Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Medianeira – Paraná – Brasil
ISSN 2175-1846 / v.01, n01, 2010

INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

ENSINO DE APLICAÇÕES DE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO

TEACHING OF APPLICATIONS OF MAXIMA AND MINIMA OF FUNCTIONS IN HIGH SCHOOL

Junior Luis Storch – junior_lsi@hotmail.com
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Medianeira, PR – Brasil.

Vanessa Hlenka – vanessah@utfpr.edu.br
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Medianeira, PR – Brasil.

Resumo

Matemática sempre foi uma das disciplinas mais temidas pelos alunos. Um dos motivos talvez seja o fato de alguns assuntos lhes parecerem muito abstratos, não palpáveis, portanto de difícil compreensão. É de conhecimento dos professores de Matemática que existem muitos alunos que gostam da disciplina de Física, e entendem a maior parte dos conteúdos, mesmo quando não se dão muito bem com a Matemática. Isto porque na Física os problemas lhes parecem palpáveis, aplicando a Matemática diretamente em situações cotidianas. Portanto, nota-se a importância de diminuir a abstração da Matemática aos olhos dos alunos. Diante disso, esta pesquisa propõe maneiras de trabalhar os conteúdos de ensino médio facilitando a visualização dos problemas, mais especificamente de máximos e mínimos de funções polinomiais, que são algumas das aplicações mais comuns. É importante salientar que o domínio do assunto por parte do professor é fundamental para transmitir os ensinamentos de maneira clara e objetiva. Isto é, mesmo que o professor não possa trabalhar, no ensino médio, conteúdos de Cálculo, como derivadas, por exemplo, é importante que tais conteúdos lhe sejam claros; só assim poderá abordar os ensinamentos de Matemática com maestria.

Palavras-chave: problemas, otimização, modelagem, derivadas, Cálculo.

Abstract

The Mathematics has always been one of the most dreaded subjects by students. One reason may be the fact that some subjects them seems very abstract, not tangible, and therefore difficult to understand. It's mathematics teachers' knowledge that are there many students who like the discipline of Physics, and they understand most of the contents, even when they not get along well with the Mathematics. This is because in the Physics problems they seem tangible, applying the Mathematics directly in everyday situations. Therefore, there is the importance of reducing the abstraction of the Mathematics in the eyes of students. Thus, this research proposes ways to work the high school content facilitating the visualization of problems, specifically maximum and minimum of polynomial functions, which are some of the most common applications. Importantly, mastery of the subject by the teacher is fundamental to transmit the teachings in a clear and objective manner. That is, even if the teacher can't work in high

school, Calculus content, as derivative for example, it is important that such content you are clear; only then can approach the teaching of Mathematics masterfully.
Keywords: problems, optimization, modeling, derivatives, Calculation.

1. Introdução

O estudo da aplicação de máximos e mínimos é um dos mais importantes propósitos do Cálculo Diferencial (CD), também chamado de Cálculo infinitesimal, ou simplesmente Cálculo. Esta pesquisa tem como objetivos encontrar meios de trabalhar minimização e maximização de funções polinomiais no ensino médio, partindo de problemas simples de aplicações, utilizando-se de *softwares* e materiais que facilitem a visualização e compreensão dos mesmos.

Aplicações enriquecedoras a serem apresentadas no ensino médio consistem em problemas de otimização de manufatura que minimizem a quantidade de material utilizado, reduzindo a área da superfície total de embalagens, por exemplo. Dados tais problemas, pretende-se elaborar a visualização dos mesmos através de um modelo palpável ou virtual, que facilite a compreensão dos alunos, para então ser feita a sua modelagem por meio de uma equação que deverá ser maximizada ou minimizada.

2. O ensino de Matemática

Os estudos da Educação Matemática indicam que para o aluno aprender Matemática é essencial inserir os conceitos matemáticos de forma intuitiva, seguidos pela simbologia e pelo uso linguagem matemática. Devem-se incentivar os alunos com propostas de atividades estimulantes, com a intenção de provocar no aluno à reflexão, o raciocínio, a criação, que ele relacione ideias, descubra e tenha autonomia de pensamento (COSTA, 2007), (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Dessa forma, deve-se ensinar a Matemática por meio de situações problematizadoras próximas ou que pertençam ao cotidiano do aluno, as quais o façam pensar, analisar, julgar e decidir pela melhor solução. O aprendizado do conteúdo matemático assim ensinado posicionará o aluno no mundo em que vive e em seu contexto social (FIORENTINI; LORENZATO, 2006).

Logo, entende-se que a experiência acumulada pelo aluno em seu dia a dia, tanto na escola ou fora dela deve ser estimuladora para desenvolvimento do raciocínio matemático.

Tecendo considerações em torno da História da Matemática e de como ocorreu à evolução do conhecimento matemático, D'Ambrosio (1996) afirma que é necessária uma reformulação dos princípios que norteiam os educadores e o sistema de educação, pois os mesmos se encontram defasados perante as novas mudanças ocorridas nos últimos anos, em escala global.

Ainda, de acordo com D'Ambrosio (1996) é necessário que a educação proporcione aos alunos um desenvolvimento pleno, tornando-os cidadãos conscientes e ativos, que buscam qualidade de vida e maior dignidade.

Em consonância com D'Ambrosio encontra-se Freire (1987), este último é contra uma educação em que o aluno ou educando está condicionado ou sendo condicionado a reproduzir os ensinamentos oferecidos e menciona que:

> A educação se torna um ato de depositar em que todos os educandos são depositários e o educador o depositante. Em lugar de comunicar-se, o educador faz "comunicados" e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem pacientemente, memorizam e repetem. Eis a concepção bancária da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem depósitos, guardá-los e arquivá-los. (FREIRE, 1987, p.58).

