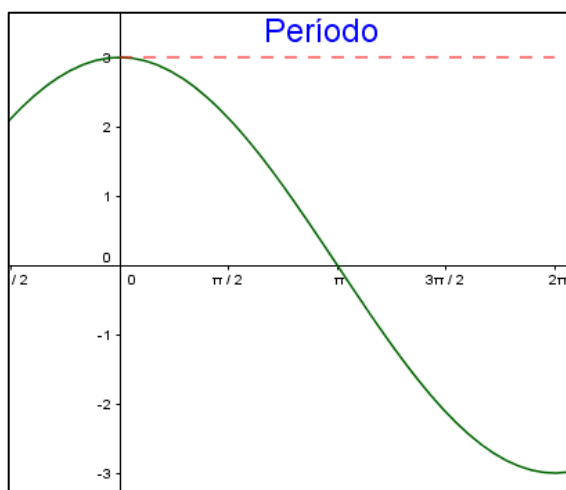


Figura 9: Período da função

- Transladação horizontal

A **transladação horizontal** é o deslocamento do gráfico da função horizontalmente. Esse movimento não altera o gráfico, mas indica quantas unidades a direita ou a esquerda ele “andou”. Na fórmula geral da função do tipo cosseno $f(x) = a * \cos(bx + c) + d$, a transladação horizontal é representada pela constante c .

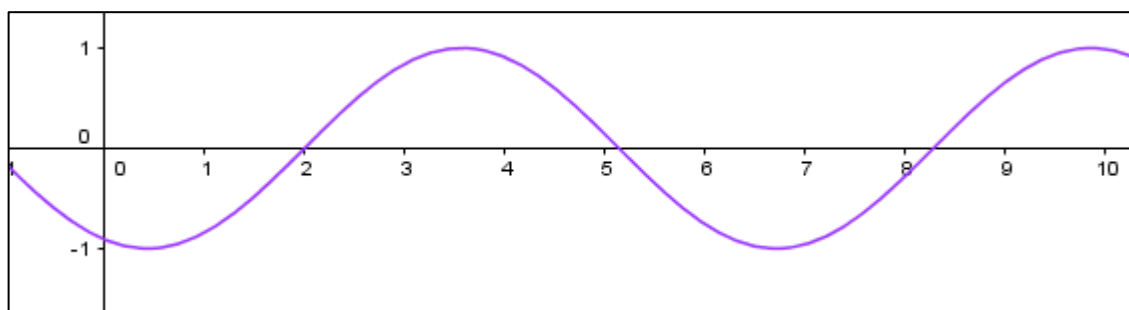


Figura 10: Transladação horizontal da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em -2 unidades

- Transladação vertical

A **transladação vertical** é o deslocamento do gráfico da função verticalmente. Esse movimento não altera o gráfico, mas indica quantas unidades acima ou abaixo ele “andou”. Na fórmula geral da função do tipo cosseno $f(x) = a * \cos(bx + c) + d$, a transladação vertical é representada pela constante d .

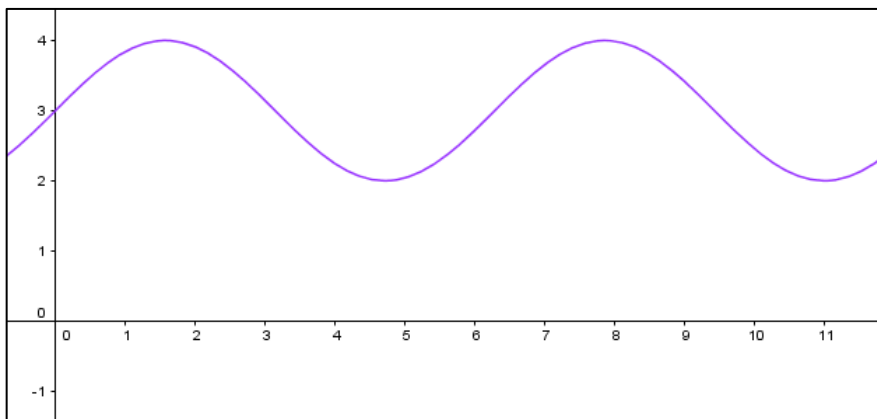


Figura 11: Transladação vertical da função $f(x) = \text{sen}(x)$ em 3 unidades

Assim, na função $f(x) = \text{sen}(x)$ tem-se que a imagem é $[-1,1]$ e quando ela é deslocada verticalmente, a alteração no valor da imagem passa a ser $[-1 + d, 1 + d]$.

