

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADRIELI MODKOWSKI PETRECONI MORETTI

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MISTURA DE FORMA ANALÍTICA E  
NUMÉRICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO  
2019

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ADRIELI MODKOWSKI PETRECONI MORETTI

**RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MISTURA DE FORMA ANALÍTICA  
E NUMÉRICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Galina

Coorientadora: Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti

TOLEDO

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “Resolução do problema de mistura de forma analítica e numérica” foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº \_\_ de  
--/--/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Prof. Orientador Dr. Vanderlei Galina

Profa. Coorientadora Dra. Jocelaine Cargnelutti

Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso

Profa. Dra. Suellen Ribeiro Pardo Garcia

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus por me dar força, coragem e condições de alcançar meus sonhos.

Ao meu esposo Thiago, por todo o apoio, cuidado, carinho e compreensão, graças a você tive tempo de me dedicar a escrita deste trabalho.

A todos os meus professores, por todos os ensinamentos. Admiro e agradeço muito a cada um que de alguma forma contribuiu para a minha formação. Em especial, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Vanderlei Galina, pela sua paciência e grande dedicação durante todo o percurso de escrita deste trabalho, agradeço muito por todas as correções feitas, sei que não foi uma tarefa fácil, por sempre me atender tão bem e me auxiliar em minhas dúvidas, por ter me apresentado programas tão bons e essenciais para a realização deste trabalho, por todo o tempo dedicado a mim, agradeço de coração. E agradeço também a minha coorientadora Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti que foi quem me apresentou e ensinou, muito bem por sinal, sobre esse tema que tanto gosto, sou muito grata por todo o conhecimento compartilhado e contribuições para que este trabalho se concretizasse.

Aos professores que fizeram parte da banca, agradeço pelo tempo dedicado a correção deste trabalho, e por todas as contribuições para a melhora do mesmo.

A minha mãe Lúcia e ao meu pai Silvano, agradeço por absolutamente tudo.

A minha irmã preferida Ilsabeli, agradeço por sempre me animar e por renovar minhas energias.

A todos os meus amigos e companheiros de curso, que tornaram essa caminhada muito mais leve, divertida e feliz! Agradeço especialmente a minha amiga e madrinha Taís Francini, entramos nessa juntas e vamos sair juntas! Um obrigada muito especial para minhas amigas Danieli Felichak, Daniela Ludvig e Daiane Seibert, que a nossa amizade seja igual ao limite de  $1/x^2$  quando  $x$  tende a zero!

A essa instituição, por oferecer o melhor a seus alunos. Sou muito feliz por tudo o que vivi e aprendi aqui!

E por fim, a todos que direta ou indiretamente fizeram parte desta conquista, o meu muito obrigada!

## RESUMO

Muitos problemas reais são modelados matematicamente por meio de equações diferenciais, e podem ser solucionados por métodos analíticos, numéricos e experimentais. Desta forma, o presente trabalho tem o objetivo de realizar uma pesquisa bibliográfica bem como estudar e resolver problemas de mistura, utilizando para isso técnicas de resolução analítica e numérica de equações diferenciais ordinárias e realizar a comparação entre as soluções obtidas. As aplicações abordadas descrevem o problema de mistura em tanque, da concentração de um produto químico em uma lagoa e da quantidade de aditivo na gasolina em um tanque de estocagem de uma refinaria de petróleo. Os resultados obtidos analiticamente foram comparados com as aproximações numéricas obtidas pela simulação com vários valores do passo computacional. O método de Euler se mostra de simples aplicação e de excelente precisão para os problemas de mistura abordados.

**Palavras-chave:** Equações diferenciais. Método de Euler. Problema de valor inicial.

## ABSTRACT

Many real problems are modeled mathematically using differential equations, and can be solved by analytical, numerical and experimental methods. In this way, the present work has the objective of carrying out a bibliographic research as well as studying and solving mixing problems, using analytical and numerical resolution techniques for ordinary differential equations and making the comparison between the obtained solutions. The applications addressed describe the problem of tank mixing, the concentration of a chemical in a pond and the amount of additive in gasoline in a storage tank at an oil refinery. The results obtained analytically were compared with the numerical approximations obtained by the simulation with various computational step values. Euler's method is simple to apply and has excellent accuracy for the mixing problems addressed.

**Key-words:** Differential Equations. Euler's method. Initial Value Problem.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

4.1	Método de Euler graficamente. . . . .	25
5.1	Misturador. . . . .	28
5.2	Solução analítica do problema de mistura salina em tanque. . . . .	30
5.3	Soluções analítica e numérica do problema de mistura salina em tanque com $h = 5$ . . . . .	31
5.4	Soluções analítica e numérica do problema de mistura salina em tanque com $h = 0,001$ . . . . .	32
5.5	Solução analítica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa. . . . .	37
5.6	Solução analítica e numérica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para $h = 1$ . . . . .	38
5.7	Solução analítica e numérica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para $h = 0,001$ . . . . .	39
5.8	Tanque de estocagem. . . . .	40
5.9	Solução analítica do problema da mistura de aditivo em gasolina. . . . .	45
5.10	Solução analítica e numérica do problema da quantidade de aditivo em gasolina para $h = 5$ . . . . .	46
5.11	Solução analítica e numérica do problema da quantidade de aditivo em gasolina para $h = 0,01$ . . . . .	47

## LISTA DE TABELAS

5.1	Máximo erro relativo obtido na simulação do problema de mistura em tanque para diferentes valores de $h$ . . . . .	32
5.2	Máximo erro relativo obtido na simulação do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para diferentes valores de $h$ . . . . .	38
5.3	Máximo erro relativo obtido na simulação do problema de estocagem em uma refinaria de petróleo para diferentes valores de $h$ . . . . .	46

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	<b>8</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2 OBJETIVOS</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1 OBJETIVO GERAL . . . . .	14
2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	14
<b>3 JUSTIFICATIVA</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>16</b>
4.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS . . . . .	16
4.1.1 Solução de uma Equação Diferencial . . . . .	18
4.1.2 Problema de valor inicial . . . . .	19
4.2 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS DE PRIMEIRA ORDEM . . . . .	20
4.3 MÉTODO DOS FATORES INTEGRANTES . . . . .	21
4.4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA . . . . .	22
<b>5 ESTUDOS DE CASO</b> . . . . .	<b>27</b>
5.1 PROBLEMA DE MISTURA EM TANQUE . . . . .	27
5.1.1 Características do Problema . . . . .	27
5.1.2 Solução analítica . . . . .	29
5.1.3 Solução numérica . . . . .	31
5.2 CONCENTRAÇÃO DE UM PRODUTO QUÍMICO EM UMA LAGOA . . . . .	33
5.2.1 Características do problema . . . . .	33
5.2.2 Solução analítica . . . . .	34
5.2.3 Solução numérica . . . . .	37
5.3 TANQUE DE ESTOCAGEM DE UMA REFINARIA DE PETRÓLEO . . . . .	39
5.3.1 Características do problema . . . . .	39
5.3.2 Solução analítica . . . . .	41
5.3.3 Solução numérica . . . . .	45
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>48</b>

REFERÊNCIAS . . . . .	48
APÊNDICES . . . . .	50
A Código computacional PVI linear . . . . .	52

## 1 INTRODUÇÃO

No decorrer do tempo muitos estudiosos seguem na busca de tentar explicar e prever fenômenos da natureza, e em diversas áreas do conhecimento faz-se necessário o uso de equações diferenciais como uma importante ferramenta no estudo de problemas reais. Neste trabalho será seguida esta mesma linha, por meio dos conhecimentos em equações diferenciais, problemas envolvendo misturas de substâncias serão estudados e analisados de forma analítica e também com aproximações utilizando métodos numéricos.

Muitos eventos físicos, biológicos e até mesmo sociais são descritos matematicamente por meio de modelos matemáticos obtidos e validados por meio de dados experimentais. Segundo Brannan e Boyce (2008), as equações diferenciais tem grande importância como instrumento de investigação entre esses eventos do mundo real e sua modelação, tornando possível soluções, já que relacionam as variáveis e os parâmetros abarcados no problema.

De acordo com Brannan e Boyce (2008) a partir do problema investigado, é possível formular a equação diferencial que o descreve, ou modela. O processo de modelagem do problema requer atenção a alguns passos, que pode determinar o quão satisfatório será o modelo construído. A sua construção provavelmente será a parte mais difícil do processo. Inicia-se com a identificação das variáveis dependentes e independentes, e a atribuição de letras para representa-las, seguindo com a escolha das unidades de medida mais convenientes de cada variável. A seguir, é preciso formar as hipóteses, e em algum momento será necessário inserir alguns parâmetros físicos, exteriores à matemática (ZILL, 2012).

Segundo Zill (2012) um modelo matemático é considerado razoável se suas soluções forem coerentes com os dados obtidos experimentalmente (sempre que possível), ou fatos conhecidos sobre o comportamento do sistema. Alguns modelos seguem com uma equação de fácil resolução, no entanto, alguns problemas mais complexos, podem resultar em um sistema de equações muito mais complicado (BRANNAN; BOYCE, 2008).

Encontram-se aplicações de equações diferenciais na matemática e muitos estudos sobre as formas de se resolver uma equação diferencial. É possível simular por exemplo, o movimento de uma onda no mar por meio de equações diferenciais, no entanto existem situações em que não é possível encontrar respostas exatas, com isso, é preciso recorrer aos métodos numéricos, análises teóricas e técnicas experimentais (SIMMONS; KRANTZ, 2008; GALINA et al., 2016).

O cálculo numérico resolve problemas matemáticos por meio de métodos numéricos, implementados por programas de computadores, chamados de solucionador numérico. Esses programas podem representar visualmente a aproximação da curva integral que se

ajusta aos dados obtidos, os resultados encontrados sempre serão numéricos (ZILL, 2012).

Os métodos numéricos permitem encontrar uma boa aproximação do resultado exato, mesmo com a inexistência da possibilidade de uma solução analítica. Esses métodos têm grande importância na resolução de problemas em várias áreas do conhecimento, seja na matemática, engenharia ou na ciência (FILHO, 2017).

O método numérico mais antigo para a aproximação da solução de uma equação diferencial é o método de Euler. Também é um dos métodos mais simples e justamente pelo fato de ser o mais simples entre os métodos existentes, é uma boa opção para começar a resolver equações diferenciais, por aproximações numéricas (BRANNAN; BOYCE, 2008).

