UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO: MÉTODOS E TÉCNICAS DE ENSINO

WELLINGHTON RODRIGO MARIANO

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA: RACIOCÍNIO LÓGICO E DESENVOLVIMENTO ACADÊMICO OBSERVADOS NO FINAL DAS ETAPAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO

MEDIANEIRA
2018

WELLINGHTON RODRIGO MARIANO

APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA: RACIOCÍNIO LÓGICO E DESENVOLVIMENTO ACADÊMICO OBSERVADOS NO FINAL DAS ETAPAS DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Especialista na Pós-Graduação em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino – Polo UAB do Município de São José dos Campos, Modalidade de Ensino a Distância, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Medianeira.

Orientador: Prof. Dr. André Sandmann

EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA

MEDIANEIRA

2018

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Diretoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino

TERMO DE APROVAÇÃO

Aprendizagem significativa em matemática: raciocínio lógico e desenvolvimento acadêmico observados no final das etapas da educação básica

Por

Wellinghton Rodrigo Mariano

Esta monografia foi apresentada às **9h10min do dia 23 de junho de 2018** como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino – Polo de São José dos Campos, SP, Modalidade de Ensino a Distância, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Medianeira. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

_____
Prof. Dr. André Sandmann
UTFPR – Câmpus Medianeira
(orientador)

_____
Profª. Ma. Vanessa Hlenka
UTFPR – Câmpus Medianeira

_____
Profª. Ma. Marlene Magnoni Bortoli
UTFPR – Câmpus Medianeira

- O Termo de Aprovação assinado encontra-se na Coordenação do Curso-.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, pelo seu amor e olhar atentos a meus passos.

A Maria por conceder-me a graça de fazer este curso.

Aos meus pais, pela responsabilidade que me ensinaram e por suas persistências em sempre serem justos e me amar da maneira deles.

A meu irmão, que mesmo sem entender a extensão do trabalho nunca reclamou das vezes que não lhe dei atenção.

Ao meu orientador professor Dr. André Sandmann pelas orientações e paciências ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

Agradeço aos professores do curso de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino que estiveram comprometidos com os alunos no decorrer do curso.

Agradeço a coordenadora Ivone que nos auxiliou durante o curso.

Ao Colégio Alcance, em especial a Diretora Vanderci, que possibilitou a aplicação dos testes.

Agradeço imensamente a Silvia Cristina pela ajuda com o abstract

Ao professor Josimilson e a professora Andreia pela colaboração em ceder suas aulas para aplicar o teste.

A todos os meus amigos que me ajudaram acreditando em mim.

Enfim, sou grato a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desta monografia.

“Lutemos sempre, mesmo sem esperança de ganhar a batalha”. (SANTA TERESINHA DO MENINO JESUS)

RESUMO

MARIANO, Wellinghton Rodrigo. **Aprendizagem significativa em matemática: raciocínio lógico e desenvolvimento acadêmico observados no final das etapas da educação básica**. 2018. 60fls. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2018.

Entender um fenômeno muitas vezes inclui diversas áreas, tal que o raciocínio empregado pode garantir a afirmação feita, no entanto existe em sua base a capacidade da leitura, que acompanhada da compreensão e contextualização, possibilitam o resgate de significados já consolidados. Na matemática, sendo o raciocínio logico o grande articulador das resoluções de seus problemas, é importante entender se ocorre com o aluno a construção de raciocínios sem dualidades e que sejam comunicáveis, pois, tal linguagem exige respostas exatas; por isso, este trabalho visa proporcionar um entendimento do raciocínio lógico, possivelmente comum, utilizado pelos alunos para resolver dadas situações. Seu objetivo está em observar, analisar e discutir uso do raciocínio lógico na resolução de problemas, fazendo possíveis associações com a aprendizagem significativa e a leitura dos mesmos, em três temáticas mais usais da matemática: na álgebra, na geometria e na matemática financeira, além das questões objetivas de raciocínio lógico. Seu desenvolvimento iniciou-se pela revisão literária, com posterior levantamento das questões a serem utilizadas oriundas das provas de concurso e OBMEP, preparando assim o teste que foi aplicado em uma turma de nono ano e em outra da terceira série do ensino médio. Os dados foram analisados em vista dos objetivos propostos acerca de quatro questionamentos: raciocínio lógico aplicado de acordo com o esperado, uso de estratégia alternativa ao esperado, aprendizagem significativa possivelmente identificada pela maioria e possíveis problemas entre leitura-entendimento e execução do raciocínio lógico. Foram obtidos resultados tanto de acordo ao esperado como outras diferentemente da imaginada, identificando estratégias comum entre eles e outras alternativas, além das dificuldades que possuem em trabalhar com questões geométricas contendo ou não imagens.

Palavras-chave: Raciocínio matemático. Resolução de problemas. Pensamento algébrico. Comunicação matemática.

ABSTRACT

MARIANO, Wellinghton Rodrigo. **Significant learning in mathematics: logical reasoning and academic development observed at the end of the stages of basic education**. 2018. 60fls. Monografia (Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2018.

Understanding a phenomenon often includes several areas, such that the reasoning employed can guarantee the affirmation made, however there is in its basis the ability of reading, which accompanied by understanding and contextualization, enable the rescue of already consolidated meanings. In mathematics, since the logical reasoning is the great articulator of the resolutions of its problems, it is important to understand if it occurs with the student the construction of reasoning without dualities and that they are communicable, therefore, such language demands exact answers; therefore, this paper aims to provide an understanding of the logical reasoning, possibly common, used by students to solve given situations. Its aim is to observe, analyze and discuss the use of logical reasoning in solving problems, making possible associations with meaningful learning and reading of them, in three more common mathematical themes: in algebra, geometry and financial mathematics, besides logical reasoning. Its development was initiated by the literary review, with a subsequent survey of the questions to be used from the competition and OBMEP tests, thus preparing the test that was applied in a ninth grade class and in a third grade high school class. The data were analyzed aiming at the proposed objectives on four questions: logical reasoning applied according to the expected, use of alternative strategy expected, significant learning possibly identified by the majority and possible problems between reading-understanding and execution of logical reasoning. Results were obtained both according to expected and others as opposed to imagined, identifying common strategies among them and other alternatives, besides the difficulties they have in working with geometric questions with or without images.

Keywords: Mathematical reasoning. Troubleshooting. Algebraic thinking. Mathematical communication.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquemas das Características do Pensamento Algébrico. 17
Figura 2 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 1 - Parte I e II. 30
Figura 3 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 3 - Parte I 30
Figura 4 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 5 - Parte II. 31
Figura 5 – Exemplo Resposta Esperada na Questão 1 - Parte I. 31
Figura 6 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 2 - Parte I. 32
Figura 7 – Exemplos de Respostas Esperadas na Questão 3 - Parte I. 33
Figura 8 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 4 - Parte I. 33
Figura 9 – Resposta Alternativa na Questão 1 sem Sucesso - Parte I. 34
Figura 10 – Resposta Alternativa na Questão 2 - Parte I. 34
Figura 11 – Resposta Alternativa na Questão 3 sem Sucesso - Parte I. 35
Figura 12 – Resposta Alternativa Questão 5 – Parte II. 35
Figura 13 – Respostas Alternativa na Questão 1 sem Sucesso - Parte I. 36
Figura 14 – Respostas Alternativa à Questão 2 com e sem Sucesso - Parte I. 37
Figura 15 – Respostas Alternativa à Questão 5 - Parte I e II. 38
Figura 16 – Justificativa da Técnica Utilizada - Parte II 40
Figura 17 – Justificativa de não Conseguir Resolver a Questão 4 - Parte II. 41
Figura 17 – Erro Presente na Maior Parte das Respostas da Questão 1 - Parte I e II. 42
Figura 18 – Respostas da Questão 3 com Pequenos Erros - Parte I. 43
Figura 19 – Troca Entre os Conceitos de Figuras Planas - Parte I. 43
Figura 20 – Resposta da Questão 1 com Erro - Parte I. 44
Figura 21 – Exemplo de Erro na Execução da Questão 2 - Parte I. 45
Figura 22 – Exemplo de Erro na Execução da Questão 2 - Parte I. 45

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 11
2.1 USO DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA PARA CHEGAR NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA 11
2.2 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA.....12
2.3 PENSAMENTO MATEMÁTICO: ALGÉBRICO E GEOMÉTRICO 15
2.4 EMPREGANDO O RACIOCÍNIO LÓGICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 18
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....22
3.1 LOCAL DA PESQUISA 22
3.2 TIPO DE PESQUISA.....22
3.3 POPULAÇÃO E AMOSTRA 23
3.4 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS 23
3.4.1 Questionário do Ensino Fundamental 24
3.4.2 Questionário do Ensino Médio 26
3.5 ANÁLISES DOS DADOS 27
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO.....29
4.1 RACIOCÍNIO LÓGICO UTILIZADO DE ACORDO COM A TEMÁTICA 29
4.2 RACIOCÍNIO LÓGICO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO 33
4.3 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA POSSIVELMENTE IDENTIFICADA NAS RESOLUÇÕES 39
4.4 POSSÍVEIS PROBLEMAS ENTRE LEITURA, INTERPRETAÇÃO E EXECUÇÃO DO RACIOCÍNIO LÓGICO.....42
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 47
REFERÊNCIAS.....49
APÊNDICES.....52
ANEXO.....57

1 INTRODUÇÃO

Em diversas vezes, os resultados da aprendizagem em matemática estão atrelados com o habitual questionamento dos alunos sobre a utilidade daquilo que se ensina. Entender um fato, já um princípio para que qualquer pessoa possa argumentar, discutir e resolver o que permeia tal assunto. Como exemplo, o problema do aquecimento global, no qual envolve uma cadeia de conhecimentos das mais diversas áreas do saber como fenômenos naturais, geográficos, químicos, comportamentais humanos e políticos buscando uma melhor resolução do caso; e o mesmo acontece na educação básica, com menor complexidade e em especifico, com a matemática que é uma grande ferramenta para a humanidade resolver seus problemas.

Tudo que possui significado para as pessoas se torna algo de importante. Com a alfabetização é possível observar que, ao identificarem a sua capacidade de leitura, fazem dela um ato de prazer em querer ler mais e mais, de forma que alimentam a sua curiosidade e as relacionam com o já que possuem produzindo novos significados. Após este processo de leitura elementar, se torna mais fácil, conforme o tempo e sua aplicabilidade, ler textos em diferentes contextos, entretanto isso não garante a compreensão do que foi lido nem possíveis associações com outros assuntos, caso frequente no uso das somente “fórmulas”, pois lhe são necessárias o envolvimento de um raciocínio que os interliguem com mais exatidão.

O mesmo ocorre na matemática, pois vários são os alunos que conseguem resolver uma expressão numérica básica como 2 – 4 + 8 – 1 agora quando ela envolve incógnitas, que são decodificações da interpretação de um problema como o dobro ou a quinta parte, se torna um transtorno para a maioria; além disso, é possível se deparar com diferentes tipos de situações matemáticas no decorrer de sua vida escolar, algumas podem ser resolvidas somente com a álgebra e aritmética, outras em que a geometria predomina, casos no qual o conhecimento financeiro é essencial, algumas que envolvem combinatórias e probabilidades, aquelas que exigem uso de abstração e suas demonstrações entre outras temáticas.

Para resolver os diversos problemas matemáticos, os alunos empregam seu raciocínio lógico, porém como ele está diretamente relacionado à estrutura cognitiva, associado as comparações passadas e possíveis cálculos, fica difícil emprega-los

quando o assunto lhe é vago e não tem com o que comparar para buscar uma solução. É possível observar então, que a leitura acompanhada da compreensão e da contextualização, possuem a capacidade de resgatar o significado das coisas, e quando atrelados a linguagem utilizada mais o raciocínio logico empregado na resolução de problemas, conduz o sujeito a um possível sucesso em sua execução.

Por isso, este estudo tem por objetivo observar, analisar e discutir uso do raciocínio lógico na resolução de problemas, fazendo possíveis associações com a aprendizagem significativa e a leitura dos mesmos, em três temáticas mais usais da matemática: na álgebra, na geometria e na matemática financeira, além das questões objetivas de raciocínio lógico. Não tratará da questão ensino-aprendizagem e seus métodos, mas sim do raciocínio que os alunos empregam ora algébrico ora lógico para a resolução de um mesmo problema, analisando os aspectos usados como âncoras ao fazerem a leitura do enunciado e ao escolherem uma estratégia para execução, visto a importância de entender se ocorre no aluno a construção de raciocínios sem dualidades, que sejam concisos, analíticos e exatos.

Tem como justificativa proporcionar um entendimento do raciocínio lógico, possivelmente comum, utilizado pelos alunos para resolver dadas situações considerando as estratégias esperadas e as mais usuais por eles. Tal trabalho tem como base, observar os fatos pela ótica da Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) proposta por Ausubel, no qual reconhece que o aluno precisa ter um conhecimento anterior para cumular um novo (subsunçores), onde possa reorganizar sua estrutura cognitiva a partir do que já sabe; como exemplo, é mais fácil ao aluno entender os números negativos pertencentes ao conjunto dos números inteiros, uma vez que já conhece o conjunto dos números naturais e as suas relações de maior, menor, crescente, decrescente, etc., possibilitando compreender que sua criação está relacionada ao fato de problemas como 2 – 8, que hoje é facilmente representado através das temperaturas negativas.

Seu desenvolvimento iniciou-se pela revisão literária, com posterior levantamento das questões a serem utilizadas oriundas das provas de concurso e OBMEP, preparando assim o teste que foi aplicado em uma turma de nono ano e em outra da terceira série do ensino médio. Os dados foram analisados em vista dos objetivos propostos acerca de quatro questionamentos, obtendo resultados tanto esperados como não, com uso de estratégias comum entre eles e outras até mesmo não imaginadas ao propor tal questão.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 USO DA COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA PARA CHEGAR NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

O homem sempre se utilizou de recursos para ter comunicação com os demais, seja ela por gravuras, pinturas, códigos sonoros (Morse), fala e escrita que através do processo escolar se tornam um dos grandes impulsionadores na troca de informações ou novos conhecimentos e momentos para diversas experiências.

Nesta troca de saberes podem ser utilizados os desenhos, caso muito comum na geometria para o entendimento do objeto que se está estudando, pois traz consigo um tipo de pensamento, o pensamento visual que segundo Cândido (2001) pode adaptar-se a qualquer outro tipo de natureza seja ela científica, artística, poética ou funcional, afirmando também que a possibilidade de escrever aquilo que desenhou enriquece a sua representação pictórica e as suas discussões orais.

É importante observar que o uso constante da oralidade informal, está relacionado tanto em não ter domínio da escrita e do uso das representações gráficas, assim como o receio em expor suas ideias de maneira estruturada e argumentada, podendo inferir que não houve compreensão significativa da informação. Desta forma, “a comunicação tem um papel fundamental para ajudar os alunos a construírem um vínculo entre suas noções informais e intuitivas e a linguagem abstrata e simbólica da matemática” (CÂNDIDO, 2001, p.15).

Por diversas vezes, a matemática é identificada na escola como a matéria de resolver e “causar” problemas nos alunos, no entanto “[...] a Matemática não é somente um caminho para resolver problemas, mas é um caminho para pensar, organizar e modelar experiências, descobrir padrões, estabelecer conexões” (ROMANATTO, 2012, p. 309).

No caminho das descobertas, é utilizada a língua materna de forma majoritária, sendo que seu uso na matemática possui dois lados, um deles relacionado a leitura, o comentário e interpretação do fato lido e o outro a parcialidade na aplicação do raciocínio matemático, devido ao elo entre este e a língua materna em sua organização sintática e seu poder de dedução (CÂNDIDO,

2001). Deste, ao propor até mesmo para uma criança, que dado sujeito foi colocado em um líquido e que saiu seco, gera nela uma autoavaliação no qual emprega o raciocínio lógico ao afirmar que isso não é possível, pois através das experiências que já teve com líquidos, como a água, sabe que sairá molhado, podendo até mesmo propor outra solução, por exemplo ter usado uma roupa especial.

