

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS COM CANUDOS DE JORNAIS NO ESTUDO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Silvio Aparecido Barbosa ¹; Lucas da Silva Ribeiro ².

^{1,2} Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Medianeira – Brasil

profsilvioceu@hotmail.com ¹

lribeiro@utfpr.edu.br ²

Resumo *O trabalho pretende facilitar o ensino de Geometria Espacial que recaem na falta de material didático básico para trabalhar em sala de aula, salas exclusivas para o ensino de geometria e falta de pré-requisitos por parte dos alunos de conteúdos que fundamentam a geometria. Em relação a uma aula “ideal”, tem levado os educadores a buscarem meios de facilitar o ensino das propriedades matemáticas, que muitas vezes se tornam cansativas. A atividade que é proposta aqui, além de possibilitar que o aluno construa estruturas com a geometria espacial, torna possível a visualização de alguns elementos que no quadro são menos notados e também por meio do uso de técnicas de trabalho manual despertar nos alunos o interesse em aprender.*

Palavras-chave: geometria espacial; ensino médio; professor; ensino-aprendizagem.

1 Introdução

A dificuldade de aprendizagem apresentada pelos alunos nas aulas de matemática tem levado os educadores a buscarem meios de facilitar o ensino das propriedades matemáticas, que muitas vezes se tornam cansativas. Sabe-se que uma das melhores formas de se fixar o que se aprende é poder ensinar, poder dividir o conhecimento adquirido (Oficina de canudinho, 2013). Pensando nisso, este trabalho visa proporcionar um momento de interação entre os alunos, no qual eles poderão expor seus conhecimentos, e interagir com os demais colegas, aplicando na prática o que aprendeu em sala de aula.

As mudanças sociais e tecnológicas, as quais geram uma grande variedade de funções no mercado de trabalho, colocam a necessidade de repensar as atitudes e estratégias de aprendizado da matemática. Para Silva (1992) é urgente recorrer a um ensino de matemática com articulação entre teoria e prática, conteúdo e forma a partir do resgate da questão cultural, para que haja o desenvolvimento do raciocínio lógico, da criatividade, e do espírito crítico. Ainda segundo o autor (SILVA, 1992), a matemática é um bem cultural, constituído a partir das relações do homem com a natureza sendo portanto, dinâmica e viva.

Todo o conhecimento matemático necessário para conquistar o desenvolvimento tecnológico está muito além da sala de aula, devido às especificidades e complexidades técnicas.

A justificativa para a escolha do tema estudado trata da questão de que a matemática ainda hoje é vista por muitos alunos como uma disciplina difícil e teórica, sendo que muitos dos conhecimentos não tem aplicação prática, é necessário trabalhos que mostre novas maneiras de ensinar, não priorizando a memorização de fórmulas e situações sem contexto, como acontecia em outros tempos.

A geometria está presente em diversas situações cotidianas, tanto na escola quanto fora dela. Ao andar pelas ruas, observar construções e diferentes materiais, observa-se que ela está presente em toda parte. Para percebê-la, basta ter um olhar sensível.

No ensino da matemática é grande a necessidade da utilização de material práticos, especialmente no ensino fundamental. Porém, mesmo no ensino médio, esse material pode ser uma fonte que auxilia o aluno na passagem do concreto para o abstrato, tornando-o sujeito ativo do processo de construção do conhecimento (Joseane e Silvio). Despertar o interesse do aluno na sala de aula, ele deixará a teoria e passará a ver a relação entre o conteúdo estudado e a prática. A atividade que é proposta aqui, além de possibilitar que o aluno construa estruturas com a geometria espacial, torna possível a visualização de alguns elementos que no quadro são menos notados. Estes elementos são: os vértices, as arestas, as faces e os apótemas dos sólidos geométricos.

Sendo destacados os objetivos específicos, construir figuras geométricas espaciais com canudos de jornais, visualizar as propriedades matemáticas de áreas e volumes, compreender soluções de problemas, estimular a vontade de aprender e proporcionar momentos de interações e aprendizagens entre os alunos.

2 Referencial Teórico

A geometria é, frequentemente, ensinada na lousa ou por meio de livros didáticos. Na abordagem de figuras planas, esse método é fácil para o aprendizado da criança, mas quando se trata do ensino da geometria espacial, muitos alunos apresentam dificuldades na visualização dos sólidos geométricos e com isso acabam se desinteressando pelas aulas.