Depois de sistematizados esses conceitos, os alunos podem então retomar a situação problema das marés.

Ao calcular a amplitude da situação-problema obtêm-se:

$$a = \frac{1,1 - 0,4}{2} = 0,35$$

Desse modo já se sabe que

$$a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto 0,35 * \cos(t)$$

É um primeiro modelo para representar a altura das marés e seu gráfico encontra-se na Figura 12.

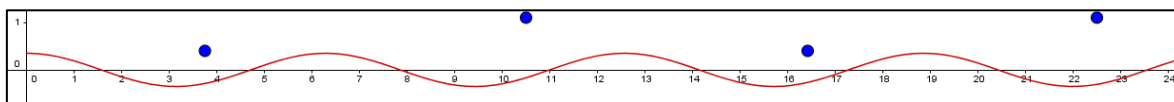


Figura 12: Gráfico da função $a(t) = 0,35 * \cos(t)$

Pode-se perceber que a imagem desse gráfico ainda não é a mesma dos dados apresentados na situação e sendo assim, será preciso fazer ajustes em outros parâmetros dessa função para melhor ajustar a curva aos pontos.

Desse modo, pensando na definição de frequência, sabe-se que no período de 24 horas há duas marés altas e duas marés baixas, então a cada dia há dois ciclos e sendo assim, a cada 12 horas completa-se um ciclo. Assim:

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

$$12 = \frac{2\pi}{b}$$

$$b = \frac{\pi}{6}$$

E ajustando o primeiro modelo dos alunos tem-se

$$a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto 0,35 * \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

E seu gráfico encontra-se na Figura 13.

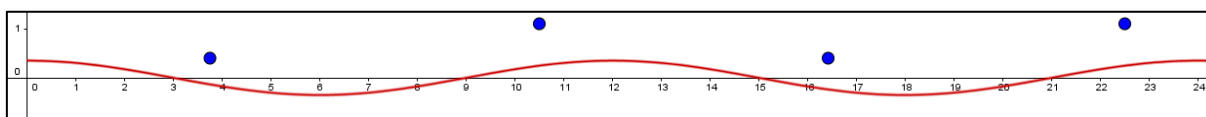


Figura 13: Gráfico da função $a(t)=0,35*\cos(\pi/6*t)$

Embora a imagem desse gráfico ainda não seja a mesma dos dados fornecidos, pode-se perceber que o gráfico já modela melhor a situação, haja vista que há dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo que pode remeter aos alunos as duas marés altas e duas marés baixas no período de 24 horas. Para aperfeiçoarem o modelo, será necessário fazerem ajustes em outros parâmetros dessa função.

Pelos pontos plotados tem-se que a imagem é $[0,4, 1,1]$, porém a imagem de do atual modelo é $[-0,35, 0,35]$. Assim, pode-se por meio do parâmetro d fazer um deslocamento vertical de modo que:

$$[-0,35 + d, 0,35 + d] = [0,4, 1,1]$$

$$d = 0,75$$

Ao adicionar essa informação à curva, os discentes obtêm

$$a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto 0,35 * \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 0,75$$

E o gráfico dessa nova função encontra-se na Figura 14.

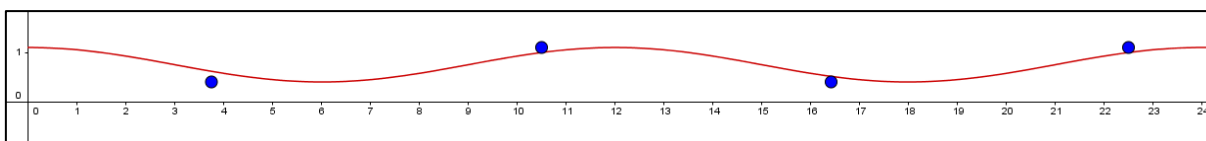


Figura 14: Gráfico da função $a(t)=0,35*\cos(\pi/6*t)+0,75$

Pode-se perceber visualmente que este último ajuste na curva já se aproxima mais ainda dos dados fornecidos na situação-problema, porém esses quatro pontos apresentados no gráfico da Figura 14 são os pontos de máximo e mínimo que representam as marés altas e baixas, e desse modo devem ser também no modelo dos estudantes. Para poderem melhorar a curva deles e aproximá-la de uma representação da situação descrita, eles podem ainda modificar o parâmetro c na curva do tipo cosseno fazendo um deslocamento horizontal.

