UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SIMONE RIBEIRO DA SILVA

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA NO $\mathbb{R}^n$

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2018

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SIMONE RIBEIRO DA SILVA

O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA NO $\mathbb{R}^n$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Larissa Hagedorn Vieira

TOLEDO
2018

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "O Teorema da Função Implícita no $\mathbb{R}^n$" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Larissa Hagedorn Vieira

Wilian Francisco de Araujo

Rodrigo Manoel Dias Andrade

TOLEDO
2018

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo teórico sobre o Teorema da Função Implícita no $\mathbb{R}^n$ do ponto de vista da Análise Matemática, apresentado na disciplina de Cálculo de Funções Reais de n Variáveis, com o objetivo de estudar a teoria que embasa tal resultado e apresentar uma demonstração para o mesmo. Para fazer isso, o trabalho encontra-se estruturado em dois capítulos. O primeiro capítulo apresenta as noções topológicas do espaço $\mathbb{R}^n$ que são necessárias para o estudo, enquanto que o segundo capítulo traz resultados relacionados a funções de n variáveis necessários a compreensão das condições do Teorema da Função Implícita e para demonstrá-lo, em seguida, neste mesmo capítulo, encontra-se este teorema e sua demonstração.

Palavras-chave: Função implícita. Cálculo. Análise matemática.

ABSTRACT

This paper presents a theoretical study about The Implicit Function Theorem on $\mathbb{R}^n$ from the perspective of Mathematical Analysis, as introduced in the Calculus of Real Functions with n variables course, and aims to study the underlying theory for this result as well as to present its proof. In order to achieve this, the paper is sectioned in two chapters. The first chapter brings in the topological notions of the Rn space which are needed for the study, whereas the second chapter brings in some results related to the functions of n variables which are needed in order to understand the conditions for the Implicit Function Theorem and prove it. Afterwards, in the same chapter, the theorem is stated and proved.

Key-words: Implicit function. Calculus. Math analysis.

LISTA DE FIGURAS

2.1 Bolas geradas pelas normas 15

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS **6**

1 INTRODUÇÃO **8**

2 TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^n$ **9**

2.1 O espaço euclidiano n-dimensional 9

2.2 Bolas e conjuntos limitados 14

2.3 Conjuntos abertos 15

2.4 Sequências 16

2.5 Conjuntos fechados 18

2.6 Conjuntos compactos 21

2.7 Aplicações contínuas 22

2.8 Limites 23

3 O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA **25**

3.1 Funções reais de n variáveis 25

3.2 Derivadas parciais 26

3.3 Funções de classe C^1 27

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS **36**

REFERÊNCIAS **36**

5 APÊNDICE **38**

5.1 APÊNDICE A-Resultados utilizados de Análise Real de funções de uma variável real 38

1 INTRODUÇÃO

O Teorema da Função Implícita é um importante resultado apresentado no Cálculo de Funções de n Variáveis Reais, quando se estuda a diferenciação de funções de n variáveis reais definidas de forma implícita, uma vez que garante sob certas condições a possibilidade de operar localmente com essas funções.

Nesse sentido, na disciplina de Cálculo de Funções Reais de n Variáveis Reais, para realizar a diferenciação implícita com funções definidas por duas variáveis, supõe-se que a equação na forma $F(x, y) = c$, define $y = f(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, tem-se que $y = f(x)$ é solução de $F(x, y) = c$ para todo x no domínio da f e, no caso em que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, com algumas operações determina-se um modelo para a diferenciação implícita dessa equação.

Ao envolver três variáveis, um processo similar ocorre, isto é, é necessário supor que $z = f(x, y)$ e a equação $F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = c$ define z implicitamente como uma função diferenciável de x e y, para todo (x, y) no domínio de f. Assim, se tanto a f, quanto a F forem diferenciáveis em x e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas, obtemos um modelo para derivar a equação $F(x, y, z) = c$, desde que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. E, em seguida expõe se que a possibilidade da diferenciação implícita é garantida pelo referido teorema, por este apresentar condições sobre as quais as suposições admitidas são válidas.

Tendo em vista o interesse em estudar a teoria que fundamenta este resultado e apresentar uma demonstração para o mesmo, este trabalho traz um estudo teórico sobre o Teorema da Função Implícita em um espaço euclidiano n dimensional - $\mathbb{R}^n$, o qual geralmente não é estudado em disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para isso, o trabalho é composto de dois capítulos. No primeiro capítulo, apresentam-se noções topológicas de $\mathbb{R}^n$ a fim de estabelecer uma base para atingir o propósito do trabalho, isto é, são trazidos conceitos e resultados que são importantes para estudar o resultado.

O segundo capítulo, apresenta resultados relacionados a funções de n variáveis que se mostraram necessários para compreender as condições do Teorema da Função Implícita no $\mathbb{R}^n$ e, assim, demonstrá-lo. Além disso, nesse capítulo, apresenta-se este teorema e sua demonstração.

A principal referência utilizada como suporte ao desenvolvimento do trabalho é [2].

2 TOPOLOGIA DE $\mathbb{R}^n$

Para estudar o Teorema da Função Implícita no $\mathbb{R}^n$, determinadas considerações sobre a topologia deste espaço euclidiano n-dimensional são necessárias, e estas se apresentam nesta seção.

Salienta-se que os resultados de análise na reta, que são utilizados, se encontram listados no APÊNDICE A.

2.1 O espaço euclidiano n-dimensional

O espaço $\mathbb{R}^n$ é obtido ao realizar o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$. Disso, um elemento x de $\mathbb{R}^n$, que será chamado de ponto ou vetor, é identificado como uma sequência de n termos reais: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Cada termo real do ponto $x \in \mathbb{R}^n$, isto é, cada x_i $(i = 1, \dots, n)$ é uma coordenada do ponto x.

A operação de adição entre vetores de $\mathbb{R}^n$ é realizada coordenada a coordenada, ou seja, se $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, então $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. A multiplicação por escalar também segue o padrão realizado para $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $x \in \mathbb{R}^n$ e α é um escalar $(\alpha \in \mathbb{R})$ então $\alpha.x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

A partir dessas operações, pode-se estabelecer algumas propriedades entre elementos do espaço $\mathbb{R}^n$, as quais são justamente aquelas que garantem que um conjunto seja um espaço vetorial. Antes de apresentá-las convém exprimir que os vetores $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 1)$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$, bem como que o vetor $0 = (0, 0, \dots, 0)$ chama-se origem de $\mathbb{R}^n$ e que o vetor $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ é o simétrico de qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$. Assim, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as propriedades mencionadas anterioremente se verificam. Tais propriedades são:

1) $x + y = y + x$
2) $x + 0 = x$
3) $-x + x = 0$
4) $x + (y + z) = (x + y) + z$
5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8) $1 \cdot x = x$

Pode-se ainda definir em $\mathbb{R}^n$ a função produto interno, que associa cada par de vetores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ um número real - o produto interno de x por y, denotado por $\langle x, y\rangle$ e definido como $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$. Como propriedade pode ser verificado que para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se que:

$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle$ e $\langle x, x\rangle > 0$ quando $x \neq 0$.

Teorema 2.1 *(Desigualdade de Schwarz) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é múltiplo um do outro.*

Por meio da Desigualdade de Schwarz (2.1), dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, pode-se escrever $-1 \leq \dfrac{(\langle x, y\rangle)}{|x||y|} \leq 1$, desta forma $cos(\theta) = \dfrac{(\langle x, y\rangle)}{|x||y|}$ em que θ é o ângulo entre os vetores x e y. Assim, se $(\langle x, y\rangle) = 0$ tem-se que $cos(\theta) = 0$, e portanto, diz-se que x e y são ortogonais.

Uma norma para $\mathbb{R}^n$, é também uma função que associa a cada vetor deste espaço um número real positivo $|x|$, e que cumpre três propriedades:

1. $|x| \geq 0$, sendo $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
2. $|\alpha \cdot x| = |\alpha||x|$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Cabe ressaltar que, com o item 2 dessas propriedades, a igualdade $|\alpha \cdot x| = |\alpha||x|$, para $\alpha = -1$ permite afirmar que $|-x| = |x|$.

Seja x um elemento qualquer de $\mathbb{R}^n$, o resultado obtido ao calcular o produto interno deste elemento por ele mesmo representa um número positivo que pode ser entendido como o comprimento do vetor x ou a distância de x à origem, isto é, $\langle x, x\rangle = |x|^2$, em que $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Deste modo, dado $x \in \mathbb{R}^n$, pode ser verificado que $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ é uma norma para $\mathbb{R}^n$, chamada de norma euclidiana. Do mesmo modo, pode ser verificado que as seguintes funções $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ e $|x|_M = máx\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ definem duas normas, chamadas de normas da soma e norma do máximo, respectivamente. Estas normas são denominadas normas usuais do espaço $\mathbb{R}^n$, sendo ainda a norma euclidiana definida como norma padrão neste espaço.

Para mostrar que estas funções são normas de fato, é preciso mostrar que elas satisfazem as três propriedades anteriores.

Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, então quanto a:

- $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ (norma euclidiana):

  Demonstração:

  1. $|x| \geq 0$, sendo $|x| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
     Tendo que $|x|$ pode ser escrita como $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, esta propriedade decorre das propriedades de produto interno.