Segundo Viviane Aparecida Verona (mestre Engenharia e Ciência de Matérias) e Maria Regina Macieira Lopes (Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia). *“Nessa ação reflexiva é que as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (SEED, 2008) propõem que a matemática não seja ensinada apenas por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas que a apropriação do conhecimento matemático*

pelos alunos contribua para o desenvolvimento da sociedade. A matemática reveste-se de significado quando utiliza conceitos aplicáveis na vida diária e ainda como suporte para as várias ciências como engenharia, arquitetura, física, medicina entre outra. A geometria é um componente da Matemática extremamente importante na construção desses conhecimentos científicos e tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar. As recentes revisões do currículo de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio (SEED, 2008) devolvem à Geometria a importância que esta disciplina tem na aprendizagem de Matemática no nível elementar, pois permite resolver problemas do cotidiano e interfere fortemente na estruturação do pensamento, levando à construção do conhecimento”.

Geometria: Suas origens na História: A palavra geometria é derivada do grego “geometrein”, sendo “geo”= terra e “metrein”= medir. A origem provável da Geometria vem da medição dos terrenos do Antigo Egito. Porém há registros na História de que outras civilizações antigas, como Babilônia, China e Índia também possuíam conhecimentos geométricos. A Geometria surgiu da necessidade de melhorar os sistema de arrecadação de impostos de áreas rurais, sendo os primeiros passos dados pelos egípcios para desenvolvê-la (figura 1).

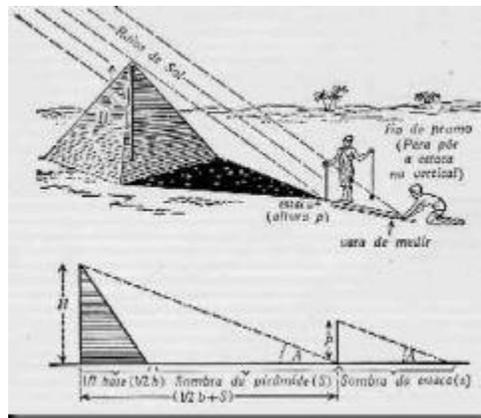


Figura 1 - Aplicação do conhecimento de semelhança de triângulos.

No chamado “Livros dos Mortos” do Egito antigo constava que roubar a terra do vizinho era considerado uma ofensa tão grave como quebrar um juramento ou assassinar alguém. Naquela época, não existiam marcos fronteiriços e os agricultores, os administradores de templos, palácios e demais unidades produtivas fundadas na agricultura não tinham referência clara do limite das suas posses, tanto para cultivo, como para pagamento de impostos devidos aos governantes, de acordo com a medida da sua extensão.

A Geometria, em seus primórdios, era uma ciência empírica, ou seja, experimental. As medições baseavam-se em algumas regras para se chegar a resultados aproximados. As civilizações ora acertavam em seus cálculos, ora erravam, pois não havia um rigor matemático que os ajudasse em seus cálculos. Mas, somente a partir do conhecimento desenvolvido pelos matemáticos gregos é que a Geometria pôde ser estabelecida como teoria dedutiva. Assim, através do raciocínio dedutivo, começaram a provar a veracidade das proposições através de Hipóteses e Demonstrações. Tales de Mileto (624-547 a.C.) e seu discípulo Pitágoras (572-497 a.C., figura 2) reuniram todo o conhecimento do Egito, da Etúrria, da Babilônia, e mesmo da Índia, para desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação e religião. A curiosidade crescia e os livros sobre Geometria eram muito procurados. Um compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos, e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. O conhecimento do Universo aumentava com rapidez e a escola pitagórica chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Surgiam novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros eram agora fáceis de calcular.



Figura 2 - Pitágora e as relações métricas no triângulo retângulo.

Pitágoras, após suas viagens ao Egito e à Babilônia, estabeleceu-se em Crotona (cidade ao sul da Itália) e fundou o que chamamos de “Escola Pitagórica”: um culto religioso e filosófico que pregava a purificação do espírito através da música e da matemática. Porém, não existem documentos matemáticos produzidos por eles, que tenham sido encontrados. O que há registrado na História da Matemática, é um resumo feito por Proclo, comentando os "Elementos" de Euclides, do século V a.C., referindo-se a Tales de Mileto (figura 3) como o introdutor da Geometria na Grécia, por importação do Egito.

