

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

VITÓRIA FENILLI VIDALETTI

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO
CRESCIMENTO POPULACIONAL E DE UMA ATIVIDADE
ECONÔMICA (SUINOCULTURA) DA CIDADE DE
TUPÃSSI/PR

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2019

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

VITÓRIA FENILLI VIDALETTI

**MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO
CRESCIMENTO POPULACIONAL E DE UMA ATIVIDADE
ECONÔMICA (SUINOCULTURA) DA CIDADE DE
TUPÃSSI/PR**

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Câmpus Toledo.

Orientadora: Ma. Jahina Fagundes de Assis Hattori

Coorientadora: Dra. Jocelaine Cargnelutti

TOLEDO

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL E DE UMA ATIVIDADE ECONÔMICA (SUINOCULTURA) DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº -- de --/--/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Orientadora: Profa. Ma. Jahina de Assis Hattori

Coorientadora: Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti

Profa. Ma. Márcia Regina Piovesan

Profa. Ma. Karen Carrilho da Silva Lira

TOLEDO

2019

AGRADECIMENTOS

Ser professora é um sonho que está prestes a se realizar e eu só tenho a agradecer por todos que estiveram comigo nessa caminhada. Primeiramente agradecer à Deus pelo dom da vida e por ter me dado saúde física e psicológica para aguentar cada desafio.

Agradeço à minha fonte de equilíbrio, motivo pelo qual escolhi esta profissão, meu avô Moacyr Fenilli, que não pôde estar presente fisicamente nessa fase de minha vida, mas tenho a plena certeza que esteve comigo em cada passo. Agradeço aos meus pais, Alvacir e Neide, por muitas vezes abdicar de seus sonhos para lutar pelos meus, por aguentar minha fúria em semanas de prova, por nunca me deixar desistir e por sempre me dar abrigo nos momentos de fraqueza. Aos meus irmãos, Roberto e Roberta, por me apoiarem em cada decisão. À minha fonte de inspiração, coragem, e força, Joaquim que fez com que eu prosseguisse nessa caminhada.

Um agradecimento especial a minha mãe acadêmica, orientadora, conselheira, Jahina F. A. Hattori, por me preparar para o mercado de trabalho, mas acima de tudo me dar total suporte nesses quatro anos de companheirismo, por dividir comigo minhas preocupações, momentos, conquistas, por me deixar ser sua "filha". Obrigada, de coração!

À Profa. Jocelaine Cargnelutti, pelas ricas contribuições, pronto atendimento, por se aventurar conosco nessa caminhada de muito aprendizado.

Aos professores membros da banca examinadora, o agradecimento pela consideração em avaliar meu trabalho, pela sua atenção e ensejo de aprimoramento da pesquisa. Agradeço ainda aos professores que atuaram nas disciplinas cursadas, pela amizade, ensinamentos e paciência.

Aos colegas agradeço o apoio, e a oportunidade de conviver com pessoas tão espetaculares e a possibilidade de construir novas amizades. Aos amigos que sempre tiveram por perto - Raphael, Maiara, Tawine. Ao laço de irmandade que construí contigo, Giovanna, obrigada!

Por fim, grata a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, participaram da realização desse sonho.

RESUMO

Neste trabalho realizou-se um estudo sobre o crescimento populacional ao longo do tempo e o ganho de peso de suínos de uma suinocultura, ambos da cidade de Tupãssi/PR, por meio da Modelagem Matemática. Dentre os modelos já existentes na literatura, escolheu-se o modelo de Malthus e o modelo de Verhulst para a modelagem populacional e o modelo de Gompertz e o modelo de Montroll para o crescimento de suínos. O trabalho se iniciou com o estudo dos modelos utilizados, e posteriormente foram realizadas as coletas de dados. Primeiramente, os dados populacionais foram retirados do site oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Posteriormente, os dados dos suínos foram coletados em uma suinocultura domiciliar da cidade, sendo esta uma importante produtora industrial da região. Em seguida, foram feitas as simulações computacionais referentes aos modelos eleitos e uma comparação dos dados obtidos com os dados empíricos. Para a validação dos resultados utilizou-se do erro relativo e, por meio dele pode-se concluir que o modelo que mais se adequa ao crescimento populacional de Tupãssi é o modelo de Verhulst. Para o crescimento dos suínos validou-se por meio das médias dos erros relativos e uma breve comparação dos desvios padrão dos modelos com os dados empíricos, deste modo, conclui-se que o modelo que melhor descreve esse crescimento é o modelo de Gompertz.

Palavras-chave: Modelagem. Modelos matemáticos. Crescimento Populacional. Suinocultura. Sustentabilidade.

ABSTRACT

In this work a study on population growth over time and weight gain of pigs from a swine farm, both from the city of Tupãssi/PR, was carried out through Mathematical Modeling. From the existing models in the literature, the Malthus model and the Verhulst model for population modeling and the Gompertz model and the Montroll model for swine growth were chosen. The work began with the study of the models to be used, and later the data collections were performed. First, the population data were taken from the official website of the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE). Subsequently, swine data were collected from a domestic pig farming in the city, which is an important industrial producer in the region. Then, computer simulations were made for the elected models and a comparison of the data obtained with the empirical data. Relative error was used to validate the results and it can be concluded that the model that best suits the population growth of Tupãssi is the Verhulst model. For swine growth it was validated by means of relative error means and a brief comparison of the standard deviations of the models with the empirical data, thus concluding that the model that best describes this growth is the Gompertz model.

Keywords: Modeling. Mathematical Models. Population Growth. Pig Industry. Sustainability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

6.1	Comparação dos Modelos Populacionais	31
6.2	Comparação dos Modelos dos Suínos	36

LISTA DE TABELAS

6.1	Censo da População de Tupãssi/PR	26
6.2	Modelo de Malthus	28
6.3	Pontos do ajuste de curva	28
6.4	Valores de r	29
6.5	Modelo de Verhulst	30
6.6	Comparação dos Modelos Populacionais	31
6.7	Peso dos suínos em relação ao tempo de uma suinocultura de Tupãssi/PR.	33
6.8	Modelo de Gompertz	34
6.9	Modelo de Montroll	35
6.10	Comparação dos Modelos para os Suínos	36

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	7
LISTA DE TABELAS	8
1 INTRODUÇÃO	10
2 OBJETIVOS	12
2.1 OBJETIVO GERAL	12
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
3 JUSTIFICATIVA	13
4 REFERENCIAL TEÓRICO	14
4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA	14
4.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	15
5 MODELOS MATEMÁTICOS	17
5.1 MODELO MALTHUSIANO	17
5.2 MODELO DE VERHULST	19
5.3 MODELO DE MONTROLL	21
5.4 MODELO DE GOMPERTZ	23
6 APLICAÇÕES	26
6.1 CRESCIMENTO POPULACIONAL	26
6.1.1 Modelo de Malthus	26
6.1.2 Modelo de Verhulst	28
6.1.3 Comparação dos modelos	30
6.2 CRESCIMENTO DE SUÍNOS	32
6.2.1 Modelo de Gompertz	33
6.2.2 Modelo de Montroll	34
6.2.3 Comparação dos Modelos	35
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
REFERÊNCIAS	38

1 INTRODUÇÃO

A qualidade de vida tem sido uma preocupação constante nas sociedades mais contemporâneas, e alguns dos fatores preponderantes são os de crescimento populacional e de crescimento econômico. De acordo com Oliveira (2014), a compreensão dos fenômenos naturais e as leis que o delimitam tem sido causas persistentes na sociedade, buscando favorecer a qualidade de vida do ser humano em seu meio social. Por isso, é de grande importância averiguar alternativas, as quais retratam melhorias no desenvolvimento populacional e social.