Algumas equações diferenciais são de difícil resolução, podendo até não existir uma solução analítica, e se este for o caso, é interessante saber isso antes de gastar muito tempo buscando uma solução que não existe. Porém, se uma equação diferencial resultante de um modelo matemático de um problema físico não tiver solução matemática consistente com a observação do sistema físico descrito pelo modelo, então, muito provavelmente algo deu errado em sua formulação, e cabe ao pesquisador responsável tentar localizar onde há divergência (TRIVELATO, 2003; BRANNAN; BOYCE, 2008).

Ao obter a solução de um modelo, é interessante compará-la com dados obtidos experimentalmente, sempre que possível. Com isso é possível julgar o quão aceitável e condizente é o resultado encontrado, com relação ao problema estudado. Alguns problemas apresentam uma possibilidade maior de realização experimental do que outros, e mesmo assim, existem muitos fatores que podem conduzir ao erro, ou a um distanciamento significativo do resultado esperado, pois experimentalmente, as taxas podem sofrer grandes variações, nesses casos, fica a cargo do pesquisador julgar e validar o resultado (BRANNAN; BOYCE, 2008).

De acordo com Zill (2012), a mistura de duas soluções salinas com concentrações diferentes dá origem a uma equação diferencial de primeira ordem. Nesses problemas são realizadas algumas simplificações para facilitar os cálculos, por exemplo, supõe-se que as substâncias sejam bem misturadas no recipiente em que serão depositadas, normalmente um tanque de mistura.

A maioria dos problemas envolvendo mistura são hipotéticos, já que não há dados experimentais para comparação dos resultados. Modelos desse tipo são usados, em problemas envolvendo o estudo do comportamento de um remédio na corrente sanguínea, ou em algum órgão do corpo, e também em problemas ambientais referentes a poluentes depositados em uma lagoa. É possível encontrar aplicações do modelo em processos industriais, que em algum momento precisam unir substâncias distintas para dar continuidade ao processo (TRIVELATO, 2003; BRANNAN; BOYCE, 2008).

Neste trabalho será realizado um estudo acerca de problemas envolvendo substâncias líquidas em um tanque, sobre o problema envolvendo a concentração de um produto químico em uma lagoa e referente a quantidade de aditivo presente na gasolina em

um tanque de estocagem de uma refinaria de petróleo.

Para isso, será feita uma revisão bibliográfica sobre alguns aspectos a respeito de equações diferenciais ordinárias. Quanto a solução numérica, será utilizado o software científico livre Scilab, uma linguagem de programação interpretada com variáveis dinâmica. Este software realiza por meio de algoritmos numéricos a compilação dos dados, onde será implementado o método numérico aplicado aos problemas propostos.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é obter a resolução de problemas de mistura, estudá-los e resolvê-los utilizando técnicas de resolução analítica e numérica de equações diferenciais ordinárias e fazer a comparação entre os resultados obtidos.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer um estudo preliminar sobre a teoria relativa às equações diferenciais ordinárias de primeira ordem;
- Definir os problemas de misturas que serão estudados;
- Estudar a teoria de cada um dos problemas escolhidos;
- Analisar e aplicar as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias adequadas para cada problema;
- Fazer a implementação computacional do método numérico utilizado por meio do software Scilab;
- Realizar um comparativo entre os resultados obtidos de forma analítica e os obtidos de forma numérica.

### 3 JUSTIFICATIVA

Este trabalho tem a intenção de realizar um estudo detalhado e comparativo envolvendo problemas de mistura, com diferentes taxas e comportamentos. Segundo Thomas (2002) o estudo de problemas de mistura é importante para conhecer a concentração de uma substância presente em um recipiente em qualquer momento. A partir dos problemas estudados, será realizado uma comparação entre a solução encontrada analiticamente e a aproximação por meio de métodos numéricos em cada problema, um importante passo rumo a um melhor entendimento dos métodos e técnicas de solução de equações diferenciais. A sua construção tornará possível relacionar e estudar mais afundo equações diferenciais e o cálculo numérico, conteúdos tão importantes do curso de licenciatura em matemática, que muitas vezes é visto separadamente e com um distanciamento entre. Este trabalho tem a modesta intenção de se tornar um material de estudo e consulta para alunos de graduação que tenham interesse em conhecer mais sobre o assunto.

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Abordam-se, neste capítulo, definições, propriedades e teoremas importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Nas próximas seções serão apresentados elementos relativos as equações diferenciais envolvidas nos problemas de misturas e a abordagem numérica do método de Euler.

### 4.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O estudo de equações diferenciais começou a muito tempo atrás, inicialmente com a necessidade de resolver alguns problemas físicos. Estudiosos como Newton e Leibniz, por volta do século XVII, foram os que iniciaram essa caminhada rumo ao conhecimento. Dando continuidade a essa trajetória, no século seguinte a família Bernoulli juntamente aos nomes já citados, foram os principais responsáveis por formular e resolver importantes problemas matemáticos (FIGUEIREDO; NEVES, 2014).

No século seguinte, o matemático Leonard Euler (1707-1783), que foi aluno de Johann Bernoulli, realizou grandes descobertas em várias áreas da matemática, principalmente em equações diferenciais, Euler foi o matemático que mais produziu obras, dedicou toda sua vida ao estudo e desenvolvimento da matemática e suas aplicações (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

É chamada de equação, uma expressão matemática em que possui um sinal de igualdade, e uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas recebe o nome de equação diferencial, expressão criada por Leibniz desde 1676. Quando a função incógnita depende apenas de uma variável independente, trata-se de uma equação diferencial ordinária, caso contrário, se a função incógnita depender de duas ou mais variáveis independentes, será uma equação diferencial parcial (BRONSON; COSTA, 2008)(ÇENGEL; PALMII, 2014).

Grande parte dos problemas científicos envolve uma razão que varia de acordo com o comportamento da variável considerada no problema estudado. Há uma grande variedade de problemas que são analisados por meio de equações diferenciais, principalmente na ciência e na engenharia. O estudo de equações diferenciais também está presente na formação educacional de estudantes da área de ciências exatas (ÇENGEL; PALMII, 2014).

Distinguir uma equação diferencial em relação a quantidade de variáveis independentes, é conhecido como classificação por tipo, algo muito conveniente de tomar conhecimento, para saber como lidar com as possíveis opções de solução.

As equações (4.1) e (4.2) são exemplos de equações diferenciais ordinárias, onde

a função incógnita  $y$  depende somente da variável  $x$ ,

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \quad (4.1)$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y. \quad (4.2)$$

Já a equação (4.3) é um exemplo de equação diferencial parcial, onde  $y$  depende de ambas as variáveis independentes  $t$  e  $x$ ,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (4.3)$$

De acordo com Zill (2012), existem duas formas para a representação de derivadas ordinárias. A primeira notação é a de Leibniz  $dy/dx$ ,  $d^2y/dx^2$ ,  $d^3y/dx^3$ , ...,  $d^n y/dx^n$ , que possui como vantagem o fato de deixar claro quais são as variáveis dependentes e independentes, por exemplo, a equação (4.1) tem  $y$  como variável dependente e  $x$  é sua variável independente. A segunda notação conhecida é a de linha  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y^{(4)}$ , ...,  $y^{(n)}$ , que possui a vantagem de ser mais compacta, facilitando a escrita, neste caso a equação (4.1) seria escrita da seguinte forma,

$$y' + 5y = e^x.$$

A definição a seguir, encontrada em Zill (2012), estabelece formalmente o conceito de equações diferenciais.

**Definição 4.1 (Equação Diferencial)** *Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial (ED).*

Outra forma possível de classificar uma equação diferencial, é segundo a sua ordem, que sempre será a da mais alta derivada da equação diferencial. Por exemplo a equação,

$$y'' + 8y' + 6y = 2x^2, \quad (4.4)$$

é uma equação diferencial de segunda ordem, pois a derivada de maior ordem é  $y''$ , que pode ser representada também por  $d^2y/dx^2$ , que no caso, é a derivada da derivada primeira da função, conhecida como derivada segunda de  $y$ . Do mesmo modo, a derivada da derivada segunda de  $y$  é denominada derivada terceira, e representada por  $y'''$ , ou  $d^3y/dx^3$ , e assim por diante, para derivadas maiores são utilizados algarismos romanos, ou ainda pelo número sobrescrito entre parênteses, por exemplo  $y^{iv}$  é a derivada de quarta ordem de  $y$  (SANTOS, 2015).

A equação (4.5) é uma forma geral de representar uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  de  $y$  em relação a variável independente  $x$ , a derivada da derivada  $(n - 1)$  de  $y$  é denominada derivada  $n$ -ésima, e é representada por  $y^{(n)}$ . Pode ser representada, também, com a notação diferencial,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (4.5)$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo.

Um passo importante antes de iniciar a resolução de uma EDO, é testar a sua linearidade. A EDO será linear de primeira ordem se a variável dependente e suas derivadas possuírem grau um e seus coeficientes dependerem apenas da variável independente (ÇENGEL; PALMII, 2014).

A equação (4.5) é dita linear se  $F$  é uma função linear das variáveis  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . A equação diferencial ordinária linear geral de ordem  $n$  é,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x), \quad (4.6)$$

onde os coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , e  $g(x)$  são funções que dependem apenas da variável independente  $x$ . Se uma equação diferencial de ordem  $n$  não puder ser colocada dessa forma, então é uma equação não linear. Os métodos de resolução de uma equação diferencial linear são mais desenvolvidos e satisfatórios do que os métodos para equações não lineares. Em alguns casos, é feita a aproximação por equações lineares para facilitar o processo, e esse processo de aproximar uma equação não linear por uma linear é chamado de linearização (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

#### 4.1.1 Solução de uma Equação Diferencial

De acordo com a característica de uma EDO, escolhe-se um método adequado para resolvê-la. Cada método possui seus procedimentos específicos para que seja possível obter a solução de uma EDO e o resultado obtido é chamado de solução exata ou analítica. Contudo, existem casos em que a equação não possui uma solução analítica, com isso, uma boa opção é recorrer aos métodos numéricos, que resolve a equação numericamente, ou seja, a equação diferencial será usada como ponto de partida para um algoritmo aproximar a solução desconhecida (TEIXEIRA, 2012).