Para Smole (2001) o ensino da matemática deve ocorrer de maneira que favoreça um ambiente de aprendizagem, uma espécie de simulador de uma comunidade matemática dentro da sala de aula, assim haveria interação entre os alunos e fluiriam opiniões, informação e experimentações.

Conforme (SKOVSMOSE, p. 17, 2008) a sala de aula deveria tornar-se um cenário de investigação, pois de acordo com o autor na maioria "das salas de aula, a educação tradicional enquadra-se no 'paradigma do exercício', no qual a premissa central é aquela em que para cada exercício existe uma e somente uma resposta correta". Em oposição a isso o mesmo autor propõe a abordagem de investigação, a qual é passível de tomar variadas formas.

É possível perceber que as ideias, opiniões ou reflexões dos autores elencados nesta seção, vão ao encontro umas das outras. Esta observação conduz ao fortalecimento das reflexões em torno do ato de ensinar a matemática. Pois o que se quer é a exploração de conceitos e definições matemáticas que visem o desenvolvimento do aluno de forma ampla e substancial.

2.1. O Cálculo Diferencial no Ensino Médio

O conhecimento das aplicações da matemática é necessário para que alunos de Ensino Médio saibam de sua importância em vários segmentos, principalmente aqueles que envolvem o aproveitamento máximo de materiais. Utilizam-se essas aplicações para minimizar desperdícios, melhorar o aproveitamento de recursos, naturais ou não, conferindo entre outros fatores, melhores lucros ao final de uma determinada produção.

Desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, esse ramo da Matemática está presente em diversas áreas do conhecimento. Tais aplicações, com a utilização do Cálculo Diferencial (CD), em geral, não são introduzidas para os alunos do Ensino Médio, mais especificamente aquela que se refere às derivadas.

Podem ser apresentadas pelo menos duas justificativas importantes para que se ensine a derivada logo no 1º Ano do Ensino Médio. De acordo com Ávila (1994) a primeira delas é que nesse início do Ensino Médio é que se introduz e se estuda mais detidamente o conceito de função. Neste caso a derivada lança mais luz nesse estudo, particularmente, na variação das funções em seu crescimento ou decrescimento. Outra razão muito importante para a introdução da derivada é o ensino da Física, sobretudo da cinemática, o qual também é elemento novo para os alunos do Ensino Médio, (ÁVILA, 1994).

Desse modo é possível envolver o CD no Ensino Médio, isso se configura como uma oportunidade de revisar e aplicar determinados conteúdos estudados, além de introduzir algumas ideias atuais e importantes da Matemática Aplicada, na qual está inserida a otimização de materiais, (ROCHA, 2013).

A noção de derivada pode ser introduzida de maneira intuitiva, com apelo à visualização geométrica e sem os rigores da teoria dos limites. Com a derivada da função quadrática em mãos, por exemplo, pode-se colher excelentes frutos no estudo do trinômio do 2º grau. Os conceitos de funções crescentes e decrescentes aplicados por meio da derivação, permitem determinar a convexidade da curva, bem como os pontos de mínimo e máximo da função, (PEREIRA, 2009).

Trabalhar com essas aplicações no Ensino Médio usando Cálculo Diferencial (CD), propõe uma ruptura com os padrões atuais de ensinar a matemática. O professor que conhecer as “ferramentas” do CD terá mais habilidade para mediar o conhecimento matemático de maneira mais eficiente e aprofundada entre ele e os alunos. Vale observar, que na disciplina de matemática, por conta da deficiência que muitos alunos apresentam em relação ao conteúdo envolvendo equações e funções, os mesmos parecem desestimulados e por consequência acabam desistindo dos estudos (OLIVEIRA, 2014).

No entanto, na maioria das vezes os professores precisam mudar de postura diante do exercício de sua profissão, este conteúdo deve ser tratado ou apresentado aos alunos de maneira que sua complexidade e compreensão tornem-se acessíveis, assimiláveis. Tal conteúdo, seguramente, exercerá influência nas futuras carreiras profissionais dos alunos, portanto, a devida atenção deve ser dada ao conteúdo. Em caso contrário, acarretará dificuldades na aprendizagem dos alunos quando chegarem à universidade, (PEREIRA, 2009), (ROCHA, 2013), (OLIVEIRA, 2014).

No final dos anos 50 e começo dos anos 60, houve uma significativa mudança no Ensino de Matemática nas escolas brasileiras, reflexo do que acontecia no exterior. Ocorreu o Movimento da Matemática Moderna (MMM) e uma de suas consequências foi à retirada de alguns conteúdos dos programas de ensino, como o Cálculo e a Geometria (ÁVILA, 1991).

Atualmente, alguns pesquisadores em ensino da Matemática têm levantado à questão do ensino do Cálculo no Ensino médio, dada a sua importância para as ciências e tecnologias modernas, dentre eles está Geraldo Ávila que faz uma importante colocação e esse respeito, quando afirma que:

> O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino *é* grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual (ÁVILA, p.2, 1991).

O autor defende que ideias elementares como o conceito de limite, derivada, razão incremental e declividade de uma reta possam ser trabalhadas de forma simples já no primeiro ano do Ensino médio, paralelamente, ao estudo das funções com aprendizado significativo e sem sobrecarregar o programa oficial de ensino de Matemática. O mesmo autor elaborou uma proposta para a abordagem desses conteúdos no Ensino Médio:

> Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2° grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa (ÁVILA, p.5, 1991).

Entende-se que o autor propõe a exibição de alguns conceitos e demonstrações de algumas propriedades, que diferem das aulas rotineiras, uma vez que, devido à grande quantidade de conteúdos exigidos pelos atuais currículos de matemática em detrimento à pequena carga horária disponível no Ensino Médio para as aulas de matemática, geralmente os professores simplesmente fazem uso de determinados resultados (proposições, teoremas, fórmulas, etc.) sem demonstrá-los.