Além da capacidade de interpretação associada ao raciocínio lógico, temos que a escrita, para além da sua utilização ordinária, na matemática ela possui uma linguagem específica, que se faz importante para as demonstrações e o emprego da transferência do raciocino lógico ou algébrico, em que tal processo tem por base os resgates da memória na busca de conceitos consolidados, experimentados ou memorizados que ultrapassam o tempo e sem constantes dualidades, por isso,

> [...] o único recurso de comunicação da linguagem matemática é o escrito, ou seja, a escrita não constitui para a matemática um segundo código, mas um código único [...] é que ela seja mais concisa e precisa que a linguagem usual no sentido de eliminar qualquer possibilidade de dubiedade em sua interpretação. (CÂNDIDO, 2001, p. 23)

A comunicação em matemática pode contribuir para a aprendizagem significativa, em sua capacidade de uso na língua materna unida a sua linguagem específica, como uso dos desenhos, da oralidade e da escrita para sua consolidação, onde o raciocínio lógico se apresenta para certificar o pensamento utilizado. Cândido (2001) nos afirma que:

> [...] a comunicação é um **recurso que auxilia a criança a estabelecer as conexões entre suas concepções espontâneas e o que está aprendendo de novo**, promovendo, assim, uma aprendizagem significativa. (CÂNDIDO, 2001, p. 15, grifo nosso)

2.2 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Novos conhecimentos podem ser adquiridos pelo sujeito no decorrer de sua vida, a diferença está na forma com que cada um faz no processo de absorção e como tomam propriedade destes. Quando uma nova informação faz sentido e se interliga com o já existente na estrutura cognitiva, têm-se um novo entender do assunto, possível de aplicação em diferentes contextos de forma interpretada e com

uma postura mais consolidada, dessa maneira podemos afirmar que tal conhecimento agora é parte integrante da estrutura cognitiva do sujeito, abordados por alguns autores como rede de significados (GOWIN, 1981, apud VALADARES, 2011, p. 38) e (AZEVEDO, 2001 apud SOARES, 2009, p. 53), de forma que "É mais fácil construir o conhecimento quando se inicia de uma ideia mais geral e inclusiva e se encaminha para ideias menos inclusivas". (TAVARES, 2010, p. 7)

A aprendizagem significativa, uma teoria proposta por Ausubel em 1968 e aprofundada em 1980 com outros, está ligada a esta forma de adquirir um novo conhecimento. De acordo com Lemos (2011) "a aprendizagem significativa é um processo no qual o indivíduo relaciona uma nova informação de forma não arbitrária e substantiva com aspectos relevantes presentes na sua estrutura cognitiva" (LEMOS, 2011, p. 27 apud AUSUBEL et al, 1980). Cabe observar que na aprendizagem mecânica o que mais acontece é uma nova informação ser apresentada e trabalhada com o sujeito de maneira arbitrária e muitas vezes literal, na matemática reconhecidas pelos alunos com as frequentes frases: "mais uma fórmula para decorar!" ou então: "qual fórmula eu uso aqui?"; percebe-se então, a falta de conexão do novo conhecimento com as estruturas cognitivas já existentes no sujeito e sua possível dificuldade em aplica-las nos diferentes contextos, que segundo Lemos (2011): "O conhecimento, quando produto de aprendizagem mecânica, por ter restrita a sua capacidade de utilização em novas situações, não garante autonomia intelectual para a ação do indivíduo" (LEMOS, 2011, p. 28).

No entanto, este conhecimento pode também ser adquirido na aprendizagem mecânica, de uma forma paulatina e contínua com diferentes interações aos novos conhecimentos (LEMOS, 2011), fato que este trabalho visa analisar e discutir com relação aos resultados dos alunos e da aprendizagem significativa que pode ter ocorrido com eles. Para que fique mais claro a compreensão do que é a aprendizagem mecânica, de modo a diferencia-la da significativa para o contexto que se propõem a analisar, temos que quando o sujeito decide absorver um conhecimento de forma literal, sua aprendizagem será mecânica e não conseguirá aplicar o aprendizado da estrutura em uma resolução de problemas similares, mesmo em outro contextos (TAVARES, 2008).

De acordo com a TAS, Ausubel (2000) afirma existir uma ancoragem entre o conhecido (subsunçor) e a nova informação, pois segundo ele se isto não acontece, ela será literal e arbitrária (aprendizagem mecânica) e quando ocorre altera-se as

duas informações, tanto a preexistente como a nova devido suas ligações. Entretanto como fazer esta ligação sem prévio entendimento?

Para Tavares (2010), “Não é possível para o aprendiz alcançar altos níveis de aprendizagem significativa antes que as estruturas cognitivas adequadas sejam construídas” (TAVARES, 2010, p. 15). Desta forma, de acordo com o mesmo autor, na ausência de subsunçores, Ausubel propõe o uso dos organizadores prévios que são informações ou novos conceitos que farão a ponte cognitiva entre aquilo que se sabe o que se pretende saber, atuando como um suporte base para a incorporação da nova informação.

Conforme Tavares (2004) para ocorrer a aprendizagem significativa existem três requisitos sendo eles: a oferta de um novo conhecimento de maneira lógica e estruturada, a existência de conhecimentos na estrutura cognitiva para oferecer uma conexão com o novo conhecimento e uma atitude de apreender e conectar o seu conhecimento com o novo.

Desta forma, é muito importante a interação que o sujeito faz entre o seu material, a estrutura cognitiva que possui e sua postura perante os desafios externos, pois “Na medida em que interage com a informação, o estudante está construindo seu conhecimento, ele faz conexões importantes entre significados e desse modo possibilita a sua aprendizagem significativa” (TAVARES, 2010, p. 15). Além disso, “Quanto mais estável e organizada for a estrutura cognitiva do indivíduo, maior a sua possibilidade de perceber novas informações, realizar novas aprendizagens e de agir com autonomia na sua realidade” (LEMOS, 2011, p. 27); por isso, a busca pela análise do raciocínio lógico empregado nas três temáticas que mais possuem relação entre o sujeito e a matemática tanto na escola como na vida social e suas possíveis interações.

Afins de consolidar o objetivo deste trabalho, com base nesta teoria, buscando observar o desenvolvimento acadêmico dos alunos ao empregarem o raciocínio lógico na resolução de problemas, tal que se possa identificar possíveis sinais da aprendizagem significativa, é reforçada a decisão do uso das temáticas mencionadas anteriormente, pois segundo Cândido (2001):

> Uma proposta de trabalho em matemática que vise à aprendizagem significativa deve encorajar a exploração de uma grande variedade de ideias matemáticas não apenas numéricas, **mas também aquelas relativas à geometria, às medidas e às noções de estatística** de forma que os alunos desenvolvam com prazer e conservem uma curiosidade acerca da

> matemática, adquirindo diferentes formas de perceber a realidade. (CÂNDIDO, 2001, p.16, grifo nosso)

Conjuntamente, as Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 2002) afirmam, que no ensino médio:

> Um conjunto de temas que **possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural** e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos pode ser sistematizado nos três seguintes eixos ou temas estruturadores, desenvolvidos de forma concomitante nas três séries do ensino médio: **1. Álgebra: números e funções; 2. Geometria e medidas; 3. Análise de dados.** (BRASIL, 2002. p. 120, grifo nosso)

2.3 PENSAMENTO MATEMÁTICO: ALGÉBRICO E GEOMÉTRICO

Durante o ensino fundamental e médio os alunos são colocados de frente a diversas situações que exigem diferentes maneiras de se pensar para dar início ao desafio do entendimento e resolução do problema. O pensamento matemático vai ganhando suas características conforme os alunos inicialmente conseguem fazer a distinção entre o que é, e o que não é da matemática e quais as possíveis formas de se resolver com base em suas regularidades.

Segundo os PCNs (1997) para o ensino de matemática, durante a etapa do ensino fundamental II, o pensamento matemático ganha maior flexibilidade de forma que possam perceber as informações e têm estímulo para buscar a explicação destes, além disso, passam a descobrir regularidade e propriedades tanto numéricas, geométrica e métricas.

Na questão algébrica, o sujeito precisa compreender o uso e efeito de dois elementos importantes, sendo eles: a capacidade dos símbolos e a generalização dos fatos. De acordo com Barbosa e Borralho (2009), “Pensar algébrico consiste em usar os instrumentos simbólicos para representar o problema de forma geral, aplicar procedimentos formais para obter um resultado, e poder interpretar esse resultado [...]” (BARBOSA E BORRALHO, 2009, p. 61 apud ARCAVI, 2006, p. 374). Para Canavarro (2007 apud KAPUT, BLANTON; MORENO, 2008) o cerne do pensamento algébrico está no significado dado ao símbolo e não necessariamente

no símbolo, tal que este deve ser utilizado como um recurso ao representar as suas ideias.

Além de transformar um fato em símbolos é necessário o auxílio da aritmética para solucionar o problema, no qual o uso e aplicação das equações algébricas com seus devidos cálculos se farão necessários neste processo. Barbosa e Borralho (2009) vai dizer que o estudo de álgebra possui forte ligação com a manipulação simbólica e a resolução de equações, entretanto é preciso conhecer os conceitos algébricos e saber como utilizar os símbolos em suas ideias matemáticas. Assim sendo, conceitos como a linguagem algébrica (dobro, a metade, o quadrado de um número, etc) e os símbolos matemáticos (≤, ≥, =, %, etc) são os essenciais para se construir tal pensamento.

Quanto a generalização, de acordo com Almeida (2017):

> [...] álgebra não é apenas um conjunto de procedimentos envolvendo os símbolos em forma de letra, mas consiste, também, na atividade de generalização e proporciona uma variedade de ferramentas para representar a generalidade das relações matemáticas, padrões e regras (e.g. Mason, 2005). Assim, a álgebra passou a ser encarada não apenas como uma técnica, mas também **como uma forma de pensamento e raciocínio acerca de situações matemáticas.** (ALMEIDA, 2017, p. 2 apud KIERAN, 2007, p. 5, tradução do autor, grifo nosso).

Como visto em comunicação matemática, o desenho se caracteriza como uma das formas de se comunicar um pensamento, e na geometria, segundo o PCNs (1997) “o pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização [...]. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades” (BRASIL, 1997, p.82). Assim se torna importante o contato com figuras em diferentes posições tais que o sujeito as identifique em diversos contextos, seja no plano ou no espaço.

No uso de tais pensamentos algébricos ou geométricos a observância de repetidas formas e suas mudanças tanto nas manipulações algébricas de constantes e polinômios assim como na manipulação de figuras planas e espaciais, permite identificar um padrão em dadas situações, pois “A ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança.” (VALE, 2012, p. 186), tal que se identificadas facilitam o processo de resolução ao saber identificar e aplicar tais pensamentos.

De acordo com Almeida e Santos (2017) o pensamento algébrico possui algumas características, tal que os autores constroem um esquema para representa-

las (Figura 1), tendo como base os estudos de Lins (1992; 1994a; 1994b), Kaput (1999; 2008) e Radford (2006; 2009; 2011b), além de seus colaboradores.

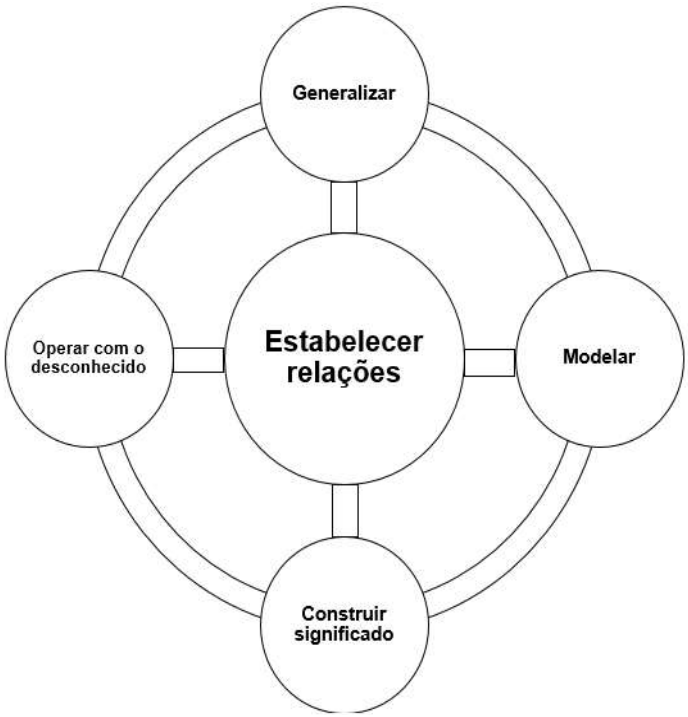


Figura 1 – Esquemas das Características do Pensamento Algébrico.
Fonte: Almeida e Santos (2017).

Para explicar tais características, parte da análise da resolução do seguinte problema proposto aos alunos (ALMEIDA; SANTOS, 2017, p. 54):

"Joana, Paulo e Roberto vão repartir 37 balas de modo que Paulo receba 5 balas a mais que Joana e Roberto receba 2 balas a mais que Joana. Quantas balas receberá cada um?"

Em sua análise, a partir da resposta de um aluno, tem-se que:

- estabelecer relações – quando o aluno utiliza de letras (símbolos) para representar nomes e as associa com a aritmética.
- modelar – dado que ele estabeleceu os símbolos que serão utilizados e a aritmética envolvida iniciou-se o processo de modelagem transformando o caso em uma equação polinomial através de sua linguagem natural.

- generalizar – conjuntamente a modelar o aluno faz a síntese das relações entre quantidade de balas existentes e que irão receber.
- Operar com o desconhecido – quando o aluno estabelece relações de igualdade para aquilo que ele não conhece, gerando equações equivalentes para se chegar no valor do desconhecido com base no conhecido.
- Construir significado – quando o aluno consegue representar uma relação de igualdade por um modelo matemático através da linguagem da álgebra formal, ou seja, construiu um significado para a linguagem matemática.

É possível perceber a relação da última característica com que diz Arcavi (2005, grifo nosso), no qual o essencial para no desenvolvimento do pensamento algébrico é quando o sujeito consegue **construir um sentido para os símbolos que está utilizando**, em especial o símbolo algébrico, pois "O nível ou o grau de compreensão de um conceito ou ideia está intimamente relacionado à comunicação eficiente desse conceito ou ideia". (CÂNDIDO, 2001, p. 16)

2.4 EMPREGANDO O RACIOCÍNIO LÓGICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com os PCNs (1997) a resolução de situações problemas é algo necessário desde o início da vida escolar dos alunos:

> Note-se que no início da aprendizagem escolar os alunos ainda não dispõem de conhecimentos e competências para resolver todas elas, necessitando de uma ampla experiência com situações-problema que os leve a desenvolver raciocínios mais complexos por meio de tentativas, explorações e reflexões. (BRASIL, 1997, p. 71)

Notada a importância da resolução de situações problemáticas na vida cotidiana das pessoas, a maneira pela qual esta atividade ocorre pode ser de maneira significativa ou não. Um exemplo muito simples, seria o constante uso da calculadora para qualquer tipo de operação, seja entre as quatro básicas ou mesmo com as porcentagens bastante utilizadas no cotidiano financeiro; isso não quer dizer que não se possa utiliza-la, não se trata disso, e sim da dependência permanente de

um facilitador no momento de algo que o sujeito já entende, mas o utiliza para agilizar o processo numérico e não conceitual ou procedimental, como acontece a muitos que sabem o botão para apertar, porém não entendem a lógica empregada em tal “aperto”. Na dinâmica significativa, quanto a resolução de problemas, pode ser compreendido como “qualquer atividade na qual a representação cognitiva de experiência prévia e os componentes de uma situação problemática apresentada são reorganizados a fim de atingir um determinado objetivo” (AUSUBEL, 1968, p. 533), ou seja, é necessário a ligação entre o já experimentado (âncoras) e a situação em que se é exposta conseguindo fazer a interligação entre estes para se chegar a uma solução.

Com a resolução de problemas o sujeito acaba por exercitar as suas capacidades cognitivas de forma criativa através de estratégias que são próprias de cada pessoa ou do conhecimento já adquirido em resoluções anteriores. Possibilita a este um envolvimento mais experimental do que formal da própria matemática, fato este que o auxiliará na compreensão do uso da matemática como uma ferramenta para a humanidade, mencionado pelos PCNs (1997).