Tomando um ponto conhecido qualquer e resolvendo uma equação trigonométrica, os alunos podem obter o valor do parâmetro c . Nesse caso, o ponto escolhido foi $(10,5, 1,1)$:

$$a(t) = 0,35 * \cos\left(\frac{\pi}{6}t + c\right) + 0,75$$

$$1,1 = 0,35 * \cos\left(\frac{\pi}{6}10,5 + c\right) + 0,75$$

$$0,35 = 0,35 * \cos\left(\frac{\pi}{6}t + c\right)$$

$$1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}10,5 + c\right)$$

$$\arccos(1) = \arccos\left(\frac{\pi}{6}10,5 + c\right)$$

$$0 = \frac{\pi}{6}10,5 + c$$

$$-\frac{\pi}{6}10,5 = c$$

$$c = -1,75\pi$$

Ao adicionarem essa informação à curva deles, como modelo final obtêm

$$a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto 0,35 * \cos\left(\frac{\pi}{6}t - 1,75\pi\right) + 0,75$$

Plotando o gráfico dessa função, como na Figura 15, os alunos obtêm:

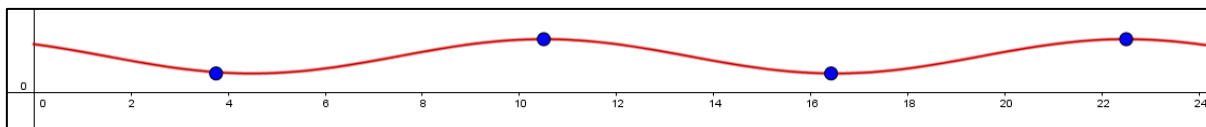


Figura 15: Gráfico da função $a(t) = 0,35 \cdot \cos(\pi/6 \cdot t - 1,75\pi) + 0,75$

4. Validação

Visualmente parece que o modelo se ajustou bem aos dados que foram fornecidos pela atividade, então o professor pede que verifiquem aritmeticamente, calculando os valores da função que estabeleceram como modelo matemático para os quatro horários de marés do dia 28. Assim:

$$a(3,75) \cong 0,4$$

$$a(10,5) \cong 1,1$$

$$a(16,42) \cong 0,4$$

$$a(22,5) \cong 1,1$$

Desse modo, tem-se que o modelo se aproxima bastante dos valores previstos das marés. Logo, os alunos encontraram um bom modelo que descreve o comportamento buscado.

5. Solução para o problema

Portanto existe um modelo matemático sim, que possa descrever a altura das marés nas praias da região de Paranaguá, PR, Brasil, no dia 28 de julho de 2016. A função $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por $a(t) = 0,35 \cos\left(\frac{\pi}{6}t - 1,75\pi\right) + 0,75$ pode ter sua imagem associada a diferentes alturas das marés, dado qualquer valor de tempo durante o dia 28 de julho. As imagens da função se aproximam bem das medições das alturas das marés nesse dia nas praias de Paranaguá.

3.2 CICLO RESPIRATÓRIO DE UM ADULTO

A segunda atividade proposta, chamada de “Ciclo respiratório de um adulto”, é baseada e adaptada ao que foi proposto nos vestibulares da UNB (2000) e UFF (2004). A situação, assim como a da atividade anterior, descreve movimentos periódicos, que nesse caso são os da respiração e volume de ar nos pulmões, relacionando estes a aplicações da função seno e da função cosseno.

A proposta, também é indicada para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, que pode ser trabalhada em pequenas equipes e diferentemente da primeira THA, esta é uma atividade de segundo momento de familiarização, pois apresenta uma maior autonomia por parte dos estudantes.