Portanto, é necessário evidenciar que o ensino da matemática pode ser interessante, para isso, diferentes estratégias de ensino podem ser utilizadas. Uma dessas estratégias é aquela que defende-se aqui, que se trata da utilização da aplicação de máximos e mínimos de funções para o ensino da referida disciplina, isto é, haveria a incorporação da álgebra e da geometria num mesmo contexto durante o ensino da matemática.

2.2. Álgebra e geometria sob a ótica da psicologia do ensino

A união entre a álgebra e a geometria é muito importante para o desenvolvimento dos trabalhos matemáticos na sala de aula em vários aspectos. No instante de ensinar medidas de áreas, o mais comum é falar de quadrados. Logo pode-se explanar por meio da geometria a figura da sala de aula, supondo que em primeiro caso, a sala seja quadrada e tenha lado do tamanho l, portanto a área desse quadrado será dada por l^2, é possível verificar que passa-se de uma situação geométrica para uma situação algébrica.

Ao se referir ao volume de um cubo, a ilustração geométrica poderá ser, antes por meio da planificação de um hexaedro regular, supondo que a sala de aula seja o hexaedro e que o aluno esteja dentro, em seguida por intermédio da visualização desse hexaedro em seu formato tridimensional. Neste caso entende-se que o volume desse cubo é dado pela multiplicação das arestas, isto é, se o cubo tem cada uma das arestas com medida igual a, a, seu volume será dado por meio da multiplicação a x a x a que será igual a a^3.

É notória a interligação entre a álgebra e a geometria, e mais, isso é perceptível em situações simples, corriqueiras como no estudo de áreas e volumes. Contudo, podem-se utilizar as mesmas situações citadas sobre áreas e volumes e correlaciona-las com o estudo de funções, possibilitando a visualização gráfica da área em função do lado, por exemplo. Serão várias situações algébricas e geométricas a serem investigadas e discutidas, de maneira que o aprendizado do aluno ocorra de forma homogênea, lógica e estruturada de dois ramos da matemática, muitas vezes vistos ou ensinados como sendo separados.

Valente (2013) realizou um trabalho sobre que tipo de geometria ensinar para as crianças, tomou como base autores e pensadores como Piaget. Constatou que a geometria ensinada para as crianças em fase inicial dos estudos é fragmentada e que conforme a evolução escolar dessas crianças não é dada a devida atenção ao ensino da geometria. Ou seja, o problema do aluno dissociar a geometria da álgebra ocorre durante quase todo o processo escolar.

Para Piaget e Inhelder (1992) a bibliografia envolvendo a geometria segue um padrão, o qual é determinado pela geometria euclidiana, ou seja, em geral o ensino da geometria baseia-se em conceitos da geometria euclidiana. Para os autores, a noção de espacialidade não é euclidiana, na criança, o espaço infantil “cuja natureza essencial é ativa e operatória, começa por intuições topológicas elementares, bem antes de tornar-se simultaneamente projetivo e euclidiano” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 12).

A teoria psicológica de Piaget foi de suma importância com relação à gênese do desenvolvimento cognitivo humano. Uma evolução que pode ser classificada em quatro estágios, dos quais o último é aquele que se refere às abstrações formais, que de certo modo, busca “tirar relações de relações”, relações que ampliam o conhecimento com base em fatos já concretizados cognitivamente (PIAGET, 1973). Isto é, o concreto vem antes do formal-abstrato, assim ficaria a cargo da didática proporcionar situações onde trajeto concreto-abstrato seria percorrido com a supervisão ou orientação do professor, com a utilização, por exemplo, de material dourado.

O que Piaget quer informar é que a álgebra para ser ensinada ou aprendida necessita que a cognição ou o processo cognitivo esteja plenamente madura, situação esta, alcançada no início da adolescência (PIAGET e GARCIA, 1987).

Já para Bruner (2001), qualquer conceito pode ser ensinado para qualquer aluno em qualquer que seja a etapa do desenvolvimento de maneira “epistemologicamente honesta” e “pedagogicamente eficaz”. Nessa visão, o ensino não é limitado a patamares e não necessita de amadurecimento cognitivo, o que deve ocorrer é que os referidos patamares devem ser antecipados e facilitados. Este princípio está intimamente ligado ao conceito dado por Vigotski (2001) de zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

A zona de desenvolvimento proximal (ZDP) é a diferença entre aquilo que as crianças resolvem sozinhas, independentes, e aquilo que elas conseguem resolver obtendo a ajuda de um adulto ou outro colega que tenha mais experiência (VIGOTSKI, 2001).

Diante do exposto, vale também mencionar o trabalho de Proença e Pirola (2009), no segmento da psicologia da educação matemática, os autores realizaram um trabalho sobre a formação conceitual de alunos do ensino médio, com o intuito de entender como esses alunos interpretavam e compreendiam a matemática. Para isso, utilizaram polígonos e poliedros para saber de quais conceitos geométricos esses alunos haviam se apropriado no decorrer de sua carreira estudantil.

Como resultado, Proença e Pirola (2009) concluíram que os alunos chegam ao ensino médio com defasagem no conhecimento geométrico e ainda que, seria necessária a mudança de postura dos professores com relação ao ensino de geometria.

No mesmo segmento Viana (2011) com base na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, realizou um trabalho com o objetivo de entender o conhecimento que 6 alunos de um curso de pedagogia tinha a respeito da geometria.

Os resultados obtidos por Viana (2011) mostraram que no caso da geometria, torna-se necessária a avaliação ou sondagem a respeito do conhecimento prévio dos alunos referente ao conteúdo a ser ensinado (primeiro elemento), outro fato diz respeito à "organização da estrutura conceitual hierárquica do conteúdo" (segundo elemento), os dois elementos são "aspectos imprescindíveis para a confecção de material apropriado, para a elaboração da sequência de atividades e para a metodologia a ser adotada em um processo de ensino e aprendizagem significativa" (VIANA, p. 32, 2011).