No caso da resolução de problemas na matemática, em quase todas as situações, o raciocínio lógico se faz indispensável para execução desta, o mesmo pode ser entendido como “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)” (OLIVEIRA, 2008, p. 3), conceito este muito ligado com a aprendizagem significativa.

Sendo as proposições o item de importância no raciocínio lógico, qual o seu significado? Segundo o Dicionário Online de Português (DICIO) a proposição é o “Enunciado de uma verdade que se quer demonstrar ou de um problema que se pretende resolver”, logo, entendê-la se torna algo indispensável para se obter o sucesso na solução, porque “Entender uma proposição é saber como seria o mundo caso essa proposição fosse verdadeira” (TAVARES, 2010, p. 8).

Uma imagem pode valer por muitas palavras, entretanto uma proposição pode valer por muito mais imagens, ou seja, por uma infinidade de palavras que terão sua dependência no modelo que o sujeito irá formular. Neste caso, o modelo utilizado é o mental, pois o mesmo é análogo a estrutura do mundo, de forma que o sujeito o interpreta de acordo com os conhecimentos que possui daquilo que está a sua volta, ou seja, o uso da aprendizagem significativa e dos pensamentos

algébricos e/ou geométricos, reconhecendo os padrões existentes, associando-os com suas experiências e assumindo-a como verdadeira (proposição) para se chegar a solução do problema.

Entendido a proposição, é importante entender a resolução de problemas. Primeiramente, cabe entender o que é um problema; Problema pode ser entendido como “[...] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado.” (ROMANATTO, 2012, p. 301), sendo assim, tudo aquilo para o qual não temos a resposta, mas que estamos dispostos a encontrá-la. Segundo que, “a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios.” (BRASIL, 2002, p. 112), logo a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la.

Dado que a resolução precisa de uma disposição para resolvê-lo, temos que ao “[...] solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos.” (ROMANATTO, 2012, p. 303). Quanto ao raciocínio, Pereira e Ponte (2011) afirmam ser “o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos” (PEREIRA; PONTE, 2011, p. 3 apud RUSSEL, 1999, p. 1).

Como o raciocino matemático utiliza-se das diversas formas de representação na construção de suas ideias, como as equações algébricas, os desenhos fracionários, a escrita descritiva, a manipulação geométrica de papéis para se chegar as formas entre outras maneiras de se representar as ideais. Como apresentado anteriormente, os desenhos auxiliam na representação do pensamento e de acordo com Vale (2012), o recurso visual se torna uma componente do raciocínio na resolução do problemas, mesmo que muitas vezes ela esteja associada a geometria, entretanto estas também são utilizadas quando se pretende transmitir uma ideia em diferentes contextos, pois é mais fácil comunicar um conceito criando imagens do que repetir uma sequência de palavras.

E quais os possíveis problemas que mais podemos encontrar com este trabalho? Os casos mais comuns entre os alunos está a ideia de proporcionalidade como a porcentagem e regra de três, por diversas vezes empregados por eles para se chegar as suas resoluções, pois “O fato de que vários aspectos do cotidiano

funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real.” (BRASIL, 1997, p.38), por isso a escolha de questões que pudessem explorar dos alunos seu raciocínio acerca da proporcionalidade.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O desenvolvimento deste trabalho iniciou-se pela revisão literária composta de artigos, monografias de mestrado e livro acerca das temáticas envolvidas. Posteriormente foi determinada as questões que iriam constituir o teste, determinado em duas partes, no qual as questões originais tiveram algumas alterações para se obter resultados diferentes das objetivas.

O mesmo foi aplicado em alunos das etapas finais tanto do fundamental como do médio, em uma escola particular em Jacareí. Os resultados foram analisados de acordo com algumas questões norteadoras, apreciando resultados tantos esperados como outros alternativos aos pensados no propor tal questão.

3.1 LOCAL DA PESQUISA

A pesquisa foi realizada com os alunos do Colégio Alcance – COC Jacareí, na cidade de Jacareí – SP localizado na Rua Borba Gato, 134. Vila São José, numa manhã do mês de abril de 2018.

3.2 TIPO DE PESQUISA

Tal pesquisa foi realizada como uma pesquisa de campo, constituída de três partes. A primeira está relacionada a revisão literária sobre as temáticas de comunicação matemática, aprendizagem significativa, pensamento algébrico e geométrico, a resolução de problemas atrelados ao raciocínio lógico além das recomendações do PCN de matemática. A segunda, consta da escolha das questões, formulação do teste e questionamentos mais a sua aplicação. Na terceira, foi analisado os dados buscando identificar o raciocínio lógico que os alunos empregaram para resolver os problemas propostos e assim levantando as conclusões possíveis acerca do objetivo e resultados obtidos.

3.3 POPULAÇÃO E AMOSTRA

Os participantes da pesquisa podem ser identificados em dois grupos, no primeiro temos os alunos do nono ano do ensino fundamental na faixa etária de 13 a 14 anos e no segundo, os alunos da terceira série do ensino médio na faixa etária de 16 a 17 anos. Em ambos os grupos, os testes foram aplicados aos alunos presentes em sala no dia, totalizando 27 alunos do primeiro grupo e 40 alunos do segundo grupo.

Não houve escolha de aluno em específico, para se apresentar as suas resoluções, e sim as resoluções que melhor apresentaram argumentos para se discutir a temática proposta no trabalho, dado que várias destas possuem similar resolução pelos alunos envolvidos, sendo assim desconsideradas para apresentação.

3.4 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Para a coleta dos dados foi confeccionado um teste aplicado nas aulas de matemática, com cinco questões para cada grupo aos alunos presentes. A escolha das questões para coleta de dados, esteve pautada no assunto principal: o raciocínio lógico. Desta forma, para associar a busca de questões que possuem envolvimento direto com o assunto e sendo também uma forma constitucional de seleção pública, foi decido a escola por questões de concursos públicos com aplicações de raciocínios lógicos, álgebra e geometria além de duas oriundas da OBMEP (Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares) aplicadas aos alunos do ensino médio.

O mesmo é constituído de duas partes, em ambos os grupos, aplicado em folha de sulfite A4. Na Parte I, localizada na frontal da folha, estão presentes as cinco questões oriundas de concursos para ensino médio, ensino superior e também da OBMEP. Na Parte II, localizada às costas da folha, estão presentes questionamentos complementares a resolução das questões anteriores de forma que possam oferecer aos alunos outras possibilidades, caso as identifiquem como

melhores. Em ambas as partes, em sua maioria, as questões foram adaptadas como está apresentado no apêndice A e B; encontradas no Anexo A conforme aplicadas.

Buscou-se escolher questões com diferentes representações, umas com escritas somente, outras com figuras e outras com quadros, pois “uma representação deverá incluir componentes: concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas que descrevam diferentes aspectos do conceito”. (VALE, 2012, p. 188).

Os dados foram coletados por meio da aplicação do mesmo, com minha observação durante todo o processo. Após ter dado o tempo de 1 hora, foram recolhidas as folhas e analisadas.

3.4.1 Questionário do Ensino Fundamental

O mesmo se encontra no Apêndice A, neste grupo não houve escolha por questões oriundas da OBMEP, com o objetivo de se trabalhar algo mais objetivo. No Quadro 1 são apresentadas sua origem, motivo e adaptações feitas.

Questão	**Órgão, cargo, organizadora, ano**	**Porquê da escolha**	**Adaptação realizada**
1	Detran-MA[1], Analista de Trânsito (ensino superior), Fundação Carlos Chagas (FCC), 2018.	Baseada na possibilidade do raciocínio lógico que os alunos do fundamental poderiam aplicar sem a necessidade de se fazer qualquer operação algébrica ou cálculo numérico.	Na Parte I a pergunta se tornou descritiva exigindo do aluno o entendimento e apontamento do caso base. Na Parte II, foi oportunizado as alternativas da prova para ver se os alunos repensassem a resposta anterior e se a trocariam.
2	Prefeitura de Paulínia – SP, Guarda Municipal (ensino médio), Fundação Getúlio Vargas (FGV), 2015.	Trabalhar com a matemática financeira, através do uso dos conceitos de porcentagem e lucro.	Na Parte I, não houve alteração para se trabalhar como uma questão objetiva. Na Parte II, foi disponibilizado uma tabela para que pudessem dispor seus dados, percebendo as mudanças nos valores conforme

			a porcentagem adicionada ao valor inicial e ao final total.
3	IBGE[2], Agente de Pesquisas por Telefone (ensino médio), Fundação Cesgranrio (CESGRANRIO), 2016.	Relacionada a temática da geometria com foco na aplicação do Teorema de Pitágoras, um dos assuntos mais importantes do ensino fundamental.	Na Parte I, foi utilizada como uma questão dissertativa. Na Parte II, foi questionado se aluno sabe identificar qual o teorema da geometria utilizado para se chegar no resultado; além disso, foi oportunizado as alternativas da questão original para verificar se a sua resposta na Parte I coincide com uma das alternativas dadas.
4	Prefeitura de Barbacena – MG, Agente Administrativo (ensino médio), Fundação CEFETMINAS (FCM), 2016.	Trata de uma questão geometria com sólidos de revolução, em que muitos alunos não percebem que a revolução de um quadrado pode ser um cilindro, estando preso a ideia autônoma do quadrado, então cubo.	Na Parte I, esta questão foi apresentada como objetiva para que preenchesse o espaço estipulado. Na Parte II, foi apresentado as alternativas originais e também uma outra pergunta para que o aluno identificasse qual foi o processo aplicado nas figuras planas para se chegar as espaciais.
5	Facepe[3], Assistente em Gestão de Ciência e Tecnologia (ensino médio), Universidade de Pernambuco (UPENET/IAUPE), 2015.	Uso do raciocínio lógico com distribuição de dados multiplicativos e tabelados.	Na Parte I, não houve alterações. Na Parte II, foi apresentado uma tabela com os valores reescritos (múltiplos de 3) para que pudessem refazer a mesma, com alguns questionamentos sobre como mudaria seu raciocínio.

Quadro 1 – Relação da Questão, Origem, Motivo e Adaptações no Questionário do Ensino Fundamental.

Fonte: Autoria própria.

Notas:

1 - Departamento Estadual de Trânsito do Maranhão

2 - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

3 - Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco

3.4.2 Questionário do Ensino Médio

Neste grupo houve também a escolha de questões da OBMEP tanto de seu banco de questões como da prova aplicada. O mesmo se encontra no Apêndice B. Analogamente, no Quadro 2 são apresentadas sua origem, motivo e adaptações feitas.

Questão	**Órgão, cargo, organizadora, ano**	**Porquê da escolha**	**Adaptação realizada**
1	UPE[1], Enfermeiro (ensino superior), Universidade de Pernambuco (UPENET/IAUPE), 2017.	Baseada no raciocínio lógico que os alunos podem empregar utilizando a ideia de proporção associado a manipulações financeiras e algébricas.	Na Parte I, a questão foi colocada como dissertativa. Na Parte II, a mesma apresentou as alternativas da questão original e posteriormente foi proposto ao aluno utilizar o conceito de frações para se refazer a questão.
2	OBMEP[2], Banco de questões, Nível 1, 2017.	Escolha associada aos conceitos de geometria, em específico as figuras semelhantes, escolhida do nível 1 (sexto e sétimo ano do ensino fundamental).	Na Parte I, não houve alterações. Na Parte II, como forma de instigar o pensamento geométrico, foi colocado uma pergunta sobre a relação entre os segmentos DI e BG e outra para verificar se é possível determinar a área do retângulo evidente.
3	Prefeitura de Matozinhos – MG, Assistente Administrativo (ensino médio), Fundação Mariana Resende Costa (FUMARC), 2016.	Escolha relacionada com a temática álgebra na aplicação de sistemas lineares, havendo possibilidades de trabalhar com o raciocínio lógico acerca de proporcionalidade.	Na Parte I, também não houve alteração. Na Parte II, é questionado ao aluno qual das técnicas ele utilizou para resolver e qual delas seria mais fácil em sua visão, além da possibilidade de refazer com a outra técnica.

4	Petrobras, Técnico de enfermagem do trabalho (ensino médio), Fundação Cesgranrio (CESGRANRIO), 2017.	Possibilidade de trabalhar a geometria espacial e volume dos sólidos, conteúdo este exclusivo do médio.	Na Parte I, a questão foi alterada para saber se o aluno consegue determinar um raio que fosse possível para a esfera. Na Parte II, foi apresentado as alternativas da questão original para se determinar o volume.
5	OBMEP, Prova aplicada, Nível 2, 2007.	Uso do raciocínio lógico com as associações condicionais propostas, considerando o nível aplicado originalmente para os alunos do ensino fundamental oitavo e nono ano.	Na Parte I, a questão não foi alterada. Na Parte II, foi disponibilizada uma tabela ao aluno para que cruzasse as informações afim de encontrar a resposta certa.

Quadro 2 – Relação da Questão, Origem, Motivo e Adaptações no Questionário do Ensino Médio.
Fonte: Autoria Própria.

Notas:
1 - Universidade de Pernambuco.
2 - Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares.

3.5 ANÁLISES DOS DADOS

Conforme os objetivos do trabalho, ao analisar as resoluções dos alunos buscou-se encontrar algumas características em comum ou não. Para fins de esclarecimento, as mesmas estiveram pautadas nos seguintes questionamentos norteadores:

1- O raciocínio empregado está associado com a temática da questão?

Procurar identificar as resoluções que se utilizaram e que estiveram próximas as estratégias esperadas, como exemplo, para um problema de geometria com triângulos retângulos esperam-se que se utilize o teorema de Pitágoras.

2- O aluno aplicou uma forma alternativa de resolver a questão, em vista da técnica esperada?

Identificar se existe casos que ao invés do aluno aplicar o conceito, por exemplo de sistema linear, ele utilizou-se de lógica com esquemas para resolver tal situação ou até dependendo da situação, até mesmo da representação de fração como parte proporcionais.

3- Qual a aprendizagem significativa que podemos identificar devido a predominância das técnicas utilizadas pelos alunos na resolução?

A aprendizagem significativa, possivelmente identificada neste caso, será as resoluções dos alunos que apresentam em sua maioria a técnica predominante utilizada por eles para resolver o problema, como a regra de três.

4- Quais os possíveis problemas entre a leitura e interpretação com a execução do raciocínio?

Dada a discussão teórica pela importância da comunicação e entendimento possuir significado, neste caso, irá analisar as situações que os alunos chegaram próximos a resposta correta, no entanto não acertam por erros de manipulação algébrica ou aritméticas, além destes erros de manipulação podem ser identificados os erros de interpretação.

Para os casos do terceiro questionamento, em alguns deles foi apresentado o resultado com gráficos onde se puderam contabilizar as respostas corretas ou técnicas utilizadas acerca das opções dadas entre outras formas de contabilização.

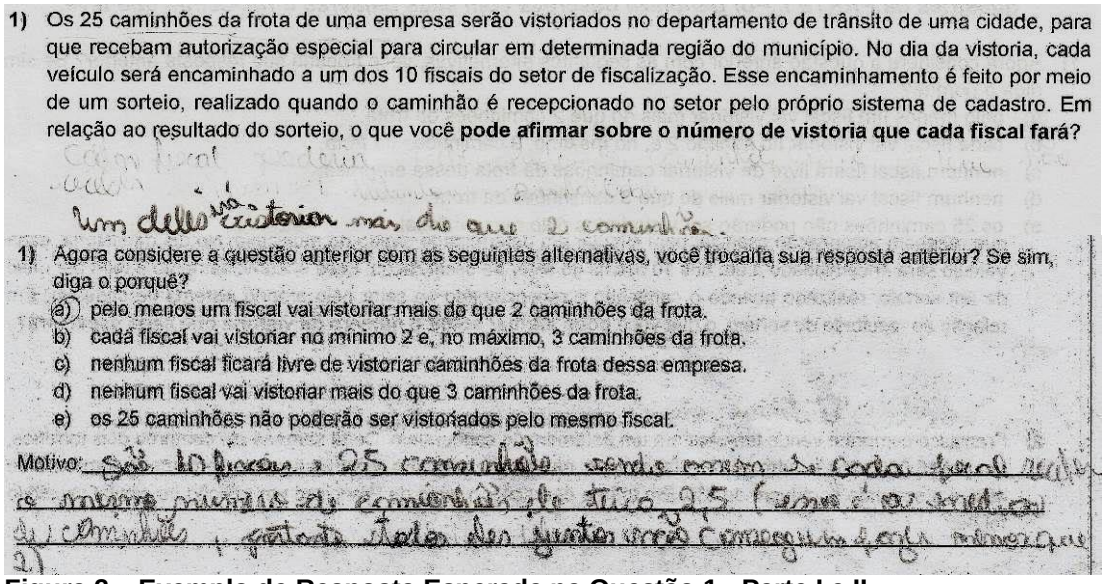
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados estão apresentados de acordo com análise feita acerca dos questionamentos norteadores. Nas resoluções que envolvem o pensamento algébrico foi associado as características apresentadas por Almeida e Santos (2017). Durante a realização do questionário, foi solicitado a eles que fizessem a caneta, entretanto boa parte dos alunos deixaram à lápis.