Visto que a população é um elemento político essencial que caracteriza uma comunidade torna-se necessário compreender seu crescimento, a fim de tornar possível seu planejamento econômico, social, cultural ou político, além de obter o controle administrativo do esgotamento dos recursos.

Um dos ramos que mais tem ganhado espaço na economia brasileira é o da suinocultura. Segundo Sebrae (2016), a suinocultura é considerada um dos pilares da economia rural do Brasil e tem apresentado grandes avanços em sua gestão ambiental, visando a conscientização do consumidor e tratando sua cadeia produtiva com cuidado e eficiência de modo a se tornar referência no mercado de trabalho. Assim, valoriza a relação de seu produtor com seus arredores, vislumbrando o crescimento dessa atividade. Ressaltando a importância significativa na correlação sociedade-sustentabilidade.

Há diversas alternativas para solução dos problemas relatados acima, uma das possibilidades para a previsão de situações que podem fazer parte do nosso cotidiano é a Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002), “A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. Isto é, a Matemática e a realidade são conjuntos disjuntos que podem ser levadas à interação por meio da Modelagem. Assim, utiliza-se a modelagem como suporte para aplicações das definições, teoremas e propriedades, resultando em modelos matemáticos que contribuem para a estimativa de vários aspectos de nosso cotidiano e mais especificamente para esse trabalho o de crescimento populacional e crescimento de suínos.

Neste trabalho, serão empregados os modelos matemáticos de Malthus e de Verhuslt para estimar o crescimento populacional, e os modelos de Montroll e Gompertz para estimar o crescimento econômico (suinocultura) na cidade de Tupãssi/PR. Essa estimativa auxilia na administração do crescimento populacional e do controle de esgotamento de recursos, conseqüentemente, na questão da sustentabilidade na produção de suínos.

Deste modo, esta pesquisa, ancorada em modelagem matemática, possui por objetivo estudar os conceitos e técnicas para modelar dados coletados da população de

Tupãssi/PR e do crescimento de suínos dessa cidade.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Modelar o crescimento populacional da cidade de Tupãssi e estimar o peso de suínos ao longo do tempo, sendo essa uma das atividades comerciais da cidade.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar as equações diferenciais ordinárias e suas relações com o modelagem matemática;
- Realizar um estudo de modelos matemáticos referentes à crescimento populacional;
- Aplicar os modelos de Malthus e Verhulst na população de Tupãssi ao longo dos últimos 10 anos;
- Aplicar os modelos de Montroll e Gompertz no crescimento: peso x tempo, dos suínos, de uma suinocultura da cidade de Tupãssi;
- Estimar o crescimento populacional da cidade de Tupãssi ao longo dos próximos 10 anos;
- Estimar o crescimento de suínos por meio do tempo.
- Comparar as soluções analíticas com os dados reais de cada evento;
- Elaborar artigos científicos.

3 JUSTIFICATIVA

A modelagem matemática, por meio dos modelos matemáticos, nos possibilita descrever e prever situações do nosso cotidiano. Um dos problemas sociais fortemente discutidos se refere ao crescimento populacional e de algumas áreas importantes para a economia das cidades. Assim, esse trabalho busca, por intermédio de dados quantitativos e utilizando dos modelos de Malthus, Verhulst, Montroll e Gompertz realizar uma modelagem para o crescimento populacional e para o crescimento de suínos, na cidade de Tupãssi, visto que esses acontecimentos estão atrelados com a necessidade de administrar o crescimento populacional e de controlar o esgotamento dos recursos, e também a questão da sustentabilidade na produção de suínos.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão abordados, os conceitos de modelagem matemática e os principais modelos matemáticos atrelados a dinâmica populacional e econômica. Além de apresentar o comportamento das equações diferenciais para auxiliar uma análise matemática destes modelos, e dos resultados obtidos.

4.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática sempre esteve presente em nosso cotidiano. Segundo Siqueira e Natti (2012), desde o início do século XX várias ideias surgiram na tentativa de aproximar a matemática da realidade, de modo a propor a elaboração, formulação e resolução de problemas, os quais possuem resultados eficientes ou não.

Para que ocorra essa relação, segundo Biembengut e Hein (2009), é possível estabelecer algumas etapas que são descritas a seguir,

1. **Interação:** A interação é dividida em duas etapas,

- Reconhecimento da situação problema;
- Familiarização com o assunto a ser modelado, ou seja, referencial teórico.

Uma vez delineada a situação que se pretende estudar, deve ser feito um estudo sobre o assunto, seja uma revisão bibliográfica e/ou uma análise de coleta de dados.

Embora subdividida em duas essa etapa não obedece a uma ordem específica. A situação problema torna-se cada vez mais clara, à medida que se vai interagindo com os dados.

2. **Matematização:** Esta etapa, a mais complexa, subdivide-se em formulação do problema e resolução. Neste momento se transcreve matematicamente a situação problema.

- Formulação do problema, ou seja, hipóteses: Nesta etapa é especialmente importante:

Classificar as informações relevantes e não relevantes, identificando fatos envolvidos;

Decidir quais os pontos a se investigar, levantando hipóteses;

Selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas;

Selecionar símbolos que representem essas variáveis;

Descrever essas relações em termos matemáticos. O objetivo principal é chegar a um conjunto de expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, gráficas, representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução.

- Resolução do problema em termos de modelo: Uma vez formulada a situação problema, passa-se à resolução ou análise com as ferramentas matemáticas que se dispõe. O computador pode ser um instrumento auxiliar para situações problemas em que não foi possível resolvê-la analiticamente.

3. **Modelo matemático:** Para concluir o modelo, torna-se necessária uma avaliação para verificar em que nível ele se aproxima da situação problema representada e então verificar também o grau de confiabilidade na sua utilização. Desta forma, faz-se:

- A interpretação da solução, analisando as implicações da solução derivada da-quele que está sendo investigado;
- A verificação de sua adequabilidade, retornando à situação-problema investigada e avaliando quão significativa e relevante é a solução, validação.

De acordo com Sodré (2007), modelos matemáticos podem ser uma representação de um sistema real, ou seja, um modelo deve constituir um sistema e a forma em que ocorrem as alterações no mesmo. Deste modo, deve descrever a situação abordada, facilitar sua compreensão e assim, se aproximar ao máximo do mundo real.

Bassanezi (2002), descreve que os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações, analisados e classificados conforme o tipo de matemática utilizada. Então modelo matemático é a interpretação de algo da realidade, usado para expressar fenômenos e que por meio da modelagem matemática pode ser compreendido ou não.

Com o intuito de se compreender as características dos modelos, serão apresentadas definições e conceitos que compõem a teoria contemplada nos modelos de Malthus, Verhulst, Montroll e Gompertz.

4.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Segundo Zill e Cullen (2001), uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial. Quando o modelo obtido possui apenas uma variável independente, tem-se que ele é dado em termos de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

De acordo com Sodré (2003), uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação

da forma,

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (4.1)$$

envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas, onde x é a variável independente, y é a variável dependente e $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função $y = y(x)$.

A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a forma de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas.