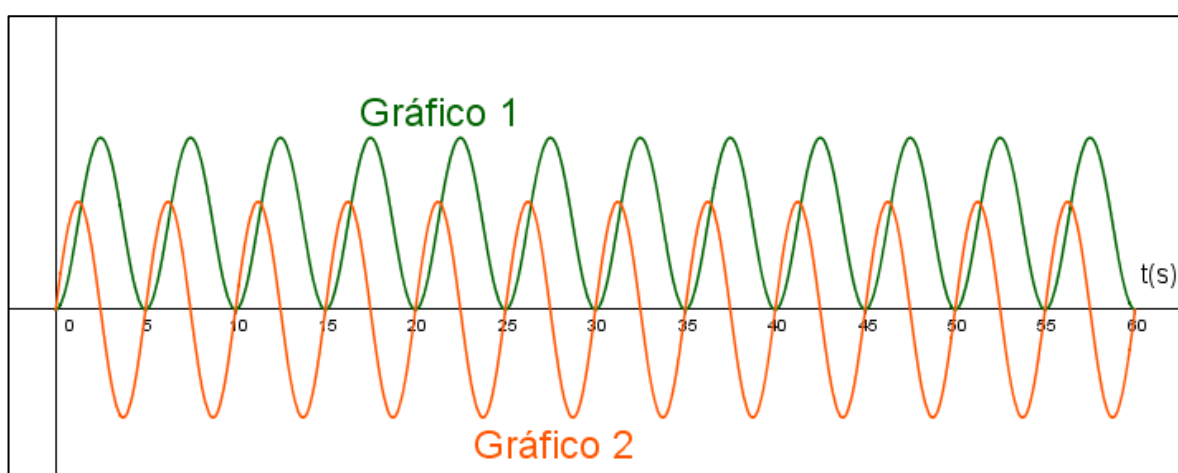
Busca-se com essa atividade atingir os seguintes objetivos do professor em relação às aprendizagens dos alunos:

- Perceber que é possível utilizar funções trigonométricas para a referida situação-problema;
- Aplicar a definição de função do tipo seno ou função do tipo cosseno a partir da situação proposta;
- Aplicar a definição de cada parâmetro e suas influências em funções do tipo seno ou cosseno;
- Interpretar os resultados obtidos, ou seja, o que eles representam.

Para desenvolver a Trajetória Hipotética de Aprendizagem dessa atividade serão apresentados o plano do professor para a aprendizagem e as hipóteses do professor, de acordo com aquilo que é proposto por Simon (1995) no ciclo de Ensino Matemático já na definição problema determinado para a situação proposta abaixo, em que o foco da THA tem um nível a mais de complexidade do que na primeira THA. Aqui é necessário hipotetizar além das fases da modelagem, analisando a situação e os dados já postos inicialmente.

Para começar a desenvolver esta THA, é também proposta uma contextualização da situação-problema, dialogando a respeito do que é inspirar e expirar, qual a importância da respiração para nosso organismo e trazer as possíveis complicações causadas por doenças ou outras condições quando nosso organismo não recebe uma quantidade mínima de gás oxigênio. Feita essa introdução, apresentamos então o problema do Quadro 4:

(Questão adaptada da UNB e UFF) No processo de respiração do ser humano, o fluxo de ar através da traqueia, durante a inspiração ou expiração, é dado em litros por segundo. Já pressão interpleural (pressão existente na caixa torácica) indica o volume total de ar, em litros, contido nos dois pulmões de um adulto em condições físicas normais e em repouso que pode ser descrito como função do tempo t , em segundos. Nos gráficos abaixo estão representadas a respiração (Gráfico I) e o fluxo de ar (Gráfico II) nos pulmões de um adulto.



Problema:

Hipóteses:

Variáveis:

Dedução do modelo matemático:

Solução:

Quadro 4: Segunda proposta de situação-problema para os alunos.

Fonte: os autores.

A partir desse momento, trazemos as hipóteses de três possíveis problemas poderiam ser propostos.

1 – Existe um modelo que possa representar o gráfico 1 e um modelo que possa representar o gráfico 2? Se sim, quais seriam esses modelos?

Possível solução: Para esse problema e problemas análogos a esse proposto, os alunos deverão considerar os gráficos como dados e observar que se trata de duas funções periódicas. Como já foi visto na primeira trajetória, podemos modelar esses dados por meio de uma função trigonométrica do tipo seno ou do tipo cosseno e com isso os alunos poderão de forma semelhante ao que já foi apresentado obterem um modelo para o gráfico I: $V(t) = 3 \cdot \left(\frac{1 - \cos(0,4\pi t)}{2\pi}\right)$ e para o gráfico II: $f(t) = 0,6 \cdot \text{sen}(0,4\pi t)$.

2 – Após 17 segundos qual será a capacidade de ar nos pulmões e o fluxo de ar na traqueia?

Possível solução: os alunos podem obter um modelo para cada tipo de gráfico como os descritos acima e determinar no instante 17 qual será o valor das duas funções. Nesse caso, as respostas devem se aproximar de 0,35 L de capacidade de ar nos pulmões e 0,86 L/s de fluxo de ar na traqueia.