2. $|\alpha \cdot x| = |\alpha||x|$;

   Esta propriedade será mostrada desenvolvendo o primeiro lado da igualdade, assim:

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot x| &= |\,(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\,| \\ &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \ldots + \alpha^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)} \\ &= |\alpha||x|. \end{aligned}$$

   Portanto, $|\alpha \cdot x| = |\alpha||x|$.

3. $|x + y| \leq |x| + |y|$;

   Para mostrar esta propriedade, será considerado o quadrado do primeiro membro da desigualdade, e com algumas operações determinará-se o resultado requerido, isto é:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle \\ &= |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y| \quad (\mathit{Teorema}\ 2.1) \\ &\leq (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

   Note que, se tem $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$, como cada membro da desigualdade é maior ou igual a zero, pode-se extrair a raíz quadrada de cada membro, e desta forma, tem-se $|x + y| \leq (|x| + |y|)$.

   Portanto, como a função $|x|$ satisfaz as três propriedades ela é uma norma. □

- $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ (norma da soma):

  Demonstração:

1. $|x|_S \geq 0$, sendo $|x|_S = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

   Esta propriedade decorre imediatamente da definição de módulo, pois sendo $|x|_S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, cada $|x_i|$ com $i = 1, \ldots, n$, é maior que zero, sendo igual a zero somente quando $x \in \mathbb{R}^n$ for o vetor nulo.

2. $|\alpha \cdot x|_S = |\alpha||x|_S$;

   Para mostrar esta propriedade, será desenvolvido um lado da equação afim de mostrar a igualdade:

$$
\begin{aligned}
|\alpha x|_S &= |\,(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\,|_S \\
&= |\alpha \cdot x_1| + |\alpha \cdot x_2| + \ldots + |\alpha \cdot x_n| \\
&= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| + \ldots + |\alpha||x_n| \\
&= |\alpha|\,(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|) \\
&= |\alpha||x|_S.
\end{aligned}
$$

Portanto, $|\alpha x|_S = |\alpha||x|_S$.

3. $|x+y|_S \leq |x|_S + |y|_S$;

   Para mostrar essa propriedade, a ideia é desenvolver o primeiro membro da desigualdade, isto é:

$$
\begin{aligned}
|x+y|_S &= |\,(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)\,|_S \\
&= |x_1+y_1| + |x_2+y_2| + \ldots + |x_n+y_n| \\
&\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\
&\leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n| \\
&\leq |x|_S + |y|_S
\end{aligned}
$$

   Portanto, segue que $|x+y|_S \leq |x|_S + |y|_S$.

   Assim, como a função $|x|_S$ satisfaz as três propriedades ela é uma norma. $\square$

- $|x|_M = \textit{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ (norma do máximo):

  Demonstração:

1. $|x|_M \geq 0$, sendo $|x|_M = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

   Esta propriedade decorre imediatamente da definição de módulo, pois sendo $|x|_M = \textit{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, cada elemento $|x_i|$ com $i = 1, \ldots, n$, é maior que zero, sendo igual a zero somente quando $x \in \mathbb{R}^n$ for o vetor nulo.

2. $|\alpha \cdot x|_M = |\alpha||x|_M$;

   Para mostrar essa propriedade, a ideia é desenvolver o primeiro lado da igualdade que a define. Além disso, o valor $|x_w|$ será considerado como a norma do máximo do vetor x.

$$
\begin{aligned}
|\alpha \cdot x|_M &= |\,(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)\,|_M \\
&= \textit{máx}\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|, \ldots, |\alpha x_n|\} \\
&= \textit{máx}\{|\alpha||x_1|, |\alpha||x_2|, \ldots, |\alpha||x_n|\} \\
&= |\alpha||x_w| \\
&= |\alpha||x|_M.
\end{aligned}
$$

   Logo, $|\alpha \cdot x|_M = |\alpha||x|_M$.

3. $|x+y|_M \leq |x|_M + |y|_M$;

   Para mostrar que a norma do máximo satisfaz essa propriedade, será desenvolvido o primeiro membro da desigualdade que a define, bem como os números $|x_w|, |y_w|$ serão considerados, respectivamente, a norma do máximo do vetor x e a norma do máximo do vetor y, assim:

$$\begin{aligned} |x+y|_M &= |\,(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)\,|_M \\ &= \textit{máx}\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|, \ldots, |x_n+y_n|\} \\ &\leq \textit{máx}\{|x_1|+|y_1|, |x_2|+|y_2|, \ldots, |x_n|+|y_n|\} \\ &\leq |x_w| + |y_w| \\ &\leq |x|_M + |y|_M. \end{aligned}$$

   Logo, $|x+y|_M \leq |x|_M + |y|_M$.

   Portanto, como a função $|x|_M$ satisfaz as três propriedades ela define uma norma. □

Um resultado importante que pode-se inferir a partir destas normas é que elas são equivalentes. Isto é, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$, é válido que:

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M.$$

Esta equivalência será verificada ao analisar cada relação de ordem. Nesse sentido, para $x \in \mathbb{R}^n$:

Demonstração:

1. $|x|_M \leq |x|$

   Seja $|x_w| = \textit{máx}\ \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, segue que $|x_w| \geq |x_i|$, para qualquer $i = 1, \ldots, n$, bem como que $|x_w|^2 \geq |x_i|^2$. Pela norma euclidiana, a norma do vetor x é $|x| = \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_w^2 + \ldots + x_n^2)}$ e, de modo equivalente $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_w^2 + \ldots + x_n^2$. Ao comparar as duas normas calculadas sobre o vetor x tem-se a seguinte desigualdade $|x_w|^2 \leq x_1^2 + \ldots + x_w^2 + \ldots + x_n^2$, isto é, $|x_w|^2 \leq |x|^2$ que é equivalente a $|x_w| \leq |x|$, o que significa que $|x|_M \leq |x|$.

2. $|x| \leq |x|_S$

   Seja $|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_w^2 + \ldots + x_n^2$ e seja também $|x|_S^2 = (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2$. Note que $|x|_S^2 = (|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2 = (|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|)\cdot(|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|) = |x_1^2|+|x_2^2|+\ldots+|x_n^2|+2\displaystyle\sum_{j>i}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}|x_i||x_j|$. Como todo número real ao quadrado é não-negativo, logo podemos escrever que $|x|_S^2 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+2\displaystyle\sum_{j>i}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}|x_i||x_j|$.

   Desta maneira, nota-se que $|x|_S^2 - |x|^2 = 2\displaystyle\sum_{j>i}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}|x_i||x_j| \geq 0$, isso significa que

$|x|_S^2 \geq |x|^2 = |x|_S \geq |x|$.

3. $|x|_S \leq n \cdot |x|_M$
   Seja $|x_w|$ a norma do vetor x pela norma do máximo e seja $|x_1|+\ldots+|x_w|+\ldots+|x_n|$ a norma do vetor x pela norma da soma, perceba que ocorre:

$$|x_w| \geq |x_1|$$

$$|x_w| \geq |x_2|$$

$$|x_w| \geq |x_3|$$

$$\vdots$$

$$|x_w| \geq |x_n|$$

Ou seja, de um lado obtém-se $n \cdot |x_w|$ e do outro $|x|_S$, isso equivale a ter $n \cdot |x|_M \geq |x|_S$.

Portanto, de $1, 2$ e 3 conclui-se válida a equivalência das normas, ou seja, $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$. □

Com essas considerações acerca do espaço $\mathbb{R}^n$, novos conceitos e resultados podem ser apresentados e entendidos com maior clareza, como os que se apresentam nas próximas seções.

2.2 Bolas e conjuntos limitados

Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, e admitindo o uso da norma euclidiana (ou qualquer outra equivalente), tem-se que:

Definição 2.2 *A **bola aberta** de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a não seja maior nem igual a r. Em outros termos, tem-se que $B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$.*

Definição 2.3 *A **bola fechada** de centro a e raio r é o conjunto $B[a; r]$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a não ultrapasse r. Em símbolos, tem-se que $B[a; r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\}$.*

Um ponto importante e interessante para destacar é que, em relação as bolas, dependendo da norma que se considera elas assumem formas diferentes. Contudo, pode-se inferir uma correspondência entre elas.

Seja B, B_M e B_S as bolas obtidas pela norma euclidiana, norma do máximo e por meio da norma da soma respectivamente, que tenham centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$, e seja também a bola B'_M de mesmo centro, porém raio $s = \frac{r}{n} > 0$. Das desigualdades já mencionadas, $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$, tem-se que $B'_M \subset B_S \subset B \subset B_M$.

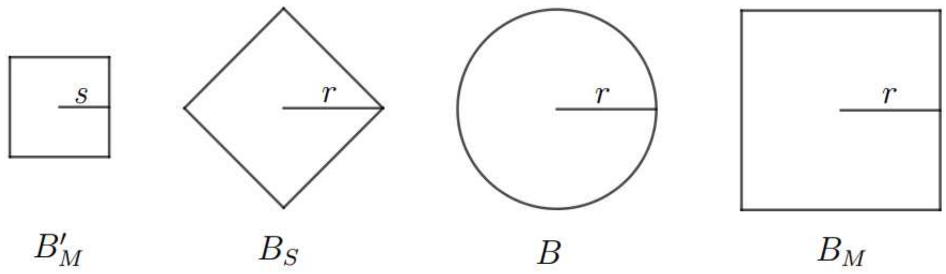

Figura 2.1: Bolas geradas pelas normas
Fonte: Autora, 2018.