De acordo com Zill (2003), toda função φ definida em um intervalo $I \rightarrow R$, que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , que substituída em uma EDO de ordem n reduz a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo I . O domínio da solução pode ser classificado como aberto (a, b) , fechado $[a, b]$, ilimitado (a, ∞) e limitado $[a, \infty)$ ou (a, ∞) . Ou seja, uma solução para uma equação diferencial é uma função que satisfaz a equação dada. A solução mais geral possível que admite uma equação diferencial é denominada solução geral, enquanto a outra solução é chamada uma solução particular.

Ao trabalhar com EDO na Modelagem Matemática trabalha-se com modelos. Nesse contexto, segundo Bassanezi (2011), cria-se um processo em que se modelam ideias aplicadas à realidade. De modo geral, para se formular um problema é necessário se pensar no uso de variáveis contínuas. Ao observar seu comportamento e por meio de hipóteses formuladas a respeito das taxas de variações apresentadas chega-se a variável independente e a variáveis dependentes e assim, formula-se o modelo matemático que rege o problema. Quando se propõe trabalhar com modelos matemáticos por meio de Equações Diferenciais nem sempre obtém-se soluções analíticas. Quando isso ocorre, objetivo é encontrar uma solução numérica bastante próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir o erro entre as duas soluções, de tal forma que o método possa ser considerado válido.

Nestres trabalho apresenta-se, por meio da Modelagem Matemática, a possibilidade de trabalhar com o crescimento populacional e o crescimento de suínos ao longo do tempo, bem como o estudo de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem.

5 MODELOS MATEMÁTICOS

5.1 MODELO MALTHUSIANO

De acordo com Henriques (2007), Thomas Robert Malthus, responsável pela criação do modelo malthusiano, nasceu dia 14 de Fevereiro de 1766 em Rookery, falecendo dia 23 de Dezembro de 1834 em Bath. O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados por ele. Ao criar este modelo, em 1798, Malthus tinha em mente a preocupação com a alta taxa de natalidade que estava acontecendo, provocando assim um aumento significativo da população, o que conseqüentemente provocaria fome e miséria. Uma das soluções que ele propõe para esse problema é a redução da taxa de natalidade por parte dos governantes de cada país. Considerando essas informações, o modelo de Malthus assume que a taxa de variação da população é diretamente proporcional ao tamanho da população em um determinado instante de tempo. Para Malthus o modelo poderia ser utilizado pelos governadores para ter uma ideia do comportamento da população por um período de até 20 anos.

Vale ressaltar que, segundo Sodré (2007), o modelo de Malthus não é apropriado para descrever populações humanas, mas este tipo de modelo é utilizado em muitas outras situações, por ser um modelo do tipo exponencial.

Porém, segundo Pugens et al. (2012), este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento da população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que causa a morte de parte da população. Para o uso dessa modelagem devem-se considerar alguns aspectos, como por exemplo,

1. Não existem fatores inibidores;
2. A quantidade de indivíduos reprodutores sempre se mantém constante durante o crescimento da população;
3. A taxa de natalidade e de mortalidade é sempre constante.

Considerando os aspectos apresentados, seja $P(t)$ a quantidade de indivíduos no instante t , $n > 0$ o coeficiente de natalidade, e $m > 0$ o coeficiente de mortalidade. O modelo pressupõe que as taxas de natalidade e mortalidade são proporcionais à população

em determinado instante e é descrito pela equação de diferenças,

$$P(t + 1) - P(t) = nP(t), \quad (5.1)$$

no caso de um crescimento, e pela equação,

$$P(t + 1) - P(t) = -mP(t), \quad (5.2)$$

no caso de um decrescimento. Unificando as equações (5.1) e (5.2),

$$P(t + 1) - P(t) = (n - m)P(t), \quad (5.3)$$

De acordo com o que foi descrito, tem-se que a taxa (α) de crescimento da população $P(t)$ é sempre constante, e é obtida por meio da diferença entre a taxa de natalidade (n) e a taxa de mortalidade (m), isto é,

$$\alpha = n - m \quad (5.4)$$

Tem-se,

$$P(t + 1) - P(t) = \alpha P(t) \quad (5.5)$$

Resolvendo o modelo,

$$P(t + 1) = \alpha P(t) + P(t) \quad (5.6)$$

assim,

$$P(t + 1) = P(t)(\alpha + 1) \quad (5.7)$$

com condição inicial $P(0) = P_0$.

Por indução tem-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) = (1 + \alpha)P(0); \\ P(2) = (1 + \alpha)P(1) = (1 + \alpha)(1 + \alpha)P(0) = (1 + \alpha)^2P(0); \\ \vdots \\ P(t) = (1 + \alpha)P(t - 1) = \dots = (1 + \alpha)^tP(0) \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Usando a condição inicial,

$$P_{(0+1)} = P_0(\alpha + 1) \Rightarrow P_1 = P_0(\alpha + 1) \quad (5.9)$$

generalizando,

$$P_t = P_0(\alpha + 1)^t \quad (5.10)$$

ou ainda,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(\alpha+1)t} \quad (5.11)$$

Portanto, conhecendo a população em $t = 0$ e o valor de t no instante desejado, isto é $P(0) = P_0$ e $P(t) = P_t$ é possível calcular a taxa demográfica (α) no instante, fazendo,

$$\frac{P_t}{P_0} = (\alpha + 1)^t \Rightarrow \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (5.12)$$

5.2 MODELO DE VERHULST

De acordo com Tavoni (2013), Pierre François Verhulst foi um matemático belga que em 1838 introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando que a variação de crescimento depende da própria população em cada instante e satisfaz algumas propriedades.

Segundo Sodré (2007), a adequação ao modelo de Verhulst já foi comprovada para muitas espécies, em experiências de laboratório e também em modelos populacionais estáveis.

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \quad (5.13)$$

podendo ser reescrito como,

$$\beta = r \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) \quad (5.14)$$

sendo, $r = n - m$, com $r > 0$, n taxa de natalidade, m taxa de mortalidade e P_∞ o valor de limite da população, isto é, o valor que P estabiliza.

Os valores de n e m devem ser obtidos realizando uma média das taxas de natalidade e mortalidade dos anos anteriores. O valor de P_∞ , pode ser determinado através da comparação entre a linearização do Modelo de Verhulst e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. Observa-se que o $\beta(P)$ tende a zero quando o P tende a P_∞ . Substituindo (5.14) em (5.13) e considerando que $P(0) = P_0$, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) \Rightarrow rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right) = \frac{dP}{dt} \\ P(0) = P_0, r > 0 \end{cases} \quad (5.15)$$

Deve-se observar que $P(t) \equiv 0$ e $P(t) \equiv P_\infty$, são ambas soluções para a equação diferencial obtida anteriormente. Agora, para encontrar as outras soluções, considerando

$P \neq 0$ e $P \neq P_\infty$ tem-se,

$$\frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} = r dt \quad (5.16)$$

integrando ambos os membros da equação (5.16) obtém-se (5.17),

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} = \int r dt \quad (5.17)$$

utilizando o método de frações parciais se adquire,

$$\int \frac{dP}{P \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} = \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{P_\infty}} \right| \quad (5.18)$$

e

$$\int r dt = rt + c. \quad (5.19)$$

portanto, a equação integral (5.17) fica na forma,

$$\ln \left| \frac{P(t)}{1 - \frac{P(t)}{P_\infty}} \right| = rt + c \quad (5.20)$$

usando a condição inicial $P(0) = P_0$,

$$\ln \left| \frac{P(0)}{1 - \frac{P(0)}{P_\infty}} \right| = r \cdot 0 + c \quad (5.21)$$

$$c = \ln \left| \frac{P_0}{1 - \frac{P_0}{P_\infty}} \right| = \ln \left| \frac{P_0}{\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty}} \right| = \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0} \right| \quad (5.22)$$

logo,

$$\ln \left| \frac{\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}}{\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}} \right| = rt \quad (5.23)$$

aplicando as propriedades de logaritmo e isolando $P(t)$ obtém-se,

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (5.24)$$

considerando $P(t) = P_t$, pode-se isolar o valor de r,

$$r = \frac{-1}{t} \cdot \left[\ln \left(P_0 \left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1 \right) \right) - \ln (P_\infty - P_0) \right] \quad (5.25)$$