4.1 RACIOCÍNIO LÓGICO UTILIZADO DE ACORDO COM A TEMÁTICA

Neste tópico são apresentadas as resoluções dos alunos e o raciocínio lógico empregado que mais estejam associados a temática e a estratégia esperada, começando pelas resoluções do Grupo 1 e posteriormente pelo Grupo 2.

Para a Questão 1 devido ao uso do raciocínio lógico em caso de distribuição mínima para as partes, espera-se que os alunos identifiquem no mínimo que cada fiscal vai analisar 2 caminhões, pois ao fazer a divisão tem-se 2,5 e não é possível se ter 2,5 fiscais, logo precisará no mínimo de 2 fiscais. Mesmo assim, não se pode afirmar no máximo 3 pois ao se somar os 2 de cada fiscal temos 20, sobrando 5 com os quais um fiscal pode avaliar tanto 1 como os 5 últimos caminhões. Pela Figura 2, pode-se perceber que o aluno identificou a possibilidade de se afirmar apenas os 2 fiscais, justificando na Parte II seu raciocínio.


1) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, o que você **pode afirmar sobre o número de vistoria que cada fiscal fará?**

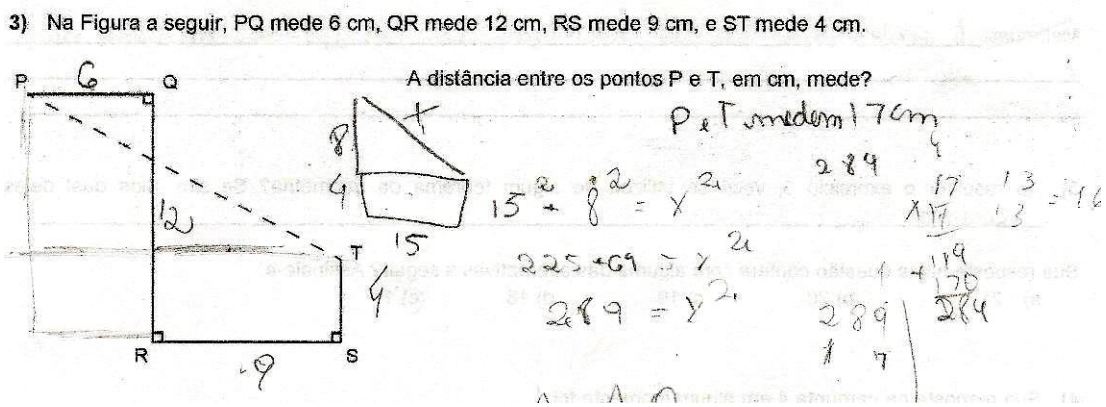
1) Agora considere a questão anterior com as seguintes alternativas, você trocaria sua resposta anterior? Se sim, diga o porquê?

a) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.
b) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.
c) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.
d) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.
e) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Motivo:

Figura 2 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 1 - Parte I e II.
Fonte: Aluno do nono ano (2018)

Para a Questão 3 espera-se que o aluno identifique que é possível aplicar o Teorema de Pitágoras fazendo a soma e subtração de segmentos para se obter um novo triangulo retângulo e determinar sua hipotenusa. Nesta questão, houve um único aluno que chegou na resposta correta. O mesmo redesenhou a figura fazendo as adequações esperadas e aplicou o Teorema de Pitágoras (Figura 3).


3) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.

A distância entre os pontos P e T, em cm, mede?

Figura 3 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 3 - Parte I
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Na quinta questão, espera-se que o aluno identifique a multiplicação que ocorre entre as linhas e também que os números tabelados são múltiplos de 3. Na Figura 4, correspondente a Parte II, percebe-se que o aluno identifica que anteriormente não havia notado uma possível lógica nesta resolução, mas que agora chega ao resultado esperado utilizando-se da tabela e propondo até mesmo uma outra lógica entre as colunas.

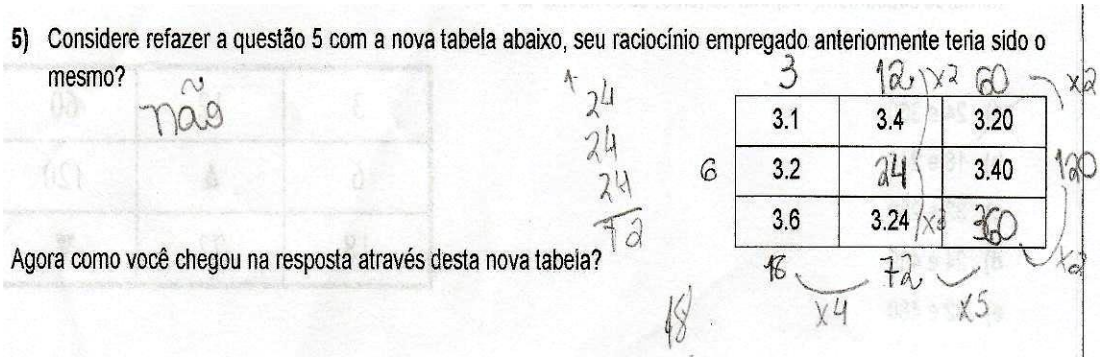


Figura 4 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 5 - Parte II.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Analisando os resultados do segundo grupo, na Questão 1 espera-se dos alunos a aplicação do pensamento algébrico para a resolução do mesmo. Alguns alunos chegaram ao esperado através da aplicação correta da álgebra outros acabaram por se perder na resolução da expressão algébrica, mas quase todos tentaram utilizar esta técnica na resolução.

Na Figura 5 pela ótica do pensamento algébrico apresentado por Almeida e Santos (2017) na resolução, pode-se notar as características de tal pensamento, pois nela encontramos:

a) estabelecimento de relação com a variável x como sua quantidade;
b) modelagem, separando em três partes associadas a variável x, chamando-os em A, B e C;
c) generalização, usando as propriedades aritmética e juntando num só caso;
d) conhecendo o desconhecido, aplicando as igualdades e resolvendo a equação;
e) e construção de significados, com o encontrado e associando à Julia.

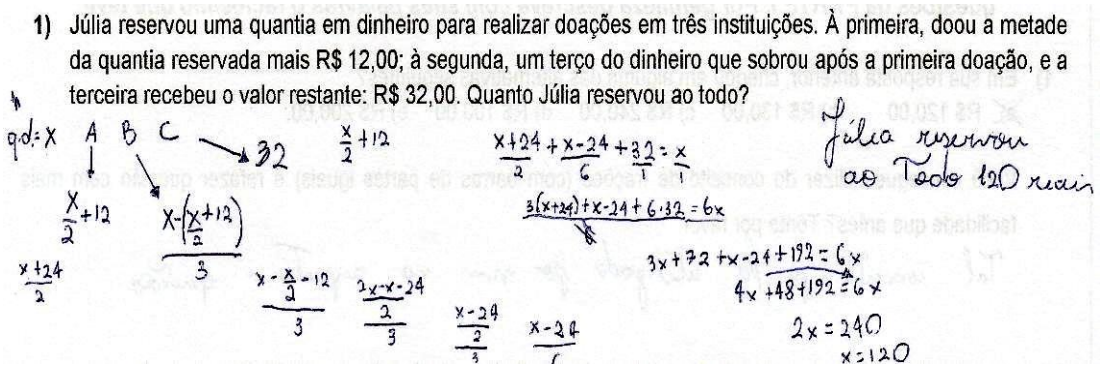


Figura 5 – Exemplo Resposta Esperada na Questão 1 - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Quanto a segunda questão, esperava que os alunos identificassem a semelhança que se formaria com dois triângulos retângulos ao utilizar os lados CD e AB do retângulo; houveram poucos resultados que conseguiram empregar tal resolução (Figura 6). Ao analisar as respostas desta questão e verificar que apenas 2 de 40 alunos conseguiram chegar a resposta correta, pode-se deduzir que muitos encontram dificuldades com representações mais elaboradas, sendo preciso trabalhar mais casos semelhantes, pois “A familiaridade do aluno com representações mais elaboradas revela-se nos seus registros, muitas vezes mesclados com desenhos e outras vezes com textos.” (CÂNDIDO, 2001, p. 21)

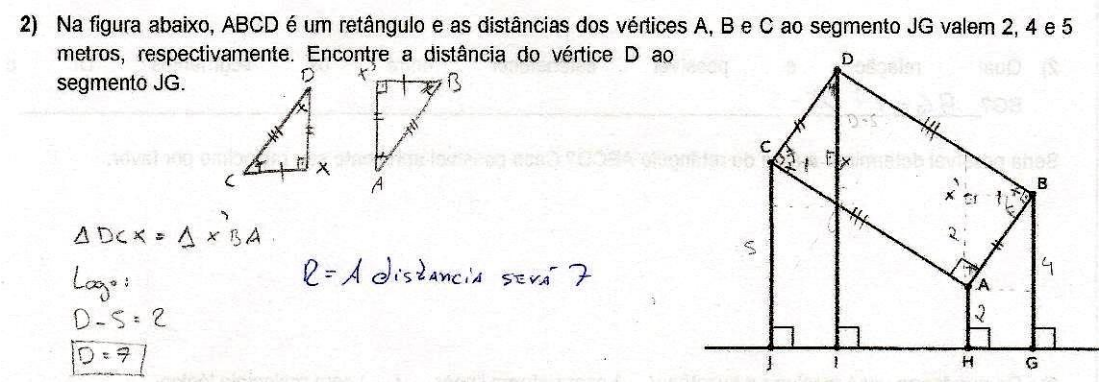
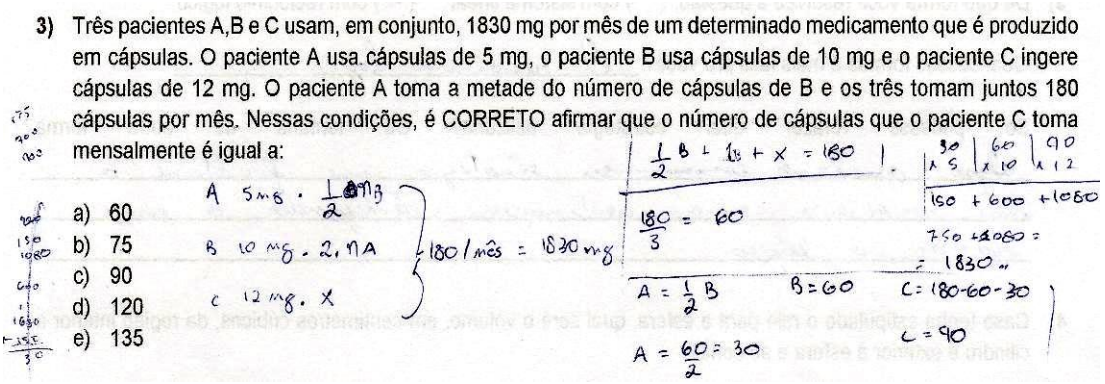
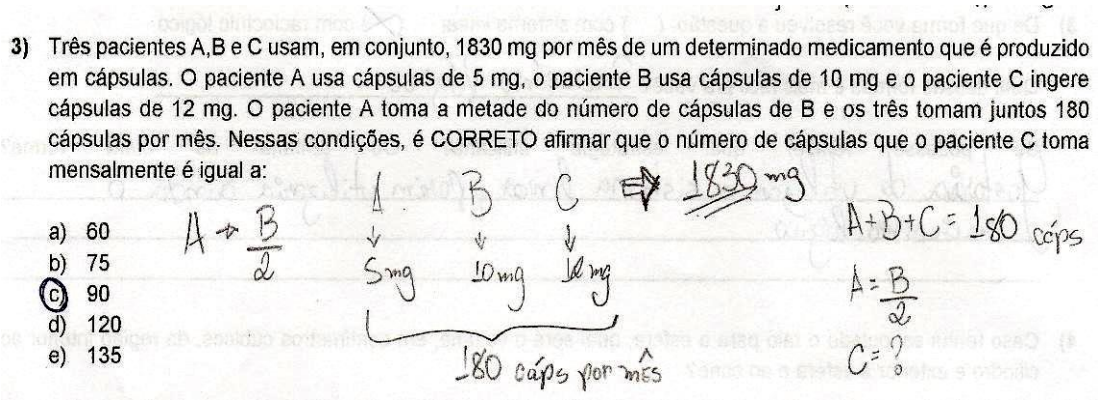


Figura 6 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 2 - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Com a Questão 3, espera-se que os alunos possam utilizar tanto do pensamento algébrico como do raciocínio lógico, ambos encontrados entre as resoluções. Com a Figura 7a é observado o uso da álgebra para a resolução, já no caso da Figura 7b identifica-se o uso do raciocínio lógico, mas que em ambos os casos os alunos separaram os dados conforme os três tipos de medicamento.



(a)

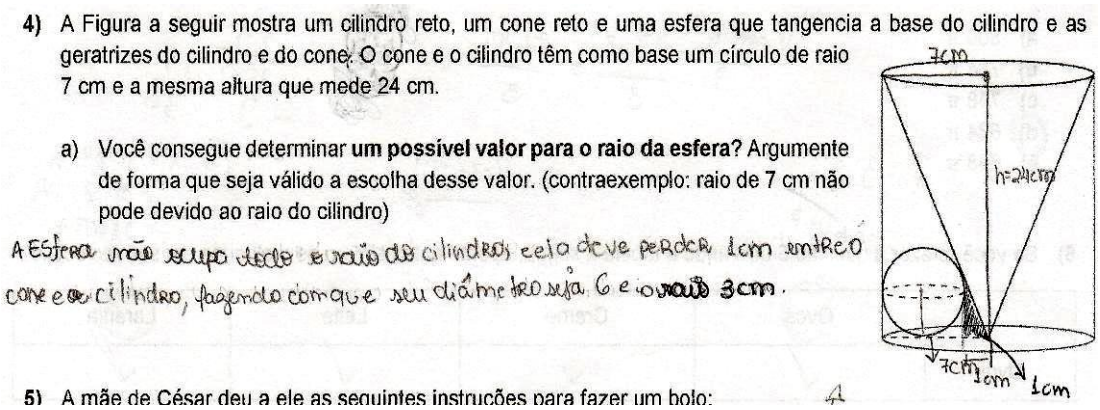

3) Três pacientes A,B e C usam, em conjunto, 1830 mg por mês de um determinado medicamento que é produzido em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5 mg, o paciente B usa cápsulas de 10 mg e o paciente C ingere cápsulas de 12 mg. O paciente A toma a metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. Nessas condições, é CORRETO afirmar que o número de cápsulas que o paciente C toma mensalmente é igual a:

a) 60
b) 75
c) 90
d) 120
e) 135

(b)

Figura 7 – Exemplos de Respostas Esperadas na Questão 3 - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Com a quarta questão o aluno precisa perceber que não será possível utilizar 3,5cm como raio da esfera devido ao cone que ocupará espaço do raio do cilindro, desta forma, espera-se que o aluno estime algum valor menor que 3,5cm de raio, tal que ocorreu na Figura 8, propondo até mesmo a possível distância entre o cone e a esfera.