Com essas definições, pode-se facilmente determinar quando um conjunto será um conjunto limitado. Nesse sentido:

Definição 2.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, X é um **conjunto limitado** quando para algum $a \in \mathbb{R}^n$ e um número real $r > 0$ tem-se que $X \subset B[a; r]$.*

Uma maneira equivalente de escrever que um dado conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, é mostrar que existe um número real $k > 0$ tal que $|x| \leq k$ para qualquer $x \in X$. Para observar isso, considere a bola $B[a; r]$ e a bola $B[0; k]$, em que $k = r + |a|$, a ideia é mostrar que $B[a; r] \subset B[0; k]$. Note que, de um lado $|x - a| \leq r$, sendo que $|x| = |x - a + a|$ então $|x| \leq |x - a| + |a|$, e como $|x - a| \leq r$, logo $|x| = |x - a + a| \leq |x - a| + |a| \leq r + |a|$, em que $r + |a| = k$; portanto, vê-se que $B[a; r] \subset B[0; k]$.

2.3 Conjuntos abertos

Antes de definir o que é um conjunto aberto é necessário definir o que é um ponto interior a um conjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}^n$. Desta maneira:

Definição 2.5 *Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$, a é **ponto interior** a X, quando existir um número real $r > 0$ tal que $B(a; r)$ esteja contida inteiramente em X.*

Isso significa que todos os pontos suficientemente próximos de a também pertencem a X.

Definição 2.6 *O conjunto de todos os pontos interiores a X é denominado o **interior do conjunto** X e escrito como $\mathrm{int}X$.*

Nota-se, desta definição, que sempre ocorre $intX \subset X$. Assim, diz-se que o conjunto X é uma vizinhança do ponto a, quando $a \in intX$.

Definição 2.7 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, A é um* ***conjunto aberto*** *quando todos os seus pontos pertencem ao conjunto $intA$, isto é, quando ocorrer $A = intA$.*

Exemplo 2.7.1 *Exemplos de conjuntos abertos:*

1. *Qualquer bola aberta é um conjunto aberto.*

2. *O conjunto vazio é um conjunto aberto.*

3. *O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.*

Ainda em relação a conjuntos abertos, apresenta-se outra definição importante:

Definição 2.8 *Diz-se que $A \subset X$ é aberto em X quando cada ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta $B(a;r)$ tal que $B(a;r) \cap X \subset A$; sendo $X \subset \mathbb{R}^n$.*

Sobre esta definição, pode-se denominar U, como a reunião de todas as bolas abertas, um aberto em $\mathbb{R}^n$, tal que $A = U \cap X$. Além disso, pode-se afirmar que $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $A = U \cap X$ onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.8.1 *O conjunto $A = (0,1]$ é aberto em $X = [0,1]$ pois, $(0,1] = (0,2) \cap [0,1]$, em que $U = (0,2)$.*

2.4 Sequências

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que associa a cada número natural k um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$. O ponto x_k é chamado termo da sequência e, para cada $i = 1, \ldots, n$ indica-se por x_{k_i} a i-ésima coordenada de x_k. Nesse sentido, considerar uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é considerar as n sequências de números reais $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_{k_n})_{k\in\mathbb{N}}$. A notação que será utilizada para designar uma sequência será $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou (x_k).

Para uma sequência (x_k) ser limitada é necessário existir uma bola em $\mathbb{R}^n$ que contenha todos os seus pontos, isto é, é necessário existir $c > 0$ tal que $|x_k| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se (x_k) for limitada, então para cada $i = 1, ..., n$ a sequência $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ das i-ésimas coordenadas de (x_k) também é limitada, ou seja, ocorre que $|x_{k_i}| \leq |x_k|$. Além disso, se todas as sequências $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ são limitadas, pode-se inferir que (x_k) é limitada.

Dada uma sequência (x_k), obtém-se uma subsequência de (x_k) ao restringir a função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, tal que os elementos de $\mathbb{N}'$ estejam ordenados em ordem crescente, isto é, $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots\}$. Para denotar uma subsequência será utilizada a seguinte notação $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$.

A noção de limite de uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é similar àquela estabelecida em $\mathbb{R}$, ou seja, diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é limite de uma sequência (x_k) e escreve-se $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, quando para qualquer $\varepsilon > 0$ considerado seja possível determinar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k > k_0$ tem-se $|x_k - a| < \varepsilon$, ou seja, a partir de k_0 todos os termos de (x_k) estão contidos na bola $B\,(a;\varepsilon)$.

Com esta definição pode-se dizer ainda que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ se, e somente se, $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k - a| = 0$.

Além disso, diz-se que uma sequência (x_k) é convergente quando existe $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Portanto, das considerações feitas acerca da definição de limite de uma sequência, segue que se uma sequência é convergente, então esta sequência é limitada. E, se (x_k) converge para a, suas subsequências também convergem para a.

Cabe observar que o valor e a existência do limite de uma sequência independe da norma que se usa, justamente pela correspondência identificada entre elas.

Adiante, apresenta-se os resultados de sequências que são úteis para atingir o propósito desse trabalho.

Teorema 2.9 *A sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, \ldots, n$, tem-se $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$, isto é, cada coordenada de (x_k) converge para a coordenada correspondente de a.*

Demonstração($\Rightarrow$) Como (x_k) converge para a, (x_k) é limitada. Assim, para $\varepsilon > 0$ existe $B(a;\varepsilon)$ que contém todos os pontos x_k a partir de um determinado ponto k_0, com $k_0 \in \mathbb{N}$. Logo, para $k > k_0$ tem-se que $|x_k - a| < \varepsilon$. Tendo em vista que a sequência das coordenadas $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ $i = (1, 2, ..., n)$ é também limitada, e sabendo que ocorre $|x_{ki} - a_i| \leq |x_k - a|$, tem-se que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = a_i$.
Reciprocamente, como para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ a sequência das coordenadas $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para a coordenada correspondente a_i do ponto $a \in \mathbb{R}^n$, então dado $\varepsilon > 0$ para cada $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ tem-se que $k > k_i$ implica $|x_{k_i} - a_i| < \varepsilon$. Seja $k_0 =$*máx*$\{k_1, \ldots, k_n\}$ e adotando a norma do máximo tem-se que para $k > k_0$ vale $|x_k - a| < \varepsilon$. Portanto, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. $\square$

A escolha de usar a norma do máximo na demonstração anterior é justificada tendo em vista a correspondência entre as três normas usuais em $\mathbb{R}^n$. Nesse sentido, com a norma do máximo, garante-se que para $k > k_0$ a $B\,(a;\varepsilon)$ contém as bolas que poderiam ser obtidas com o uso das outras duas normas, nas quais tem-se que a sequência (x_k) converge para o ponto $a \in \mathbb{R}^n$.

Corolário 2.9.1 *Se $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ e $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ para $a, b \in \mathbb{R}^n$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k x_k = \alpha a$.*

Demonstração: Como (x_k) e (y_k) convergem para a e b respectivamente, então dado $\varepsilon > 0$ existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, tal que para $k > k_1$ tem-se $|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e para $k > k_2$ tem-se $|y_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $k_0 = max\{k_1, k_2\}$, para $k > k_0$ tem-se que $|x_k + y_k - a + b| \leq |x_k - a| + |y_k - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$.
Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que para todo $n > n_1, n_2$ tem-se $|x_k - a| < \dfrac{\varepsilon}{2(|\alpha_k| + 1)}$ e $|\alpha_k - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$, respectivamente. Seja $n_0 = mín\{n_1, n_2\}$, então $|\alpha_k x_k - \alpha a| = |\alpha_k x_k - \alpha_k a + \alpha_k a - \alpha a| = |\alpha_k(x_k - a) + a(\alpha_k - \alpha)| \leq |\alpha_k||x_k - a| + |a||\alpha_k - \alpha| < |\alpha_k|\dfrac{\varepsilon}{2(|\alpha_k| + 1)} + |a|\dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k x_k = \alpha a$. □

Teorema 2.10 *(Bolzano - Weierstrass) Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Seja (x_k) uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$. A sequência $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$, assim pelo resultado de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}$ existe $\mathbb{N}_1$, tal que $(x_{k_1})_{k\in\mathbb{N}_1}$ converge para a_1. Ao considerar a sequência $(x_{k_2})_{k\in\mathbb{N}_1}$ pelo mesmo resultado em $\mathbb{R}$ existe $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que $(x_{k_2})_{k\in\mathbb{N}_2}$ converge para a_2. Pode-se fazer um processo análogo às demais sequências de coordenadas $(x_{ki})_{k\in\mathbb{N}}$ e, desse modo, tem-se n conjuntos infinitos $\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \mathbb{N}_3 \supset \ldots \supset \mathbb{N}_n$ e números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k_i} = a_i$. Logo, pode-se escrever $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e com o Teorema 2.9, tem-se que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. □

2.5 Conjuntos fechados

Para definir um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$, é preciso antes definir ponto aderente a um conjunto e o fecho de um conjunto. Assim, sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X$:

Definição 2.11 *Diz-se que a é **ponto aderente** ao conjunto X quando existe uma sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.*

Definição 2.12 *O **fecho** do conjunto X é o conjunto $\overline{X}$ constituído por todos os pontos aderentes a X.*

Isto significa que $a \in \overline{X}$ se, e somente se, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, para $x_k \in X$. E que, portanto, se $a \in \overline{X}$, então a é um ponto aderente a X.