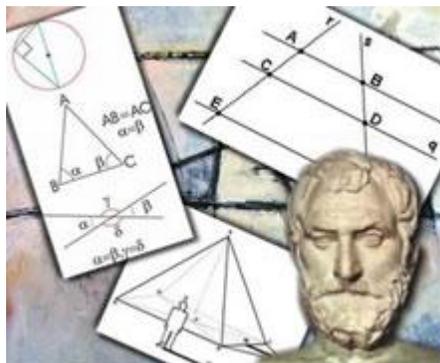


Figura 3 - Teorema de Tales: importante ferramenta na determinação de medidas utilizando a proporcionalidade.

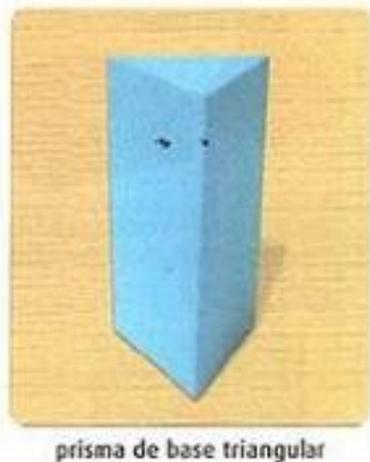
As influências da Geometria nas Ciências físicas foi muito importante. Como exemplo, o astrônomo Johannes Kepler mostrou que as relações entre as velocidades máximas e mínimas dos planetas, propriedades intrínsecas das órbitas, estavam em razões harmônicas (relações musicais), afirmando ser uma música que só podia ser percebida com os ouvidos da alma (a mente do geômetra). A introdução do “Plano Cartesiano” também trouxe uma solução simplificada para os problemas de Álgebra, transformando-os em problemas de Geometria.

1- Poliedro

Os poliedros são figuras que fazem parte da geometria espacial, ou seja, possuem três dimensões (comprimento, largura e altura), formados de vértices, arestas e faces. As faces do poliedro são formadas por polígonos (figura plana, fechada e composta de n segmentos de retas) e as arestas e os vértices correspondem aos lados e aos vértices dos polígonos

O Teorema ou Relação de Euler é válido somente para poliedros regulares os quais todas as faces possuem o mesmo número de arestas e são compostos de polígonos regulares, ou seja, cada um com o mesmo número de lados. Ademais, nos polígonos regulares, para cada vértice, converge um mesmo número de arestas. Não obstante, o Teorema de Euler estabelece uma relação entre o número de faces, vértices e arestas, a saber: $V + F - A = 2$, sendo F o número de faces, V o número de vértices e A o número de arestas.

Alguns poliedros podem ser classificados em prismas (figura 4) ou pirâmides (figura 5), de acordo com suas características.



prisma de base triangular

Figura 4 - Prisma triangular



pirâmide de base quadrada

Figura 5 - Pirâmide quadrangular

II- Prismas

Textos históricos mostram que o prisma é uma figura geométrica conhecida desde antes de 2000 a.C., pois, segundo Eves (2004), os estudiosos da época já mostram-se familiarizados com o volume do paralelepípedo reto retângulo e, mais geralmente, do volume do prisma reto de base trapezoidal. Estudos produzidos historicamente mostram que diversos estudiosos dedicaram-se ao estudo do prisma. Dentre estes estudiosos podemos destacar Platão, Demócrito e Arquimedes. Platão, que viveu no IV século a.C., dentre os seus estudos geométricos mostrou interesse pelo estudo do cubo quando estudou os poliedros

regulares. Ele associava cada poliedro com um dos elementos naturais, sendo que o cubo era associado com o elemento terra. Enquanto, Demócrito, comparou o volume do prisma com o volume da pirâmide e Arquimedes (287 – 212 a.C.) definiu os sólidos arquimedianos. Baseado nestes e outros dados, diversos matemáticos dedicaram-se ao estudo do prisma com objetivos diversos, neste trabalho será abordado o conceito de prisma segundo alguns autores contemporâneos.

O prisma é um sólido geométrico, que faz parte da geometria espacial, caracterizado por ser um poliedro convexo com duas bases (polígonos iguais) congruentes e paralelas, além das faces planas laterais (paralelogramos). Note que, os elementos que compõem o prisma são: base, altura, arestas, vértices e faces laterais.

Assim, as arestas das bases do prisma são os lados das bases do polígono, enquanto que as arestas laterais correspondem aos lados das faces que não pertencem às bases. Ademais, os vértices do prisma são os pontos de encontro das arestas e a altura é calculada pela distância entre os planos das bases.

Classificação dos Prismas: Os prismas (figura 6) são classificados em retos (possuem arestas laterais perpendiculares à base) e oblíquos (possuem arestas laterais oblíquas à base).