5.3 MODELO DE MONTROLL

Segundo Magalhaes e Leite (2012), Elliott Waters Montroll, químico e matemático americano, propôs em 1971 uma generalização do modelo de Verhulst. Montroll formulou modificações para o modelo logístico, onde considerou que P_∞ é o valor limite de uma população P , que λ representa a taxa de crescimento relativa quando P é "pequeno" e que α indica o ponto de inflexão da curva. O modelo de Montroll pode ser considerado como uma generalização do modelo de Verhulst, porém se difere no fato de que o índice de crescimento relativo da população não é linear. Assim, o modelo de Montroll apresenta uma vantagem em relação ao de Verhulst, pois é possível adaptá-lo a problemas de naturezas diversas por meio do cálculo do ponto de inflexão, modificando, quando necessário, o valor de α .

O objetivo desse modelo é traduzir o crescimento assintótico de uma variável e é expresso pela seguinte equação,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \alpha > 0 \quad (5.26)$$

Observe que quando $\alpha = 1$ recai no modelo de Verhulst.

Deve-se determinar o crescimento máximo de P , isto é, P_m , para isto tem-se que considerar que $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$, uma vez que $\frac{dP}{dt} > 0$ pois $0 < P < P_m$.

Portanto, deve-se obter a derivada segunda da expressão (5.26), então,

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] \quad (5.27)$$

Fazendo $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$ obtém-se,

$$0 = \lambda \frac{dP}{dt} \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] \quad (5.28)$$

Como $\frac{dP}{dt} \neq 0$ e $\lambda \neq 0$, então,

$$\left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha - \alpha \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = 0 \quad (5.29)$$

$$-1 = - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha (1 + \alpha) \quad (5.30)$$

$$\frac{1}{1 + \alpha} = \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \quad (5.31)$$

$$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{1 + \alpha}} = \left(\frac{P}{P_\infty} \right) \quad (5.32)$$

$$P_m = P_\infty \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.33)$$

Com P_m sendo o ponto de inflexão da curva ajustada. Desta forma, dado P_∞ o valor de P_m depende apenas do parâmetro α .

$$\alpha = 3 \Rightarrow P_m = 0.6299P_\infty \quad (5.34)$$

$$\alpha = 2 \Rightarrow P_m = 0.5773P_\infty \quad (5.35)$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow P_m = 0.5P_\infty \quad \text{Modelo de Verhust} \quad (5.36)$$

$$\alpha = 0.5 \Rightarrow P_m = 0.44444P_\infty \quad (5.37)$$

$$\alpha = 0.25 \Rightarrow P_m = 0.4096P_\infty \quad (5.38)$$

O principal objetivo deste modelo é propor formas diferentes para descrever o decrescimento das taxas de variação. Tais taxas são dadas pela seguinte expressão,

$$r = f(P, \alpha)\lambda \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] \quad (5.39)$$

Quando $\alpha > 0$ decresce, o valor de P_m também decresce e $P_m \rightarrow \frac{P_\infty}{e} \cong 0.3678P_\infty$. De fato, isto acontece pois, tomando $\alpha \rightarrow 0^+$, tem-se que,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P_m = P_\infty \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.40)$$

onde

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{-1} \quad (5.41)$$

Quando $P_m = \frac{1}{e}P_\infty$ tem-se que o modelo de Gompertz de 1825. Quando $\alpha \rightarrow \infty^+$, segue que $P_m \rightarrow P_\infty$ isto devido ao fato que,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 \quad (5.42)$$

Os ponto de estabilidade podem ser obtido considerando $\frac{dP}{dt} = 0$ em (5.26), isto é,

$$\lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = 0 \Leftrightarrow P = 0 \quad \text{ou} \quad P_\infty = P \quad (5.43)$$

A solução geral do modelo de Montroll é dada pela expressão,

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot P_\infty}{[P_0^\alpha + (P_\infty^\alpha - P_0^\alpha)e^{-\alpha t}]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (5.44)$$

5.4 MODELO DE GOMPERTZ

De acordo com Teixeira (2012), Benjamin Gompertz, matemático inglês e pesquisador de cálculos atuariais, em 1825 publicou o artigo "On the Nature of the Function Expressive of the Law Human Mortality", que descreve e demonstra o comportamento da taxa da mortalidade com a idade na população humana aumenta em uma progressão geométrica. Gompertz, considerou que a população humana, não cresce exponencialmente como afirmava Malthus, mas é limitada superiormente, isto é, a população cresce até uma quantidade e depois disso se mantém quase que constante. Devido a este fato, pressupõe que a taxa de crescimento de uma determinada população é muito alta no início, e rapidamente torna-se mais lenta.

Conforme Magalhaes e Leite (2012), o modelo de Gompertz apresenta a taxa de inibição da variável de estado proporcional ao logarítmico desta variável, o que significa que a taxa de crescimento é grande no início do processo, mudando rapidamente para um crescimento mais lento.

O modelo de Gompertz é dado por uma equação diferencial com condição inicial, proposta por Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - b \ln x) \\ x(0) = x_0 \quad \text{com } a > 0 \quad \text{e } b > 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

A taxa de crescimento, $r(x) = a - b \ln x$, com $x > 0$, decresce com x , onde o valor de estabilidade de x é obtido com $r(x) = 0$, isto é,

$$\frac{dx}{dt} = xr \Leftrightarrow x \cdot 0 = 0 \quad (5.46)$$

$$\Leftrightarrow (a - b \ln x) = 0 \rightarrow a = b \ln x \rightarrow \frac{a}{b} = \ln x \rightarrow e^{\frac{a}{b}} = e^{\ln x} \quad (5.47)$$

$$\Leftrightarrow x_{\infty} = e^{\frac{a}{b}} \text{ com } x > 0 \quad (5.48)$$

Quando x é muito pequeno $r(x)$ é muito grande. Tem-se também que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x) = +\infty \quad (5.49)$$

Como $a - b \ln x = 0$, pode-se rescrevê-la como $a = b \ln x_{\infty}$. Substituindo em (5.45), tem-se,

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx \ln x = x(a - b \ln x) \Rightarrow \quad (5.50)$$

$$\frac{dx}{dt} = bx \ln x_{\infty} - bx \ln x \Rightarrow bx \ln \left(\frac{x_{\infty}}{x} \right) \Rightarrow x \ln \left(\frac{x_{\infty}}{x} \right)^b \quad (5.51)$$

Portanto,

$$r(x) = \ln \left(\frac{x_\infty}{x} \right)^b \quad (5.52)$$

A solução da equação (5.45), é obtida por meio de substituição de variáveis,

$$z = \ln x$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = a - bz \quad (5.53)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = a - bz \Rightarrow \frac{dz}{a - bz} = dt \quad (5.54)$$