4) A Figura a seguir mostra um cilindro reto, um cone reto e uma esfera que tangencia a base do cilindro e as geratrizes do cilindro e do cone. O cone e o cilindro têm como base um círculo de raio 7 cm e a mesma altura que mede 24 cm.

a) Você consegue determinar **um possível valor para o raio da esfera?** Argumente de forma que seja válido a escolha desse valor. (contraexemplo: raio de 7 cm não pode devido ao raio do cilindro)

A Esfera não ocupa todo o raio do cilindro, ela deve perder 1cm entre o cone e o cilindro, fazendo com que seu diâmetro seja 6 e o raio 3cm.

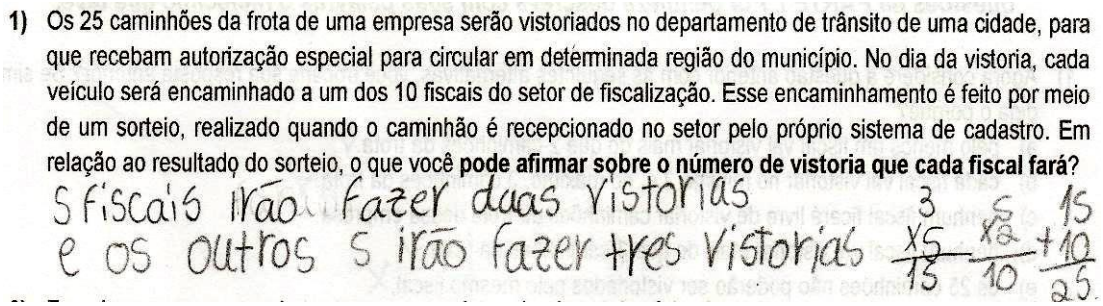
5) A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

Figura 8 – Exemplo de Resposta Esperada na Questão 4 - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

4.2 RACIOCÍNIO LÓGICO ALTERNATIVO PARA RESOLUÇÃO

Neste tópico são apresentados os resultados cujos alunos utilizaram-se das estratégias alternativas as esperadas ou imaginadas para a temática envolvida. As maiores variações de resoluções estão presentes nos alunos do Grupo 2.

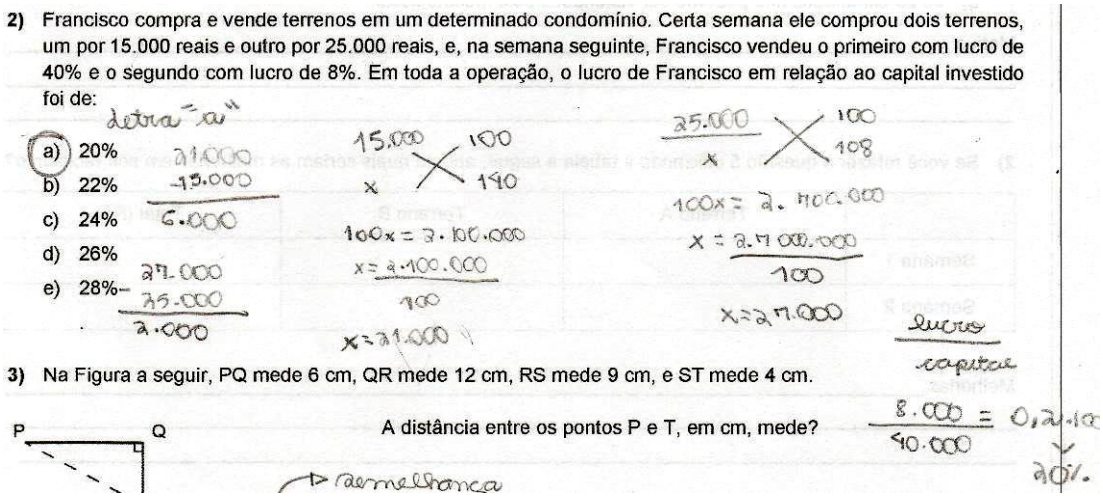
Analisando o Grupo 1, através da primeira questão, percebe-se que o aluno tentou utilizar-se da distribuição em partes proporcionais ora a 3 ora a 2 para dar os 25, entretanto sua resolução não garante um mínimo para a condição apresentada (Figura 9).


1) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, o que você **pode afirmar sobre o número de vistoria que cada fiscal fará**?

5 fiscais irão fazer duas vistorias e os outros 5 irão fazer tres vistorias

Figura 9 – Resposta Alternativa na Questão 1 sem Sucesso - Parte I.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Na Questão 2 espera-se do aluno que saiba os conceitos de porcentagem de forma que possa determinar os 40% e 8% sobre o preço dos lotes inicialmente, posteriormente ao soma-los obterá o novo valor e deste retirar o lucro correspondente. Houve poucos casos em que o aluno se utilizou da ideia de porcentagem diretamente ao valor inicial o somando posteriormente, a maioria dos alunos utilizaram a regra de três para determinar a porcentagem. No caso da Figura 10, além da regra de três foi feita as somas e subtrações necessárias e o uso da razão lucro/capital para determinar seu resultado.


2) Francisco compra e vende terrenos em um determinado condomínio. Certa semana ele comprou dois terrenos, um por 15.000 reais e outro por 25.000 reais, e, na semana seguinte, Francisco vendeu o primeiro com lucro de 40% e o segundo com lucro de 8%. Em toda a operação, o lucro de Francisco em relação ao capital investido foi de:

a) 20%
b) 22%
c) 24%
d) 26%
e) 28%

3) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.

A distância entre os pontos P e T, em cm, mede?

Figura 10 – Resposta Alternativa na Questão 2 - Parte I.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Ao notar que a grande maioria dos alunos se utilizou da regra de três, é possível inferir junto ao PCN que este pensamento faz parte do raciocínio proporcional na interpretação dos fenômenos da vida real, caso este mencionado como esperado na página 23.

Na Questão 3 dois alunos tentaram resolvê-la por semelhança de figuras, entretanto não perceberam as medidas consideradas entre o segmento QR dando ora valor de 8 ora de 12 (Figura 11).

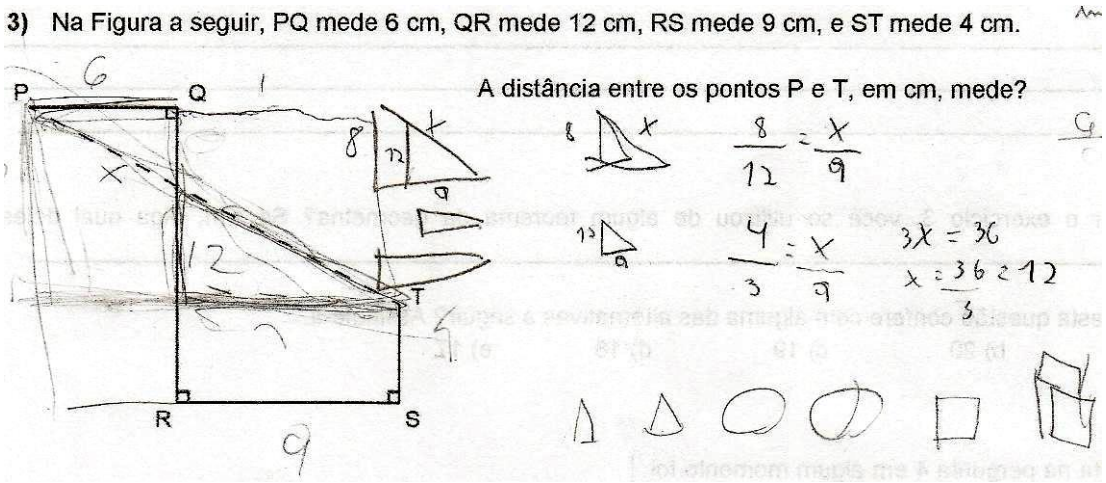


Figura 11 – Resposta Alternativa na Questão 3 sem Sucesso - Parte I.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Um outro caso de solução para a Questão 5, esteve em repetir o último múltiplo de três da linha superior na linha de baixo, somando-a si mesmo e depois multiplicando por 3, ou seja, o aluno não identificou a multiplicação por dois do resultado da linha um para a dois, no entanto chegou-se ao mesmo valor, porém de forma mais calculista (Figura 12).

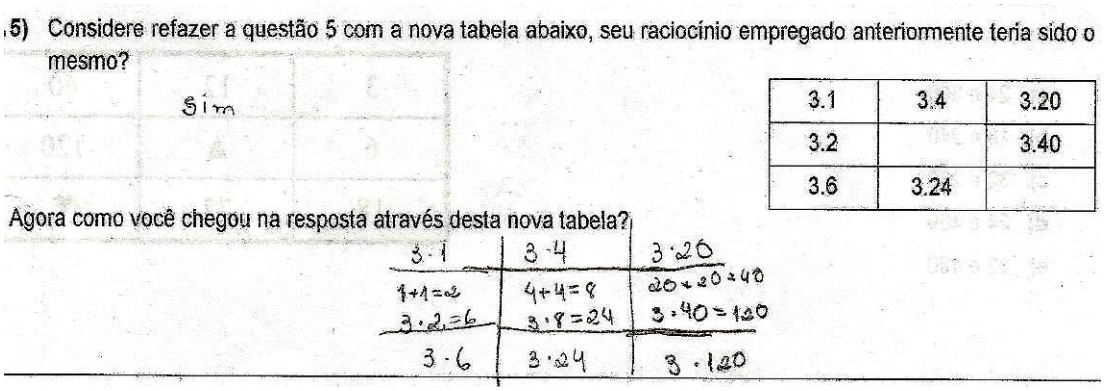
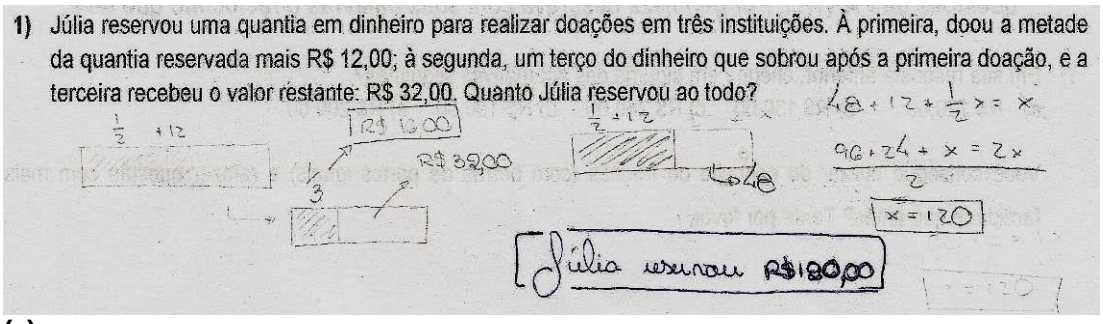
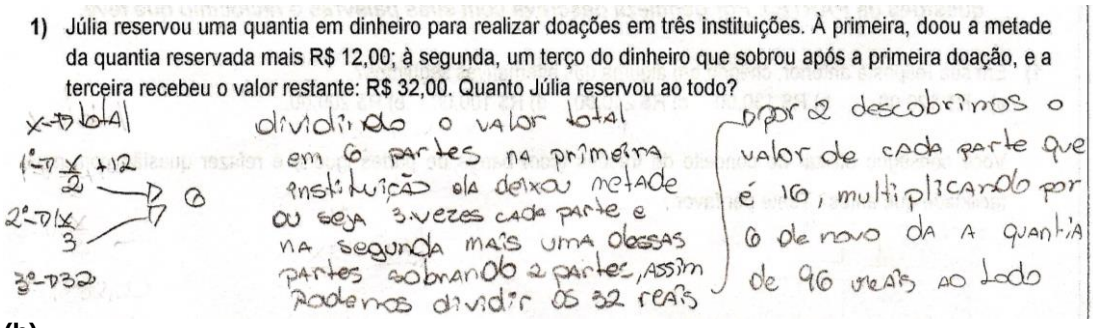


Figura 12 – Resposta Alternativa Questão 5 – Parte II.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Com o segundo grupo, na primeira questão, os alunos que tentaram empregar outra técnica que não utilizava o pensamento algébrico, foram a minoria como no caso da Figura 13a que se utilizou do conceito de fração e na Figura 13b com a escrita que tentou se expressar sem chegar no resultado esperado. Na Parte II, a maior parte dos alunos que chegaram a tal conclusão tiveram como resposta que não utilizariam as frações para resolve-la.



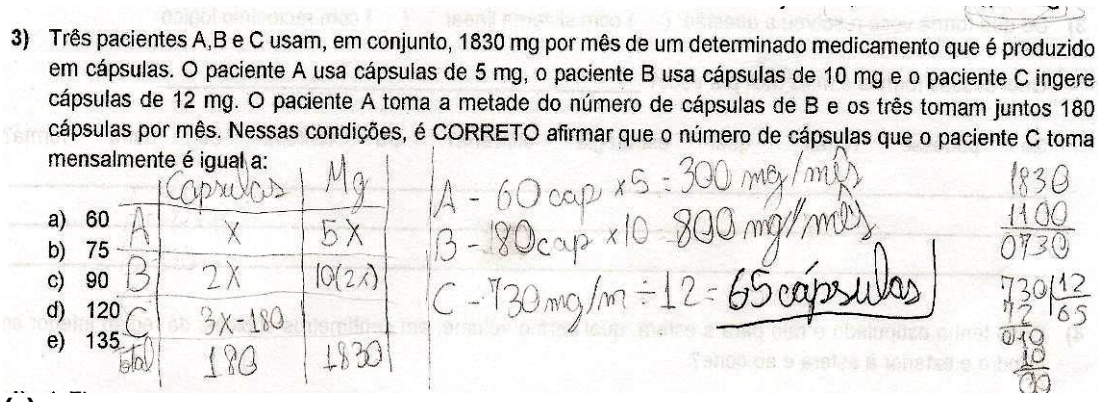
(a)



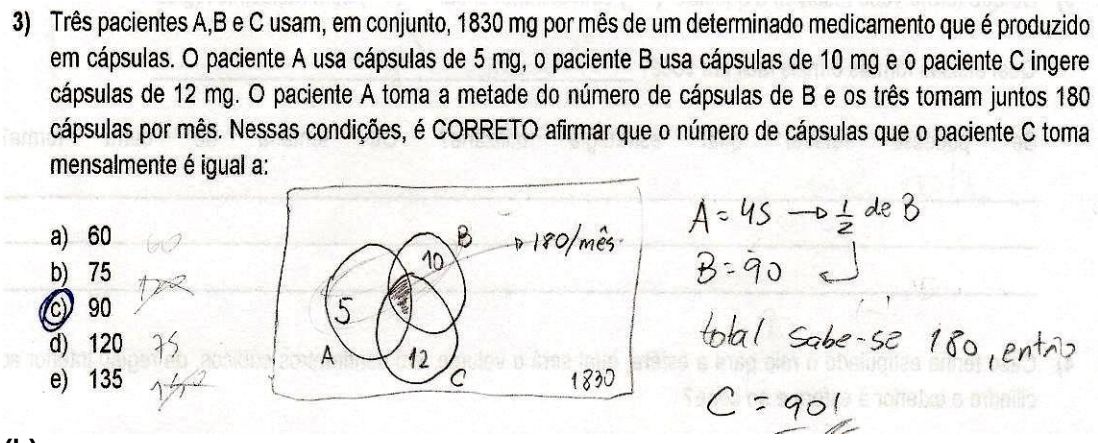
(b)

Figura 13 – Respostas Alternativa na Questão 1 sem Sucesso - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Na terceira questão, foi identificado diversas formas de resolução, dentre elas tiveram aquelas que não foram imaginadas quando escolhida a questão para ser utilizada no teste. Como exemplo, a Figura 14a apresentada um caso em que o aluno tentou tabelar os dados e chegar a uma expressão algébrica, entretanto não conseguiu resolvê-la. Outra situação identificada (Figura 14b), foi o caso em que se chegou na resposta correta com o uso diagrama de Venn, fato este que não tinha sido pensado como alternativa para solução no início deste trabalho.