Definição 2.13 *Diz-se que X é um **conjunto fechado** quando $X = \overline{X}$.*

Sobre estas definições é pertinente fazer algumas observações: qualquer ponto $x \in X$ é aderente a X pois é limite da sequência constante $(x, x, \ldots)$. Portanto, qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}^n$ tem-se a inclusão $X \subset \overline{X}$; bem como que se $X \subset Y$ então, $\overline{X} \subset \overline{Y}$, pois se $a \in \overline{X}$, então por definição existe $(x_k) \subset X$ tal que $a = \lim_{k\to\infty} x_k$, mas como $X \subset Y$, então $(x_k) \subset Y$ e, portanto, $a \in \overline{Y}$.

Além disso, dessas definições, tem-se alguns resultados e, estes são apresentados no teorema seguinte.

Teorema 2.14 *(a) O ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, toda bola de centro a contém algum ponto de X.*
(b) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n - F$ é aberto. Equivalentemente: $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se, $\mathbb{R}^n - A$ é fechado.
(c) O fecho de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado. Em outras palavras: para todo $X \subset \mathbb{R}^n$ tem-se $\overline{X} = \overline{\overline{X}}$.

Demonstração: (a) Seja $(x_k) \subset X$ tal que $a = \lim_{k\to\infty} x_k$. Então, da definição de limite de sequência: para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_0$ tem-se como implicação $|x_k - a| < \varepsilon$ que é equivalente a escrever $a - \varepsilon < x_k < a + \varepsilon$, ou seja, para $k > k_0$, os termos x_k pertencem a bola de centro a. Reciprocamente, como toda bola $B(a;\varepsilon)$ contém algum ponto de X, para $k \in \mathbb{N}$, considere a bola $B\left(a; \frac{1}{k}\right)$ que contém ao menos um ponto x_k, quando $k \to \infty$, $\frac{1}{k} \to 0$, assim $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ e $a \in \overline{X}$.
(b) Seja $a \in (\mathbb{R}^n - F)$, então $a \notin F = \overline{F}$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a;\varepsilon) \cap F = \varnothing$, isso significa que $B(a;\varepsilon) \subset (\mathbb{R}^n - F)$, portanto, a é um ponto interior de $(\mathbb{R}^n - F)$, e por isso, segue que $(\mathbb{R}^n - F)$ é um conjunto aberto. Reciprocamente, seja $a \in \overline{F}$. Se $a \notin F$, isso implica que $a \in (\mathbb{R}^n - F)$; e como $(\mathbb{R}^n - F)$ é aberto por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $B(a;\delta) \subset (\mathbb{R}^n - F)$ e assim pode-se afirmar que $B(a;\delta) \cap F = \varnothing$, o que é uma contradição pois $a \in \overline{F}$. Assim, $a \in F$ e F é fechado.
(c) Para fazer esta demonstração, será utilizado o item (b), isto é, será mostrado que o complementar de $\overline{X}$ é aberto. Assim, seja $a \in (\mathbb{R}^n - \overline{X})$ então $a \notin \overline{X}$, logo pelo item (a) existe uma bola $B = B(a;r)$ que não contém pontos de X e, isso significa que $X \subset (\mathbb{R}^n - B)$ e, então, $\overline{X} \subset \overline{(\mathbb{R}^n - B)}$. Pelo item (b) $(\mathbb{R}^n - B)$ é fechado, logo $\overline{X} \subset (\mathbb{R}^n - B)$ (ou $B \subset \mathbb{R}^n - \overline{X}$). Disso, todo ponto $a \in (\mathbb{R}^n - \overline{X})$ é um ponto interior, ou seja, $(\mathbb{R}^n - \overline{X})$ é aberto e, portanto, $\overline{X}$ é fechado. □

Exemplo 2.14.1 *Exemplos de conjuntos fechados:*

1. *Qualquer bola fechada é um conjunto fechado.*

2. *O conjunto vazio é um conjunto fechado.*

3. *$\mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado.*

Definição 2.15 *Diz-se que $a \in \mathbb{R}^n$ é um* ***ponto de acumulação*** *do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando toda bola de centro a contém algum ponto de X diferente de a. Em outras palavras*

a é ponto de acumulaçao de X quando $a \in \overline{X - a}$. Denota-se X' o conjunto de todos os pontos de acumulação de X.

Desta definição, cabe observar que um ponto de acumulação de X pode ou não pertencer ao conjunto X, e quando $a \in X$ não for de acumulação, então diz-se que a é um ponto isolado.

Com o teorema seguinte, pode-se notar que um ponto de acumulação de X é também um ponto aderente a este mesmo conjunto X, bem como que o fecho de um conjunto X é constituído por seus pontos de acumulação, além dos pontos do próprio conjunto X.

Teorema 2.16 *Sejam a um ponto e $X \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(1) a é um ponto de acumulação de X.
(2) a é limite de uma sequência de pontos $x_k \in X - \{a\}$.
(3) Toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2). Como a é um ponto de acumulação de X, então para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que $B(a;\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$, ou seja, existe $x_k \in \mathbb{R}^n$ com $x_k \in B(a;\varepsilon)$ tal que $x_k \neq a$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, para $\varepsilon = \frac{1}{k}$, quando $k \to \infty$, $\frac{1}{k} \to 0$ e, portanto, $x_k \to a$.
(2) $\Rightarrow$ (3). Como $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, em que $x_k \in X - \{a\}$, tem-se infinitos termos $x_k \in B = B(a;\varepsilon)$, para $k > k_0$, pela definição de limite de sequência. Aliás, se B não for um conjunto infinito, haverá termos x_k que se repetem e, nesse caso, ocorreria que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq a$.
(3) $\Rightarrow$ (1). Se toda bola $B = B(a;\varepsilon)$ contém infinitos pontos de X, então para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que $B = B(a;\varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \varnothing$, o que denota que a é um ponto de acumulação, por definição. □

Em seguida são elencados alguns resultados importantes sobre um conjunto $F \subset X$ ser fechado em $X \subset \mathbb{R}^n$.

Definição 2.17 *Diz-se que um subconjunto $F \subset X$ é* ***fechado em*** *X quando F contém todos os seus pontos aderentes que pertencem a X.*

Isto motiva afirmar que F é fechado em X se, e somente se, $F = \overline{F} \cap X$. Ou de modo mais geral que:

Teorema 2.18 *O conjunto F é fechado em X se, e somente se, $F = G \cap X$, com G fechado em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 2.18.1 *O conjunto $F = (1, 2]$ é fechado em $X = (1, 3)$ pois para $G = [0, 2]$ tem-se $(1, 2] = [0, 2] \cap (1, 3)$.*

Teorema 2.19 *O conjunto $F \subset X$ é fechado em X se, e somente, se $X - F$ (seu complementar relativamente a X) é aberto em X.*

Demonstração: Como F é fechado em X, tem-se a igualdade $F = G \cap X$, com $G \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado, a qual pode ser escrita como $X - F = (\mathbb{R}^n - G) \cap X$ e pela Definição 2.8, $X - F$ é aberto em X.
Reciprocamente, sendo $X - F$ um aberto em X, tem-se a igualdade $X - F = U \cap X$, com $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, a qual, ao considerar o complentar de $X - F$ em relação a X e de U em relação a $\mathbb{R}^n$, pode ser escrita como $F = (\mathbb{R}^n - U) \cap X$, e disso segue pelo Teorema 2.18 que F é fechado em X.

De maneira análoga, tem-se o resultado:

Teorema 2.20 *$A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $X - A$ é fechado em X.*

2.6 Conjuntos compactos

Tendo em vista as definições já apresentadas, em particular, as que definem conjunto fechado e conjunto limitado, apresenta-se, nesta seção, o que será entendido por conjunto compacto. Portanto:

Definição 2.21 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é um **conjunto compacto** quando é limitado e fechado.*

Para afirmar que determinado conjunto é compacto, tem-se, além da definição anterior, o resultado:

Teorema 2.22 *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos $x_k \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Demonstração: Como $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, K é limitado e fechado. Assim, toda sequência de pontos $(x_k) \subset K$ é limitada. Desta consideração, pode-se garantir que (x_k) possui uma subsequência convergente, seja $(x_r)_{r \in \mathbb{N}'}$ esta subsequência, sendo $\lim\limits_{r \to \infty} x_r = a \in K$, pois K é fechado.
Reciprocamente, se K não é limitado, então dada uma sequência $(x_k) \subset K$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ o ponto $x_k \in K$, de modo que $|x_k| > k$, essa sequência não adimitiria uma subsequência limitada, e logo não convergente, o que contraria a hipótese. Portanto, K é limitado. Seja $(x_k) \subset K$, tal que $a = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$, se K não for fechado, pode-se também supor que $a \notin K$. No entanto, isso contraria a hipótese, no sentido de que uma subsequência de (x_k) que deveria convergir para um ponto de K, convergiria para $a \notin K$. Logo, K é também fechado. Portanto, segue que K é compacto. $\square$

Exemplo 2.22.1 *Exemplos de conjuntos compactos:*

1. *A bola fechada é um conjunto compacto.*

2. *O conjunto vazio é compacto.*

3. $\mathbb{R}^n$ *não é um conjunto compacto, pois não é limitado.*

2.7 Aplicações contínuas

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, associa a cada ponto $x \in X$ sua imagem $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$. Sendo que as funções reais $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, assim definidas, são denominadas funções-coordenada de f, e pode-se escrever $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Sobre isso, tem-se uma importante definição:

Definição 2.23 *A aplicação f é dita* ***contínua no ponto*** *$a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado, pode-se determinar $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Ou seja, para cada bola $B(f(a); \varepsilon)$ dada, existe uma bola $B(a; \delta)$ tal que $f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \varepsilon)$, independente da norma que forem adotadas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.