Aplicando o método das variáveis separáveis, obtém-se,

$$\int \frac{dz}{a - bz} = \int dt \quad (5.55)$$

Para resolver o lado esquerdo da equação (5.55) utiliza-se o método da substituição, que procede da seguinte forma,

$$u = a - bz \quad (5.56)$$

$$du = -bdz \quad (5.57)$$

$$\frac{du}{-b} = dz \quad (5.58)$$

Assim,

$$\frac{1}{-b} \int \frac{du}{u} = t + c \quad (5.59)$$

$$-\frac{1}{b} \ln u = t + c \quad (5.60)$$

Mudando a variável u por $a - bz$, obtém-se,

$$-\frac{1}{b} \ln |a - bz| = t + c \quad (5.61)$$

Substituindo z por $\ln x_0$,

$$-\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0| = t + c \quad (5.62)$$

Para $t = 0$, obtém-se o valor de c ,

$$-\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0| = c \quad (5.63)$$

Tomando o valor de c na equação acima, obtém-se,

$$-\frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0| = t - \frac{1}{b} \ln |a - b \ln x_0| \quad (5.64)$$

$$\ln |a - b \ln x_0| = -bt + \ln |a - b \ln x_0| \quad (5.65)$$

Portanto,

$$\ln |a - bz| = -bt + \ln |a - b \ln x_0| \quad (5.66)$$

Aplicando a exponencial em ambos os lados da equação (5.66) tem-se,

$$a - bz = (a - b \ln x_0)e^{-bt} \quad (5.67)$$

$$-bz = -a + (a - b \ln x_0)e^{-bt} \quad (5.68)$$

Logo,

$$z(t) = -\frac{1}{b} [-a + (a - b \ln x_0)e^{-bt}] \quad (5.69)$$

$$z(t) = \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - \ln x_0\right)e^{-bt} \quad (5.70)$$

Como $x = e^z$,

$$x(t) = e^{\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - \ln x_0\right)e^{-bt}} \Rightarrow e^{\frac{a}{b}} \cdot e^{-\left(\frac{a}{b} - \ln x_0\right)e^{-bt}} \quad (5.71)$$

ou ainda, de acordo com a equação (5.48),

$$x(t) = x_\infty \left(\frac{x_0}{x_\infty}\right)^{e^{-bt}} \quad (5.72)$$

A curva $x(t)$, ou seja, a curva do modelo tem seu ponto de inflexão quando,

$$t = t_m = \frac{1}{b} \ln \left(\frac{a}{b} - \ln x_0\right) \quad (5.73)$$

$$x(t_m) = \frac{1}{e} x_\infty = \frac{1}{e} e^{\frac{a}{b}} = e^{\frac{a-b}{b}} \quad (5.74)$$

sendo t_m esse ponto.

Existem outras versões do modelo de Gompertz, entre estas pode-se destacar as seguintes,

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x e^{-at} \quad (5.75)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma x \\ \frac{d\gamma}{dt} = -a\gamma \end{cases} \quad (5.76)$$

6 APLICAÇÕES

6.1 CRESCIMENTO POPULACIONAL

De acordo com (IBGE, 2017), na época da colonização, que ocorreu no século XVI, a região de Tupãssi era povoada por índios guaranis e possuía uma intensa extração de erva mate. Em 30 de Janeiro de 1967 a pequena cidade do Oeste do Paraná se tornou um dos distritos do município de Assis Chateaubriand. Seu plebiscito ocorreu em 25 de Novembro de 1979 pela lei nº 7270 de 27 de Dezembro de 1979. Porém, foi apenas em 01 de Fevereiro de 1983 que a cidade se tornou município. Tendo em vista a rápida criação do município sua população teve uma variação considerável. Diante do fato de ter sido parte do município de Assis Chateaubriand, a população inicial que era de 8829, por ação de diversos fatores, sejam eles, ambientais, habituais, naturais, financeiros e territoriais, foi decrescendo até o ano de 2007.

Visto que os modelos visam a estimativa do crescimento, serão utilizados os dados a partir do ano de 2007, tendo em vista que o crescimento da população começou neste ano.

Na Tabela 6.1 estão os dados da população referente aos respectivos anos de pesquisa do IBGE. Serão utilizados os dados coletados para exemplificar dois modelos estudados, sendo eles, o de Malthus e o de Verhulst.

Tabela 6.1: Censo da População de Tupãssi/PR

Ano	População
2007	7755
2010	7997
2018	8128

Fonte: IBGE

6.1.1 MODELO DE MALTHUS

A primeira modelagem de dados será realizada por meio do modelo de Malthus que segue,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \quad (6.1)$$

Escolheu-se $P_t = 7997$ e $P_0 = 7755$ deste modo,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{7997}{7755}} - 1 \quad (6.2)$$

$$\alpha = 0,0102955296 \quad (6.3)$$

Descoberto o valor de α pode-se calcular segundo Malthus a população nos respectivos anos a partir do resultado,

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha) \cdot t} \quad (6.4)$$

Substituindo os valores, tem-se,

$$P_{2010} = P_{2007} \cdot e^{\ln(1+0,0102955296) \cdot 3} \quad (6.5)$$

$$P_{2010} = 7755 \cdot e^{\ln(1+0,0102955296) \cdot 3} \quad (6.6)$$

$$P_{2010} = 7755 \cdot e^{0,0307286749} \quad (6.7)$$

$$P_{2010} = 7755 \cdot 1,0312056739 \quad (6.8)$$

$$P_{2010} = 7997 \quad (6.9)$$

$$P_{2018} = P_{2007} \cdot e^{\ln(1+0,0102955296) \cdot 11} \quad (6.10)$$

$$P_{2018} = 7755 \cdot e^{0,0102428916 \cdot 11} \quad (6.11)$$

$$P_{2018} = 7755 \cdot e^{0,1126718078} \quad (6.12)$$

$$P_{2018} = 7755 \cdot 1,1192645388 \quad (6.13)$$

$$P_{2018} = 8680 \quad (6.14)$$

$$P_{2020} = 7755 \cdot e^{0,0102428916 \cdot 13} \quad (6.15)$$

$$P_{2020} = 7755 \cdot e^{0,1331575908} \quad (6.16)$$

$$P_{2020} = 7755 \cdot 1,1424300206 \quad (6.17)$$

$$P_{2020} = 8859 \quad (6.18)$$

$$P_{2025} = 7755 \cdot e^{0,0102428916 \cdot 18} \quad (6.19)$$

$$P_{2025} = 7755 \cdot e^{0,1843720488} \quad (6.20)$$

$$P_{2025} = 7755 \cdot 1,2024631148 \quad (6.21)$$

$$P_{2025} = 9325 \quad (6.22)$$

$$P_{2030} = 7755 \cdot e^{0,0102428916 \cdot 23} \quad (6.23)$$

$$P_{2030} = 7755 \cdot e^{0,2355865068} \quad (6.24)$$

$$P_{2030} = 7755 \cdot 1,2656508639 \quad (6.25)$$

$$P_{2030} = 9815 \quad (6.26)$$

Em seguida, tem-se a Tabela 6.2 referente aos dados modelados pelo Modelo de Malthus,

Tabela 6.2: Modelo de Malthus

Ano	Malthus
2007	7755
2010	7997
2018	8680
2020	8859
2025	9325
2030	9815

Fonte: Autores (2019).