(a)



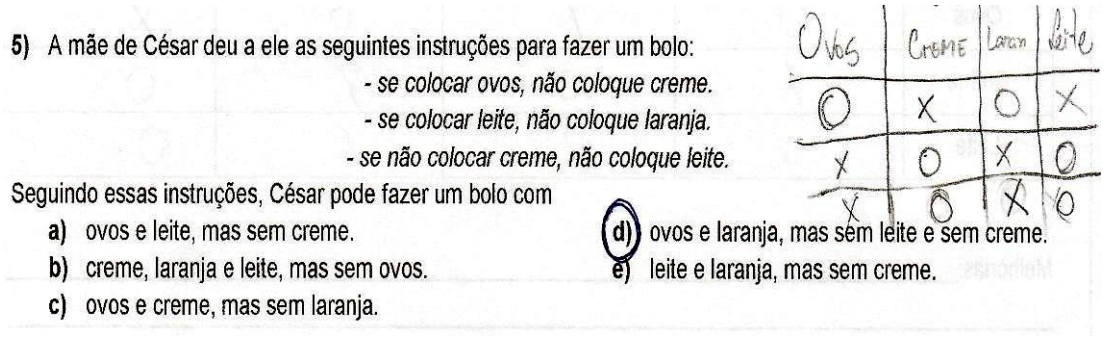
(b)

Figura 14 – Respostas Alternativa à Questão 2 com e sem Sucesso - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

De acordo com Canavarro (2007), ao identificar as diversas formas que os alunos utilizaram para responder tal questão, pode-se inferir que eles organizaram seus pensamentos de maneira mais conveniente sem necessidade de se prender a uma forma padronizada de resolução possivelmente imposta por professor, pois

> A possibilidade de utilização de diversas formas de representação amplia as hipóteses de os alunos mais jovens conseguirem organizar o seu pensamento, para além de facilitar a sua comunicação, nomeadamente ao considerarem-se as representações não convencionais. (CANAVARRO, 2007, p.106)

Na quinta questão, foi identificado tanto resoluções que se usaram de tabela própria (Figura 15a) como também da tabela proposta na Parte II. Em sua maioria, os alunos mencionaram que a tabela da segunda parte os auxiliava a organizar o pensamento e assim identificar qual das alternativas estava de acordo com a tabulação da informação (Figura 15b).



5) A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

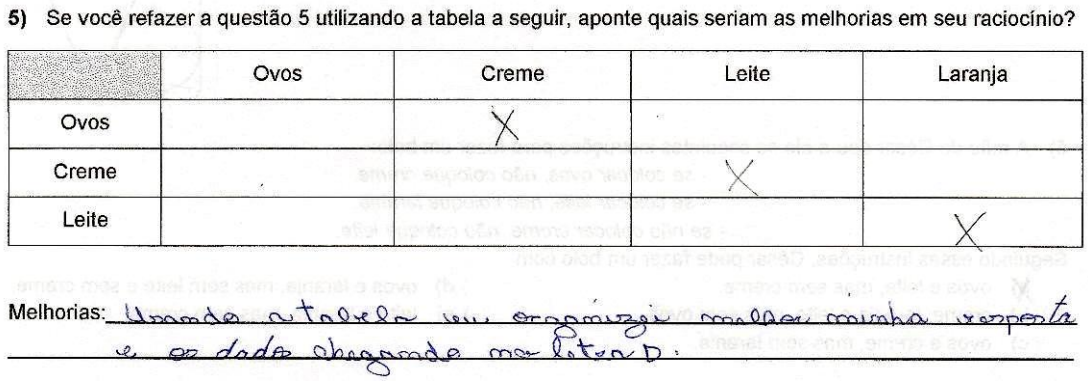
- se colocar ovos, não coloque creme.
- se colocar leite, não coloque laranja.
- se não colocar creme, não coloque leite.

Ovos	Creme	Laran	Leite
O	X	O	X
X	O	X	O
X	O	X	O

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com

a) ovos e leite, mas sem creme.
b) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
c) ovos e creme, mas sem laranja.
d) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
e) leite e laranja, mas sem creme.

(a)



5) Se você refazer a questão 5 utilizando a tabela a seguir, aponte quais seriam as melhorias em seu raciocínio?

	Ovos	Creme	Leite	Laranja
Ovos		X		
Creme			X	
Leite				X

Melhorias: Usando a tabela eu organizei melhor minha resposta e os dados chegando no lugar.

(b)

Figura 15 – Respostas Alternativa à Questão 5 - Parte I e II.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

O uso das tabelas neste caso, pode ser identificado como um instrumento de auxílio no pensamento algébrico, na organização das ideias, pois de acordo com Canavarro (2007), “As tabelas são sem dúvida ferramentas muito poderosas no que diz respeito ao pensamento algébrico, possibilitando um registo organizado dos valores numéricos em causa [...]” (CANAVARRO, 2007, p. 107); mesmo que não exista valores numéricos associados a questão, os alunos inconscientemente os identificam com o processo de sim ou não (sistema binário, ora 0 ora 1) e chegam a resposta correta.

4.3 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA POSSIVELMENTE IDENTIFICADA NAS RESOLUÇÕES

Na resolução da Questão 1 foi encontrado em diversos casos que os alunos fizeram a divisão de 25 por 10 encontrando 2,5 tal que a maior parte deles assumiram isso como verdade e resposta do problema. Desta forma, podemos identificar nos alunos a capacidade de aplicar a divisão para uma distribuição igualitária, porém não se atendou para impossibilidade de ter 2,5 fiscais.

Quanto a segunda questão a grande maioria dos alunos aplicou a regra de três para a solução do problema, percebe-se que os mesmos recorrem a esta técnica para os problemas de proporcionalidade; o Gráfico 1 apresenta a porcentagem de alunos que a utilizaram para resolver.

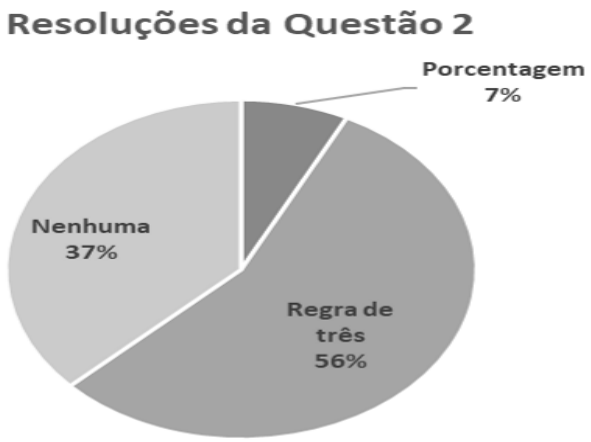


Gráfico 1 – Técnicas Utilizadas na Resolução da Questão 2.
Fonte: Autoria própria, 2018.

Na Questão 3 (Gráfico 2), foi notado que a maior parte dos alunos identificam a necessidade de se utilizar o Teorema de Pitágoras, pois o associam ao triângulo retângulo, entretanto acabam se perdendo nos segmentos dos triângulos.

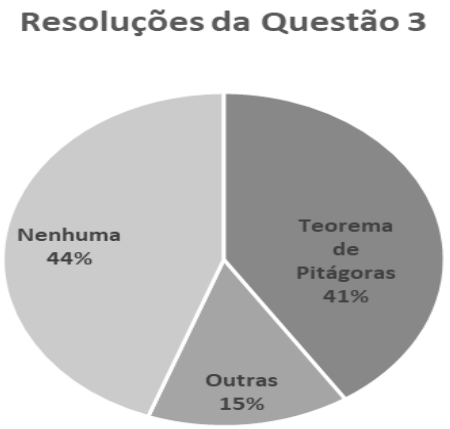
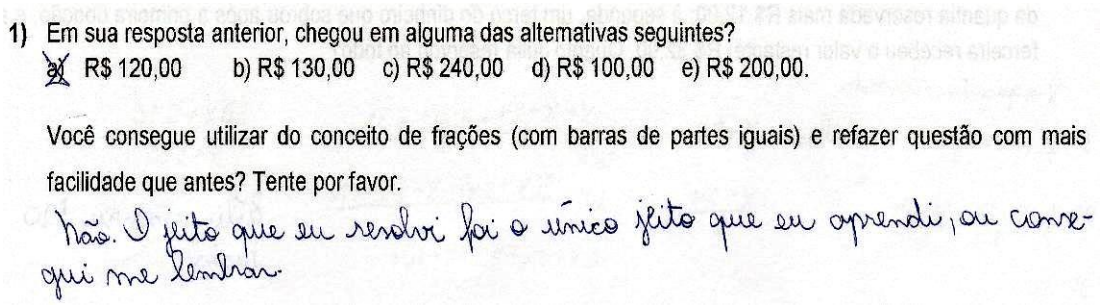


Gráfico 2 – Técnicas Utilizadas na Resolução da Questão 3.
Fonte: Autoria própria, 2018.

Na Questão 5, a maioria dos alunos identificaram a multiplicidade das linhas, percebe-se que os mesmos não possuem dificuldades em multiplicações e disposições de dados tabelar, a dificuldade estava em entender a lógica, porém quando entendida era calculada sem problemas.

No Grupo 2, através da primeira questão, podemos notar que os alunos habitualmente aplicam o pensamento algébrico para a resolução de problemas como o apresentado (Figura 16), pois a maioria deles utilizou-se de tal técnica, alegando dificuldades em utilizar as frações como proposto a eles na Parte II.


1) Em sua resposta anterior, chegou em alguma das alternativas seguintes?
a) R$ 120,00 b) R$ 130,00 c) R$ 240,00 d) R$ 100,00 e) R$ 200,00.

Você consegue utilizar do conceito de frações (com barras de partes iguais) e refazer questão com mais facilidade que antes? Tente por favor.

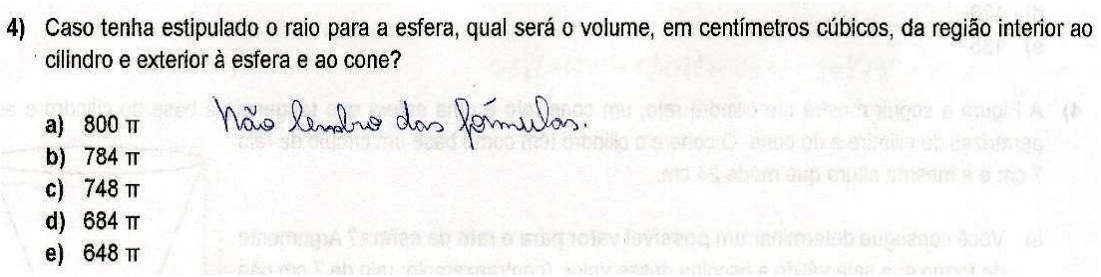
Não. O jeito que eu resolvi foi o único jeito que eu aprendi, ou consegui me lembrar.

Figura 16 – Justificativa da Técnica Utilizada - Parte II
Fonte: Aluno terceira série (2018)

Na Questão 2 e 3 não foram identificados casos predominantes. Na segunda, a maioria dos alunos não conseguiram resolver. Porém na terceira, devido a diversidade de resoluções, como apresentado anteriormente, podemos notar que existe aprendizagem significativa, pois:

> Em uma aprendizagem significativa não acontece apenas a retenção da estrutura do conhecimento, mas se desenvolve a capacidade de transferir esse conhecimento para a sua possível utilização em um contexto diferente daquele em que ela se concretizou. (TAVARES, 2008, p. 2)

Com a quarta questão, notou-se em sua grande maioria, que os alunos possuem dificuldades com geometria espacial devido ao grande número de alunos que não conseguiram perceber no enunciado a própria exclusão da possibilidade de raio 7cm para o cilindro; além disso, alguns alegam não conseguir resolver a Parte II porque não lembram das fórmulas (Figura 17).


4) Caso tenha estipulado o raio para a esfera, qual será o volume, em centímetros cúbicos, da região interior ao cilindro e exterior à esfera e ao cone?

a) 800 π
b) 784 π
c) 748 π
d) 684 π
e) 648 π

Não lembro das fórmulas.

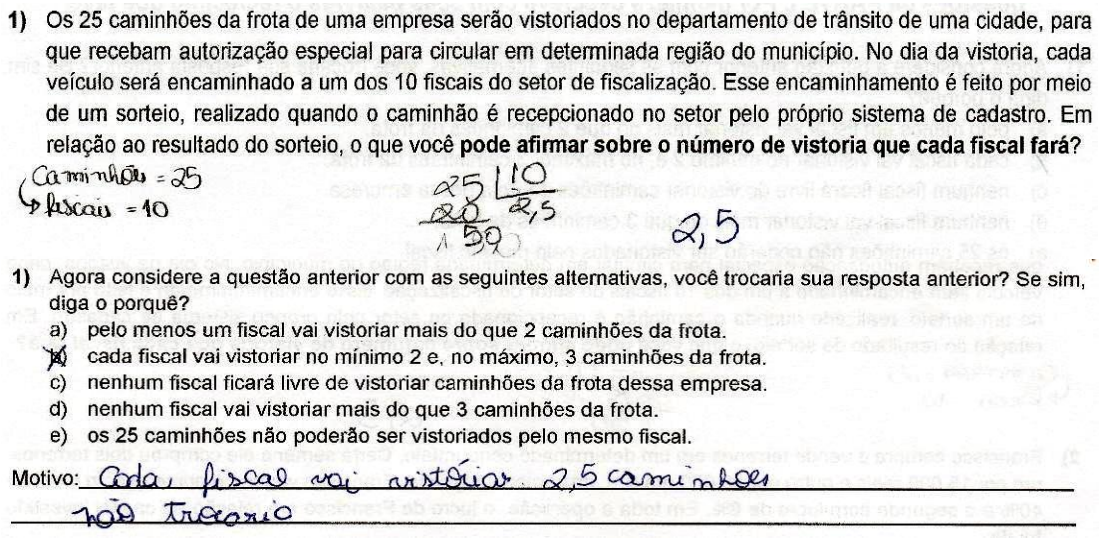
Figura 17 – Justificativa de não Conseguir Resolver a Questão 4 - Parte II.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

O não entendimento das “fórmulas” que se fez ausentes nos casos apresentados como justificativa dos alunos, pode ser compreendido como ausência na compreensão da linguagem algébrica e falta de aprendizagem significativa, dado que o mesmo não conseguiu nem ao menos deduzir e expressar-se pela diferença entre os volumes dos sólidos presentes na figura. Neste caso, segundo Almeida (2017), a dependência da fórmula pode apresentar-se como o não olhar por meio de símbolo e sim apenas usá-lo, tal que o uso da

> [...] linguagem algébrica vai **surgindo como necessária para modelar as situações propostas pelo professor**, sendo utilizada com significado, em que os alunos **deixam apenas de olhar para os símbolos, para olhar por meio dos símbolos**, entendendo, por exemplo, o que cada símbolo significa em uma equação, em uma função ou em uma fórmula. (ALMEIDA, 2017, p. 15, grifo nosso)

4.4 POSSÍVEIS PROBLEMAS ENTRE LEITURA, INTERPRETAÇÃO E EXECUÇÃO DO RACIOCÍNIO LÓGICO

Dentro do Grupo 1, como mencionado anteriormente, devido a não percepção dos 2,5 fiscais e principalmente por não prestar atenção a pergunta da Parte I: o que você **pode afirmar sobre o número de vistoria que cada fiscal fará**? Muitos persistiram em afirmar tal erro com a primeira questão, como apresentado a seguir (Figura 17), percebendo até mesmo a alternativa que apresenta o intervalo real para o valor encontrado.



1) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, o que você **pode afirmar sobre o número de vistoria que cada fiscal fará**?

Caminhões = 25
fiscais = 10

25 | 10
20 | 2,5
50

2,5

1) Agora considere a questão anterior com as seguintes alternativas, você trocaria sua resposta anterior? Se sim, diga o porquê?

a) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.
b) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.
c) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.
d) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.
e) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Motivo: Cada fiscal vai vistoriar 2,5 caminhões não trocaria

Figura 17 – Erro Presente na Maior Parte das Respostas da Questão 1 - Parte I e II.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Com a terceira questão, alguns alunos tiveram o pensamento certo em vista do Teorema de Pitágoras, no entanto o problema em comum está relacionado a subtração do segmento TS com QR, porém em comum somam o segmento PQ com RS, como exemplo, na Figura 18 percebe-se que o erro foi não ter descontado 4 do segmento TS nos 12 do segmento QR, ficando 8, mas que soube aplicar o Teorema de Pitágoras.