3 – Qual a relação existente entre os dois gráficos? Qual a interpretação quando o gráfico do fluxo é nulo? E quantos segundos levam para realizar uma respiração completa?

Possível solução: os alunos devem perceber que o volume de ar nos pulmões aumenta quando aumenta o fluxo de ar na traqueia, isto é, está entrando ar para os pulmões. Ao atingir sua capacidade máxima, o fluxo é nulo, pois não entra mais ar nos pulmões, então em seguida o fluxo fica negativo indicando que está saindo dos pulmões, passando pela traqueia em direção ao nariz e boca, e o gráfico que mede a capacidade de ar nos pulmões também decresce, pois os pulmões estão se contraindo. Para realizar uma respiração completa, os alunos podem determinar um modelo matemático que se assemelha às funções descritas acima para os gráficos I e II e verificar quanto tempo demora para a função completar um período, ou ainda é possível observar no gráfico que na metade do instante 10 é que se completa um ciclo, ou seja, após cinco segundos.

3.3 TRIGONOMETRIA E MEDICINA

A ideia é que para atividades deste momento de familiarização, o professor pode conduzir os alunos na escolha de um tema geral em que eles buscarão possíveis situações e dados para poderem desenvolver suas próprias atividades de modelagem matemática.

Aqui, as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem assumem um papel de orientações gerais aos professores. Haja vista a infinidade de hipóteses que poderiam surgir dentro de um tema amplo, como no caso a trigonometria e a medicina. Sendo assim, fica impossível traçar possíveis rotas que os alunos poderiam seguir.

Temos que o tema de estudo é a respeito de funções trigonométricas, então os objetivos do professor para a aprendizagem dos alunos nessa THA devem englobar:

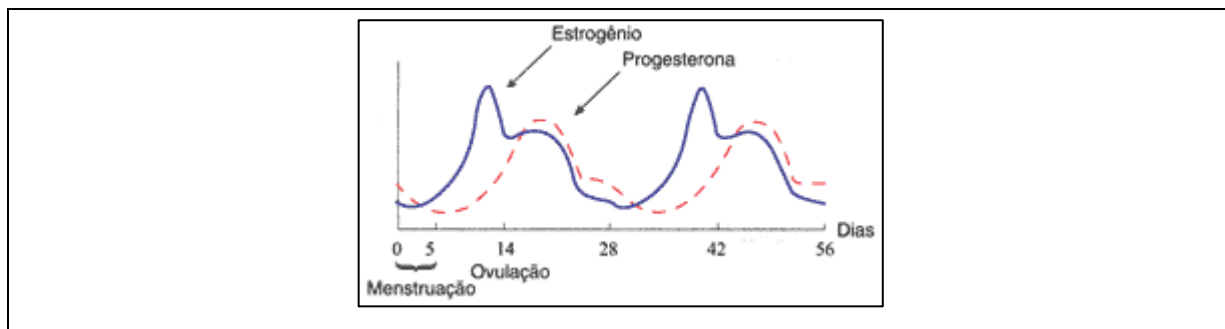
- Buscar situações que tratem de movimentos periódicos em que é possível utilizar funções trigonométricas para uma representação matemática;
- Aplicar a definição de função do tipo seno ou função do tipo cosseno a partir da situação proposta;
- Aplicar a definição de cada parâmetro e suas influências em funções do tipo seno ou cosseno.

Abaixo listamos o exemplo de uma atividade adaptada e uma reportagem, que podem servir de base para formulação de situações-problema e modelagem matemática englobados no tema Trigonometria e Medicina.

Atividade adaptada: O ciclo menstrual das mulheres.

As diversas fases são determinadas pela quantidade de vários hormônios no corpo. A figura ao lado mostra os níveis dos hormônios estrógeno e progesterona durante os ciclos.