6.1.2 MODELO DE VERHULST

Para a aplicação deste modelo se faz necessário realizar um ajuste de curva, para isto dispõe-se dos pontos da Tabela 6.3,

Tabela 6.3: Pontos do ajuste de curva

P_n	P_{n+1}
7755	7997
7997	8128

Fonte: Autores (2019)

Utilizando o método ajuste de curvas do software Excel, tem-se a reta a seguir,

$$f(x) = 0,541x + 3799 \quad (6.27)$$

Tendo encontrado a reta que melhor se ajusta aos pontos acima, deve-se considerar $f(x) = x$, ponto fixo (p_∞)

$$x = 0,541x + 3799 \quad (6.28)$$

$$x - 0,541x = 3799 \quad (6.29)$$

$$x(1 - 0,541) = 3799 \quad (6.30)$$

$$x = \frac{3799}{1 - 0,541} \quad (6.31)$$

$$x = 8277 \quad (6.32)$$

Para encontrar o parâmetro r , foi utilizada a expressão encontrada na dedução do modelo de Verhulst, assim como deve-se considerar os valores para o tempo da Tabela 6.3.

$$r = \frac{-1}{t} \cdot \left[\ln \left(P_0 \left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1 \right) \right) - \ln (P_\infty - P_0) \right] \quad (6.33)$$

Para $t = 0$, r não está definido.

Para $t = 3$

$$r = \frac{-1}{3} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln (8277 - 7755) \right] \quad (6.34)$$

$$r = \frac{-1}{3} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{7997} - 1 \right) \right) - \ln (522) \right] \quad (6.35)$$

$$r \cong 0.217868886 \quad (6.36)$$

Para $t = 11$

$$r = \frac{-1}{11} \cdot \left[\ln \left(7755 \left(\frac{8277}{8128} - 1 \right) \right) - \ln (522) \right] \quad (6.37)$$

$$r \cong 0,118245485 \quad (6.38)$$

Assim, obtém-se a tabela a seguir,

Tabela 6.4: Valores de r

t	r
3	0,217869
11	0,118245485

Fonte: Autores (2019)

Para obter o valor de r a ser utilizado precisa-se fazer uma média dos valores obtidos acima.

Assim, foi encontrado $r = 0,168057242$. Será utilizada todas as casas decimais para uma maior aproximação.

Então, encontra-se os parâmetros para substituí-los na equação de Verhulst.

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (6.39)$$

$$P(t) = \frac{7755 \cdot}{(8277 - 7755)e^{-0,168057242t} + 7755} \quad (6.40)$$

$$P(t) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242t} + 7755} \quad (6.41)$$

Por fim, é necessário verificar o modelo encontrado. Para isto, basta substituir o tempo e assim encontrar o valor de $P(t)$.

Para $t = 3$

$$P(3) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 3} + 7755} \quad (6.42)$$

$$P(3) = 7954 \quad (6.43)$$

Para $t = 11$

$$P(11) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 11} + 7755} \quad (6.44)$$

$$P(11) = 8190 \quad (6.45)$$

Para $t = 13$

$$P(13) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 13} + 7755} \quad (6.46)$$

$$P(13) = 8215 \quad (6.47)$$

Para $t = 18$

$$P(18) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 18} + 7755} \quad (6.48)$$

$$P(18) = 8250 \quad (6.49)$$

Para $t = 23$

$$P(23) = \frac{7755 \cdot 8277}{520e^{-0,168057242 \cdot 23} + 7755} \quad (6.50)$$

$$P(23) = 8265 \quad (6.51)$$

Em seguida, tem-se a Tabela 6.5 referente aos dados modelados pelo Modelo de Verhulst,

Tabela 6.5: Modelo de Verhulst

Ano	Verhulst
2007	7755
2010	7954
2018	8190
2020	8215
2025	8250
2030	8265

Fonte: Autores (2019).

6.1.3 COMPARAÇÃO DOS MODELOS

Com a utilização do software Excel foram calculados os valores para o modelo de Malthus e modelo de Verhulst para todos os intervalos de tempo, como se pode

visualizar na Tabela 6.6.

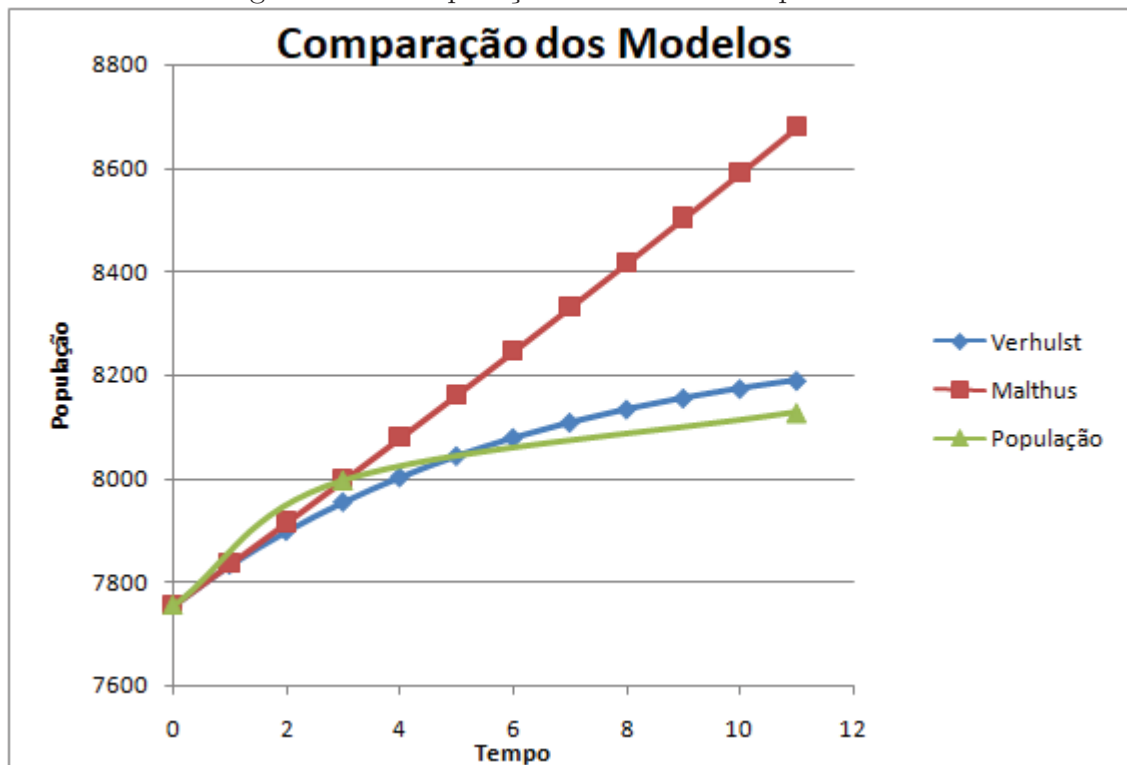
Tabela 6.6: Comparação dos Modelos Populacionais

Ano	População	Malthus	Verhulst
2007	7755	7755	7755
2008	-	7835	7833
2009	-	7916	7898
2010	7997	7997	7954
2011	-	8079	8003
2012	-	8163	8004
2013	-	8247	8079
2014	-	8331	8109
2015	-	8417	8134
2016	-	8504	8156
2017	-	8591	8174
2018	8128	8680	8190
2020	-	8859	8215
2025	-	9325	8250
2030	-	9815	8265

Fonte: Autores (2019).

Deste modo, pode-se vislumbrar no gráfico, Figura 6.1, os dados do modelo e os dados empíricos.