Conforme Zill (2012), a definição de solução para uma equação diferencial é dada a seguir.

**Definição 4.2** *Toda função  $\phi$ , definida em um intervalo  $I$  que tem pelo menos  $n$  derivadas contínuas em  $I$ , as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.*

Dessa forma, a solução de uma equação diferencial ordinária de ordem  $n$  é uma função  $\phi$  que tem pelo menos  $n$  derivadas e para a qual  $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$  para todo  $x$  em  $I$ .

Esta solução pode ser representada de forma explícita ou apenas de forma implícita. Uma solução explícita ocorre quando a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes. A solução explícita pode ser da forma  $y = \phi(x)$ , e pode ser manipulada e calculada por meio das regras padrão, porém, nem sempre é possível encontrar uma solução explícita, principalmente quando se trata de equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Quando isso ocorre, a expressão ou relação  $G(x, y) = 0$  definirá implicitamente uma solução  $\phi$  (ÇENGEL; PALMII, 2014).

Conforme Zill (2012), a definição de solução implícita para uma equação diferencial é dada a seguir.

**Definição 4.1 (Solução implícita de uma EDO)** *Diz-se que uma relação  $G(x, y) = 0$  é uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária em um intervalo  $I$ , quando existe pelo menos uma função  $\phi$  que satisfaça a relação, bem como a equação diferencial em  $I$ .*

Em outras palavras, se a função desconhecida puder ser escrita apenas em termos da variável independente, a solução será chamada de explícita, caso contrário, será uma solução implícita.

Uma solução que contém uma constante arbitrária representa um conjunto  $G(x, y, c) = 0$  de soluções chamado família de soluções a um parâmetro. Ao tentar resolver uma equação diferencial de ordem  $n$  da forma  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ , a procura será por uma família de soluções a  $n$  parâmetros  $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$ . Uma única equação diferencial pode ter infinitas soluções correspondentes ao número ilimitado de opções dos parâmetros. A solução que não depender de um parâmetro arbitrário é chamada de solução particular (ÇENGEL; PALMII, 2014).

#### 4.1.2 Problema de valor inicial

Um problema de valor inicial (PVI) é composto por uma equação diferencial e um ou mais valores onde a solução da equação é conhecida, todos em um mesmo valor da variável independente. Se houver condições especificadas para dois ou mais valores da variável independente, tem-se um problema de valor de contorno (PVC). (ÇENGEL; PALMII, 2014)(GALVÃO, 2008).

Em alguns casos, sob condições específicas, o problema de valor inicial tem uma única solução no intervalo contendo o ponto considerado. Consegue-se provar a existência e unicidade da solução resolvendo o problema e obtendo uma fórmula para a solução, porém, essa abordagem não se aplicará sempre, já que não existe um método de

resolução de equações diferenciais aplicável a todos os casos. Para isso, tem-se o teorema fundamental de existência e unicidade de solução de problemas de valor inicial de primeira ordem, para o caso geral (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

As equações a seguir são exemplos de problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \quad (4.8)$$

são problemas de valor inicial, em (4.7) de primeira ordem, e em (4.8) de segunda ordem.

Antes de iniciar a resolução de um problema de valor inicial, é importante verificar se o mesmo tem solução na região especificada, e se tiver, verificar se essa solução é única.

Dada a função  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Considera-se o PVI (4.7) onde a condição inicial  $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ , busca-se determinar um intervalo  $I_0$  que contém  $x_0$  e uma função  $y(x)$  que satisfaça  $y' = f(x, y(x))$ ,  $\forall x \in I$  que passa pelo ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  (CHINCHIO, 2012).

Sobre a existência e unicidade de solução, Zill (2012) enuncia o teorema a seguir, que apresenta condições suficientes para garantir a existência de uma única solução.

**Teorema 4.3 (Existência de uma única solução)** *Seja  $R$  uma região retangular no plano  $xy$  definida por  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  que contém o ponto  $(x_0, y_0)$ . Se  $f(x, y)$  e  $\partial f/\partial y$  são contínuas em  $R$ , então existe algum intervalo  $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h, h > 0$ , contido em  $a \leq x \leq b$ , e uma única função  $y(x)$ , definida em  $I_0$ , que é uma solução do problema de valor inicial.*

## 4.2 EQUAÇÕES SEPARÁVEIS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação diferencial de primeira ordem, será dita separável se puder ser expressa como razão de uma função de  $x$  em uma função  $y$ , ou seja, as parcelas envolvendo cada variável podem ser separadas pelo sinal de igualdade, e sua solução é feita por integração direta (MAIOLI, 2015).

A equação geral de primeira ordem é da forma,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (4.9)$$

e pode ser reescrita como,

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (4.10)$$

e quando  $M$  depender apenas de  $x$ , e  $N$  depender somente de  $y$ , a equação (4.10) é escrita da forma,

$$M(x)dx + N(y)dy = 0, \quad (4.11)$$

assim é possível separar as parcelas envolvendo cada variável pelo sinal de igualdade, ou seja, um lado da igualdade envolverá somente a variável  $x$ , e o outro lado somente a variável  $y$ , a resolução da equação diferencial é obtida integrando as funções  $M$  e  $N$ . Em alguns casos podem surgir integrais que não possuem solução analítica, com isso, recorre-se aos métodos numéricos para resolver a integração (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Uma das formas de tentar resolver uma equação diferencial não separável, é transformá-la em uma equação diferencial separável por meio da mudança de variável. Este procedimento pode ser aplicado quando na EDO (4.10) as funções  $M$  e  $N$  são funções homogêneas de mesmo grau (ÇENGEL; PALMII, 2014).

### 4.3 MÉTODO DOS FATORES INTEGRANTES

As equações de primeira ordem são aplicáveis na representação de diversos problemas, e para sua resolução existem muitos métodos de integração. No entanto, as equações de primeira ordem que podem ser resolvidas pela aplicação de métodos de integração elementares aparecem em casos bem específicos. Uma classe importante de equações diferenciais de primeira ordem são as equações lineares, as quais aplica-se um método bem definido de solução (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Seja a equação (4.12) linear de primeira ordem, onde  $p(t)$   $g(t)$  são funções arbitrárias que dependem de  $t$ , escrita na sua forma geral,

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (4.12)$$

para resolver a equação (4.12) é preciso usar um método onde multiplica-se a equação (4.12) por uma determinada função  $\mu(t)$ , escolhida de modo que a equação resultante seja de fácil integração. Essa função  $\mu(t)$  recebe o nome de fator integrante (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Para determinar o fator integrante, multiplica-se a equação (4.12) por uma função  $\mu(t)$  ainda desconhecida,

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t), \quad (4.13)$$

em seguida, deve-se escolher  $\mu(t)$  em que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação (4.13) seja a derivada de alguma função particular, para que assim, possa ser integrada mesmo sem conhecer a função  $y$ . Nota-se que a expressão à esquerda é composta por duas parcelas e que a primeira é parte do resultado de derivar o produto de  $\mu(t) \cdot y$ , contanto que  $\mu(t)$  satisfaça a equação (4.14),

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t) p(t), \quad (4.14)$$

supõe-se que  $\mu(t)$  seja positiva, reescrevendo a equação (4.14) para que suas variáveis sejam separadas pelo sinal de igualdade tem-se que,

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = p(t) dt, \quad (4.15)$$

e assim, integrando em ambos os lados da igualdade encontra-se a equação (4.16),

$$\ln \mu(t) = \int p(t) dt + k. \quad (4.16)$$

Escolhe-se a constante arbitrária  $k$ , onde  $k = 0$  e obtém-se,

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}, \quad (4.17)$$

que é a função mais simples para  $\mu(t)$ .

Tem-se que  $\mu(t)$  é positiva para todo  $t$ . Aplica-se a função  $\mu(t)$  encontrada, na equação (4.13) e como a expressão a esquerda do sinal de igualdade na equação (4.13) é a derivada do produto de  $\mu(t) \cdot y$ , de modo que,

$$\frac{d}{dt} [\mu(t) y] = \mu(t) g(t), \quad (4.18)$$

logo,

$$\mu(t) y = \int \mu(t) g(t) dt + c, \quad (4.19)$$

e assim, encontra-se a solução geral,

$$y = \frac{\int \mu(t) g(t) dt + c}{\mu(t)}. \quad (4.20)$$

#### 4.4 RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

O computador é uma ferramenta muito importante no estudo e na resolução de equações diferenciais. Por meio de algoritmos numéricos é possível encontrar soluções

muito próximas do real. Softwares para geração de gráficos são utilizados para visualização da solução obtida, seja ela de forma numérica ou analítica, o que facilita a análise e interpretação dos resultados. Com a popularização dos computadores pessoais ficou mais acessível ter esse recurso. Alguns softwares são disponibilizados gratuitamente e são extremamente poderosos, podendo realizar uma grande quantidade de operações matemáticas (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Não é possível obter a solução analítica na maioria dos problemas envolvendo equações diferenciais, ou o processo para obtê-la é muito complicado, com isso os métodos numéricos são uma excelente opção para determinar aproximações eficientes. Um dos métodos numéricos mais simples e antigos que existe para resolução de equações diferenciais é o método de Euler, desenvolvido pelo matemático Leonhard Euler em meados de 1768, também conhecido como o método da reta tangente. Este método resolve equações diferenciais com uma boa aproximação e pode ser calculado por meio de programas computacionais (MAIOLI, 2015).

Há duas categorias amplas de métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial. Os métodos de passo único - ao qual o método de Euler pertence - conhecidos como técnicas de Runge-Kutta. Permitem calcular uma predição futura  $y_{i+1}$ , baseando-se apenas na informação de um único ponto  $y_i$ , sem a necessidade de outra informação obtida anteriormente. Já os métodos de passo múltiplo, utilizam mais de uma informação dos passos anteriores, o que os faz prosseguir com maior eficiência a trajetória da solução, uma vez que exigem valores adicionais de  $y$  além da etapa  $i$ , ou seja, usa a informação de vários outros pontos anteriores como base para encontrar novos valores (CHAPRA; CANALE, 2008).