Nesta seção, apresentam-se apenas dois resultados sobre o assunto, que, no entanto, são o bastante para o propósito desse trabalho.

Teorema 2.24 *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto em X.*

Demonstração: Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, para cada $x \in f^{-1}(A) = \{x \in X; f(x) \in A\} \subset X$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x); \varepsilon) \subset A$. Por f ser contínua em X, cada ponto $x \in f^{-1}(A)$ é centro de uma bola aberta B_x tal que $f(B_x \cap X) \subset B(f(x); \varepsilon) \subset A$. Ao considerar a reunião das bolas B_x, determina-se um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com o qual observa-se que $f^{-1}(A) \subset U \cap X$ e $U \cap X \subset f^{-1}(A)$. Portanto, $f^{-1}(A) = U \cap X$ e, o conjunto $f^{-1}(A) \subset X$ é aberto.
Reciprocamente, considere $x \in X$, logo existe $f(x) \in \mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$ seja $B(f(x); \varepsilon)$ um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$. De acordo com a hipótese, $f^{-1}(B(f(x); \varepsilon)$ é um subconjunto aberto em X. Note que $x \in f^{-1}(B(f(x); \varepsilon)$, então existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset f^{-1}(B(f(x); \varepsilon)$. Portanto, segue que $f(B(x; \delta)) \subset B(f(x); \varepsilon)$, e f é contínua pela definição. $\square$

Teorema 2.25 *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto fechado em X.*

Demonstração: Seja uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua. Para mostrar que o conjunto $f^{-1}(F) = \{x \in X; f(x) \in F\}$ é fechado em X, pode-se considerar o conjunto $A = \mathbb{R}^n - F$ aberto em $\mathbb{R}^n$, pois é complementar de F. Sendo assim, ao considerar as imagens inversas de A e F pela aplicação f, obtém-se que $f^{-1}(A) = X - f^{-1}(F)$, isto é, que o complementar de $f^{-1}(F)$ em relação a X é $f^{-1}(A)$, que é um subconjunto aberto em X pelo Teorema 2.24. Portanto, segue que $f^{-1}(F)$ é fechado em X.
Reciprocamente, seja $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado, então por hipótese $f^{-1}(F)$ é fechado em X. E, sendo F é fechado, seu complementar $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto. Se, $A \neq \varnothing$, tem-se que $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{R}^n - F) = X - f^{-1}(F)$ é aberto em X, pois $f^{-1}(F)$ é fechado em X. Assim, segue do Teorema 2.24 que f é contínua. E, se $A = \varnothing$, então $F = \mathbb{R}^n$ e logo $f^{-1}(F) = X$ que é aberto em X, novamente, segue do Teorema 2.24 que f é contínua. $\square$

2.8 Limites

Sejam $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de X.

Definição 2.26 *Diz-se que o ponto $b \in \mathbb{R}^n$ é o **limite de** $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ **quando** $\mathbf{x}$ **tende para** $\mathbf{a}$ e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se determinar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ implicam $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

A noção de limite que se apresentou por meio da definição anterior é análoga a aquela apresentada quando o objeto de estudo eram funções reais, embora haja algumas diferenças quanto aos objetos matemáticos relacionados que será possível notar por meio dos resultados que se apresentam nesta seção.

Assim, também observa-se que não há a necessidade da aplicação f estar definida no ponto $a \in \mathbb{R}^m$, pois o valor $f(a)$ não influencia na existência do limite. No entanto, sendo $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação do conjunto X, e $a \in X$, a aplicação f pode ser caracterizada como contínua, tal como destacou-se em $\mathbb{R}$, isto é, a aplicação f será dita contínua em a quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ e, neste caso, o valor f(a) tem importância.

A afirmação seguinte decorre imediatamente do uso da definição anterior. No entanto, é apresentada como um teorema, com a finalidade de ressaltar seu conteúdo, que mostrou-se importante para atingir o objetivo deste estudo.

Teorema 2.27 *(Permanência do sinal) Sejam a um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real. Se $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ é um número positivo então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ implicam $f(x) > 0$.*

Demonstração: Sendo $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, isso significa que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ tem-se a implicação $|f(x) - b| < \varepsilon$. Como $b > 0$, pode-se considerar $\varepsilon = b$, e com isso, $|f(x) - b| < \varepsilon$ implica $|f(x) - b| < b$ que de modo equivalente representa $0 < f(x) < 2b$, isto é, $f(x) > 0$.

□

Os próximos resultados tratam do limite de aplicações de maneira mais específica, o qual, como será possível observar, é expresso em termos das funções-coordenada da f; embora no último resultado seja feito o uso de limite de sequências, que já foi definido.

Teorema 2.28 *Sejam a um ponto de acumulação do conjunto X, $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação e $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ as funções-coordenada de f. Então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Demonstração: Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, então ocorre que para qualquer $\varepsilon > 0$ pode-se obter $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ a implicação $|f(x) - b| < \varepsilon$ é válida. Porém, para cada $i = 1, \ldots, n$ tem-se que $|f_i(x) - b_i| \leq |f(x) - b|$, pois no primeiro membro desta desigualdade tem-se o módulo da diferença de dois números reais, enquanto no segundo membro tem-se a norma da diferença de dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Assim, como $|f(x) - b| < \varepsilon$, segue que $|f_i(x) - b_i| < \varepsilon$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.
Reciprocamente, como $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se determinar $\delta_i > 0$ tal que para $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta_i$ tem-se a implicação $|f_i(x) - b_i| < \varepsilon$. Mas, sendo $|f_i(x) - b_i| \leq |f(x) - b|$, para cada $i = 1, \ldots, n$, e $\delta = mín\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, com a norma do máximo e $\delta > 0$, é obtido que $|f(x) - b|_M = máx\{|f_1(x) - b_1|, |f_2(x) - b_2|, \ldots, |f_n(x) - b_n|\}$, logo, pela correspondência entre as normas usuais em $\mathbb{R}^n$, obtém-se que $|f(x) - b| < \varepsilon$, que implica $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. □

Teorema 2.29 *Sejam a um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$. A fim de que se tenha $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_k \in X - \{a\}$ com $\lim\limits_{x\to\infty} x_k = a$, tenha-se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_k) = b$.*

Demonstração: Sendo que $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ tem-se a implicação $|f(x) - b| < \varepsilon$. Além disso, quanto a hipótese, seja $(x_k) \subset X - \{a\}$ tal que $a = lim_{k\to\infty} x_k$, isto é, dado $\varepsilon' > 0$, pode-se obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_0$ ocorre $|x_k - a| < \varepsilon'$. Dessas considerações, para $\varepsilon' = \delta > 0$, existe $k_0' \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_0'$ tem-se $0 < |x_k - a| < \delta$ e $|f(x_k) - b| < \varepsilon$ como implicação, ou seja, que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_k) = b$.
Reciprocamente, seja $(x_k) \subset X - \{a\}$ tal que $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ para a qual se tem $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ existe $x_k \in X$ tal que $0 < |x_k - a| < \delta = \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - b| \geq \varepsilon$, isto é, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq b$ mesmo tendo $x_k \in X - \{a\}$ e $a = lim_{k\to\infty} x_k$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. □

3 O TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA

O resultado do Teorema da Função Implícita apresenta quais as condições em que é possível calcular a derivada parcial de uma função de n variáveis em relação a determinada variável x_i $(i = 1, \ldots, n)$, quando a função não pode ser expressa explicitamente nessa variável x_i, bem como define uma expressão para o cálculo da derivada parcial de uma função implícita.

Portanto, este resultado é necessário quando estuda-se a diferenciação de funções de n variáveis, em particular quando as funções são definidas de forma implícita.

Deste modo, nesta seção, são apresentados conceitos e resultados relacionados a funções de n variáveis, em particular, de derivadas parciais e de diferenciabilidade. Tais conceitos irão auxiliar na compreensão e identificação não só das condições que o Teorema da Função Implícita requer, como também em como tais condições influenciam na demonstração do mesmo. A demonstração do referido teorema é encontrada na sequência, após a apresentação dos resultados necessários relacionados a funções de n variáveis.

No entanto, para dar continuidade, a definição de caminho retílineo uniforme precisa ser adicionada, pois é empregado em alguns dos resultados que são apresentados na seção.

Assim, dados $x, y \in X \subset \mathbb{R}^n$:

Definição 3.1 *O caminho $f : [0,1] \to X$, definido por $f(t) = (1-t)x + ty$ é chamado caminho retilíneo que liga x a y.*

Sendo que, um caminho em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma função contínua definida em um intervalo. Assim, pode-se afirmar que dois pontos $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho em X quando existe um caminho $f : I \to X$ tal que $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$ com $\alpha, \beta \in I$.