Figura 6.1: Comparação dos Modelos Populacionais



Fonte: Autores (2019).

Erro gerado pelos modelos

Para verificar a relação entre os modelos e os dados obtidos, procede-se com o cálculo do maior erro relativo. No modelo de Malthus foi encontrado um erro de 6,8%, já no Modelo de Verhulst encontrou-se um erro de 0,8%

Para consolidação do resultado, calculou-se o desvio padrão gerado pelos dados empíricos e pelos dados modelados. O modelo de Malthus vislumbra um desvio de 479,70, o modelo de Verhulst 217,76 e os dados empíricos 189,23.

Analisando a Tabela 6.6, a Figura 6.1, os erros obtidos e os desvios padrão obtidos para cada um dos modelos, pôde-se verificar que o modelo que mais se adequou aos dados reais da população de Tupãssi foi o modelo de Verhulst.

6.2 CRESCIMENTO DE SUÍNOS

Segundo ABCS (2016), a produção de suínos vem crescendo drasticamente nas últimas décadas. Leve, saborosa e versátil, a carne suína é amplamente consumida no mundo.

O suinocultor se adequou às normas sanitárias dos padrões de qualidade exigidos e o consumidor brasileiro tem se mostrado cada vez mais aberto e consciente que a carne de porco é tão ou mais saudável que a de gado e a de frango.

Segundo Fernandes (2018), existem diferentes tipos de sistemas de produção suína dentro do sistema de criação intensivo de suínos confinados (Siscon). Normalmente esse sistema é dividido em 3 segmentos: UPL (Unidade de Produção de Leitão), UC (Unidade de Creche) e UT (Unidade de Terminação).

1. UPL (Unidade de Produção de Leitão): O lote responsável pela unidade do setor de reprodução, maternidade e desmame dos leitões.
2. UC (Unidade de Creche): Lote responsável pela unidade de creche faz os primeiros cuidados do animal. Nas primeiras duas semanas, deve ocorrer um controle rigoroso da temperatura, devido a ausência da porca, entre 26 – 30°C controlada através do manejo de cortinas, aquecedor com campânulas ou lâmpadas.
3. UT (Unidade de Terminação): O lote onde ocorre a terminação é responsável por engordar o animal e compreende a saída dos suínos da creche até a fase de abate. A terminação é dividida em duas fases,
 - Recria, onde os nutrientes absorvidos são destinados para o seu crescimento e a deposição de carne magra;
 - Terminação até atingirem o peso de abate.

Segundo ABPA (2016), a suinocultura está se consolidando como uma das atividades econômicas mais importantes do país. Geradora de emprego e renda é uma atividade importante para o saldo positivo do agronegócio. No mercado interno, ela é protagonista na segurança alimentar, como uma das proteínas mais consumidas e apreciadas no país.

A atividade de suinocultura é uma das atividades mais importantes na economia da cidade de Tupãssi, assim neste trabalho será feita uma estimativa do ganho de peso por tempo em uma suinocultura da cidade.

Os dados empíricos coletados da suinocultura analisada estão expostos na Tabela 6.7, onde (t) indica o tempo, dado em meses, e (p) refere-se ao peso, dado em quilogramas.

Tabela 6.7: Peso dos suínos em relação ao tempo de uma suinocultura de Tupãssi/PR.

Tempo (meses)	Peso (Kg)
1	1,2
2	8,4
3	17,5
4	27,3
5	37,8
6	49,35
7	61,95
8	75,6
9	90,3
10	106,05
11	122,15
12	138,95
13	156,45
14	174,30
15	192,5
16	211,05
17	229,95
18	249,20
19	268,80
20	288,40

Fonte: Autores (2019).

Antes de iniciar a modelagem vale ressaltar que foram feitas adaptações que serão apresentadas nas seções dos respectivos modelos.

6.2.1 MODELO DE GOMPERTZ

Para aplicar o modelo de Gompertz, considera-se que o peso máximo que um suíno pode atingir é de 300kg, este valor foi considerado a partir de uma conversa realizada

com os proprietários da suinocultura. Portanto, o valor de $x_\infty = 300kg$. O valor de x_0 , peso inicial do suíno, considera-se 1,2kg, isto é, o suíno nasce com um peso estimado de 1,2kg. Portanto, basta encontrar o valor de b. Para isso, foi realizado um ajuste de curva referente a variação do peso em relação a ele mesmo. Desse modo, encontrou-se a reta,

$$f(x) = 0,295x + 0,170 \quad (6.52)$$

Assim, sabemos que b é 0,170. Aplicando os valores encontrados na equação geral do modelo de Gompertz, ou seja, a equação (5.72), obtém-se a seguinte equação para crescimento de suínos,

$$x(t) = 300 \left(\frac{1,2}{300} \right)^{e^{-0,17t}} \quad (6.53)$$

Desse modo, aplica-se o tempo na equação (6.53) para descobrir o peso dos suínos de acordo com o modelo, como na Tabela 6.8,

Tabela 6.8: Modelo de Gompertz

Tempo (meses)	Peso (Kg)
1	2,8
2	5,9
3	10,9
4	18,3
5	28,32
6	40,96
7	55,92
8	72,72
9	90,75
10	109,41
11	128,09
12	146,32
13	163,70
14	179,97
15	194,94
16	208,52
17	220,72
18	231,57
19	241,13
20	249,51

Fonte: Autores (2019).

6.2.2 MODELO DE MONTROLL

Para aplicar o modelo de Montroll precisa-se calcular o valor do ponto de inflexão da curva, ou seja, α . Com a utilização do software Excel, encontra-se um valor de 1,509 para a variável. Deste modo, sabe-se que o peso inicial, $P_0 = 1,2$ Kg e peso máximo, $P_\infty = 300$ Kg. Assim, basta substituir estes valores na fórmula que rege o modelo,

$$P(t) = \frac{P_0 \cdot P_\infty}{[P_0^\alpha + (P_\infty^\alpha - P_0^\alpha)e^{-\alpha t}]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (6.54)$$

$$P(t) = \frac{1,2 \cdot 300}{[1,31669292 + (5469,85701 - 1,31669292)e^{-\alpha t}]^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (6.55)$$

Então, a partir da equação (6.55) pode-se descobrir o peso de suínos em relação ao tempo de acordo com o modelo, dispostos na Tabela 6.9,

Tabela 6.9: Modelo de Montroll

Tempo (meses)	Peso (Kg)
1	0,17
2	0,49
3	1,32
4	3,55
5	9,43
6	24,2
7	57,11
8	114,24
9	180,76
10	230,04
11	255,68
12	266,61
13	270,87
14	272,47
15	273,07
16	273,28
17	273,37
18	273,39
19	273,41
20	273,41

Fonte: Autores (2019).

6.2.3 COMPARAÇÃO DOS MODELOS

Com a utilização do software Excel foram calculados os valores para o modelo de Gompertz e do modelo de Montroll para todos os intervalos de tempo, como se pode visualizar na Tabela 6.10.