Os métodos de passo único podem ser expressos na forma geral,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h, \quad (4.21)$$

onde  $\phi$  é a inclinação, também conhecida como função incremento,  $y_{i+1}$  é novo valor a ser encontrado,  $y_i$  é o valor antigo, e  $h$  é o tamanho do passo. A estimativa da inclinação  $\phi$  é utilizada para extrapolar de um valor antigo, para um novo valor, em uma determinada distância  $h$ . Essa fórmula pode ser aplicada passo a passo, e assim, traçar a trajetória da solução para o futuro. A forma mais simples de obter uma estimativa da inclinação na forma da derivada primeira no ponto  $(x_i, y_i)$ , é por meio da equação diferencial, ou seja, a inclinação no início do intervalo, é encontrada a partir da aproximação da inclinação média em todo o intervalo (CHAPRA; CANALE, 2008).

Seja o problema de valor inicial da forma escrita em (4.7), segundo Boyce e DiPrima (2012), a maioria dos problemas deste tipo não podem ser solucionados analiticamente, uma alternativa nestes casos é calcular valores aproximados da solução  $y = \phi(x)$

do problema de valor inicial para valores selecionados de  $x$ . O gráfico da solução contém o ponto  $(x_0, y_0)$ , que é a condição inicial do PVI, e a inclinação da reta tangente ao gráfico nesse ponto é  $f(x_0, y_0)$ . Assim, a equação que representa a reta tangente à curva solução no ponto  $(x_0, y_0)$ , é representada por,

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (4.22)$$

Quanto menor o intervalo considerado, melhor será a aproximação do resultado. Se  $x = x_1$  estiver próximo o suficiente de  $x_0$ , é possível fazer a aproximação  $\phi(x_1) \approx y_1$ , com isso,

$$y_1 \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0). \quad (4.23)$$

Em cada etapa é utilizado o valor de  $y$  aproximado para determinar o coeficiente angular para a próxima aproximação, assim sucessivamente. A expressão geral para a função de iteração  $y_{n+1}$ , em função de  $x_n$ ,  $x_{n+1}$  e  $y_n$  é,

$$y_{n+1} \approx y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

A partir de um problema de valor inicial de primeira ordem, o método de Euler inicia um processo iterativo, onde a partir da solução conhecida  $y(x_0)$ , encontra-se a solução aproximada  $y_1$ . Conhecida a aproximação  $y_1$ , obtém-se  $y_2$ , e assim sucessivamente. Essas soluções aproximadas são dadas em pontos específicos de um intervalo de solução. Aproximações mais precisas podem ser obtidas com a diminuição do intervalo  $h$ . A Figura 4.1 ilustra o método de Euler de forma gráfica.

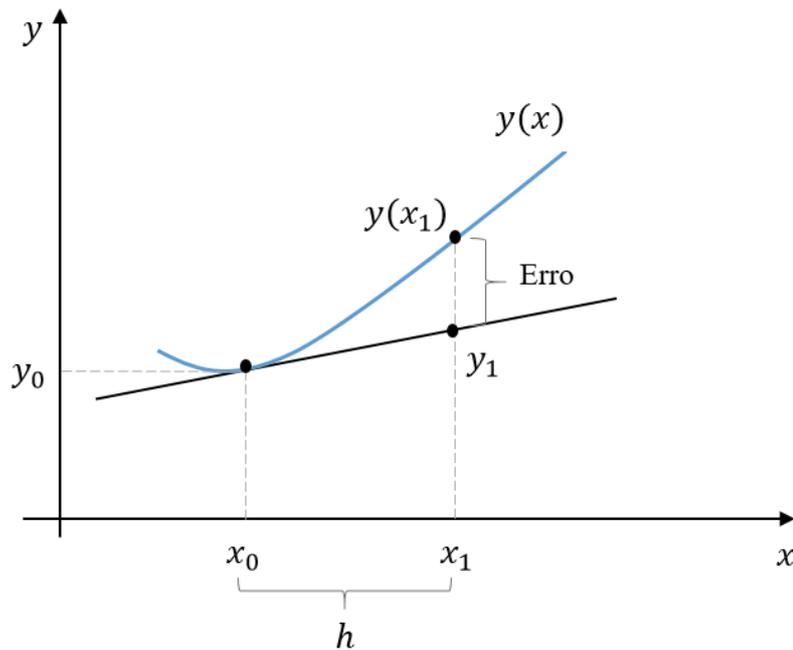


Figura 4.1: Método de Euler graficamente.

Fonte: Os autores (2019).

Contudo, a solução numérica de uma equação diferencial por meio do método de Euler, apresenta dois tipos de erros, o erro de truncamento e o erro de arredondamento. O erro de truncamento é causado pelas técnicas usadas para aproximar os valores de  $y$ , já o erro de arredondamento, é resultante da limitação de algarismos significativos representados no computador. O erro de truncamento se ramifica em duas partes, o erro de truncamento local, que é resultante da aplicação do método em questão em um único passo, e o erro de truncamento propagado, que é a junção dos erros das aproximações dos passos anteriores. A soma destes dois últimos erros, é chamada de erro global, ou erro total (CHAPRA, 2013).

Segundo Chapra (2013), pode-se deduzir o método de Euler diretamente da expansão em série de Taylor. Para isso a equação a ser integrada deve ter a forma geral  $dy/dx = f(x, y)$ , onde  $dy/dx = y'$  com  $x$  e  $y$  sendo as variáveis independente e dependente, respectivamente. Se a função que descreve o comportamento de  $y(x)$ , ou seja, a solução, for composta por derivadas contínuas, então ela pode ser representada por uma expansão em série de Taylor em torno de um valor inicial  $(x_i, y_i)$ , como na equação (4.25).

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i}{2!} h^2 + \dots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R_n, \quad (4.25)$$

onde  $h = x_{i+1} - x_i$  e  $R_n$  é o resto dado por,

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}, \quad (4.26)$$

com  $\xi$  presente em algum ponto do intervalo entre  $x_i$  e  $x_{i+1}$ . Outra opção é substituir a equação  $dy/dx = f(x, y)$  em (4.25), com isso obtém-se,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1}), \quad (4.27)$$

onde  $O(h^{n+1})$  diz respeito ao erro de truncamento, que é proporcional ao tamanho do passo elevado a  $(n + 1)$ -ésima potência.

De acordo com Chapra (2013), a partir da comparação das equações (4.21) e (4.27), observa-se que o método de Euler corresponde a série de Taylor até o termo  $f(x_i, y_i)h$  com este incluso. Atribui-se ao erro de truncamento no método de Euler, os termos restantes na série de Taylor que não foram incluídos na equação (4.21). Subtrai-se a fórmula de Euler da expansão por série de Taylor, com isso obtém-se o seguinte resultado que representa o erro de truncamento local,

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!}h^n + O(h^{n+1}). \quad (4.28)$$

Para  $h$  suficientemente pequeno, os termos de ordem superior na equação (4.28) geralmente são desprezíveis, com isso (4.28) torna-se,

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2, \quad (4.29)$$

ou ainda,

$$E_a = O(h^2), \quad (4.30)$$

onde  $E_a$  é o erro de truncamento local aproximado.

## 5 ESTUDOS DE CASO

Neste trabalho será realizado um estudo sobre o problema de mistura em tanque, concentração de um produto químico em uma lagoa e a quantidade de aditivo em um tanque de estocagem de gasolina em uma refinaria de petróleo. Cada problema foi resolvido utilizando técnicas de resolução analítica e numericamente pelo método de Euler, utilizando para isso, o programa computacional Scilab, que calcula e gera uma sequência de soluções aproximadas, de maneira iterativa. A seguir faz-se uma descrição dos estudos de caso abordados, juntamente com suas respectivas soluções analítica e numérica.

### 5.1 PROBLEMA DE MISTURA EM TANQUE

#### 5.1.1 Características do Problema

Nesta aplicação será analisado um problema envolvendo a mistura de duas soluções salinas em um tanque. Segundo Yartey e Ribeiro (2017), a mistura de duas soluções salinas em um tanque, onde tais soluções apresentam concentrações diferentes, fornecem uma equação diferencial de primeira ordem para a quantidade de sal contida na mistura. Este problema será resolvido de forma analítica e, também numérica, por meio do método de Euler. Posteriormente, serão comparados os resultados obtidos.

Supõe-se que um grande tanque de mistura contenha 300 galões de salmoura, na qual foram dissolvidas 50 libras de sal. Uma outra salmoura é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de três galões por minuto, a concentração de sal nessa segunda salmoura é de 2 libras por galão. Quando a solução no tanque estiver bem misturada, ela será bombeada para fora à mesma taxa. A Figura 5.1 ilustra o problema.

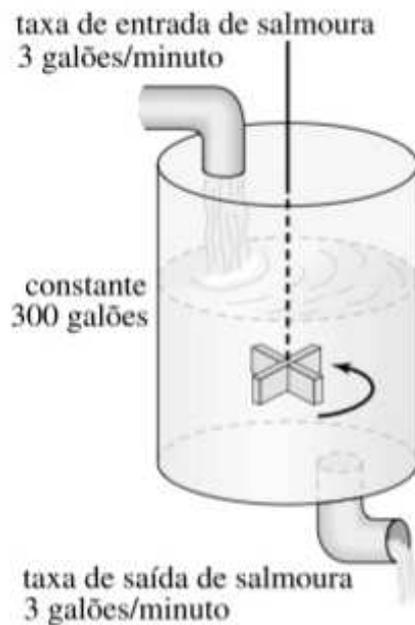


Figura 5.1: Misturador.

Fonte: Zill (2012).