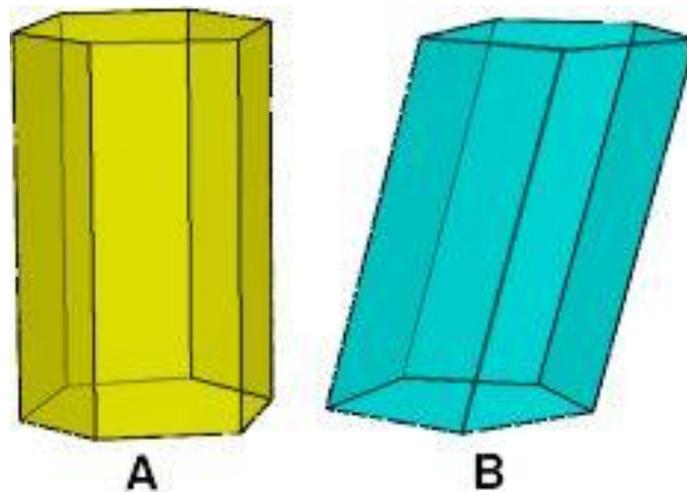


Figura 6 - prisma reto (A) e prisma oblíquo (B).

Bases do Prisma

De acordo com o formato das bases, os prismas (figura 7) são classificados em:

- Prisma Triangular: base formada por triângulo.
- Prisma Quadrangular: base formada por quadrado.
- Prisma Pentagonal: base formada por pentágono.

- Prisma Hexagonal: base formada por hexágono.
- Prisma Heptagonal: base formada por heptágono.
- Prisma Octogonal: base formada por octógono.

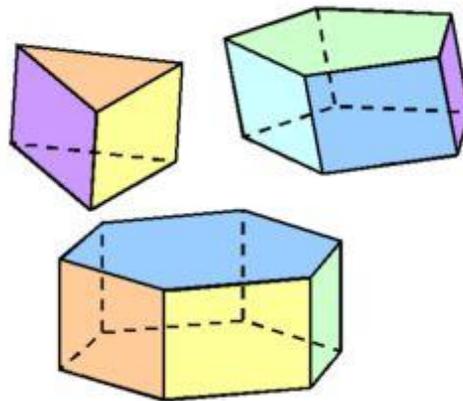


Figura 7 - Exemplos de prismas.

Importante ressaltar que os chamados “prismas regulares” são aqueles cujas bases são polígonos regulares e, portanto, formados por prismas retos. Note que se todas as faces do prisma forem quadrados, trata-se de um cubo; e, se todas as faces são paralelogramos, o prisma é um paralelepípedo.

Áreas do Prisma

- Área Lateral (A_L): para calcular a área lateral do prisma, basta somar as áreas das faces laterais. Assim, a área lateral de um prisma reto, que possui todas as áreas das faces laterais congruentes, utiliza-se a fórmula: $A_L = n \times A$, onde: n = número de lados e A_L = área da face lateral.
- Área Total (A_T): para calcular a área total de um prisma, basta somar as áreas das faces laterais e as áreas das bases, a saber: $A_T = A_L + 2 \times A_B$, onde: A_B = área do polígono da base.

Volume do Prisma

O volume (V) do prisma é calculado pela seguinte fórmula: $V = A_B \times h$, onde: A_B = área do polígono da base e h = altura do prisma.

III- Pirâmides

Pode-se perceber através das pirâmides do Egito que o estudo da pirâmide tem despertado interesse há milhares de anos. Observa-se isso através da grande pirâmide de Gizé construída por volta de 2600 a.C. em que “o erro relativo envolvendo os lados da base quadrada é inferior a $1/14000$ e o erro relativo envolvendo os ângulos retos dos vértices da base não excedem a $1/27000$ ” (EVES, 2004), mostrando, assim, o conhecimento e a capacidade de engenharia empreendida na obra. Para uma análise mais aprofundada sobre a engenharia da época é preciso considerar que os estudiosos babilônicos tinham um conhecimento matemático superior aos dos egípcios no mesmo período, ao mesmo tempo em que a matemática romana era bastante inferior à da Grécia nestes mesmos anos. Um dado que torna clara a inferioridade da matemática egípcia é o fato de que esta não distinguia claramente medidas exatas de medidas aproximadas. Um exemplo disso é que “o volume de um tronco de pirâmide era achado às vezes tomando a média aritmética das bases e multiplicando pela altura.” (BOYER, 1974). Em contrapartida tem-se o papiro de Moscou que traz uma fórmula para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide de base quadrada que pode ser usada até os dias atuais.