3.1 Funções reais de n variáveis

Uma função real de n variáveis reais, ou função de n variáveis, é uma regra que associa um único número $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ a cada ponto x de um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$, no qual tal função está definida.

Do ponto de vista prático, muitas situações do dia a dia podem ser modeladas, e estudadas, por meio de funções de n variáveis. Entre estas situações se encontra a taxa de variação instântanea, que é uma interpretação da derivada parcial, no contexto de funções de n variáveis.

Na próxima seção, apresenta-se a definição de derivada parcial para funções de n variáveis.

3.2 Derivadas parciais

Definição 3.2 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função cujo domínio é um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ e seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, a derivada parcial de f no ponto a em relação a sua i-ésima variável é o número:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f\,(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\,(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t}$$

caso este limite exista.

Observação 3.2.1:*Em relação a esta definição, é interessante fazer três observações. A primeira refere-se ao domínio da f: o domínio U é um conjunto aberto, mas não por acaso. Pois, sendo ele aberto pode-se determinar $\delta > 0$ tal que dado $a \in U$ ainda se tenha $a + te_i \in U$, para todo acréscimo suficientemente pequeno $t \in (-\delta, \delta)$. E, desta maneira, torna-se possível definir o caminho retílineo $\lambda_i : (-\delta, \delta) \to U$, com $\lambda_i(t) = a + te_i$, pelo qual se analisa a derivada de f no ponto a em relação a alguma variável; uma vez que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda_i)(0)$ é a derivada da função real $f \circ \lambda_i : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ em $t = 0$.*

A segunda observação refere-se a notação: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ significa a derivada de f em relação a sua i-ésima variável e, que esta notação será a adotada nesse texto. Entretanto, quando a f estiver definida em subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, seus pontos serão escritos como (x, y) em vez de (x_1, x_2) e (x, y, z) em vez de (x_1, x_2, x_3). Logo, nestes casos, as derivadas parciais de f em relação à primeira, à segunda e à terceira variáveis são, respectivamente, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$. A terceira observação, é referente a quão próximo os conceitos relacionados à derivada parcial e à derivada para funções de uma variável estão. Pois, da definição anterior, pode ser observado que o modo de calcular a derivada parcial de uma função real de n variáveis é análago ao modo de calcular a derivada de uma função real de uma variável. No entanto, a existência das derivadas parcias e da derivada, não possuem o mesmo significado com relação a continuidade, por exemplo.

Em $\mathbb{R}$, quando uma função é derivável em um ponto pode-se garantir que a função é contínua nesse ponto. Em $\mathbb{R}^n$, mesmo que exista todas as derivadas parciais de uma função de n variáveis em determinado ponto, e isso implique que a restrição da f a cada um dos n segmentos, paralelos aos eixos que se cortam em tal ponto, seja contínua, ainda não é possível afirmar a continuidade da função em tal ponto.

A fim de exemplificar esta situação, pode-se considerar a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

definida por $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *se* $x^2 + y^2 \neq 0$ *e* $f(0,0) = 0$, *para a qual as derivadas parcias em relação a variável* x *e* y *existem e, calculadas no ponto* $(0,0)$ *são iguais a zero, porém* f *não é contínua neste ponto. Para notar isso, pode-se denotar por* θ *o ângulo que o vetor não-nulo* $v = (x,y)$ *forma com o eixo das abcissas, e nesse sentido, observará-se que* $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = cos\theta \cdot sen\theta$. *Ao atribuir diferentes valores para* θ, *pode-se encontrar diferentes valores para o limite de* $f(x,y)$ *quando* (x,y) *tende a* $(0,0)$ *ao longo do segmento* $x = tcos\theta$ *e* $y = tsen\theta$, *quando* t *tende a zero.*

Nesse sentido, inferir a continuidade de uma função de n *variáveis em um ponto não é possível apenas por meio da existência das derivadas parciais neste ponto; um conceito importante precisa ser acrescentado.*

3.3 Funções de classe C^1

Nesta seção, apresentam-se dois conceitos que podem ser relacionados a uma função f de n variáveis que assume valores reais: classe C^1 e diferenciável. A partir dos quais, será possível inferir resultados importantes no estudo de funções de n variáveis, como aqueles que permitem analisar quando uma função f é contínua, ou contínua em um ponto.

Assim, seja $f : U \to \mathbb{R}$ que possui as n derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$; com isso, ficam definidas as n funções:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} : U \to \mathbb{R}, \text{ em que } \frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Definição 3.3 *A função* f *é de* ***classe*** C^1, *e se escreve* $f \in C^1$, *quando as funções* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n} : U \to \mathbb{R}$, *são contínuas em* U.

Definição 3.4 *A função* f *é* ***diferenciável no ponto*** $a \in U$ *quando cumpre as seguintes condições:*

1. *Existem as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.

2. *Para todo* $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *tal que* $a + v \in U$, *tem-se*

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i + r(v) \text{ em que } \lim_{|v| \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Na definição anterior, a ideia de uma função f de n variáveis ser diferenciável está relacionada, de modo análago, ao que foi estabelecido na disciplina de Cálculo de Funções de n Variáveis para funções de duas variáveis (que são diferenciáveis). Isto é, quando uma função de duas variáveis é diferenciável em um ponto, existe um plano tangente ao gráfico da f neste ponto, que representa uma aproximação para o mesmo em uma vizinhança desse ponto. Quando as funções são definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para $n > 2$, perde-se a possibilidade de visualização, no entanto, a ideia apresentada continua sendo válida.

Por exemplo, seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in A$, em que A é aberto. Então existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $\lim\limits_{|v|\to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$. Observe que $r(v) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - h\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ é composta pelas derivadas parciais da f. Note também que, neste caso, $v = (h, k) \in \mathbb{R}^2$. Ao denotar $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$, a expressão de $r(v)$ pode ser reescrita como: $f(x, y) - f(x_0, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ e $v = (x - x_0, y - y_0)$. Sendo $f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ a equação do plano tangente ao gráfico da f no ponto (x_0, y_0). Portanto, $r(v)$ representa a diferença entre a f e um plano tangente ao seu gráfico.

Assim, este conceito baseia-se na ideia de que se uma função é diferenciável em um ponto, então na proximidade desse ponto, ela pode ser aproximada por um polinômio de grau 1 de n variáveis, de tal forma que o erro da aproximação $r(v)$ satisfaz $\lim\limits_{|v|\to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$ (isto é, o valor do erro será bem menor que a distância entre o ponto para com uma pequena variação nele). Portanto, a essência da diferenciabilidade está na condição $\lim\limits_{|v|\to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$, pois $r(v)$ pode ser escrito para qualquer função que possua as n derivadas parciais.

No item 2 da definição anterior, a expressão $\dfrac{r(v)}{|v|}$ também pode ser denotada como ρ ou $\rho(v)$ e também $r(v)$ pode ser denotada por $\rho|v|$. Além disso, em tal item, cada número α_i é uma coordenada do vetor $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ e representa a diferença $x_i - a_i$ (com $i = 1, \ldots, n$) que quando $\alpha_i \to 0$ torna x_i próximo de a_i, em que o ponto $x = (x_1, \ldots, x_i)$ representa os pontos de uma vizinhança de a.

Note também que se ocorre $\lim\limits_{|v|\to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$ tem-se $\lim\limits_{v\to 0} r(v) = 0$, uma vez que $r(v) = \dfrac{r(v)}{|v|} \cdot |v|$. Disso, segue-se que $\lim\limits_{v\to 0}[f(a + v) - f(a)] = 0$. Portanto, toda função diferenciável no ponto a é contínua nesse ponto.

Definição 3.5 *$f : U \to \mathbb{R}$ é **diferenciável** quando f for diferenciável em todos os pontos de U.*

O resultado seguinte possibilita afirmar a diferenciabilidade de uma função f tendo em vista suas derivadas parciais de primeira ordem.

Teorema 3.6 *Toda função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 é diferenciável.*

Demonstração: Para facilitar a demonstração, será considerado $U = \mathbb{R}^2$. Para concluir que a função f é diferenciável em U é necessário mostrar que as derivadas parciais existem em todo ponto do domínio U e que para todo $v = (\alpha_1, \alpha_2)$, sendo que $x + v \in U$ qualquer que seja $x \in U$, pode-se afirmar que $f(a+v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \alpha_2 + r(v)$ em que $\lim\limits_{|v| \to 0} \dfrac{r(v)}{|v|} = 0$.

Assim, como $f : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, existem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em todos os pontos de U, e elas são contínuas. Portanto, uma condição para a f ser diferenciável está garantida.