A função  $A(t)$  representa a quantidade de libras de sal no tanque no instante  $t$ , a variação entre as taxas de entrada e saída do sal no tanque, será representada por,

$$\frac{dA}{dt} = (\text{taxa de entrada de sal}) - (\text{taxa de saída de sal}) = R_e - R_s. \quad (5.1)$$

Para simplificar a notação, a taxa de entrada do sal no tanque será denotada por  $R_e$ , e a taxa de saída do sal, por  $R_s$ , como descrito na equação (5.1). Com isso,  $R_e$  é produto da concentração de sal no fluxo de entrada de fluido, onde, a cada minuto que passa, três galões de salmoura são depositados no tanque, e essa salmoura possui uma concentração de 2 libras de sal por galão. Logo, tem-se que  $R_e$  é medido em libras por minuto,

$$R_e = (3 \text{ gal/min}) \cdot (2 \text{ lb/gal}) = 6 \text{ lb/min}. \quad (5.2)$$

Como a solução está sendo bombeada para dentro e para fora do tanque à mesma taxa, a quantidade de galões de salmoura no tanque no instante  $t$  se mantém constante a 300 galões. Com isso, a concentração de sal no tanque, que é a mesma no fluxo de saída, é de  $A(t)/300$  lb/gal, e a taxa de saída de sal  $R_s$  é,

$$R_s = (3 \text{ gal/min}) \cdot \left( \frac{A(t)}{300} \text{ lb/gal} \right) = \frac{A(t)}{100} \text{ lb/min}. \quad (5.3)$$

Reunindo os valores referentes a  $R_e$  e  $R_s$  na equação (5.1), tem-se a equação

(5.4), que é uma equação diferencial ordinária,

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}. \quad (5.4)$$

Como inicialmente foram dissolvidas 50 libras de sal nos 300 galões contidos no tanque, a condição inicial para esta equação é de que no tempo zero,  $t = 0$  a quantidade de sal são 50 libras, ou seja,  $A(0) = 50$ . Com isso, tem-se o problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}, \\ A(0) = 50. \end{cases} \quad (5.5)$$

Antes de fazer a resolução analítica do PVI em (5.5), verifica-se a existência de uma única solução por meio do Teorema (4.3), onde,

$$\begin{aligned} f(t, A) &= 6 - \frac{A}{100} \\ \frac{\partial f}{\partial A} &= -\frac{1}{100}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

como as funções  $f(t, A)$  e  $\partial f/\partial A$  são contínuas em todo o plano  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, em qualquer ponto  $(t_0, A_0)$ , existe algum intervalo centrado em  $t_0$ , onde o PVI (5.5) tem uma única solução. Como  $t$  representa tempo, tem-se que  $t \geq 0$ .

### 5.1.2 Solução analítica

A equação diferencial (5.5) é separável e de primeira ordem, resolve-se primeiramente separando suas variáveis,

$$\frac{dA}{600 - A} = \frac{dt}{100}. \quad (5.7)$$

Em seguida, integra-se em ambos os lados da igualdade,

$$\int \frac{dA}{600 - A} = \int \frac{dt}{100}, \quad (5.8)$$

ao resolver as integrais obtém-se,

$$-\ln |600 - A| = 0,01t + c_1, \quad (5.9)$$

aplicando a exponencial,

$$e^{\ln |600 - A|} = e^{-0,01t + c_1}, \quad (5.10)$$

onde  $e^{c1} = c$  e  $|600 - A| = 600 - A$  se  $A \leq 600$ , com isso tem-se,

$$600 - A = e^{-0,01t} c, \quad (5.11)$$

e por fim, encontra-se a solução geral,

$$A(t) = 600 - e^{-0,01t} c. \quad (5.12)$$

Como o valor inicial do problema é conhecido, basta aplicá-lo na equação (5.12) para encontrar o valor da constante,

$$50 = 600 - e^{-0,01 \cdot 0} c. \quad (5.13)$$

Dessa forma, encontra-se a constante  $c = 550$ , que substituída na equação (5.12), resulta,

$$A(t) = 600 - 550e^{-0,01t}, \quad (5.14)$$

que é a solução do PVI apresentado em (5.5).

Com a equação (5.14) determina-se a concentração de sal na mistura em qualquer instante do tempo. A Figura 5.2 é a representação gráfica da solução do problema de valor inicial no intervalo de tempo 0 a 800 minutos.

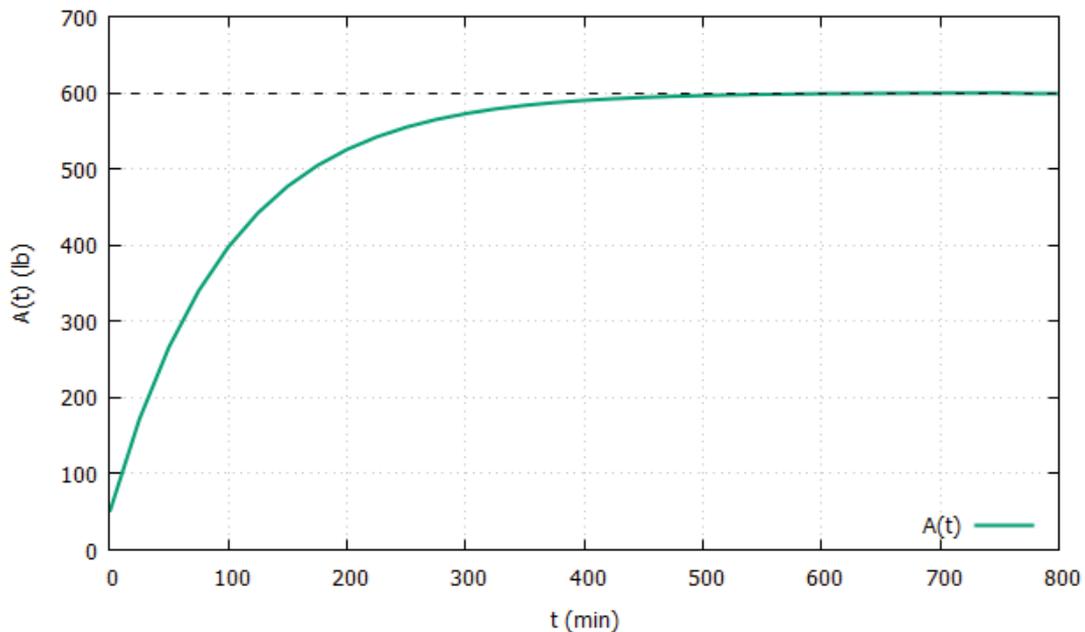


Figura 5.2: Solução analítica do problema de mistura salina em tanque.

Fonte: Os autores (2019).

Partindo do estudo feito e dos dados obtidos, encontra-se a concentração de

sal no tanque em qualquer instante  $t$  em minutos, já que  $A(t)$  é conhecida. Analisando o gráfico da solução, percebe-se que, com o passar do tempo o sal irá se acumular, isto significa que  $A \rightarrow 600$  com  $t \rightarrow \infty$ . Ou seja, quanto mais o tempo passa, a quantidade de sal no tanque se estabiliza.

Nota-se que a partir de aproximadamente 400 minutos a concentração de sal varia pouco, e a partir de 600 minutos a concentração de sal torna-se praticamente constante a 600 libras.

### 5.1.3 Solução numérica

Este problema pode ser resolvido numericamente utilizando o método de Euler para encontrar valores aproximados de  $A(t)$ . Considerando  $A(0) = 50$ , ou seja, em  $t = 0$  foi dissolvido 50 libras de sal no tanque, a partir desta condição inicial e da equação (4.24), inicia-se o processo iterativo.

No intervalo de 0 a 800 minutos, por meio do software Scilab os valores de  $A(t)$  foram aproximados pelo método de Euler para diferentes tamanhos do passo  $h$ . A Figura 5.3 é a representação gráfica da solução numérica e analítica do PVI, utilizou-se  $h = 5$  e o maior erro relativo obtido na simulação é de 1,644342%.

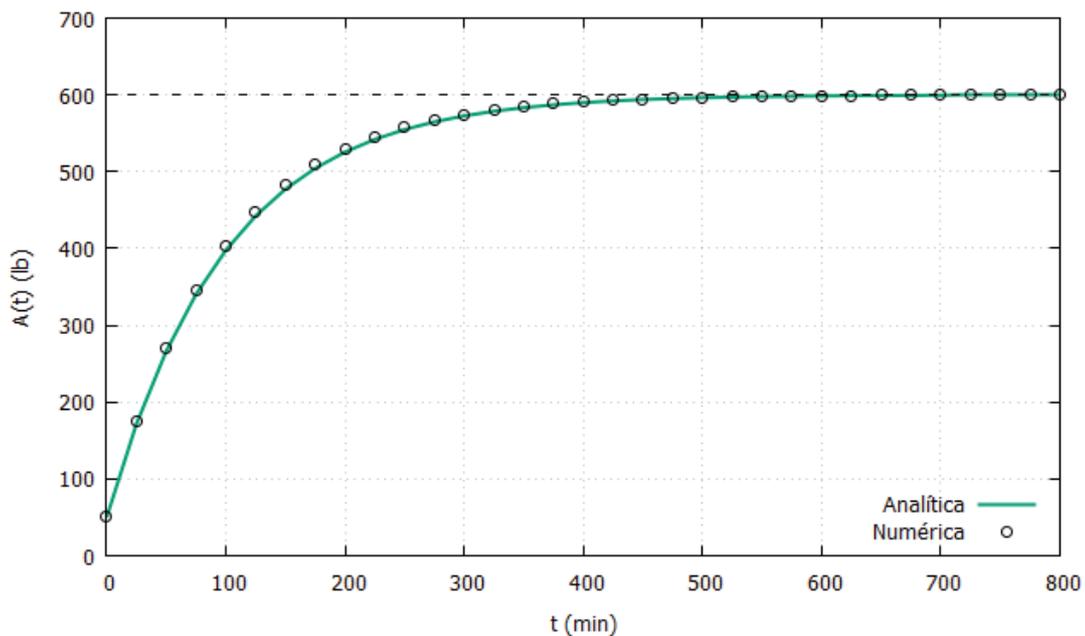


Figura 5.3: Soluções analítica e numérica do problema de mistura salina em tanque com  $h = 5$ .

Fonte: Os autores (2019).

A Tabela 5.1 apresenta a resolução do PVI com diferentes tamanhos do passo ( $h$ ), bem como a quantidade de sub-intervalos ( $m$ ) e o maior erro relativo ( $ER$ ) referente

a cada simulação.

Tabela 5.1: Máximo erro relativo obtido na simulação do problema de mistura em tanque para diferentes valores de  $h$

$h$	$m$	$ER(\%)$
1	800	0,321211
0,5	1600	0,160141
0,1	8000	0,031954
0,05	16000	0,015973
0,001	800000	0,000319

Fonte: Os autores (2019).

Observa-se que o máximo erro relativo diminui significativamente com o aumento da quantidade de subintervalos, ou de forma equivalente, com a diminuição do passo. Dessa forma, é obtida uma melhor aproximação da solução numérica para a solução analítica.

Já a Figura 5.4 ilustra os gráficos das soluções para o passo 0,001. Fica claro o quanto a solução numérica está próxima da solução analítica, esse resultado é confirmado pelo maior erro relativo obtido de 0,000319%.