A pirâmide é uma figura geométrica espacial, um poliedro composto por uma base (triangular, pentagonal, quadrada, retangular, paralelogramo), um vértice (vértice da pirâmide, o ponto mais distante da base da pirâmide) que une todas as faces laterais triangulares.

Em outros termos, a pirâmide é um sólido geométrico de base poligonal que possui todos os vértices num plano (plano da base) donde sua altura corresponde a distância entre o vértice e sua base. Observe que o número de lados do polígono da base corresponde ao número de faces laterais da pirâmide.

Elementos da Pirâmide:

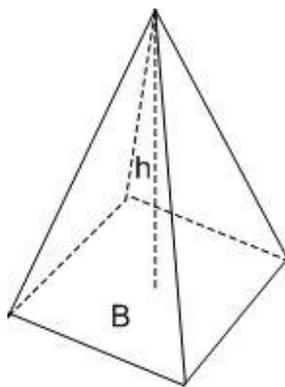


Figura 8 - Pirâmide quadrangular regular.

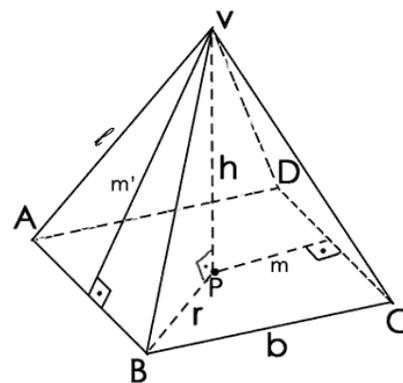


Figura 9 - Pirâmide quadrangular.

Das figuras 9 e 10:

- Base (B): corresponde à região plana poligonal na qual se sustenta a pirâmide.
- Arestas laterais, segmentos formados pela distância do vértice da pirâmide até sua base.
- Apótema da pirâmide (m'): corresponde à altura de cada face lateral.
- Apótema da base (m): Medida que vai do ponto P até qualquer lado da base, de modo que forme um ângulo de 90° com o lado da base.
- Superfície Lateral: é a superfície poliédrica composta por todas as faces laterais da pirâmide.
- Vértice da pirâmide (V): representa o ponto de união de todas as arestas laterais.
- Altura da pirâmide (h): é a altura medida de V até P. Como estamos falando de pirâmides retas, então a altura será sempre a medida de V até P.
- P – Ponto central da área da base.
- r – Medida do ponto P até qualquer vértice da base.

Tipos de Pirâmide

Segundo as bases e o número arestas que formam as pirâmides, elas são classificadas:

- Pirâmide Triangular: sua base é um triângulo, composta de quatro faces (três faces laterais e a face da base).
- Pirâmide Quadrangular: sua base é um quadrado, composta de cinco faces (quatro faces laterais e a face da base).
- Pirâmide Pentagonal: sua base é um pentágono, composta de seis faces (cinco faces laterais e a face da base).
- Pirâmide Hexagonal: sua base é um hexágono, composta de sete faces (seis faces laterais e face da base).

No tocante à inclinação da base, as pirâmides são classificadas em pirâmides retas (a reta que une o vértice da pirâmide ao centro da base é perpendicular ao plano que contem a base), ou pirâmides oblíquas (a reta que une o vértice da pirâmide (ponto mais alto) ao centro da base não é perpendicular ao plano que contem a base).



Figura 10 - O Museu do Louvre em Paris tem a forma de uma pirâmide de base quadrangular.

<http://www.infoescola.com/historia/museu-do-louvre/>

Áreas

Para calcular a área total da pirâmide (A_T) utiliza-se a seguinte fórmula: $A_T = A_L + A_B$, onde: A_L : Área lateral (soma das áreas de todas as faces laterais) e A_B : Área da base.