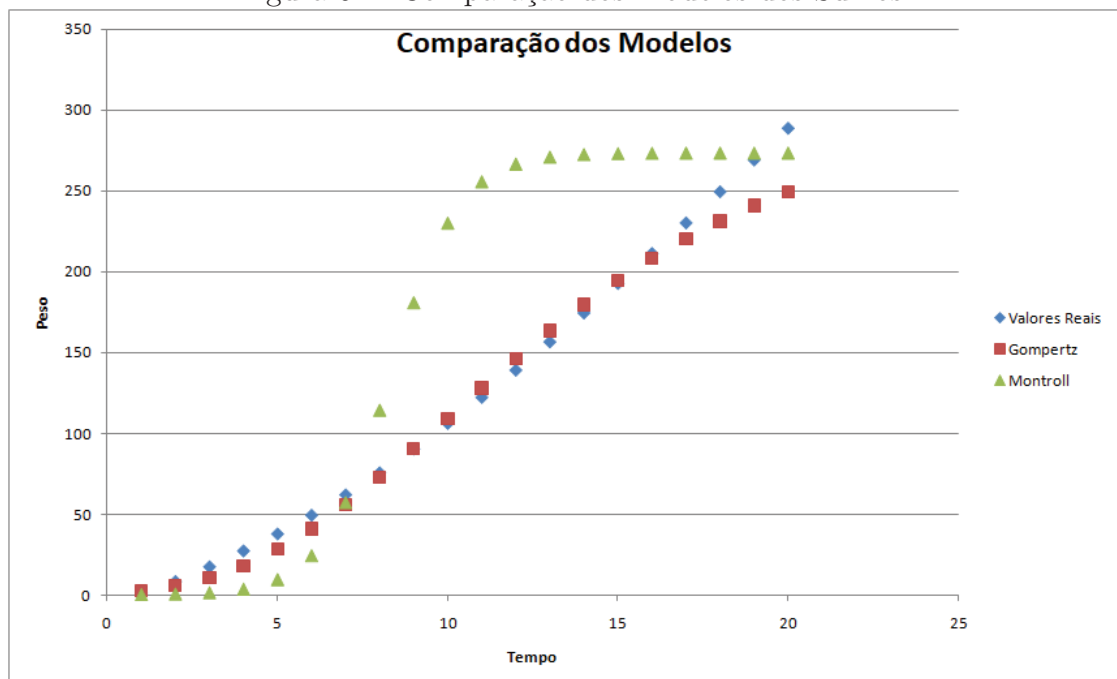
Tabela 6.10: Comparação dos Modelos para os Suínos

Tempo (meses)	Peso (Kg)	Gompertz (Kg)	Montroll (Kg)
1	1,2	2,8	0,17
2	8,4	5,9	0,49
3	17,5	10,9	1,32
4	27,3	18,3	3,55
5	37,8	28,32	9,43
6	49,35	40,96	24,2
7	61,95	55,92	57,11
8	75,6	72,72	114,24
9	90,3	90,75	180,76
10	106,05	109,41	230,04
11	122,15	128,09	255,68
12	138,95	146,32	266,61
13	156,45	163,70	270,87
14	174,30	179,97	272,47
15	192,5	194,94	273,07
16	211,05	208,52	273,28
17	229,95	220,72	273,37
18	249,20	231,57	273,39
19	268,80	241,13	273,41
20	288,40	249,51	273,41

Fonte: Autores (2019).

Deste modo, pode-se vislumbrar no gráfico, Figura 6.2, os dados do modelo e os dados empíricos.

Figura 6.2: Comparação dos Modelos dos Suínos



Fonte: Autores (2019).

Erro gerado pelos modelos

Para verificar a relação entre os modelos e os dados obtidos, procede-se com o cálculo da média dos erros relativos. No modelo de Gompertz a média é de 17,61. Para o modelo de Montroll encontra-se uma média de 59,91.

Para consolidação do resultado, calculou-se o desvio padrão gerado pelos dados empíricos e pelos dados modelados. O modelo de Gompertz vislumbra um desvio de 87,27, o modelo de Montroll 121,71 e os dados empíricos 91,97.

Analisando a Tabela 6.10, a Figura 6.2, a média dos erros e os desvios padrão obtidos para cada um dos modelos, pôde-se verificar que o modelo que mais se adequou aos dados reais da suinocultura de Tupãssi foi o modelo de Gompertz com um erro de 5,11% em relação ao desvio padrão dos dados empíricos, diferente do erro de 32,33% gerado pelo modelo de Montroll.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar o estudo aqui abordado, percebe-se que a modelagem matemática, é uma ferramenta importante para resolução de problemas do cotidiano, além de perceber quão interessantes podem ser os problemas aplicados que podem ser descritos ou resolvidos a partir de modelos matemáticos.

Desse modo, ao aplicar modelos de crescimento na população e em uma suinocultura para o estudo em questão apresenta-se a oportunidade de verificar a proximidade que eles promovem dos dados reais, visto que isso pode auxiliar os gestores e servir de base para tomada de decisões.

O modelo de Malthus deve ser usado para simular o crescimento em pequenos intervalos de tempo. Visualizando os parâmetros, o modelo de Verhulst simula bem a população brasileira. Deste modo, foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados da cidade de Tupãssi/PR, visto que, foi o menor erro relativo constatado sendo de 0,8%, diferente do erro de 6,8% apurado nas aplicações do modelo de Malthus.

O modelo de Gompertz traz um crescimento alto no começo e visa uma estabilidade conforme passa o tempo, de modo a descrever melhor o comportamento do crescimento abordado. De acordo com os parâmetros, o modelo de Gompertz simula bem o crescimento dos suínos. Deste modo, foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados da suinocultura de Tupãssi/PR, visto que, foi o menor erro em relação ao desvio padrão dos dados empíricos, sendo de 5,11%, diferente do erro de 32,33% apurado nas aplicações do modelo de Montroll.

O trabalho contribuiu para o alcance de experiências significativas, em que busca desenvolver habilidades na resolução de situações problemas do cotidiano também para a compreensão dos conteúdos matemáticos nas atividades voltadas à realidade, mas, acima de tudo, constituiu um processo pedagógico para a aprendizagem com enfoque na Matemática Aplicada.

REFERÊNCIAS

- ABCS, A. B. dos Criadores de S. *Mapeamento da Suinocultura Brasileira*. 2016.
- ABPA, A. B. de P. A. *Relatório Anual 2016*. 2016.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino - aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.: s.n.], 2002.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino- aprendizagem com Modelagem Matemática*. [S.l.: s.n.], 2011.
- BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.
- FERNANDES, M. *As fases de crescimento de suínos*. 2018.
- HENRIQUES, A. Thomas robert malthus, a teoria malthusiana. *Instituto Politécnico de Coimbra*, 2007.
- IBGE. História de tupãssi. 2017.
- MAGALHAES, M. L.; LEITE, N. G. Equações diferenciais aplicadas a dinâmica populacional. CMAC, 2012.
- OLIVEIRA, V. A. B. de. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor. *PDE*, 2014.
- PUGENS, B. P.; SILVA, J. d.; GODINHO, D. d. Modelos matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados no município de osório. *Artigo Revista Modelos-Facos/Osorio*, 2012.
- SEBRAE. Minha empresa sustentável: Suinocultura. Cuiabá, 2016.
- SIQUEIRA, M. L. P.; NATTI, P. L. Modelagem matemática – perspectivas de uma aprendizagem mais agradável. 2012.
- SODRÉ, U. Modelos matemáticos. *Londrina: UEL*, 2007.
- SODRÉ, U. Equações diferenciais ordinárias. 2003.
- TAVONI, R. Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. *Rio Claro*, 2013.
- TEIXEIRA, F. L. *Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias*. Dissertação (Mestrado), 2012.
- ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. [S.l.: s.n.], 2003.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. [S.l.: s.n.], 2001.