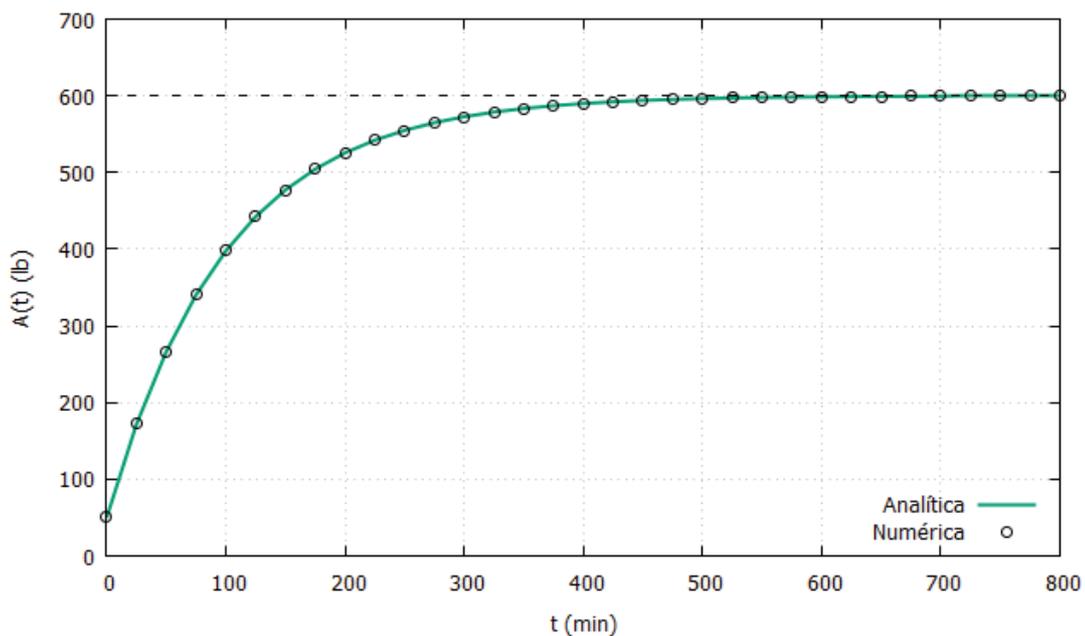


Figura 5.4: Soluções analítica e numérica do problema de mistura salina em tanque com  $h = 0,001$ .

Fonte: Os autores (2019).

Analisando as Figuras 5.3, 5.4 e a Tabela 5.1, nota-se a eficiência do método de Euler, pela excelente aproximação entre as soluções numérica e analítica, quando se reduz o passo de 1 para 0,001.

## 5.2 CONCENTRAÇÃO DE UM PRODUTO QUÍMICO EM UMA LAGOA

### 5.2.1 Características do problema

Nesta aplicação, considera-se a concentração de um poluente em uma lagoa. Inicialmente, será construído um modelo matemático deste fluxo de água, para obter a concentração do produto químico na lagoa em qualquer instante de tempo. A solução analítica será determinada pelo método do fator integrante, e a solução numérica, pelo método de Euler.

Considera-se que uma lagoa contém inicialmente 10 milhões de galões de água fresca. Em seguida, flui para a lagoa, água de um rio contendo um produto químico indesejável a uma taxa de 5 milhões de galões por ano e a mistura sai da lagoa através de um canal à mesma taxa. A concentração  $\gamma(t)$  do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo  $t$ , medido em anos, de acordo com a expressão  $\gamma(t) = 2 + \text{sen}(2t)$  g/gal (gramas por galão) (MACHADO, 2016).

Para construir um modelo matemático que descreva esse fluxo, e assim, determinar a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante, será necessário realizar algumas simplificações. Primeiramente, supõe-se que o nível de água na lagoa permanece sempre constante a  $10^7$  galões, já que os fluxos de entrada e saída são iguais. Supõe-se que as variações na quantidade de produto químico são devidas somente aos fluxos de entrada e saída e ao entrar na lagoa mistura completamente a água, tornando-se homogênea e bem distribuída. Com isso, a taxa de variação do produto químico na lagoa é igual à taxa segundo a qual o produto químico está fluindo para dentro da lagoa, menos a taxa segundo a qual o produto flui para fora.

Seja  $Q(t)$  a massa do produto químico, medida em gramas, a taxa líquida que representa a variação de  $Q(t)$  é dada por,

$$\frac{dQ}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída}). \quad (5.15)$$

A taxa de produto químico que está entrando na lagoa é dada por,

$$\text{taxa de entrada} = (5 \cdot 10^6) \text{ gal/ano} (2 + \text{sen}(2t)) \text{ g/gal}. \quad (5.16)$$

A concentração de produto químico na lagoa é de  $Q(t)/10^7$  g/gal, desse modo, a taxa de saída é,

$$\text{taxa de saída} = (5 \cdot 10^6) \text{ gal/ano} [Q(t)/10^7] \text{ g/gal} = Q(t)/2 \text{ g/ano}. \quad (5.17)$$

Com essas informações, a equação (5.15) é reescrita como,

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \cdot 10^6)(2 + \text{sen}(2t)) - \frac{Q(t)}{2}, \quad (5.18)$$

onde cada termo tem unidades de g/ano.

Como inicialmente não há produto químico na lagoa, a condição inicial é,

$$Q(0) = 0. \quad (5.19)$$

Com isso, tem-se o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = (5 \cdot 10^6)(2 + \text{sen}(2t)) - \frac{Q(t)}{2}, \\ Q(0) = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Para simplificar os coeficientes, convém introduzir uma nova variável dependente definida por  $q(t) = Q(t)/10^6$  ou então  $Q(t) = 10^6 q(t)$ . Isso significa que  $Q(t)$  é medida em milhões de gramas, ou megagramas. Substituindo a nova variável na equação (5.20), o fator  $10^6$  é cancelado. Transpondo o termo que envolve  $q(t)$  para o lado esquerdo da igualdade, o PVI em (5.20) é reescrito como,

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}q(t) = 10 + 5 \text{sen}(2t), \\ q(0) = 0. \end{cases} \quad (5.21)$$

A partir do Teorema (4.3), verifica-se a existência e unicidade da solução do PVI. Como  $f(t, Q) = 10 + 5 \text{sen}(2t) - \frac{1}{2}q(t)$  e  $\partial f/\partial q = -1/2$  são contínuas em todo o plano  $\mathbb{R}^2$ , isso quer dizer que em qualquer ponto  $(t_0, Q_0)$  existe algum intervalo centrado em  $t_0$ , onde (5.21) tem uma única solução. Como  $t$  representa tempo, tem-se que  $t \geq 0$ .

### 5.2.2 Solução analítica

A equação diferencial em (5.21) é uma equação linear de primeira ordem, que pode ser resolvida pelo método do fator integrante. O primeiro passo para sua resolução é multiplicá-la por uma função  $\mu(t)$  que ainda não é conhecida,

$$\mu(t) \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} \mu(t) q(t) = \mu(t) (10 + 5 \text{sen}(2t)), \quad (5.22)$$

em seguida, deve-se escolher  $\mu(t)$  em que a expressão à esquerda do sinal de igual na equação (5.22) seja a derivada de alguma função particular, para que assim, possa ser integrada mesmo sem conhecer a função  $q(t)$ . Nota-se que a expressão à esquerda é composta por duas parcelas e que a primeira é parte do resultado de derivar o produto de  $\mu(t) \cdot q(t)$ , ou seja,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)q(t)] = \mu(t)\frac{dq}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}q(t), \quad (5.23)$$

comparando a equação (5.23), que é a fórmula da diferenciação, com a expressão à esquerda da equação (5.22), observa-se que as duas primeiras parcelas são iguais e a segunda pode se tornar igual se  $\mu(t)$  for escolhida de modo que,

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t), \quad (5.24)$$

e assim, basta resolver a equação (5.24) para encontrar o fator integrante que será utilizado na equação (5.22), reescrevendo a equação (5.24) para que suas variáveis sejam separadas pelo sinal de igualdade,

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \frac{1}{2}dt, \quad (5.25)$$

integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int \frac{1}{2}dt, \quad (5.26)$$

resultando em,

$$\ln |\mu(t)| = \frac{t}{2} + C, \quad (5.27)$$

aplicando a exponencial,

$$e^{\ln |\mu(t)|} = e^{t/2+C}, \quad (5.28)$$

logo, tem-se que,

$$\mu(t) = c e^{\frac{t}{2}}, \quad (5.29)$$

escolhendo  $c = 1$  por conveniência, o fator integrante será  $\mu(t) = e^{t/2}$ , aplicando-o na equação (5.22), obtém-se a equação (5.30),

$$e^{t/2} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2} e^{t/2} q(t) = e^{t/2} (10 + 5 \operatorname{sen}(2t)), \quad (5.30)$$

como a expressão a esquerda do sinal de igualdade na equação (5.30) é a derivada de  $e^{t/2} \cdot q(t)$ , de modo que a equação (5.30) resulta em,

$$\frac{d}{dt} [e^{t/2} \cdot q(t)] = e^{t/2}(10 + 5 \operatorname{sen}(2t)), \quad (5.31)$$

escrevendo (5.31) na forma diferencial,

$$d [e^{t/2} \cdot q(t)] = e^{t/2}(10 + 5 \operatorname{sen}(2t))dt, \quad (5.32)$$

integrando (5.32) em relação a  $t$ ,

$$\int d [e^{t/2} \cdot q(t)] = \int e^{t/2}(10 + 5 \operatorname{sen}(2t))dt, \quad (5.33)$$

obtém-se,

$$e^{t/2} \cdot q(t) = \int e^{t/2}(10 + 5 \operatorname{sen}(2t))dt, \quad (5.34)$$

resolvendo a equação (5.34) utilizando integração por partes e substituição, tem-se que,

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos(2t) + \frac{10}{17} \operatorname{sen}(2t) + ce^{-t/2}. \quad (5.35)$$

Pela condição inicial  $q(0) = 0$ , determina-se a constante  $c = -300/17$ , com isso, a solução da equação (5.21) torna-se,

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos(2t) + \frac{10}{17} \operatorname{sen}(2t) - \frac{300}{17} e^{-t/2}, \quad (5.36)$$

a qual tem sua representação gráfica na Figura 5.5.