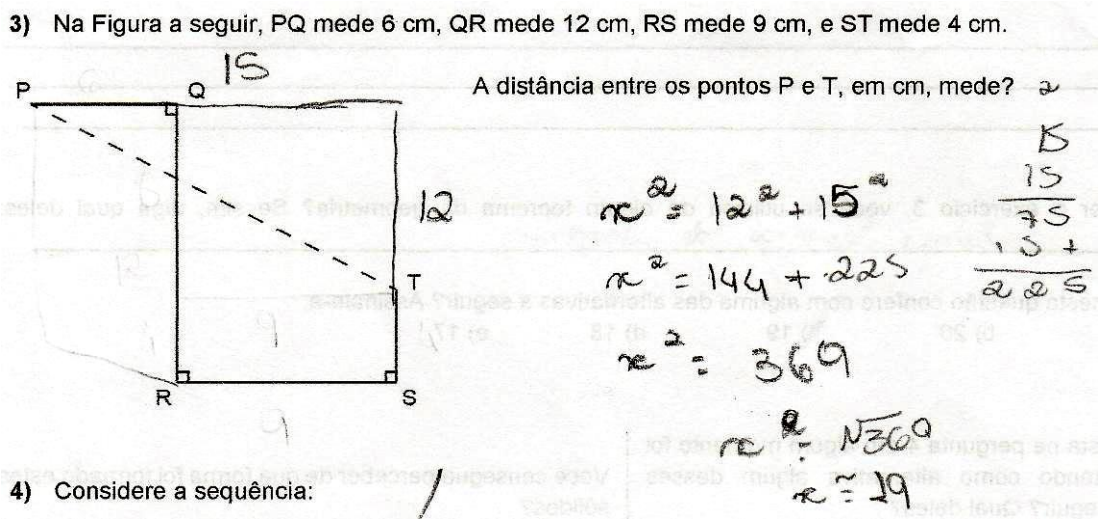


Figura 18 – Respostas da Questão 3 com Pequenos Erros - Parte I.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Na quarta questão, tem por expectativa a identificação de que os polígonos estavam passando pelo processo de revolução, e que o quadrado ao passar por este se torna um cilindro e não um cubo. Na Figura 19 pode-se notar que o aluno mudou sua resposta, num primeiro momento para ele era necessário ter uma figura plana, mas depois percebe a necessidade de se gerar um sólido.

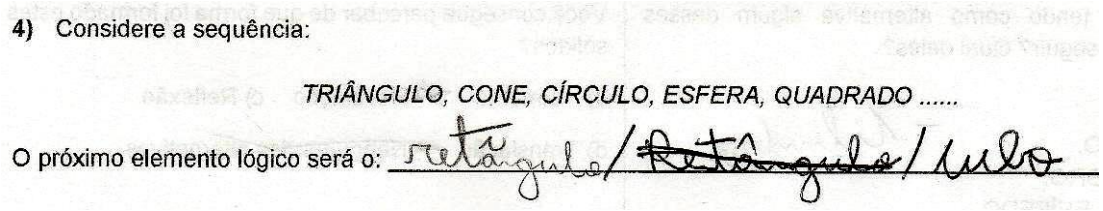


Figura 19 – Troca Entre os Conceitos de Figuras Planas - Parte I.
Fonte: Aluno do nono ano (2018).

Ao contabilizar as respostas desta questão, boa parte delas estiveram entre cubo e cilindro, no entanto poucos destes sabiam a técnica empregada na geometria para se chegar em tal figura, ou seja, dizer que era revolução. Dentre os que responderam, pode-se observar pela Tabela 1 que em alguns casos tiveram divergências entre o conceito dos sólidos e os processos de confecção no plano e no espaço de figuras geométricas.

Tabela 1 – Diversidade nas Respostas da Questão 4 de Geometria.

Respostas	Simetria	Revolução	Reflexão	Translação	Nenhuma das alternativas	TOTAL
Cilindro	1	6	0	0	2	9
Cubo	2	5	0	3	4	14
Retângulo	0	1	1	0	0	2
Em branco	0	0	0	0	0	2
TOTAL	**3**	**12**	**1**	**3**	**6**	**27**

Fonte: Autoria própria, 2018.

Talvez para auxiliar na resolução da Questão 4, poderiam ser utilizados algumas imagens, pois “[...] estudantes com pouca experiência, são enormemente beneficiados quando imagens são apresentadas simultaneamente com palavras” (Mayer, 1994 apud Tavares, 2010, p. 8), no entanto era esperado do aluno que esboçasse os desenhos afim de identificar o que estava acontecendo e por lógica chegar no sólido correspondente, como pode ser visto na parte inferior da Figura 11.

No Grupo 2, pela Questão 1, é possível identificar que o aluno empregou a ideia do pensamento algébrico de maneira correta, entretanto seu erro foi não somar os 12 para o caso que apresenta como instituição 2, observado na figura 20, sendo que este valor foi anotado no primeiro momento, mas se esqueceu dele no seguinte, errando o cálculo.

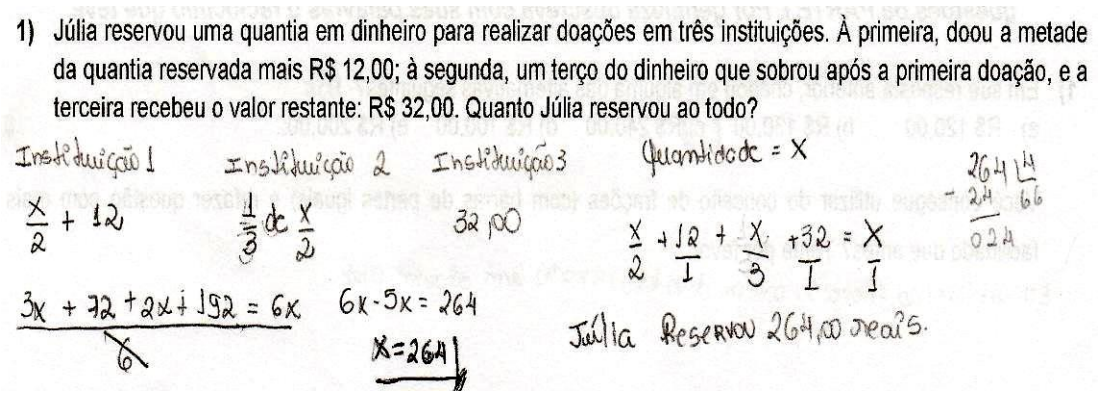


Figura 20 – Resposta da Questão 1 com Erro - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Na segunda, ocorreu casos de associar o valor do segmento CJ com o BG, outros que utilizaram da relação da área de trapézio e também aquele em que o

aluno associou a ideia de proporção entre os segmentos, no entanto esqueceu-se de somar 5 ao x, caso comum em outras resoluções que aplicaram a mesma estratégia (Figura 21).

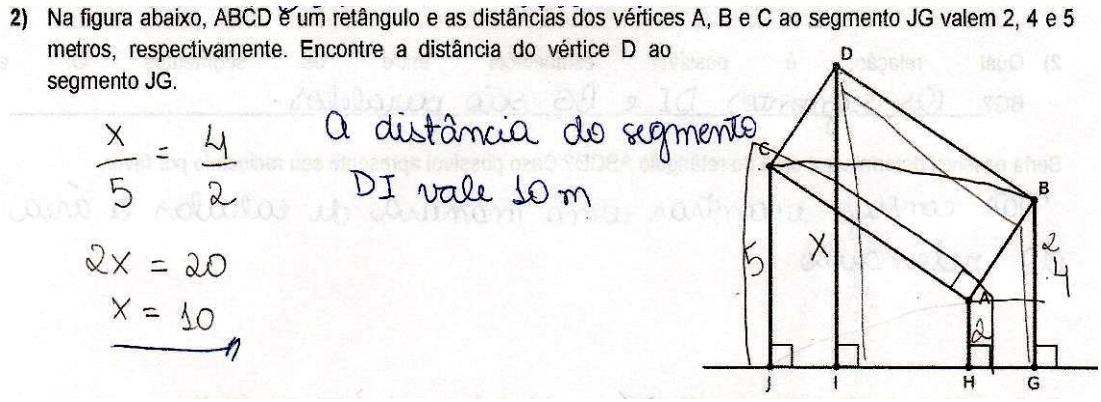


Figura 21 – Exemplo de Erro na Execução da Questão 2 - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Através da quarta questão, notou-se o comum erro dos alunos em não perceber o limite possível para o raio (Figura 22), mesmo estando no enunciado. Sendo alguns os alunos que tentaram resolver a questão, grande parte deles não identificaram a real pergunta: você consegue **determinar um possível valor** para o raio? Sendo que no momento da aplicação a maioria deles achava que seria necessária fazer algumas contas, me questionando onde estavam os outros valores, pois só tinham o raio do cilindro.

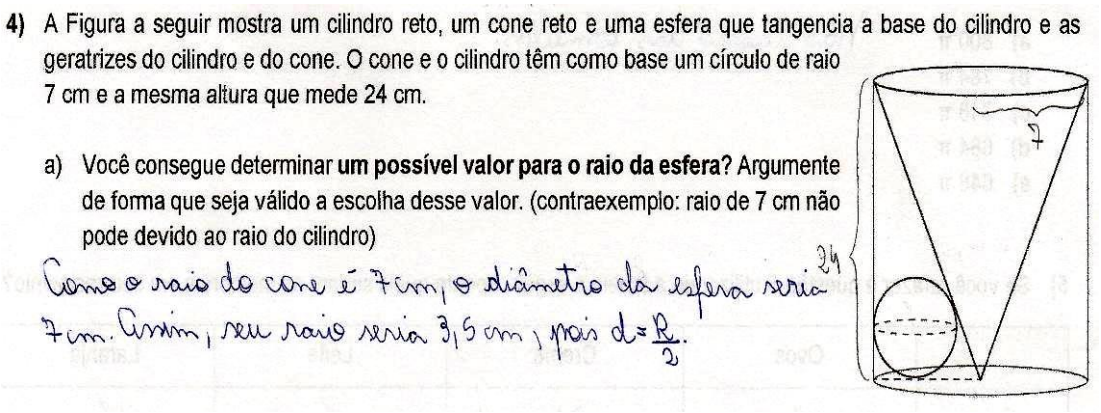


Figura 22 – Exemplo de Erro na Execução da Questão 2 - Parte I.
Fonte: Aluno terceira série (2018).

Desta forma, com Costa e Moreira (2001) temos que

> Entender um enunciado não significa saber resolver o problema que ele apresenta, mas, sem dúvida**, não entendê-lo é a primeira condição para não avançarmos** no conhecimento que ele poderia gerar. (Costa, 2001, p. 266, grifo nosso).

Ou seja, com esta questão podemos dizer que um dos grandes problemas foi não entender o mínimo que se pedia, além disso, também foi apresentada a dificuldade de não se prosseguir na Parte II devido a estar preso as “fórmulas” como já mencionado ao discutir a Figura 17.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento desta pesquisa de campo, pode-se identificar casos como o esperado em vista do raciocínio lógico assim como a técnica correspondente a temática da questão, exemplos com as Figuras 3, 5, 7, 8 e 10. Mas também foram apresentadas resoluções não esperadas ao propor tal questão, como exemplo temos as Figuras 14b e 15a.

Foi possível identificar casos de aprendizagem significativa nos assuntos de multiplicidade, divisão em busca de parcelas iguais, teorema de Pitágoras, expressões algébricas e regra de três. Em contrapartida, notou-se a grande possibilidade dos alunos se perderem nas expressões algébricas, nem tanto com a possibilidade de modelar um problema, mas sim a execução do cálculo algébrico.

Dentre as temáticas trabalhadas a que mais apresentou problemas foi a geometria, tendo poucos alunos que a acertaram de fato. Muitos deles tiveram dificuldades em enxergar as possibilidades de alteração das figuras, por exemplo, o caso do cubo ou cilindro aplicado no Grupo 1 e no Grupo 2 a dificuldade em determinar uma possível medida de raio para a esfera com o uso de uma lógica simples.

Através desta dificuldade em geometria, ligando-a ao curso, pode-se buscar por métodos mais palpáveis fisicamente que possibilitem os alunos verem as possíveis mudanças do plano para o espaço quebrando a relação de medo com volume de sólidos, caso este mencionado pelos alunos da terceira série do ensino médio.

Outro item que pode ajudar no ensino de matemática é propor mais atividades de resolução de expressões algébricas, pois em diversos casos o erro esteve mais em sua execução calculista do que modelagem e generalização.

Como um todo pude ver de fato o que já tinha a curiosidade, sobre como alguns alunos empregam seu raciocínio lógico em dados problemas, uns mais rápidos e esboçados e outros detalhados e expressivos na álgebra. Confesso que tal trabalho não se debruçou sobre o assunto de forma expansiva e quantitativa, fazendo maiores levantamentos e até mesmo uma possível entrevista com os alunos que apresentaram as resoluções presentes nesta monografia, sendo uma possibilidade de continuidade deste trabalho, mas que buscou entender mais sobre

o raciocínio que eles utilizavam em problemas de seleção pública como foi escolhido, para dar mais clareza ao se trabalhar com situações comuns que exigem um mínimo de aprendizagem e raciocínio, e não um conjunto de conhecimentos mais específicos e trabalhados na matemática.

Uma proposta de novo trabalho seria levantar o entendimento que possuem da geometria em mudanças de dimensões, auxiliando-os através das TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação) a perceber as possibilidades de ocorrências que existem entre estas.

Por fim, posso dizer que foi possível abstrair grandemente o conhecimento sobre as estratégias que alunos normalmente utilizam para resolver seus problemas, como a regra de três, e a partir desta reflexão desenvolver mais técnicas que possam ajuda-los e incentiva-los a aplicar outras formas de resolução de exercícios quando possível, ampliando assim as possibilidades como foi o caso que os alunos da terceira série do ensino médio apresentou com a Questão 3.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Jadilson R. **Álgebra escolar na contemporaneidade: uma discussão necessária**. Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. UFPE, v. 8, n. 1, 2017. ISSN: 2177-9309. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/12004/pdf>. Acesso em: 08 abr. 2018.

ALMEIDA, Jadilson Ramos de; SANTOS, Marcelo Câmara dos. **Pensamento algébrico: em busca de uma definição**. Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM. Campo Mourão, PR: v.6, n.10, p.34-60, jan.-jun. 2017. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1124/pdf_207>. Acesso em: 12 abr. 2018.

ARCAVI, A. **El desarrollo y el use del sentido de los símbolos**. Conferência plenária no Encontro de Investigação em Educação Matemática, 17-19 abr. 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-bibliografia.htm>. Acesso em: 04 abr. 2018

AUSUBEL, David P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva**. 1. ed. Tradução: Lígia Teopisto. Lisboa: Paralelo Editora, 2000.

_____. **Educational psychology: a cognitive view**. New York: Holt, Rineheart and Winston, 1968.

AUSUBEL, David P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H**. Psicologia educacional**. 2. ed. Tradução: Eva Nick et al. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980. 625p.

BARBOSA, Elsa; BORRALHO, António. **Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico**. In: VALE, Isabel, BARBOSA, Ana (org.). Padrões: Múltiplas Perspectivas e contextos em Educação Matemática. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, 2009. p. 59-68.

BRASIL. **PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002. 144 p.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

CANAVARRO, Ana P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Lisboa, PT: Revista Quadrante, v. 16, n. 2, p. 81-118, 2007. Disponível em: <https://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/4301/1/_Quadrante_vol_XVI_2-2007-pp000_pdf081-118.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2018.

CÂNDIDO, Patrícia T. **Comunicação em Matemática**. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (org.) Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática. 1. ed. reimp. São Paulo: Artmed, 2006. p. 15-28.

COSTA, S. S. C. da; MOREIRA, M. A. **A resolução de problemas como um tipo especial de Aprendizagem Significativa**. Cad. Cat. Ens. Fís.v.18, n.3, p. 263-277, 2001. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/85024/000313595.pdf?sequence=1>. Acesso em: 18 abr. 2018.