Entretanto, o que se deseja aqui, não é confrontar os autores, nem avaliar quem está correto em suas considerações. No entanto, deve-se refletir sobre os ensinamentos dos autores citados e diante do perfil de cada grupo de alunos aplicarem esses conhecimentos, considerando que tanto este quanto aquele aluno é capaz de aprender, cada um dos autores citados tem suas peculiaridades, uns exploram algumas potencialidades dos alunos, outros mencionam deficiências docentes, no entanto, todas as estratégias ou metodologias que conduzam a enriquecer o conhecimento devem ser utilizadas.

3. Metodologia

Para atingir o objetivo proposto neste trabalho, a pesquisa realizada foi do tipo bibliográfica. Teve como característica a busca da resolução de um problema ou hipótese. De acordo Bocato (2006) para realizar essa busca deverão ser consultados referenciais teóricos, os quais já devem estar publicados, portanto, validadas as suas contribuições cientificas. O mesmo autor menciona que por meio desse tipo de pesquisa serão encontradas bases teóricas para conhecimento aprofundado sobre o objeto da pesquisa, apresentando os direcionamentos e as perspectivas com que foi outrora pesquisado tal objeto e como está apresentado na literatura científica.

Para tanto, antes de iniciar a pesquisa à que se refere este trabalho seguiu-se os encaminhamentos dados por Bocato (2006), aqueles relacionados ao planejamento sistematizado do processo de pesquisa. Isto é, a definição da temática e a elaboração das etapas do trabalho de pesquisa.

Relacionados às etapas da pesquisa, direcionamentos dados por Gil (1997) foram adotados, os quais mencionam que em virtude das fontes bibliográficas serem numerosas pode ser classificado. Logo, procedeu-se a classificação por livros, os quais foram classificados buscando pensamentos e reflexões de autores que defendem o ensino da matemática adotando o viés formador e crítico, alguns de leitura corrente e divulgação, outros de autores de referência.

Também foram consultados periódicos, tais como, revistas impressas, revistas eletrônicas, isto é, artigos científicos publicados e disponibilizados em endereços eletrônicos.

3.1. Aplicações de máximos e mínimos de funções no Ensino Médio

Com o interesse em atingir o objetivo da pesquisa, buscou-se elencar alguns trabalhos científicos desenvolvidos com a utilização do CD para ensino médio, assim alguns exemplos foram selecionados para alavancar as reflexões e posteriormente fazer algumas considerações. Os referidos trabalhos estão diretamente relacionados com a aplicação de máximos e mínimos de funções no ensino médio.

Em Pereira (2009) encontra-se uma pesquisa realizada pelo autor no intuito de investigar o desempenho dos alunos do ensino médio, envolvendo CD e o problema de variabilidade em funções. Uma das observações do autor pode ser vista na tabela 1.

Tabela 1: Tabela com resultados parciais da pesquisa.

Hipóteses	Atingiram os Objetivos	Atingiram Parcialmente os Objetivos	Não Atingiram os Objetivos
H1 - Compreender a propriedade fundamental da função afim;	42,00%	58,00%	0,00%
H2 - Compreender a caracterização das funções polinomiais de 1° e 2° graus de acordo com a sua variação;	63,64%	18,18%	18,18%
H3 - Associar a taxa de variação média de uma função com o coeficiente angular da reta secante a dois pontos do gráfico da função;	92,86%	0,00%	7,14%
H4 – Compreender o comportamento local da reta tangente e ser capaz de traçá-la;	92,86%	0,00%	7,14%
H5 – Compreender taxa de variação instantânea como aproximações da taxa de variação média calculadas em intervalos cada vez menores;	72,72%	18,18%	9,10%
H6 – Associar a reta tangente com aproximações das retas secantes traçadas em intervalos cada vez menores.	72,72%	18,18%	9,10%

Fonte: (PEREIRA, p. 175, 2009)

De acordo com a tabela 1, é possível observar que é muito baixa a porcentagem de alunos que não atingiram os objetivos.

Em uma de suas considerações, Pereira (2009) menciona que os estudantes do ensino médio são inteiramente capazes de se apropriarem dos conceitos de CD. Consideração importante que fortalece a iniciativa daqueles professores que pretendem utilizar conceitos do CD no nível médio de ensino. É necessário que os professores que lecionam no ensino médio possam saber que:

> O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo do ensino é grave porque deixa de lado uma

> componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA, 1991, p.2)

Acredita-se que nem toda informação cientifica chega até o conhecimento do professor do ensino básico, portanto, cabe às esferas responsáveis pela formação continuada desses professores informa-los a respeito dessa componente citada por Ávila (1991).

Em outro trabalho foi relatada as aplicações de problemas de otimização para encontrar a área mínima e máxima, tema de estudo de Rocha (2013), o autor elaborou uma coletânea de atividades, envolvendo a otimização e concluiu por meio de sua pesquisa bibliográfica, que é perfeitamente possível trabalhar tais conteúdos no ensino médio.

Exemplo: Um pedaço de arame com comprimento l será dobrado para formar um círculo ou um quadrado ou ambos, dividindo-se o arame em dois pedaços. Determine como dividir o arame para que a área das figuras contornadas pelo arame seja:

a) mínima;

b) máxima.