Para mostrar a outra condição, sejam os pontos $c = (a, b)$, $v = (h, k) \in U$, tais que substituídos na igualdade $r(v) = f(c+v) - f(c) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(c)\alpha_1 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(c)\alpha_2$, tenha-se:

$$r(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k$$

e ao somar $f(a, b+k)$ em ambos os membros desta equação e reorganizá-la, ela ficará:

$$r(h,k) = f(a+h, b+k) + f(a, b+k) - f(a, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

Com isso, a partir do Teorema do Valor Médio (Teorema 5.6), existem θ_1, $\theta_2 \in (0,1)$, tais que: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)h = f(a+h, b+k) - f(a, b+k)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)k = f(a, b+k) - f(a,b)$. Ao subsituir esses valores na equação anterior, ela ficará do seguinte modo:

$$r(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)k - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k,$$

pondo h e k em evidência, tem-se:

$$r(v) = h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

a qual, ao ter seus membros multiplicados por $\dfrac{1}{|v|}$ ficará:

$$\frac{r(v)}{|v|} = \frac{h}{|v|}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right) + \frac{k}{|v|}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$

Tendo essa equação, basta calcular o limite $\lim\limits_{|v| \to 0} \dfrac{r(v)}{|v|}$, para verificar se o mesmo tem valor igual a zero. Assim, tem-se que $\lim\limits_{|v| \to 0} \dfrac{r(v)}{|v|}$ é igual a

$$\lim_{|v|\to 0}\left[\frac{h}{|v|}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)\right]+\lim_{|v|\to 0}\left[\frac{k}{|v|}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\right],$$

para calcular o limite dessa expressão, note que tanto $\dfrac{h}{|v|}=\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\dfrac{k}{|v|}=\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ são limitados por 1, bem como que os limites:
$\lim\limits_{|v|\to 0}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)=0$ e $\lim\limits_{|v|\to 0}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2 k)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)=0.$
Logo, segue pelo Teorema 5.5 que $\lim\limits_{|v|\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|}=0$, o que mostra que a outra condição também está garantida. Portanto, sendo f de classe C^1 em U ela também é diferenciável em U. □

Corolário 3.6.1 *Toda função de classe C^1 é contínua.*

Teorema 3.7 *Sejam $U\subset\mathbb{R}^m$, $V\subset\mathbb{R}^n$ abertos, $f: U\to V$ uma aplicação cujas funções-coordenada $f_1,\dots,f_n$ possuem derivadas parciais no ponto $a\in U$ e $g: V\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b=f(a)$. Então $g\circ f: U\to\mathbb{R}$ possui derivadas parciais no ponto a e vale*

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i}, i=1,\dots,m,$$

em que as derivadas parciais relativas aos x_i são calculadas no ponto a e as relativas a y_k são calculadas no ponto $b=f(a)$.

Demonstração: De acordo com a hipótese de que a função g é diferenciável no ponto $b=f(a)$, pode-se expressar a função $(g\circ f)(a)$ como:

$$g(f(a)+f(a+te_i)-f(a))-g(f(a))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}f(a)\cdot(f_k(a+te_i)-f_k(a))+\rho(t)\cdot|f(a+te_i)-f(a)|,$$

isto é, $(g\circ f)(a)$ é tal que

$$g(f(a+te_i))-g(f(a))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}f(a)\cdot(f_k(a+te_i)-f_k(a))+\rho(t)\cdot|f(a+te_i)-f(a)|.$$

Para expressar a derivada parcial da função $g\circ f$, conforme a definição de derivada parcial, observa-se que é necessário dividir a equação anterior por t antes de utilizar o limite. Sendo assim, obtém-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{g(f(a+te_i))-g(f(a))}{t} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}f(a)\cdot\frac{(f_k(a+te_i)-f_k(a))}{t}+\rho(t)\cdot\frac{|f(a+te_i)-f(a)|}{t}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}f(a)\cdot\frac{(f_k(a+te_i)-f_k(a))}{t}\pm\rho(t)\cdot\left|\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\right|
\end{aligned}
$$

Ao aplicar o limite com $t \to 0$, já que g é diferenciável, obtém-se a derivada parcial da função $g \circ f$ em relação a variável x_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$\frac{\partial g\circ f}{\partial x_i}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{g(f(a+te_i))-g(f(a))}{t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}f(a)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(f_k(a+te_i)-f_k(a))}{t}\pm\lim_{t\to 0}\rho(t)\cdot\left|\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\right|$$

E, como $\lim\limits_{t\to 0}\rho(t) = 0$ e $\left|\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|$, pode-se usar o Teorema 5.5, pois $\lim\limits_{t\to 0}\rho(t) = 0$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right|$ é limitada, assim:

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial f_k}{\partial x_i}, i=1,\ldots,m.$$

□

Corolário 3.7.1 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in U$. Dado o vetor $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, se $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$ é qualquer caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v$, tem-se*

$$(f\circ\lambda)'(0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot\alpha_i.$$

Demonstração: Seja o caminho diferenciável $\lambda : (-\delta, \delta) \to U$, com $\lambda(t) = a + tv$. Como $f : U \to \mathbb{R}$ tem-se que $f \circ \lambda : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ e, sendo f diferenciável e λ diferenciável, pode-se calcular $(f \circ \lambda)'$. Assim, por meio do Teorema 3.7, obtém-se que $(f \circ \lambda)'(t) = \dfrac{d(f\circ\lambda)}{dt}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\dfrac{d\lambda_i}{dt}(t)$. E, ao calcular $(f \circ \lambda)'(t)$ em $t = 0$, determina-se que:

$$(f\circ\lambda)'(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{d\lambda_i}{dt}(0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\alpha_i,$$

pois $\lambda'(0) = v$. □

O próximo resultado é decorrente do Teorema 3.7, no entanto, apresenta-se destacado como teorema por ser um importante resultado.

Teorema 3.8 ***(Teorema do Valor Médio)*** *Dada $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, se o segmento de reta $[a, a+v]$ estiver contido em U então existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta v) \cdot \alpha_i$$

em que $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Demonstração: Seja o caminho retílineo $\lambda : [0,1] \to U$, com $\lambda(t) = a + tv$, para o qual se tem que o segmento de reta $[a, a+v]$ está contido em U. Como f é diferenciável e, λ também é diferenciável por construção, tem-se também $f \circ \lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ diferenciável. Observa-se também que $f(a+v)-f(a) = (f\circ\lambda)(1)-(f\circ\lambda)(0) = f(a+tv)(1)-f(a+tv)(0)$. Diante dessas considerações, pelo fato de $a \in U$ e f ser diferenciável em a, pode-se usar o Teorema do Valor Médio (Teorema 5.6) para afirmar que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $(f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0) = (f \circ \lambda)'(\theta)$. E, disso, com o Teorema 3.7, tem-se que:

$$(f \circ \lambda)'(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta v) \cdot \alpha_i,$$

pois $\dfrac{d\lambda_i}{dt}(\theta) = v$. □

Tendo em vista os conceitos e resultados já apresentados, apresenta-se o Teorema da Função Implícita no $\mathbb{R}^n$, que estabelece condições suficientes para assumir que a equação $f(x,y) = c$ define implicitamente y como uma função de x com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.9 ***(Teorema da Função Implícita)*** *Dada a função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe C^k $(k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ em que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:*

1. *$B \times \overline{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in B \times \overline{J}$.*

2. *Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x,y) = f(x, \xi(x)) = c$.*

A função $\xi : B \to J$, assim definida é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

Demonstração: Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, será admitido que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. E, sendo $f \in C^k$, a função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em U. Assim, diante da continuidade da função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

no ponto $(x_0, y_0) \in U$, existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, tais que definindo $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ e $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, tem-se $B \times \overline{J} \subset U$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in B \times \overline{J}$.

Para cada $x \in B$, determina-se uma função $g_x : \overline{J} \to \mathbb{R}$ com $y \mapsto f(x, y)$, que é contínua e crescente no intervalo $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] = \overline{J}$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0$.

Tendo $f(x_0, y_0) = c$, então $f(x_0, y_0 - \varepsilon) < c < f(x_0, y_0 + \varepsilon)$, pois $g_{x_0}(y_0 - \varepsilon) = f(x_0, y_0 - \varepsilon)$ e $g_{x_0}(y_0 + \varepsilon) = f(x_0, y_0 + \varepsilon)$. Assim, por meio do Teorema da Permanência do Sinal (Teorema 2.27) e porque a f é contínua é possível supor δ tão pequeno que $f(x, y_0 - \varepsilon) < c < f(x, y_0 + \varepsilon)$ para todo $x \in B$. E, com isso, por meio do Teorema do Valor Intermediário (Teorema 5.4), para cada $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que ocorre

$$f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c \tag{3.1}$$

e, $y \in J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, necessariamente.

Para mostrar que $\xi : B \to J$ possui derivadas parciais em todo $x \in B$, seja: $k = k(t) = \xi(x + te_i) - \xi(x)$ que implica que $\xi(x + te_i) = \xi(x) + k$. Assim a Equação (3.1), pode ser escrita como $f(x, \xi(x)) = f(x + te_i, \xi(x + te_i)) = f(x + te_i, \xi(x) + k) = c$ e, portanto, $f(x + te_i, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) = 0$.

Como a f é diferenciável, por meio do Teorema do Valor Médio (Teorema 3.8), para todo t existe $\theta(t) \in (0, 1)$ tal que da igualdade $f(x + te_i, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) = 0$ e sendo $v = (te_i, k) \in U$, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x + te_i, \xi(x) + k) - f(x, \xi(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot v_i \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot t + \frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k) \cdot k. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{k}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}$$

e, como $k = \xi(x + te_i) - \xi(x)$, tem-se a expressão:

$$\frac{\xi(x + \theta te_i) - \xi(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x + \theta te_i, \xi(x) + \theta k)}.$$

Neste ponto será adimitido que ξ é contínua.