DICIO. **Dicionário online de Português**. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/proposicao/>. Acesso em: 05 abr. 2018.

LEMOS, Evelyse dos Santos. **A aprendizagem significativa: estratégias facilitadoras e avaliação**. Aprendizagem Significativa em Revista, v.1, n.1, p.25-35, 2011. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID3/v1_n1_ a2011.pdf>. Acesso em: 22 mar. 2018.

OLIVEIRA, P. **O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia**. Educação e Matemática. Lisboa, n. 100, p. 3-9, nov./dez. 2008.

PEREIRA, Joana Mata; PONTE, João Pedro da. **Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9º ano**. mai. 2011. Disponível em:<https://www.researchgate.net/publication/261877091_Raciocinio_matematico_em_contexto_algebrico_Uma_analise_com_alunos_do_9_ano>. Acesso em: 11 abr. 2018.

ROMANATTO, Mauro Carlos. **Resolução de problemas nas aulas de Matemática.** Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, n. 1, p. 299-311, mai. 2012. ISSN 1982-7199. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/413/178>. Acesso em: 15 mar. 2018.

SOARES, LUÍS H. **Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica**. 2008. 137 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2009. Disponível em:

<http://www.fisica.ufpb.br/~romero/pdf/DissertacaoHavelange.pdf>. Acesso em: 20 mar. 2018.

TAVARES, Romero. **Aprendizagem significativa, codificação dual e objetos de aprendizagem**. Revista Brasileira de Informática na Educação - RBIE. João Pessoa, PB: UFPB, v. 18, n. 2, p. 4-16, 2010. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/rbie/article/view/1205/1114>. Acesso em: 21 mar. 2018.

_____. **Aprendizagem significativa e o ensino de ciências**. Revista interdisciplinar de estudos da cognição (Ciências & Cognição). Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Biofísica Carlos Chagas Filho – UFRJ, v. 13, p. 94-100, 2008. Disponível em: <http://www.cienciasecognicao.org/revista/index.php/cec/article/view/687/464>. Acesso em: 01 abr. 2018.

_____. **Aprendizagem significativa**. Revista Conceitos. v. 5, n. 10, jun. 2004. Disponível em: <http://www.fisica.ufpb.br/~Romero/objetosaprendizagem/ Rived/Artigos/2004-RevistaConceitos.pdf>. Acesso em: 02 abr. 2018.

VALADARES, Jorge A. **A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista**. Aprendizagem Significativa em Revista (Meaningful Learning Review). Porto Alegre, RS: Instituto de Física - UFRGS, v. 1, n. 1, p. 36-57, abr. 2011.Disponível em:<http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID4/v1_n1_a2011.pdf>. Acesso em: 16 mar. 2018.

VALE, Isabel. **As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos**. Revista Interacções, v. 8, n. 20, p. 181-207, 2012. ISSN: 1646-2335. Disponível em: <http://revistas.rcaap.pt/interaccoes/article/view/ 493/446>. Acesso em: 10 abr. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Teste e questionário aplicado aos alunos do nono ano (Grupo 1)

PARTE I – Por favor responder as questões no espaço estipulado com caneta azul ou preta.

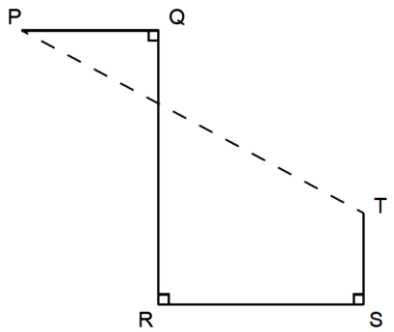
1) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, o que você **pode afirmar sobre o número de vistoria que cada fiscal fará**?

2) Francisco compra e vende terrenos em um determinado condomínio. Certa semana ele comprou dois terrenos, um por 15.000 reais e outro por 25.000 reais, e, na semana seguinte, Francisco vendeu o primeiro com lucro de 40% e o segundo com lucro de 8%. Em toda a operação, o lucro de Francisco em relação ao capital investido foi de:

a) 20%
b) 22%
c) 24%
d) 26%
e) 28%

.

3) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.



A distância entre os pontos P e T, em cm, mede?

4) Considere a sequência:

TRIÂNGULO, CONE, CÍRCULO, ESFERA, QUADRADO .....

O próximo elemento lógico será o: _____

5) No diagrama abaixo, os números foram dispostos segundo um critério. De acordo com esse critério, que números substituem, respectivamente, os símbolos ▲ e ▼?

3	12	60
6	▲	120
18	72	▼

a) 24 e 360
b) 18 e 240
c) 32 e 280
d) 24 e 480
e) 32 e 480

PARTE II – Agora considere os números das questões seguintes como correspondentes aos das questões da PARTE I. Por gentileza descreva com suas palavras o raciocínio que teve.

1) Agora considere a questão anterior com as seguintes alternativas, você trocaria sua resposta anterior? Se sim, diga o porquê?

a) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.
b) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.
c) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.
d) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.
e) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

Motivo:_____

_____

_____

2) Se você refazer a questão 5 utilizando a tabela a seguir, aponte quais seriam as melhorias em seu raciocínio?

	Terreno A	Terreno B	Total (R$)
Semana 1			
Semana 2			

Melhorias:_____

_____

_____

3) Ao resolver o exercício 3, você se utilizou de algum teorema da geometria? Se sim, diga qual deles: _____

Sua resposta nesta questão confere com alguma das alternativas a seguir? Assinale-a.

a) 21 b) 20 c) 19 d) 18 e) 17

4) Sua resposta na pergunta 4 em algum momento foi pensado tendo como alternativa algum desses sólidos a seguir? Qual deles?

a) CUBO.
b) CILINDRO.
c) TETRAEDRO.
d) PARALELEPÍPEDO.

Você consegue perceber de que forma foi formado estes sólidos?

a) Simetria b) Revolução c) Reflexão

d) Translação e) Nenhuma das alternativas

5) Considere refazer a questão 5 com a nova tabela abaixo, seu raciocínio empregado anteriormente teria sido o mesmo?

3.1	3.4	3.20
3.2		3.40
3.6	3.24	

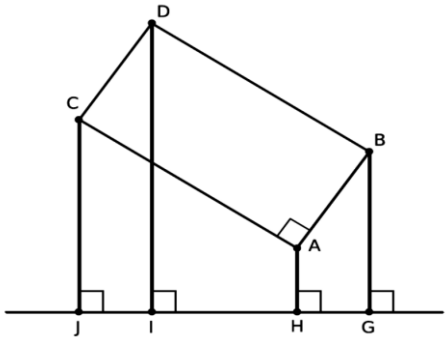
Agora como você chegou na resposta através desta nova tabela?

APÊNDICE B – Teste e questionário aplicado aos alunos da terceira série (Grupo 2)

PARTE I – Por favor responder as questões no espaço estipulado com caneta azul ou preta.

1) Júlia reservou uma quantia em dinheiro para realizar doações em três instituições. À primeira, doou a metade da quantia reservada mais R$ 12,00; à segunda, um terço do dinheiro que sobrou após a primeira doação, e a terceira recebeu o valor restante: R$ 32,00. Quanto Júlia reservou ao todo?

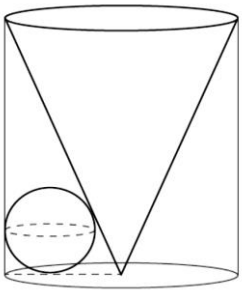
2) Na figura abaixo, ABCD é um retângulo e as distâncias dos vértices A, B e C ao segmento JG valem 2, 4 e 5 metros, respectivamente. Encontre a distância do vértice D ao segmento JG.



3) Três pacientes A,B e C usam, em conjunto, 1830 mg por mês de um determinado medicamento que é produzido em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5 mg, o paciente B usa cápsulas de 10 mg e o paciente C ingere cápsulas de 12 mg. O paciente A toma a metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. Nessas condições, é CORRETO afirmar que o número de cápsulas que o paciente C toma mensalmente é igual a:

a) 60
b) 75
c) 90
d) 120
e) 135

4) A Figura a seguir mostra um cilindro reto, um cone reto e uma esfera que tangencia a base do cilindro e as geratrizes do cilindro e do cone. O cone e o cilindro têm como base um círculo de raio 7 cm e a mesma altura que mede 24 cm.



a) Você consegue determinar **um possível valor para o raio da esfera**? Argumente de forma que seja válido a escolha desse valor. (contraexemplo: raio de 7 cm não pode devido ao raio do cilindro)

5) A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

- se colocar ovos, não coloque creme.
- se colocar leite, não coloque laranja.
- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com

a) ovos e leite, mas sem creme.
b) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
c) ovos e creme, mas sem laranja.
d) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
e) leite e laranja, mas sem creme.

PARTE II – Agora considere os números das questões seguintes como correspondentes aos das questões da PARTE I. Por gentileza descreva com suas palavras o raciocínio que teve.

1) Em sua resposta anterior, chegou em alguma das alternativas seguintes?
a) R$ 120,00 b) R$ 130,00 c) R$ 240,00 d) R$ 100,00 e) R$ 200,00.

Você consegue utilizar do conceito de frações (com barras de partes iguais) e refazer questão com mais facilidade que antes? Tente por favor.

2) Qual relação é possível estabelecer entre os segmentos DI e BG?_____

Seria possível determinar a área do retângulo ABCD? Caso possível apresente seu raciocínio por favor.

3) De que forma você resolveu a questão: ( ) com sistema linear ( ) com raciocínio lógico

Qual dessas formas é mais fácil pra você? _____

Se pudesse refazer qual estratégia utilizaria? Ou tentaria de outra forma?
_____
_____
_____

4) Caso tenha estipulado o raio para a esfera, qual será o volume, em centímetros cúbicos, da região interior ao cilindro e exterior à esfera e ao cone?

a) 800 π
b) 784 π
c) 748 π
d) 684 π
e) 648 π

5) Se você refazer a questão 5 utilizando a tabela a seguir, aponte quais seriam as melhorias em seu raciocínio?

	Ovos	Creme	Leite	Laranja
Ovos				
Creme				
Leite				

Melhorias:_____
_____

ANEXO

ANEXO A – QUESTÕES ORIGINAIS DAS BANCAS

(FCC - Detran MA - 2018)

1) Os 25 caminhões da frota de uma empresa serão vistoriados no departamento de trânsito de uma cidade, para que recebam autorização especial para circular em determinada região do município. No dia da vistoria, cada veículo será encaminhado a um dos 10 fiscais do setor de fiscalização. Esse encaminhamento é feito por meio de um sorteio, realizado quando o caminhão é recepcionado no setor pelo próprio sistema de cadastro. Em relação ao resultado do sorteio, é correto afirmar que, necessariamente,

a) pelo menos um fiscal vai vistoriar mais do que 2 caminhões da frota.
b) cada fiscal vai vistoriar no mínimo 2 e, no máximo, 3 caminhões da frota.
c) nenhum fiscal ficará livre de vistoriar caminhões da frota dessa empresa.
d) nenhum fiscal vai vistoriar mais do que 3 caminhões da frota.
e) os 25 caminhões não poderão ser vistoriados pelo mesmo fiscal.

(FGV - 2015 - Prefeitura de Paulínia – SP)

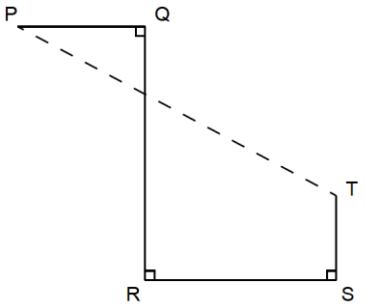
2) Francisco compra e vende terrenos em um determinado condomínio. Certa semana ele comprou dois terrenos, um por 15.000 reais e outro por 25.000 reais, e, na semana seguinte, Francisco vendeu o primeiro com lucro de 40% e o segundo com lucro de 8%. Em toda a operação, o lucro de Francisco em relação ao capital investido foi de:

a) 20%
b) 22%
c) 24%
d) 26%
e) 28%.

(CESGRANRIO – IBGE – 2016)

3) Na Figura a seguir, PQ mede 6 cm, QR mede 12 cm, RS mede 9 cm, e ST mede 4 cm.

A distância entre os pontos P e T, em cm, mede



a) 21
b) 20
c) 19
d) 18
e) 17

(FCM - 2016 - Prefeitura de Barbacena - MG - Agente Administrativo)

4) Considere a sequência:

TRIÂNGULO CONE CÍRCULO ESFERA QUADRADO .....

O próximo elemento lógico será o

a) CUBO.
b) CILINDRO.
c) TETRAEDRO.
d) PARALELEPÍPEDO.
e) BLOCO

(UPENET/IAUPE – Facepe – 2015)

5) No diagrama abaixo, os números foram dispostos segundo um critério. De acordo com esse critério, que números substituem, respectivamente, os símbolos ▲ e ▼?

3	12	60
6	▲	120
18	72	▼

a) 24 e 360
b) 18 e 240
c) 32 e 280
d) 24 e 480
e) 32 e 480

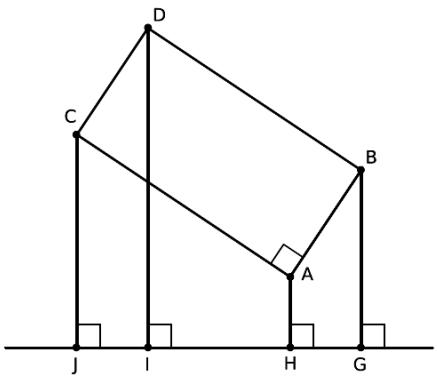
(UPE - 2017 - Enfermeiro)

1) Júlia reservou uma quantia em dinheiro para realizar doações em três instituições. À primeira, doou a metade da quantia reservada mais R$ 12,00; à segunda, um terço do dinheiro que sobrou após a primeira doação, e a terceira recebeu o valor restante: R$ 32,00. Quanto Júlia reservou ao todo?

a) R$ 120,00.
b) R$ 130,00.
c) R$ 240,00.
d) R$ 100,00.
e) R$ 200,00.

(BANCO DE QUESTÕES OBMEP - 2017)

2) Na figura abaixo, ABC D é um retângulo e as distâncias dos vértices A, B e C ao segmento JG valem 2, 4 e 5 metros, respectivamente. Encontre a distância do vértice D ao segmento JG.



(OBMEP – Nível 2 – 2007)

3) A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

- se colocar ovos, não coloque creme.

- se colocar leite, não coloque laranja.

- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com

A) ovos e leite, mas sem creme.

B) creme, laranja e leite, mas sem ovos.

C) ovos e creme, mas sem laranja.

D) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.

E) leite e laranja, mas sem creme.

(FUMARC - 2016 - Prefeitura de Matozinhos – MG)

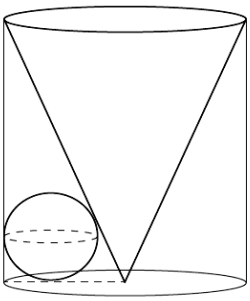
4) Três pacientes A,B e C usam, em conjunto, 1830 mg por mês de um determinado medicamento que é produzido em cápsulas. O paciente A usa cápsulas de 5 mg, o paciente B usa cápsulas de 10 mg e o paciente C ingere cápsulas de 12 mg. O paciente A toma a metade do número de cápsulas de B e os três tomam juntos 180 cápsulas por mês. Nessas condições, é CORRETO afirmar que o número de cápsulas que o paciente C toma mensalmente é igual a:

a) 60
b) 75
c) 90
d) 120
e) 135

(CESGRANRIO - 2017 - Petrobras)

A Figura a seguir mostra um cilindro reto, um cone reto e uma esfera que tangencia a base do cilindro e as geratrizes do cilindro e do cone. O cone e o cilindro têm como base um círculo de raio 7 cm e a mesma altura que mede 24 cm.

Qual o volume, em centímetros cúbicos, da região interior ao cilindro e exterior à esfera e ao cone?



(A) 800 π

(B) 784 π

(C) 748 π

(D) 684 π

(E) 648 π