Figura 16: nível dos hormônios femininos em função do tempo é periódico

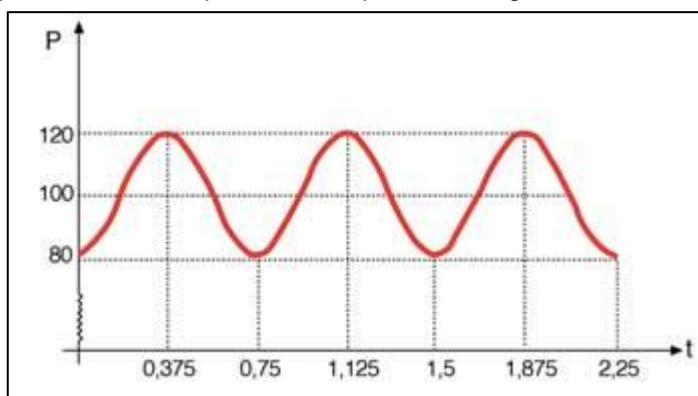


Fonte: http://www.vanzolini-ead.org.br/pecem/mat/index_m1s1.htm

Percebendo o período de 28 dias dos cíclicos de níveis de Estrogênio e Progesterona e desenvolvendo por raciocínio semelhante ao apresentado na atividade “As marés de Paranaguá”, os alunos poderiam modelar essas informações por funções do tipo seno, mas carece da informação dos níveis dos dois hormônios que não estão apresentados no gráfico, mas poderiam ser pesquisados pelos alunos.

Reportagem: Trigonometria de olho na sua pressão

Figura 17: Gráfico que relaciona pressão sanguínea com o tempo



JOSÉ LUIZ PASTORE MELLO

ESPECIAL PARA A FOLHA

A palavra trigonometria vem do grego e significa medida (metria) em triângulos

(trigon). De fato, a trigonometria se ocupa dos métodos de resolução de triângulos, contudo, seu campo de estudo também abrange a investigação e uso das funções trigonométricas. Veremos a seguir uma aplicação desse nobre uso da trigonometria.

Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico podem ser modelados com auxílio de funções trigonométricas, daí a enorme aplicação do estudo desse conteúdo em campos da ciência como acústica, astronomia, economia, engenharia, medicina etc.

Um exemplo de relação que pode ser modelada por uma função trigonométrica é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do instante de coleta dessa medida. O gráfico indicado abaixo representa uma investigação desse tipo onde se analisa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos).

Em geral, a pressão indicada no gráfico obedece um ciclo, sendo que cada ciclo completo equivale a um batimento cardíaco. Note por meio do gráfico que ocorre um ciclo completo a cada 0,75 segundos, o que implica dizer que a frequência cardíaca do indivíduo avaliado é de 80 batimentos por minuto.

Fonte: <http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0910200706.htm>

Dependendo da situação-problema proposta, os alunos poderiam a partir do gráfico presente nessa reportagem obter um modelo que associe a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos pelo tempo, por meio da seguinte função do tipo cosseno:

$$P(t) = -20\cos\left(\frac{800t}{3}\right) + 100$$

Seguindo passos análogos aos desenvolvidos na atividade “As marés de Paranaguá”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Relacionando tudo que até aqui apresentamos podemos perceber o quanto as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem propostas por Simon (1995) podem ser utilizadas como instrumentos pedagógicos eficazes no planejamento de atividades de Modelagem Matemática, principalmente para os professores, pois pode prepará-los para possibilidades diversas que podem surgir durante uma atividade de modelagem. É certo que possivelmente uma THA não irá contemplar a gama de situações que podem surgir em sala, mas é certo que ela pode promover certa confiança no professor por estar preparado por algumas situações adversas que os alunos venham a apresentar.

É importante termos em mente também que a THA construída pelo docente está intrinsecamente vinculada ao conhecimento do professor. Desse modo, tudo que faz parte da identidade profissional desse sujeito o influencia na produção das trajetórias e, em especial, sua experiência em sala, as possíveis dificuldades que os alunos geralmente apresentam a respeito de um determinado assunto, ou facilidades sobre outro. Então, quanto mais forem consideradas essas informações e quanto mais detalhada uma trajetória, mais enriquecedora será para o professor que dela se utilizar, pois é um instrumento pedagógico para explorar tudo aquilo que o professor pode saber a respeito de determinado conteúdo.

As THA que aqui apresentamos são o desejo de fomentar trabalhos a respeito destes temas, podem e devem ser exploradas e modificadas por outros professores. O que aqui apresentamos faz parte dos conhecimentos que como professores apresentamos, mas o intuito é que possam ser enriquecidas e extrapoladas.

Como dissemos anteriormente, este trabalho apresentou propostas de atividades e essas não foram aplicadas tendo a possibilidade futura de desenvolver trabalhos com possíveis resultados de aplicações, ou ainda, sendo este, fomentador para que outros professores possam aplicar e desenvolver trabalhos que versem a respeito dos possíveis resultados de trabalho com essas propostas.