Assim, segue que $\lim\limits_{t \to 0} k(t) = \lim\limits_{t \to 0} \xi(x + te_i) - \xi(x) = 0$.

Tendo que $\lim\limits_{t \to 0} x + te_i = x$ e $\lim\limits_{t \to 0} \xi(x) + \theta k = \xi(x)$, bem como que as derivadas parciais da f são contínuas, então ocorre que:

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{\xi(x + te_i) - \xi(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Portanto, $\dfrac{\partial \xi(x)}{\partial x_i} \in C^{k-1}$ e $\xi \in C^k$.

Continuidade da ξ*:* Para mostrar que $\xi : B \to J$ é uma função contínua, pode-se mostrar que para todo conjunto fechado $F \subset J$ o conjunto $\xi^{-1}(F)$ é fechado em B, conforme o Teorema 2.25.

Nesse sentido, seja $\overline{x} \in B$ um ponto de acumulação de $\xi^{-1}(F)$, por suposição. Logo, existe uma sequência $(x_k) \subset \xi^{-1}(F)$, tal que $x_k \to \overline{x}$. Mas, como $(x_k) \subset \xi^{-1}(F) \subset B$, então $\xi(x_k) \subset F$.

Como F é fechado e limitado então a sequência $(\xi(x_k))$ possui uma subsequência que converge para um ponto de F, seja $(\xi(x_k^{'}))_{k \in \mathbb{N}'}$ essa subsequência tal que $\xi(x_k^{'}) \to a$, e $a \in F$.

Por $\xi(x_k^{'}) \in J$, e $\overline{x}$ e todos os termos $x_k^{'}$ pertencerem a B, pode-se usar a hipótese de que a f é contínua e que, portanto, $\lim\limits_{k \to \infty} (f(x_k^{'}), \xi(x_k^{'})) = f(\overline{x}, a)$, por outro lado $f((x_k^{'}), \xi(x_k^{'})) = c$, logo, $\lim\limits_{k \to \infty} f((x_k^{'}), \xi(x_k^{'})) = c$. Disso, segue que $f(\overline{x}, a) = c$. Mas como existe um único $y = \xi(x)$ tal que $f(x, y) = c$, então $\xi(\overline{x}) = a$, e logo $\overline{x} \in \xi^{-1}(F)$. Portanto, o conjunto $\xi^{-1}(F)$ é fechado e ξ é contínua. $\square$

Na prática, com este resultado, na disciplina de Cálculo de Funções de n Variáveis, determina-se as derivadas parciais de uma função implícita, como nos exemplos seguintes:

Exemplo 3.9.1 *Determine* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *se* $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Sendo $F(x, y, z) = 1$ *e considerando os casos em que* $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 6xy \neq 0$, *a equação* $F(x, y, z) = 1$ *define* z *implicitamente como uma função diferenciável de* x *e* y, *assim considera-se que a função* z *é* $F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = 1$. *Logo, para obter* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, *faz-se:*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}.$$

E, para obter $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, *faz-se:*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + xy}.$$

Exemplo 3.9.2 *Verifique que a equação* $x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 9$ *define* z *como função de* x *e* y *numa vizinhança do ponto* $(1, 0, 1)$ *e calcule* $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

Para verificar que a equação $x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y=9$ *define* z *como função de* x *e* y *numa vizinhança do ponto* $(1,0,1)$*, precisa- se mostrar que* $F(x,y,z)=c$*, e de fato, do enunciado já é sabido que* $F(x,y,z)=x^3+3y^2+8xz^2-3z^3y=9$*, e além disso, precisa-se mostrar que* $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)\neq 0$*. Assim, como* $\dfrac{\partial F}{\partial z}=16xz-9z^2y=0$ *e* $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,0,1)=16-0=16\neq 0$*. Logo, pelo Teorema da Função Implícita,* $F(x,y,z)$ *define* z *como função de* x *e* y *numa vizinhança do ponto* $(1,0,1)$*.*

Além disso, com as condições deste teorema satisfeitas, tem-se que:
$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\dfrac{3x^2+8z^2}{16xz-9z^2y}$ *e, portanto,* $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-\dfrac{11}{16}$.
E, que:
$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\dfrac{6y-3z^3}{16xz-9z^2y}$ *e, assim,* $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,0)=-\left(-\dfrac{3}{16}\right)=\dfrac{3}{16}$.

Observação 3.9.3: *A hipótese* $f\in C^k$ *é fundamental. Para exemplificar, considere a função* $f(x,y)=x-g(y)$ *em que* $g(y)=\dfrac{y}{2+y^2sen\left(\frac{1}{y}\right)}$ *se* $y\neq 0$ *e,* $g(y)=0$ *se* $y=0$*. Tem-se que* f *diferenciável e* $f(0,0)=0$ *e a derivada parcial de* f *com respeito a* y *no ponto* $(0,0)$ *vale* $-\dfrac{1}{2}$*. Além disso, para* x *fixado, a derivada parcial de* f *com respeito a* y *no ponto* $\left(x,\dfrac{1}{k\pi}\right)$ *coincide com* $-f'\left(\dfrac{1}{k\pi}\right)=-\dfrac{1}{2}+(-1)^k$*, isto é, a derivada parcial de* f *com respeito a* y *no ponto* $\left(x,\dfrac{1}{k\pi}\right)$ *alterna sinais, logo pelo Teorema do Valor Intermediário (Teorema 5.4), existe uma vizinhança do* $(0,0)$ *onde derivada parcial de* f *com respeito a* y *se anula para todo ponto dessa vizinhança. Esse é um exemplo que* f *não é de classe* C^1*.*

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo do Teorema da Função Implícita no espaço euclidiano n-dimensional e a realização da sua demonstração foi possível compreender o porquê que as suposições que são admitidas para diferenciar implicitamente funções de n variáveis são válidas. Além do que, o caminho percorrido para atingir tal objetivo possibilitou o estudo de conceitos mais gerais e generalizações de resultados válidos na reta, que possivelmente não seriam vistos em diciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, e que ampliaram os conhecimentos já estabelecidos.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de Uma Variável**.v.1. 12 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.

[2] LIMA, E. L. **Análise Real: Funções de n Variáveis.**.v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: Impa, 2016.

[3] LIMA, E. L. **Curso de Análise.**v.2. 5 ed. Rio de Janeiro: Impa, 1999.

[4] STWART, J. **Cálculo.**v. 2, 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

5 APÊNDICE

5.1 APÊNDICE A-Resultados utilizados de Análise Real de funções de uma variável real

Nesta seção apresentam-se algumas definições e resultados envolvendo limites de funções, funções contínuas e derivadas, em relação a funções de uma variável real, por terem sido utilizados ao longo do trabalho, e, portanto, são elencados com a finalidade de auxiliar a compreensão dos resultados apresentados no mesmo.

As demonstrações destes resultados, que são encontradas em [1], foram omitidas por se tratarem de resultados vistos na disciplina de Análise Matemática.

Definição 5.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se determinar um $\delta > 0$, tal que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.*

Definição 5.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diz-se que f é* ***contínua no ponto*** $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ *quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se determinar $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ tenha-se a implicação $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Definição 5.3 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação desse conjunto. A* ***derivada*** *da função f no ponto a é o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

se este limite existir.

Observação 5.3.1 *A partir da definição apresentada, para a f ser derivável em a é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in X$ implique que $f(a + h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, com $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, e quando isso ocorre $c = f'(a)$. Para notar isso, pode-se considerar a função $r : Y \to \mathbb{R}$, com $r(h) = f(a + h) - f(a) - c \cdot h$, tal que $Y = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in X\}$ e que, portanto, $0 \in Y$ é também um ponto de acumulação de Y. Assim, se existe $f'(a)$, pode-se considerar $c = f'(a)$ e ao dividir a equação que define $r(h)$ por h, a fim de calcular $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h}$, será obtido que $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} f'(a) = 0$. Por outro lado, se existe o número real c e $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, então $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} c = 0$, o que implica que $f'(a) - c = 0$, portanto $c = f'(a)$.*

Dessa maneira, é possível afirmar que se f é derivável em a, então f é contínua em a. Pois, sendo $f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \left[\dfrac{r(h)}{h}\right] \cdot h$, e $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$, então $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Teorema 5.4 *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então exite $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = (d)$.*

Teorema 5.5 *Sejam as funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$.*

Teorema 5.6 *(Teorema do Valor Médio de Lagrange) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) \cdot (b-a) = f(b) - f(a)$.*

Observação 5.6.1: *Este resultado também será utilizado no trabalho com o enunciado reescrito de maneira conveniente, tal como segue: "Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivaável em $(a, a+h)$, existe $c \in (a, a+h)$ e $c = a + \theta t$, em que $\theta \in (0,1)$, tal que $f'(c) = f'(a + \theta t) = 0$".*

Teorema 5.7 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável a direita no ponto $a \in X \cap X'_+$, com $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta$, implicam $f(a) < f(x)$.*

Corolário 5.7.1 *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente, então suas derivadas laterais, onde existem são maiores ou iguais a zero.*

Corolário 5.7.2 *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação bilateral (de acumulação à direita e à esquerda). Se $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto a, com $f'(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $a - \delta < x < a < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*