Volume

Temos um prisma e uma pirâmide com a mesma base e a mesma altura (figura 11). Vamos comparar os seus volumes:

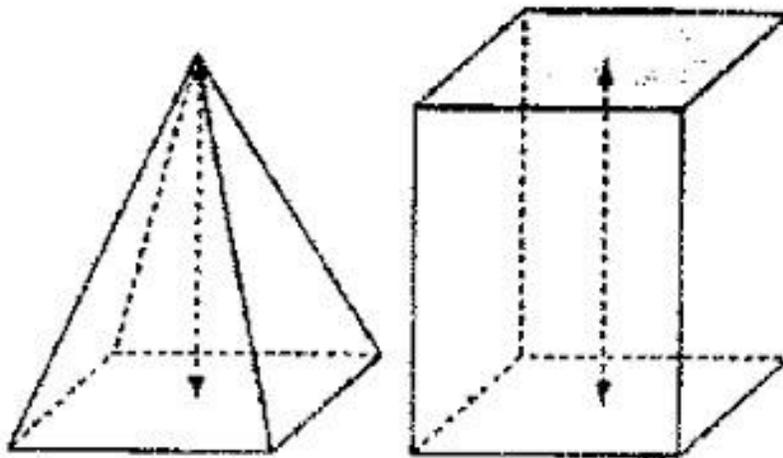


Figura 11 - Pirâmide e prisma com a mesma base e a mesma altura.

Se enchermos de água e vertermos dentro do prisma, ficará cheia uma terça parte deste. Quer dizer, são necessárias três pirâmides para completar o volume do prisma.

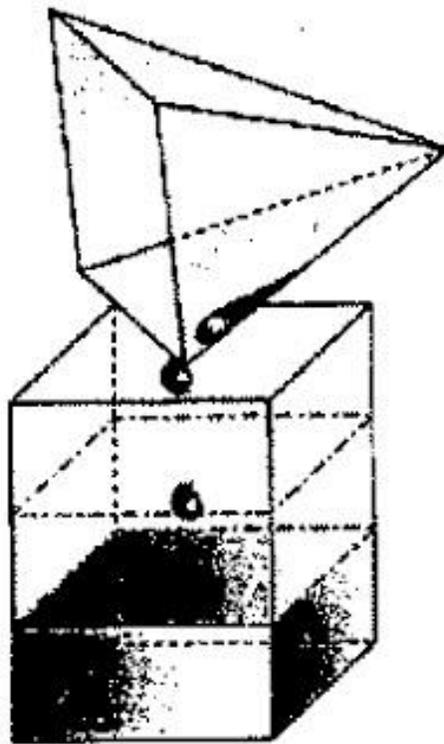


Figura 12 Volume da pirâmide ocupando a terça parte do volume do prisma.

Para calcular o volume da pirâmide, tem-se a expressão:

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \text{Área}_{base} \times altura$$

3 Metodologia

O projeto foi desenvolvido em uma turma de segundo ano do Ensino Médio, do Colégio Passos Firmes, em Matelândia, com 24 alunos, no mês de setembro de 2014. Nessa turma foi abordado o conteúdo de poliedros, destacando para este trabalho, os prismas e as pirâmides, dentro das oito horas/aula propostas, utilizando construções para manipulação, além de atividades contextualizadas e demonstrações práticas para o entendimento de fórmulas. Nas duas primeiras aulas uma revisão em geometria plana, em especial, os polígonos regulares. Aplicando atividades para calcular a área das figuras planas, fazendo as correções e esclarecendo as dúvidas. Nas três aulas seguintes, divisão da turma em grupos de quatro alunos e relatando sobre os prismas e as pirâmides, em seguida foi feita uma oficina com os alunos, onde eles

aprenderam a confeccionar estruturas que representam esboços de sólidos geométricos. Nas três aulas finais cada grupo de alunos apresentaram os trabalhos aos outros colegas, fazendo o cálculo de área total e volume de cada figura.

4 Desenvolvimento das Atividades

Para a elaboração desse trabalho foi necessário a utilização de canudos de jornais, cola, fita adesiva régua e tesoura. Com o uso de canudos de jornais eles aprendem a montar as figura por meio de suas arestas. As atividades desenvolvidas com detalhes (fotos) estão na sequência.