Também podemos perceber o quanto o uso de tecnologias, tais como os *applets*, e em especial *applets* no GeoGebra, tem a possibilidade de enriquecer a exploração dos alunos nas atividades e o potencial de promover os processos de

ensino e aprendizagem em atividades desenvolvidas em ambientes de aprendizagem de Modelagem Matemática.

O uso das tecnologias facilita a exploração dos conteúdos que abordamos, funções trigonométricas. Permite uma exploração geométrica aliada a construções e desenvolvimentos algébricos feitos pelos alunos na hora de modelar as situações-problema e o GeoGebra, por exemplo, por ser um *software* gratuito e de fácil manipulação, não se torna empecilho para ser adotado nas aulas de matemática.

Podemos observar isso ao verificar os trabalhos que apresentamos e os muitos outros presentes na literatura, que buscam no uso das tecnologias de informação e comunicação uma ferramenta a disposição do professor e mais uma disponível no arsenal de possibilidades disponíveis para o professor trabalhar em sala de aula. Além disso, ao pesquisar trabalhos que versam a respeito de MM, THA, trigonometria e tecnologia, podemos perceber que buscamos com isso fomentar o desejo de facilitadores que contribuem para aulas de matemática, desejo esse compartilhado com os outros textos que aqui trouxemos.

Por fim, ao desenvolver as THA para cada atividade podemos perceber que cada uma delas tem um enfoque diferente que se correlacionam aos momentos de familiarização com atividades de modelagem. A atividade de primeiro momento necessita, em nossa opinião, de um enfoque mais exploratório no sentido de pensar em quais possibilidades de dúvidas e impedimentos os alunos poderiam se deparar, pois ainda que apresentem modelos diferentes, pelas características desse tipo de atividade esses modelos muito se aproximam.

Já no segundo momento, há certa autonomia do aluno de poder buscar mais dados do que os apresentados e determinar qual será a situação-problema, com isso o enfoque da trajetória é mais de pensar nos diferentes caminhos e situações que podem ser propostas pelos alunos, além de também pensar em possíveis dúvidas e pensamentos específicos de cada caminho escolhido, portanto tem um enfoque mais global primeiro, depois conduz para as especificidades dos diferentes caminhos. Na nossa proposta apresentamos apenas a trajetória de pensar os diferentes caminhos, pois as resoluções se aproximavam bastante da resolução proposta no problema das marés de Paranaguá.

E o último momento, tem um enfoque ainda mais abrangente da THA, o de pensar nas possibilidades de temas ou subtemas de um tema determinado pelo

professor para depois se atentar as mesmas hipotetizações feitas nos momentos anteriores.

Logo, tratamos aqui de estreitar relações entres os momentos de familiarização e enfoques diferentes para a THA, mas fazemos a ressalva de que esta é uma interpretação singular e particular que fazemos da teoria de Simon (1995) com a abordagem de Modelagem Matemática como a proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2012) não encontrando na literatura outros trabalhos que também falam dessa relação.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, A. A. **Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem relacionadas às razões e às Funções Trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista**. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática), PUC/SP, 2009.

BARCELOS, G. T., et al. **Applets em ambientes de geometria dinâmica: ações para a formação de professores de Matemática**. Novas Tecnologias na Educação. CINTED-UFRGS, v. 7, nº 3, dezembro, 2009. Disponível em: <<http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/13606/8837>>. Acesso em: 04 fev. 2017.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BEZERRA, C. **A influência da interatividade em ambientes virtuais de aprendizagem matemática para alunos surdos**. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2010, Campo Grande. Anais... Campo Grande, 2010. Disponível em: <<http://www.matematicainclusiva.net.br/pdf/A%20Influ%C3%Aancia%20da%20Interatividade%20em%20Ambientes%20Virtuais%20de%20Aprendizagem%20Matem%C3%A1tica%20para%20Alunos%20Surdos.pdf>>. Acesso em: 02 fev. 2017.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 4.ed. São Paulo: Contexto, 2007. 127p.

BISOGNIN, V.; PEREIRA, R. F.; MARQUES, C. T.; MARQUES, C. T. **Contribuições da modelagem matemática para o ensino médio: ângulo de visão das cores do arco-iris**. In: III Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 2008, Guarapuava. Anais do III EPMEM. Guarapuava: Editora Unicentro, 2008. v. 1. p. 1-10.

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, Aprendizagem Significativa e Tecnologias: articulações em diferentes Contextos Educacionais**. 2013. 256 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W.. **Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática.** Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (En línea), v. 10, p. 36-45, 2015.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDBEN - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, 1999. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em 25 jan. 2017.