Deseja-se cortar um fio, formando duas figuras: um círculo e um quadrado, com objetivo de minimizar e maximizar a soma das duas áreas. Uma maneira de tentar resolver este problema é transformar a situação descrita em uma função que possa ser otimizada. Sejam l_1 e l_2, respectivamente, os comprimentos dos fios utilizados para formar o círculo e o quadrado. Assim, temos que $l_1 + l_2 = l$, consequentemente: $A(l_1) = \frac{l_1^2}{4\pi}$ e $A(l_2) = \frac{l_2^2}{16}$, onde $A(l_1)$ e $A(l_2)$, são respectivamente, as áreas do círculo e do quadrado obtidos pelo corte do fio. Logo, $A(l) = A(l_1) + A(l_2)$.

$$A(l) = \frac{l_1^2}{4\pi} + \frac{l_2^2}{16} \rightarrow A(l) = \frac{l_2[(4+\pi)l_2 - 8l_2] + 4l^2}{16\pi}.$$

Como l é um número real positivo fixado, observa-se na expressão anterior que se trata de uma função quadrática na variável l_2, sendo positivo o coeficiente do termo quadrático, consequentemente o valor mínimo ocorre quando $l_2 = \frac{8l}{2(4+\pi)} = \frac{4l}{4+\pi}$.

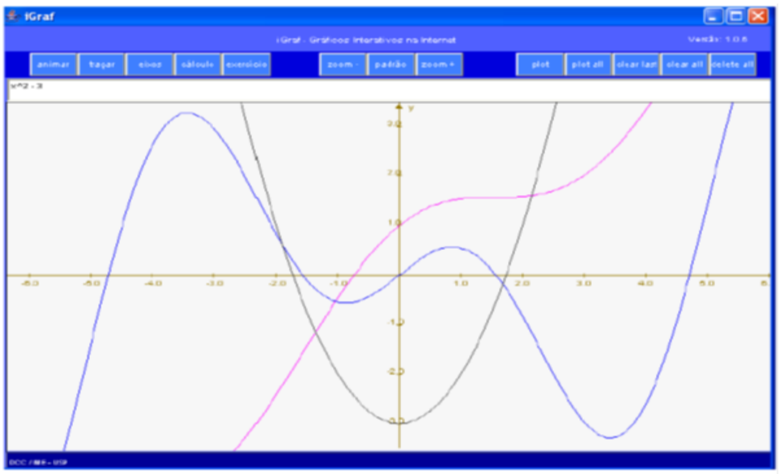
Consequentemente, $l_1 = \pi_1 = (4 + \pi)$, de onde conclui-se a resposta do item (a), ou seja, o fio deve ser cortado em dois pedaços medindo $\pi_1 = (4 + \pi)$ e $\frac{4l}{(4+\pi)}$, onde com o primeiro pedaço forma-se o círculo e com o segundo pedaço o quadrado.

Já para responder o item (b), observa-se que $A(l)$ pode ser colocado na forma: $A(l) = \frac{l_2[(4+\pi)l_2 - 8l_2]+4l^2}{16\pi}$. Analisando o sinal de $(4+\pi)l_2 - 8l$, tem-se que o mesmo é negativo pois$(4+\pi)l_2 < 8l_2 < 8l$. Como no item(b) deseja-se maximizar $A(l)$ então deve-se ter $l_2 = 0$ para que $A(l)$ seja máxima, consequentemente, o fio deve ser usado somente com um círculo de raio l/2π para que a área seja máxima, ou seja, o fio não deve ser dividido.

As atividades elaboradas por Rocha (2013) não seguem o padrão usual de ensinar a matemática, aquela em são apresentadas definições, exemplos e exercícios.

Na bibliografia também são encontradas situações envolvendo a informática e o CD, em Do Prado e Brandão (2006) encontra-se o protótipo de um programa chamado iGraf, (Figura 1) no qual pode ser utilizado em qualquer navegador Web.

Figura1: Interface do protótipo iGraf.



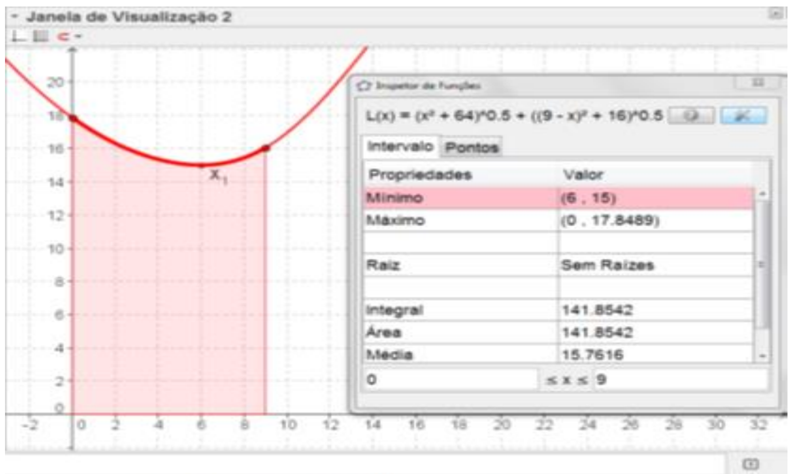
Fonte: (DO PRADO; BRANDÃO, p.3, 2006)

De acordo com os autores o software terá utilidade para atividades presenciais ou não, ainda poderá ser utilizado com a possibilidade de avaliação automática do trabalho discente. Dentre as utilidades do software está a possibilidade de utiliza-lo para calcular raízes, máximos e mínimos de funções. Esta é uma excelente opção para os docentes das escolas que tem a disposição um laboratório de informática apropriado.

Outro Software que pode ser utilizado para o ensino de máximos e mínimos de funções é o geogebra, o qual possui um comando que inspeciona as funções, onde seleciona-se a função matemática desejada e na sequência o software apresenta propriedades como Mínimo, Máximo, Raiz, Integral e a área referente àquela função (GRANDE; VAZQUEZ, 2014).

O trabalho desenvolvido por Grande e Vazquez (2014) é um minicurso apresentado para alunos de uma universidade com o objetivo de apresentar algumas utilidades do software geogebra, com a utilização de alguns elementos do Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 2: Gráfico da função L



Fonte: (GRANDE; VAZQUEZ, p. 32, 2014)

Com a utilização do Geogebra foi possível encontrar a otimização da função e representa-la graficamente. (GRANDE; VAZQUEZ, p. 34, 2014) concluem que não são necessários muitos pré-requisitos dos usuários e é possível, “manipular de forma dinâmica objetos geométricos auxiliando intuitivamente dessa forma a formulação de conjecturas por parte dos alunos e posteriormente as possíveis validações e refutações dessas conjecturas”.