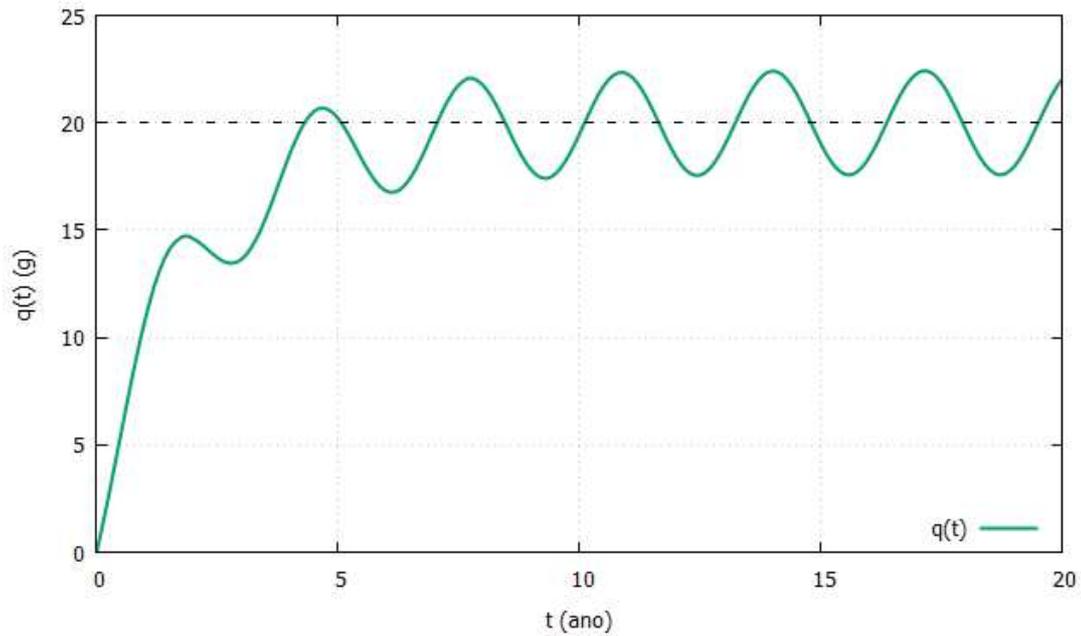


Figura 5.5: Solução analítica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa.

Fonte: Os autores (2019).

A partir da resolução do problema e de sua representação gráfica, nota-se que a quantidade de produto químico na lagoa aumenta, e a partir de certo ponto começa a oscilar devido aos termos  $\sin(2t)$  e  $\cos(2t)$ , porém essa oscilação se estabiliza em torno de  $q(t) = 20$ .

### 5.2.3 Solução numérica

O problema será resolvido numericamente, por meio do método de Euler para encontrar valores aproximados de  $q(t)$ . Para isso utiliza-se a expressão geral (4.24) para iniciar o processo iterativo, partindo da condição inicial  $q(0) = 0$ .

No intervalo de 0 a 20 anos, por meio do software Scilab os valores de  $q(t)$  foram aproximados pelo método de Euler para diferentes tamanhos do passo  $h$ , inicialmente utilizou-se  $h = 1$ , as soluções obtidas estão ilustradas na Figura 5.6.

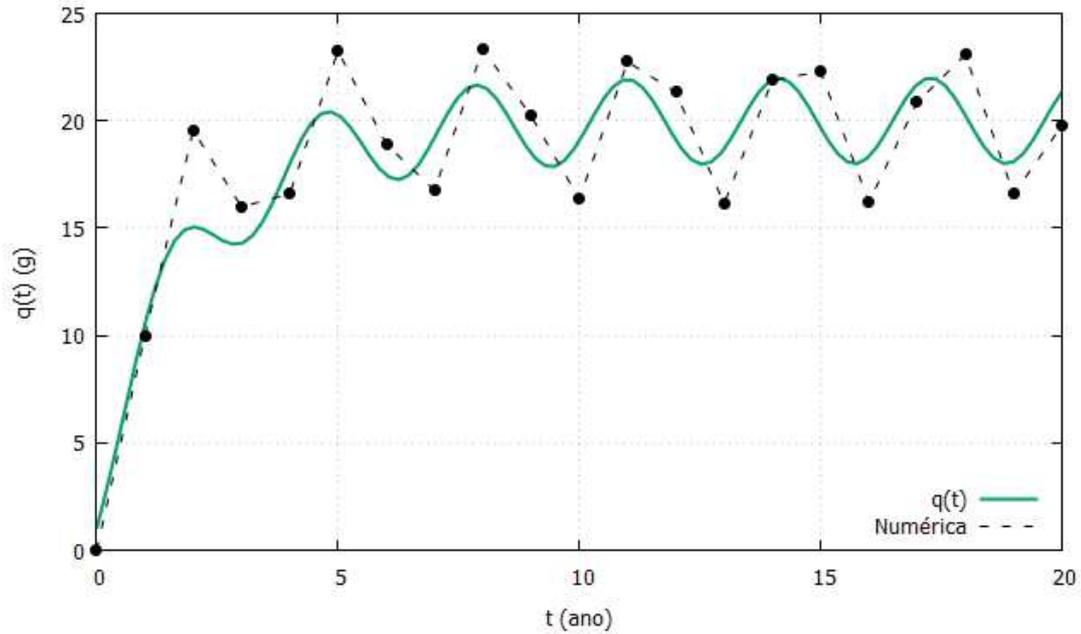


Figura 5.6: Solução analítica e numérica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para  $h = 1$ .

Fonte: Os autores (2019).

Nota-se que os resultados obtidos numericamente estão distantes da solução analítica do problema, nesta situação o maior erro relativo ( $ER$ ) corresponde a 33,872558%. Esse erro pode ser reduzido com o aumento da quantidade de subintervalos, ou seja, diminuindo o tamanho de  $h$ .

A Tabela 5.2 contém os máximos erros relativos com diferentes tamanhos de  $h$ . Nota-se a redução acentuada do máximo erro relativo à medida que diminui-se o comprimento do passo. Com  $h = 0,001$  o maior erro relativo é de aproximadamente 0,03%.

Tabela 5.2: Máximo erro relativo obtido na simulação do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para diferentes valores de  $h$

$h$	$m$	$ER$
1	20	33,872558
0,5	40	15,835479
0,1	200	3,065253
0,05	400	1,522450
0,001	20000	0,030202

Fonte: Os autores (2019).

A Figura 5.7 representa a solução analítica e numérica do PVI com o passo  $h = 0,001$ , nestas circunstâncias o maior erro relativo corresponde a 0,030202%.

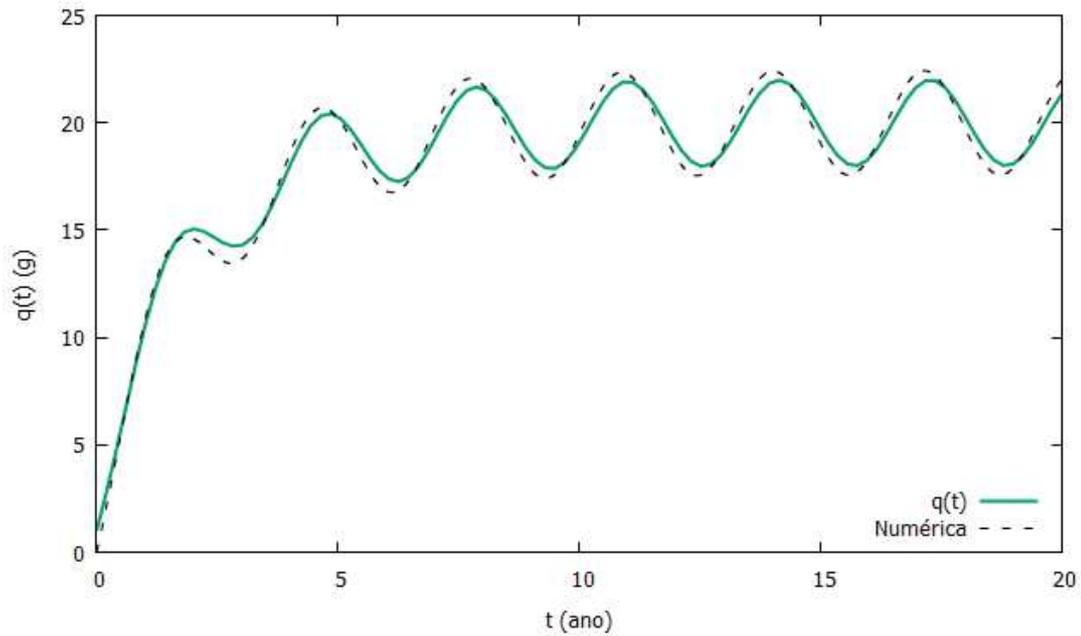


Figura 5.7: Solução analítica e numérica do problema da concentração de um produto químico em uma lagoa para  $h = 0,001$ .

Fonte: Os autores (2019).

Os resultados mostram que o método de Euler é eficiente na resolução numérica do problema proposto.

### 5.3 TANQUE DE ESTOCAGEM DE UMA REFINARIA DE PETRÓLEO

#### 5.3.1 Características do problema

Em uma certa refinaria de petróleo, um tanque de estocagem contém 2000 galões de gasolina que, inicialmente, possui 100 libras de aditivo dissolvido nela. Durante a preparação para o inverno, gasolina contendo 2 libras de aditivo por galão é bombeada para o reservatório a uma taxa de 40 gal/min. A mistura homogênea é bombeada para fora do tanque a uma taxa de 45 gal/min. A Figura 5.8 ilustra o problema. (THOMAS, 2002).