BRASIL, **Orientações curriculares para o ensino médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação - Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 25 jan. 2017.

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.** Campinas, 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas, 1992.

BURAK, D. **Modelagem matemática sob um olhar de educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.** Revista de Modelagem na Educação Matemática, v.1, n.1, p.10-27, 2010. Disponível em: <<http://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2012/1360>>. Acesso em 12 dez. 2016.

BURAK, D.; BARBIERI, D. D. **Modelagem Matemática e suas implicações para a Aprendizagem Significativa.** In: IV CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CNMEM, 2005, Feira de Santana-BA. Anais... Feira de Santana - BA: UEFS.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas, SP: Papyrus, 1996.

DELLA NINA, C. T. **A modelagem matemática na solução de um problema social: professora vira madrinha de rua.** Ciência e Conhecimento- Revista eletrônica da ULBRA São Jerônimo. Ano 1, v. 2, p. 1-11, 2007. Disponível em: <<http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/artigo/1-2008-11-05-16-58-53.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2017.

FERRI, R. B. **Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process.** Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 38, n. 2, p 86- 95, 2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.** Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FRANCHI, R. H. O. L. **Ambientes de aprendizagem fundamentados na modelagem matemática e na informática como possibilidades para a educação matemática.** In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais. v.3. Recife: SBEM, 2007. Cap. 1, p.177-193.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. **A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados.** In: CONGRESSO RIBIE, 4, 1998, Brasília. Anais... Brasília, 1998. Disponível em: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/aprendizagem_mat.pdf> Acesso em: 13 mar. 2017.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. **A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education.** Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v. 38, n. 3, 2006. p. 302-310, 2006.

LINCK, F. G. **Música e matemática: experiências didáticas em dois diferentes contextos.** UFRS, 2010.

MOREIRA, A. F. **Ambientes de Aprendizagem no Ensino de Ciência e Tecnologia.** Belo Horizonte: CEFET-MG, 2007. Notas de aula.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem.** São Paulo: EPU, 1999.

OLIVEIRA, C. C.; COSTA, J. W.; MOREIRA, M. **Ambientes informatizados de aprendizagem.** Produção e Avaliação de Software Educativo. 1. ed. São Paulo: Papirus, 2001. 144p.

OLIVEIRA, J. C. R. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Logaritmos na Perspectiva da Resolução de Problemas.** 2015. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

OLIVEIRA, J. E. M. **A Trigonometria na Educação Básica com Foco em sua Evolução Histórica e Suas Aplicações Contemporâneas**. 2013. 144 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

PIETROBON, M. L. S.; COSTA, J. C. B.; SOUZA, C. A. D. N. **Construções para inovações metodológicas no programa curricular da 8ª série do Ensino Fundamental, no conteúdo de trigonometria no triângulo**. 2010. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/933-4.pdf>>. Acesso em: 28 jan. 2017.

PIRES, C. M. C. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon**. Educação Matemática Pesquisa, v. 11, p. 145-166, 2009.

SANTOS, V. C. P. **Mathlets: possibilidades e potencialidades para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática**. 2008. 102f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GERÔLOMO, A. M. L. **“Aprendendo” a fazer modelagem matemática: a vez do aluno**. Educação Matemática em Revista. São Paulo, v. 1, p. 28-36, 2011.

SILVA, M. F. **Trigonometria, modelagem e tecnologias: um estudo sobre uma sequência didática**. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Belo Horizonte, 2011.

SILVA, M. F.; FERREIRA, P. E. A. **É possível hipotetizar uma aula com Modelagem Matemática?** In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Anais... São Paulo, 2016.

SILVA, M. F.; FROTA, M. C. R. **O uso de applets no ensino de trigonometria**. In: SEMINÁRIO DO PROGRAMA DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 1, 2010, Belo Horizonte. Anais... Belo Horizonte, 2010.

SILVA, M. F.; FROTA, M. C. R. **Explorando modelos matemáticos trigonométricos a partir de applets**. Vidya, v. 32, n.2, p. 97-111, jul./dez. 2012 - Santa Maria, 2012.

SIMON, M. **Reconstructing mathematics pedagogy from a contrutivist perspective.** Journal for Research in Mathematics Education, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

VALENTE, J. A. **Diferentes usos do computador na educação.** In: VALENTE, J.A.. (Org.). Computadores e Conhecimento: repensando a Educação. 1ª Ed. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1999, v. 1, p.1-28.