- Atividade 1: Construção de prismas



Figura 13 - Confeções dos canudos de jornais

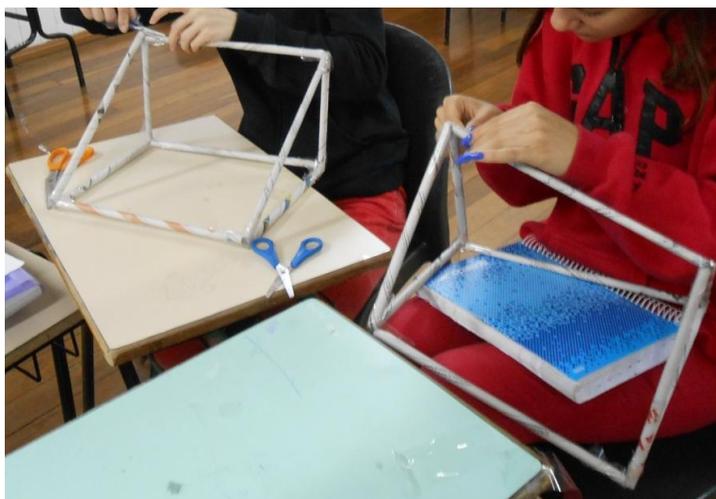


Figura 14 - Alunos do 2º ano do Ensino Médio montando um prisma triangular



Figura 15 - Alunas do 2º ano do Ensino Médio colocando as diagonais de um cubo

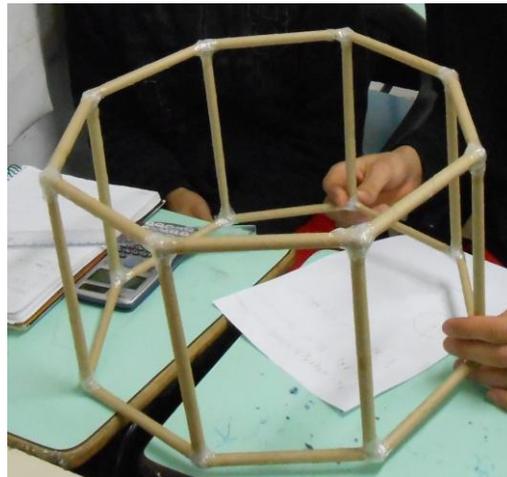


Figura 16 - Alunos do 2º ano do Ensino Médio apresentando um prisma octogonal

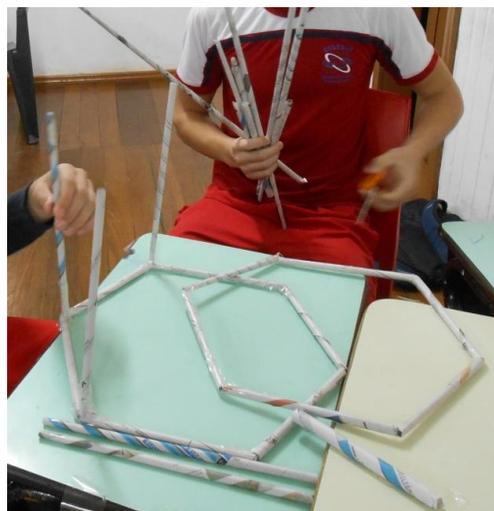


Figura 17 - Alunos do 2º ano do Ensino Médio preparando as base do prisma hexagonal

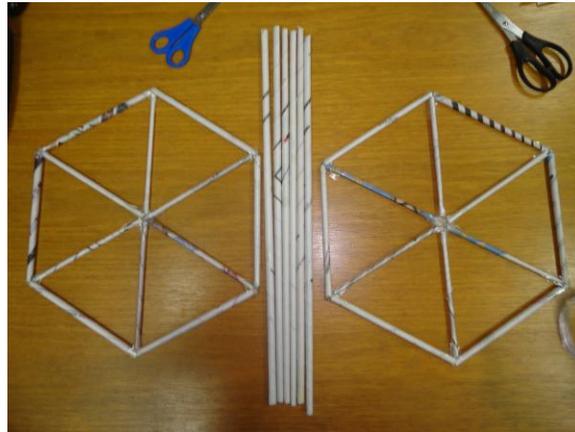


Figura 18 - Bases do prisma hexagonal com suas arestas laterais.



Figura 19 - Prisma hexagonal destacando suas diagonais

- Atividade 2: Construção de pirâmides

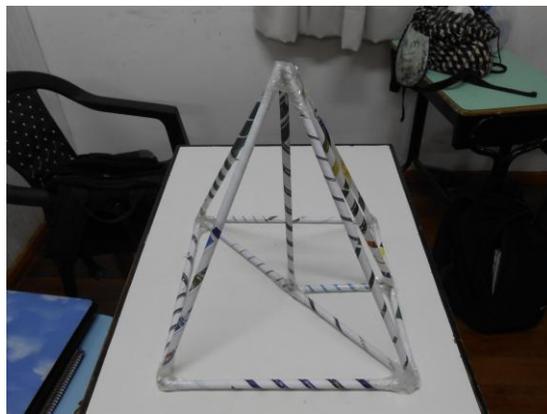


Figura 20 - Pirâmide quadrangular, destacando a sua altura, diagonal da base e o apótema da base.



Figura 21 - Pirâmide triangular regular, destacando sua altura e os apótemas.