Portanto, pelo que se pode analisar nada impede que seja aplicado para alunos do ensino médio, e isso é verificável por meio da análise da Figura 2.

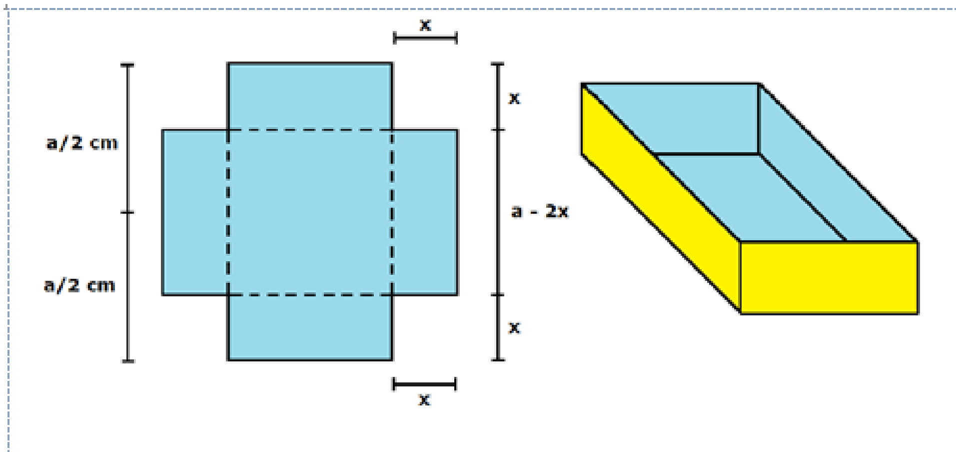
Com o objetivo de explorar e apresentar problemas de otimização de manufatura que minimizem a quantidade de material utilizado, de maneira que se obtenha o volume máximo para esta caixa, os autores desse trabalho de pesquisa também apresentam um modelo de atividade que pode ser desenvolvida com alunos do ensino médio. A preocupação em apresentar este modelo de atividade, reside na preocupação em colaborar com o ensino de matemática, oferecendo ao professor da educação básica aporte teórico e prático para as estratégias de ensino.

O modelo de atividade refere-se à problematização de formar uma caixa retangular sem tampa retirando quatro quadrados de lado x nos cantos de uma folha quadrada de lado a, em seguida, dobrando e colando os retângulos de lados x e a, conforme a (Figura 3), que vem a seguir:

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Medianeira – Paraná – Brasil
ISSN 2175-1846 / v.01, n01, 2010

INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

Figura 3: Caixa retangular



Fonte: (FATOS MATEMATICOS, 2015)

Tem-se então a pergunta: *Entre todas as caixas que podemos construir dessa forma, qual é a que possui volume máximo?*

Para responder essa pergunta, usa-se o Cálculo Diferencial.

$$V(x) = (a - 2x)^2 . x \quad \rightarrow \quad V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Sendo que o volume *x* é positivo e *2x < a* segue que *x < a/2*. Para determinar para quais valores de *x* a função $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$ é crescente analisando a desigualdade *V (x + h) - V (x) > 0*, para *h > 0*. Logo, tem-se que:

$$V(x+h) - V(x) = 4(x+h)^3 - 4a(x+h)^2 + a^2(x+h) - 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$
$$= 4(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 4a(x^2 + 2xh + h^2) + a^2(x+h) - 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$
$$= 4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4ah^3 - 4ax^2 - 8axh - 4ah^2 + a^2x + a^2h - 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$
$$= h[4h^2 + (12x - 4a)h + 12x^2 - 8ax + a^2]$$

Como *h > 0*, para que *V (x + h) - V (x) > 0*, deve-se ter $4h^2 + (12x - 4a)h + 12x^2 - 8ax + a^2$ por menor que seja *h*.

A função da primeira derivada de $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$, igualando a zero, obtendo a equação quadrática, temos que: $12x^2 - 8ax + a^2 = 0$.

Usando a fórmula resolvente de uma equação quadrática, segue que os possíveis valores para maximizar volume da caixa são:

$$x' = x" = \frac{-(-8a) \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4.12.a^2}}{2.12}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Medianeira – Paraná – Brasil
ISSN 2175-1846 / v.01, n01, 2010

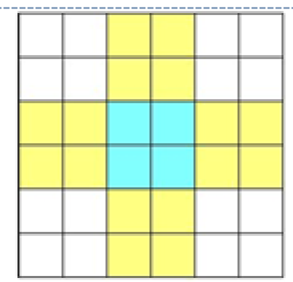
INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

$$x' = \frac{8a + \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} \quad e \quad x" = \frac{8a - \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24}$$

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x' = \frac{a}{2} \; e \; x" = \frac{a}{6}$$

Para isso, é necessário que, $12x^2 - 8ax + a^2 > 0$, que ocorre para $x < a/6$ ou $x > a/2$, pois neste caso, é sempre possível escolher h pequeno o bastante para que $|h(4h + 12x - 4a)| < 12x^2 - 8ax + a^2$. Para determinar onde $V(x)$ é decrescente, o desenvolvimento é análogo, invertendo-se apenas a desigualdade, ou seja, para que $V(x + h) - V(x) < 0$, por menor que seja h, deve-se ter $a/6 < x < a/2$ (intervalo entre as raízes de uma função quadrática). Portanto, como $V'(0) = V'(a/2) = 0$ e, $V'(x)$ cresce para $x < a/6$ ou $x > a/2$ e decresce para $a/6 < x < a/2$. Para provar que $V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$ derivando essa função, tem-se que $V''(x) = 24x - 8a$, então para $x = a/6$, temos $V(a/6) = -4a < 0$. Assim, pelo teste da derivada segunda, conclui-se que para $x = a/6$ tem-se uma caixa de volume de máximo. Geometricamente, para construir essa caixa, divide-se os lados de uma cartolina em 6 partes iguais conforme a (Figura 4), retirar 4 quadrados nos cantos superiores, dobrar e colar.

Figura 4: Visualização geométrica da caixa



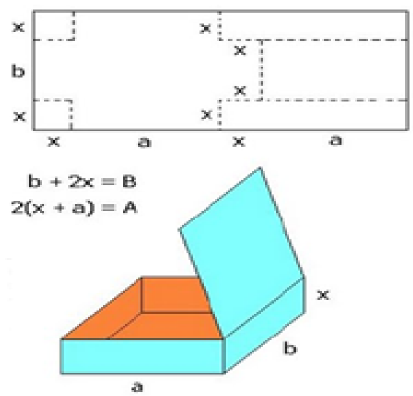
Fonte: (FATOS MATEMATICOS, 2015)

Outro exemplo que pode ser citado é a construção de uma caixa com tampa de base retangular a partir de uma folha de base A e altura B, de modo que seu volume seja máximo, recortando convenientemente a folha de papel. Essa também é uma das aplicações do cálculo nas embalagens, (Figura 5), tais como as caixas de chocolate.

Figura 5: Visualização da caixa a ser construída.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Medianeira – Paraná – Brasil
ISSN 2175-1846 / v.01, n01, 2010

INOVAÇÃO E TECNOLOGIA



Fonte: (FATOS MATEMATICOS, 2015)

Na Figura 5, tem-se a folha e a caixa construída. Matematicamente, é preciso determinar *x*, de modo que volume *V* (*x*) = *abx* seja máximo. Das expressões presentes na figura, segue que:

$$a = \frac{A}{2} - x \quad e \quad b = B - 2x$$

De modo que:

$$V(x) = x\left(\frac{A}{2} - x\right)(B - 2x) \quad \rightarrow \quad V(x) = 2x^3 - (A + B)x^2 + \frac{ABx}{2}$$

O volume é positivo, então $0 < x < \frac{B}{2}$ ou $0 < x < \frac{A}{2}$. Mas, $0 < B < A$ que o domínio de *V(x)* é dado por $0 < x < \frac{B}{2}$. Derivando essa função, temos que; $V'(x) = 12x^2 - 4(A + B)x + AB$.

Igualando a zero, obtém-se a equação quadrática: $12x^2 - 4(A + B)x + AB = 0$.

Usando a fórmula resolvente de uma equação quadrática, segue que os possíveis valores para maximizar volume da caixa são:

$$x' = x" = \frac{-[-4(A + B)] \pm \sqrt{[-4(A + B)]^2 - 4.12.AB}}{2.12}$$

$$x' = x" = \frac{4A + 4B \pm \sqrt{16A^2 + 32AB + 16B^2 - 48AB}}{24}$$

$$x' = x" = \frac{4A + 4B \pm 4\sqrt{A^2 + AB + B^2}}{24} \quad \rightarrow \quad x' = x" = \frac{A + B \pm \sqrt{A^2 + AB + B^2}}{6}$$

$$x' = \frac{A + B - \sqrt{A^2 - AB + B^2}}{6} \quad e \quad x" = \frac{A + B + \sqrt{A^2 - AB + B^2}}{6}$$

Note que $A^2 - AB + B^2 > A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2 > 0$ de modo que as duas raízes são reais e pela regra de sinais de Descartes, essas raízes são positivas, portanto encontra-se a função $V'(x) = 6x^2 - 2x(A + B)$, logo sua derivada será: $V"(x) = 12x - 2(A + B)$

Logo:

$$V"(x') = -\sqrt{A^2 - AB + B^2} < 0 \qquad e \qquad V"(x") = -\sqrt{A^2 - AB + B^2} > 0$$

Pelo teste da derivada segunda, o único valor que irá maximizar o volume da caixa é x', se A = B = a, então é fácil ver que x = a/6 é o valor que irá maximizar o volume da caixa.

Os exemplos de atividades pesquisadas, desenvolvidas e presentadas aqui mostram que as possibilidades de inserção do CD no ensino médio são possíveis, isto é, a união do ensino de cálculo com o ensino de funções. Para Rezende (2003) tal inserção deve acontecer pois:

> (...) o sucesso do ensino da matemática está condicionado a uma preparação das ideias básicas do Cálculo no ensino básico de Matemática. Ao permitir o Cálculo participar efetivamente da tecedura do conhecimento matemático do ensino básico, acreditamos que as dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo serão em grande parte superada, tanto quanto os do próprio ensino da Matemática. (REZENDE, p. 442, 2003).

O autor sinaliza para que o cálculo ou noções de cálculo sejam inseridas já no ensino básico para que no futuro, dificuldades inerentes ao ensino da matemática, estejam superadas. O que sugere a melhor preparação do docente do ensino básico e que os conteúdos da matemática estejam inter-relacionados com as demais áreas do conhecimento, gerando assim, o ensino interdisciplinar.

4. Considerações Finais

O modo tradicional de ensinar, usando apenas lousa e giz, pode ser insuficiente para a compreensão dos alunos acerca dos problemas que envolvem geometria e gráficos de funções, uma vez que muitos alunos tem dificuldades de imaginar um objeto em 3 dimensões visualizando apenas um desenho no plano. A dificuldade de visualização pode se tornar ainda maior se o esboço, feito à mão, não for bem desenhado.

O uso de softwares possibilita a formação de um gráfico ou desenho mais preciso, além de permitirem que objetos tridimensionais sejam visualizados de diferentes ângulos. Modelos palpáveis contribuem para diminuir a abstração dos problemas de otimização. No entanto, para fazer bom uso de softwares e modelos, o professor precisa ter domínio dos conteúdos de Cálculo.