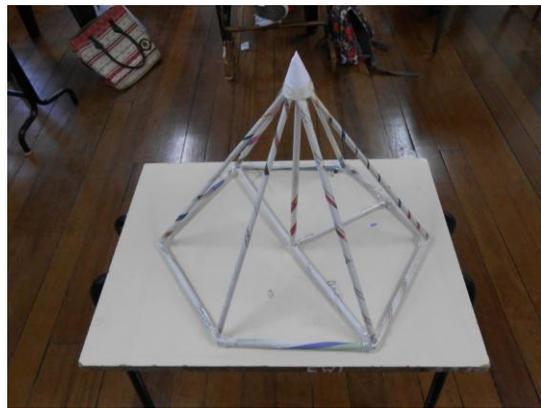


Figura 22 - Pirâmide hexagonal regular, destacando: a altura, o apótema da base e diagonal da base.

- Atividade 3: Construção composta de primas e pirâmides



Figura 23 - Construção composta de um prisma hexagonal regular e uma pirâmide hexagonal regular.



Figura 24 - Cubo com uma pirâmide quadrangular regular inscrita.

5 Considerações Finais

Neste trabalho foi desenvolvido o conhecimento e o gosto pela geometria espacial, fazendo com que os alunos se sentissem envolvidos pelo trabalho e percebessem durante seu desenvolvimento que as atividades com formas geométricas podem ser agradáveis, bem compreendida e aplicada no cotidiano dos alunos (esqueleto do silo).

Por isso, é essencial que o educador encare as dificuldades como um desafio estimulante. Coerentemente com esta postura, é necessário que o mesmo, reflita permanentemente sobre sua prática pedagógica, buscando cada vez mais aperfeiçoá-la, a fim de proporcionar a seus educandos um ensino de qualidade. É importante destacar que o auxílio aos alunos nas resoluções de problemas, através das figuras geométricas, despertou neles um interesse maior pelos conteúdos que foram abordados, contribuindo no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem.

Ao término desse trabalho, conclui-se que as atividades aqui propostas sirvam para que os professores constatem a importância de recapitular pré-requisitos de geometria espacial, ou mesmo de ensiná-los pela primeira vez, já que nem sempre os alunos os estudam adequadamente.

Também é importante destacar que a maneira de avaliar os conteúdos de geometria espacial seja repensada, priorizando o raciocínio e não a mera memorização. Contribuindo, assim, de forma mais efetiva para um processo de ensino e aprendizagem que faça diferença na vida dos alunos.

Abstract *The work is intended to facilitate the spatial geometry teaching that fall in the absence of basic educational materials to work in the classroom, exclusive rooms for the teaching of geometry and lack of prerequisites by the content of pupils underlying geometry. In relation to an "ideal" class, has led*

educators to seek ways to facilitate the teaching of mathematical properties , which often become tiresome. The activity that is proposed here , and enable the student to build structures with the spatial geometry, makes it possible to display some elements in the table are less noticed and also through the use of manual work techniques arouse students' interest in learn.

Key-words: spatial geometry; high school; teacher; teaching and learning .

Referências

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, volume único**. 1ª edição, 4ª impressão. São Paulo: Ática, 2010.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática Atividades**, volumes 5, 11 e 12. São Paulo: FTD, 1990.

<<https://letras.faccat.br/moodle/mod/resource/view.php?id=368>> CALONI E MELLO, Joseane Casiraghi, Silvio Quintino de. **Geometria Espacial no Ensino Médio: atividades práticas e contextualizadas para uma aprendizagem mais significativa**.

<<http://www.somatematica.com.br/historia.php>> Acesso de janeiro de 2015 à setembro de 2015.

<<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2455-8.pdf>> Acesso de janeiro à setembro de 2015. Artigo: Aplicação da Geometria Espacial em Ambientes Diversos, mestres: Viviane Aparecida Verona e Maria Regina Macieira Lopes. A Geometria: Suas origens na História

<<http://mateeduc.blogspot.com.br/2012/03/primordios-da-geometria-suas-origens-na.html>> Acesso de janeiro à setembro de 2015. Geometria: Suas origens na História

<<http://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Oficina-De-Canudinho/43655365.html>> Acesso fevereiro de 2015. **Oficina de canudinho (2013)**. TrabalhosFeitos.com



SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática.** Paraná, 2008.

SILVA, Tomaz T. **O que Produz e o que Reproduz em Educação.** Porto Alegre: Artmed, 1992.