Há pesquisadores da área de Educação Matemática que defendem que, futuramente, noções de Cálculo devem ser abordadas já no Ensino Médio; isto é interessante, visto que possibilitaria aos alunos uma compreensão melhor da resolução dos problemas, em vez de apenas decorarem um "passo-a-passo" que funciona apenas para casos específicos.

Para dar continuidade a esta pesquisa, futuramente pretende-se dar, a pelo menos uma turma de Ensino Médio, noções de Cálculo, posteriormente aplicar os softwares e modelos propostos neste trabalho, e então avaliar a assimilação e compreensão da otimização por parte dos alunos.

5. Referências Bibliográficas

AVILA, G**. Derivadas e Cinemática.** Revista do Professor de Matemática, n.°61. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

AVILA, G. **Limites e Derivadas no Ensino Médio?** In: Revista do Professor de Matemática, nº 60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

AVILA, G. **O Ensino de Matemática**. In: Revista do Professor de Matemática, nº 23, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1993, p.1-7.

AVILA, G. **O Ensino do Calculo no Segundo Grau.** In: Revista do Professor de Matemática, nº18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

ÁVILA, G; **Introdução às funções e à derivada** - São Paulo; Atual, 1994.

BOCCATO, V. R. C. Metodologia da pesquisa bibliográfica na área odontológica e o artigo científico como forma de comunicação. **Rev. Odontol. Univ. Cidade São Paulo**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 265-274, 2006.

BRUNER, J.S. (2001) *A cultura da educação*. Porto Alegre, Artes Médicas.

Campinas, SP: Papirus, 1996.

COSTA, Jorge da. Ciências da Linguagem: Comunicação, Cognição e Computação–Relações Inter-Intradisciplinares. **Inovação e Interdisciplinaridade na Universidade.** Porto Alegre: Edipucrs, p. 361-386, 2007.

D' AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: Da teoria à prática.

DO PRADO, Reginaldo; BRANDÃO, Leônidas O. iGraf: Módulo de aprendizagem para ensino de função na web. In: **XIV Brazilian Symposium on Informatics in Education**. 2006.

DUCLOS, R.C. **Cálculo no Segundo Grau.** In: Revista do Professor de Matemática, n° 20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Medianeira – Paraná – Brasil
ISSN 2175-1846 / v.01, n01, 2010

INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

FATOS MATEMÁTICOS: disponível em < http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/08/compendio-do-blog-fatos-matematicos.html> Acesso: 15 jun. 2015.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos**. Autores Associados, 2006.

FREIRE, Paulo, **Educação como prática de liberdade**. 18. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GIL, A. Carlos. **Metodologia do ensino superior**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1997.

GRANDE, André Lúcio; VAZQUEZ, Vágner Ramos. Resolução de problemas de otimização com o auxílio do software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657**, v. 3, n. 1, p. 34, 2014.

MIORIM, Maria A. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

PEREIRA, Vinicius Mendes Couto. Cálculo no ensino médio: uma proposta para o problema da variabilidade. **Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ, Rio de Janeiro-RJ**, 2009.

PIAGET, J. (1973) *Biologia e conhecimento: ensaio sobre as relações entre as regulações orgânicas e os processos cognoscitivos.* Petrópolis, Vozes.

PIAGET, J.; GARCIA, R. **Psicogénese e história das ciências.** Lisboa: Dom Quixote, 1987.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

PROENÇA, M. C., PIROLA, N. A. A formação de conceitos no ensino de matemática e física: Um estudo exploratório sobre a formação conceitual em geometria de alunos do ensino médio. In: CALDEIRA, A.M.A. org. *Ensino de ciências e matemática, II:* temas sobre a formação de conceitos [online]. São Paulo: Editora UNESP; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2009.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.** SEMINÁRIO INTERNACIONAL E PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2003. Santos. Anais...Santos: II SIPEM.

REZENDE, Wanderley Moura. **O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

ROCHA, Alan Martins. Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio. 2013.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. Campinas: Papirus, 2008.

SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. (org.) Ler, escrever e resolver problemas. Porto Alegre: Artmed, 2001.

VALENTE, Wagner Rodrigues. "Que geometria ensinar? Uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças. Revista Pro-Posições. V 24 N. 1 (70), p. 159-178, 2013.

VIANA, O. A.; Conhecimentos prévios e organização de material potencialmente significativo para a aprendizagem da geometria espacial. **Ciências & Cognição**, v. 16, n. 3, p. 15-36, 2011.

VIGOTSKI, L.S. (2001) *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo, Martins Fontes.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Medianeira – Paraná – Brasil
ISSN 2175-1846 / v.01, n01, 2010

INOVAÇÃO E TECNOLOGIA

Dados completos dos autores:

Nome completo: Junior Luis Storch
Filiação institucional: Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Campus Medianeira
Departamento: Matemática e Estatística
Função ou cargo ocupado: estudante
Titulação: graduação em Matemática
Endereço completo para correspondência: Avenida Brasil, 4232, CEP 85884-000 – Caixa Postal 271 – Medianeira-PR, aos cuidados de prof. Vanessa Hlenka – Departamento de Matemática e Estatística
Telefones para contato: recado com prof. Vanessa, (45)3240-8126 e (45)9905-8675
e-mail: junior_lsi@hotmail.com

Nome completo: Vanessa Hlenka
Filiação institucional: Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Campus Medianeira
Departamento: Matemática e Estatística
Função ou cargo ocupado: professora DE
Titulação: mestrado em Matemática
Endereço completo para correspondência: Avenida Brasil, 4232, CEP 85884-000 – Caixa Postal 271 – Medianeira-PR
Telefones para contato: (45)9905-8675 e (45)3240-8126
e-mail: vanessah@utfpr.edu.br