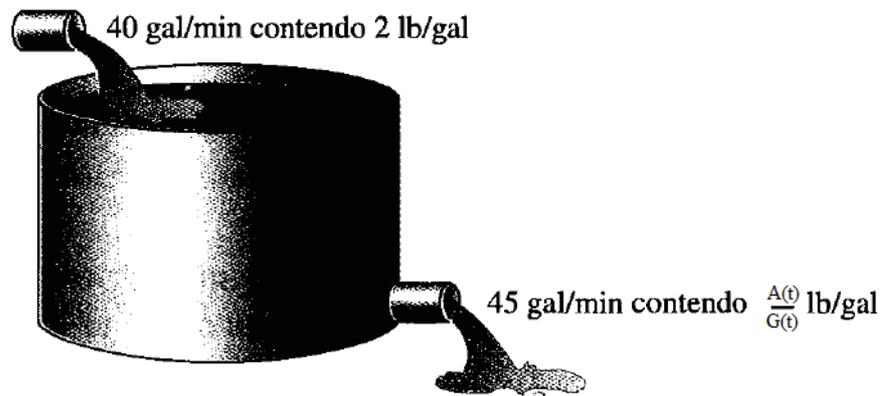


Figura 5.8: Tanque de estocagem.

Fonte: Thomas (2002).

Inicia-se a modelagem deste problema definindo suas variáveis, e em seguida a taxa de entrada e a taxa de saída, para obter a equação que representa esta situação.

Seja  $A(t)$  a quantidade em libras de aditivo no instante  $t$  em minutos. Sabe-se que, inicialmente foi dissolvido 100 libras de aditivo no tanque de estocagem. O tanque contém 2000 galões de gasolina inicialmente, porém a taxa de saída de gasolina aditivada é maior que a taxa de entrada, isso quer dizer que o tanque está se esvaziando com o passar do tempo. A quantidade de galões de gasolina e aditivo que está sendo misturada no tanque em qualquer instante  $t$  é representada pela equação (5.37),

$$G(t) = 2000 \text{ gal} + \left( 40 \frac{\text{gal}}{\text{min}} - 45 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right) \cdot (t \text{ min}), \quad (5.37)$$

$$G(t) = 2000 \text{ gal} + \left( -5 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right) \cdot (t \text{ min}),$$

$$G(t) = 2000 \text{ gal} - 5t \text{ gal},$$

logo, a equação (5.38) representa a quantidade de gasolina aditivada presente no tanque no instante  $t$ ,

$$G(t) = (2000 - 5t) \text{ gal}, \quad (5.38)$$

ou seja, em  $t = 400$  o tanque se esvaziará por completo.

Em seguida, deve-se calcular a taxa de entrada e saída de gasolina do tanque. A taxa de entrada é representada por,

$$\text{Taxa de entrada} = \left( 2 \frac{\text{lb}}{\text{gal}} \right) \cdot \left( 40 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right) = 80 \frac{\text{lb}}{\text{min}}. \quad (5.39)$$

A taxa de saída é dada por,

$$\text{Taxa de saída} = \frac{A(t)}{G(t)} \cdot \text{taxa de vazão}, \quad (5.40)$$

como  $G(t) = (200 - 5t)$  gal e a taxa de vazão é de 45 gal/min, tem-se que,

$$\text{Taxa de saída} = \left( \frac{A(t) \text{ lb}}{(2000 - 5t) \text{ gal}} \right) \cdot \left( 45 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \right), \quad (5.41)$$

$$\text{Taxa de saída} = \frac{45 \cdot A(t)}{2000 - 5t} \cdot \frac{\text{lb}}{\text{min}}. \quad (5.42)$$

A equação diferencial que modela o processo de mistura é dada por,

$$\frac{dA(t)}{dt} = (\text{taxa de entrada de aditivo}) - (\text{taxa de saída de aditivo}), \quad (5.43)$$

ou seja, a equação diferencial que representa o problema é,

$$\frac{dA(t)}{dt} = 80 - \frac{45 \cdot A(t)}{2000 - 5t}, \quad (5.44)$$

em libras por minuto.

A condição inicial do problema é que em  $t = 0$  foram dissolvidas 100 libras de aditivo na gasolina contida no tanque, logo, tem-se o PVI,

$$\begin{cases} \frac{dA(t)}{dt} = 80 - \frac{45 \cdot A(t)}{2000 - 5t} \\ A(0) = 100. \end{cases} \quad (5.45)$$

Sejam as funções  $f(t, A) = 80 - (45 \cdot A(t))/(2000 - 5t)$  e  $\partial f/\partial A = -9A(t)/-t + 400$  que são contínuas no semiplano definido por  $t < 400$ , pelo Teorema (4.3), tem-se que o PVI possui solução única em quaisquer pontos  $(t_0, A_0)$ ,  $A_0 < 400$  pertencentes ao semiplano, ou seja, existe algum intervalo centrado em  $t_0$ , no qual a solução do PVI (5.45) é única. Como  $t$  representa tempo, tem-se que  $t \geq 0$ .

### 5.3.2 Solução analítica

Inicia-se a resolução analítica do problema reescrevendo a EDO (5.45) na forma,

$$\frac{dA(t)}{dt} + \frac{45}{2000 - 5t} \cdot A(t) = 80. \quad (5.46)$$

A equação (5.46) é linear de primeira ordem e pode ser resolvida pelo método do fator integrante, para isso, deve-se encontrar um fator de integração  $\mu(t)$ . Inicialmente,

multiplica-se a equação (5.46) por  $\mu(t)$ ,

$$\mu(t) \frac{dA(t)}{dt} + \mu(t) \frac{45}{2000 - 5t} \cdot A(t) = \mu(t) \cdot 80, \quad (5.47)$$

após isso, o fator  $\mu(t)$  a ser escolhido deve ser a derivada de alguma função particular da expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação (5.47), para que possa ser integrada mesmo desconhecendo-se a função  $A(t)$ . Observando a equação (5.47), verifica-se que a expressão à esquerda contém a soma de duas parcelas e a primeira parcela é parte do resultado de derivar o produto  $\mu(t) \cdot A(t)$ ,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)A(t)] = \mu(t) \frac{dA(t)}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt} A(t), \quad (5.48)$$

comparando a equação (5.48) com a expressão à esquerda da equação (5.47), nota-se que as duas primeiras parcelas são iguais, e para que a segunda parcela também torne-se igual, basta escolher  $\mu(t)$  de modo que,

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{45}{2000 - 5t} \mu(t). \quad (5.49)$$

Resolvendo a equação (5.49), encontra-se o fator integrante que será utilizado para multiplicar a equação (5.47). A equação (5.49) pode ser resolvida separando suas variáveis pelo sinal de igualdade,

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \frac{45}{2000 - 5t} dt, \quad (5.50)$$

integrando em ambos os lados,

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int \frac{45}{2000 - 5t} dt, \quad (5.51)$$

integrando o lado esquerdo, encontra-se,

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \ln |\mu(t)| + c_1, \quad (5.52)$$

resta integrar o lado direito, para isso, utiliza-se a mudança de variável,

$$\begin{aligned} u &= 2000 - 5t \\ du &= -5 dt \\ \frac{du}{-5} &= dt, \end{aligned} \quad (5.53)$$

logo,

$$\int \frac{45}{2000 - 5t} dt = \frac{45}{-5} \int \frac{du}{u} \quad (5.54)$$

o resultado de (5.54) é igual a  $-9 \cdot \ln |2000 - 5t| + c_2$ . Voltando para as variáveis originais e utilizando a propriedade de logaritmo natural para transformar o produto em expoente, tem-se que,

$$\ln |(2000 - 5t)^{-9}| + c_2. \quad (5.55)$$

Fazendo a junção das equações (5.52) e (5.55) que é o resultado da equação (5.51) e aplicando a exponencial, obtém-se,

$$e^{\ln |\mu(t)|} = e^{\ln |(2000 - 5t)^{-9}| + C}, \quad (5.56)$$

logo,

$$\mu(t) = C \cdot (2000 - 5t)^{-9}, \quad (5.57)$$

escolhendo  $C = 1$  por conveniência,

$$\mu(t) = 1 \cdot (2000 - 5t)^{-9}, \quad (5.58)$$

que é o fator integrante a ser multiplicado na equação (5.47),

$$(2000 - 5t)^{-9} \cdot \frac{dA(t)}{dt} + (2000 - 5t)^{-9} \cdot \frac{45}{2000 - 5t} \cdot A(t) = (2000 - 5t)^{-9} \cdot 80, \quad (5.59)$$

como a expressão a esquerda do sinal de igualdade na equação (5.59) é igual a derivada de  $(2000 - 5t)^{-9} \cdot A(t)$ , deste modo, a equação (5.59) resulta em,

$$\frac{d}{dt} [(2000 - 5t)^{-9} \cdot A(t)] = (2000 - 5t)^{-9} \cdot 80, \quad (5.60)$$

integrando a equação (5.60),

$$\int \frac{d}{dt} [(2000 - 5t)^{-9} \cdot A(t)] = \int [(2000 - 5t)^{-9} \cdot 80] dt, \quad (5.61)$$

encontra-se,

$$(2000 - 5t)^{-9} \cdot A(t) = \int [(2000 - 5t)^{-9} \cdot 80] dt, \quad (5.62)$$

resolve-se a integral em (5.62) pela substituição de variáveis,

$$\int [(2000 - 5t)^{-9} \cdot 80] dt = 80 \int (2000 - 5t)^{-9} dt$$

$$w = 2000 - 5t$$

$$dw = -5 dt$$

$$-\frac{dw}{5} = dt,$$
(5.63)

logo,

$$\int [(2000 - 5t)^{-9} \cdot 80] dt = -\frac{80}{5} \int u^{-9} dw = 2 \cdot (2000 - 5t)^{-8} + C. \quad (5.64)$$

Dessa forma, a solução da equação (5.46) é dada por,

$$A(t) = \frac{2 \cdot (2000 - 5t)^{-8} + C}{(2000 - 5t)^{-9}}, \quad (5.65)$$

a equação (5.65) pode ser reescrita como,

$$A(t) = 2 \cdot (2000 - 5t) + C \cdot (2000 - 5t)^9. \quad (5.66)$$

Como o problema fornece a condição inicial de que  $A(0) = 100$ , é possível determinar  $C$  resolvendo a equação (5.66),

$$100 = 2 \cdot (2000 - 5 \cdot 0) + C \cdot (2000 - 5 \cdot 0)^9, \quad (5.67)$$

obtendo assim,

$$C = -\frac{3900}{2000^9}, \quad (5.68)$$

logo, a equação (5.66), torna-se,

$$A(t) = 2 \cdot (2000 - 5t) - \frac{3900}{2000^9} \cdot (2000 - 5t)^9, \quad (5.69)$$

que é a solução do PVI (5.45).

A Figura 5.9 mostra o gráfico da solução analítica do problema.

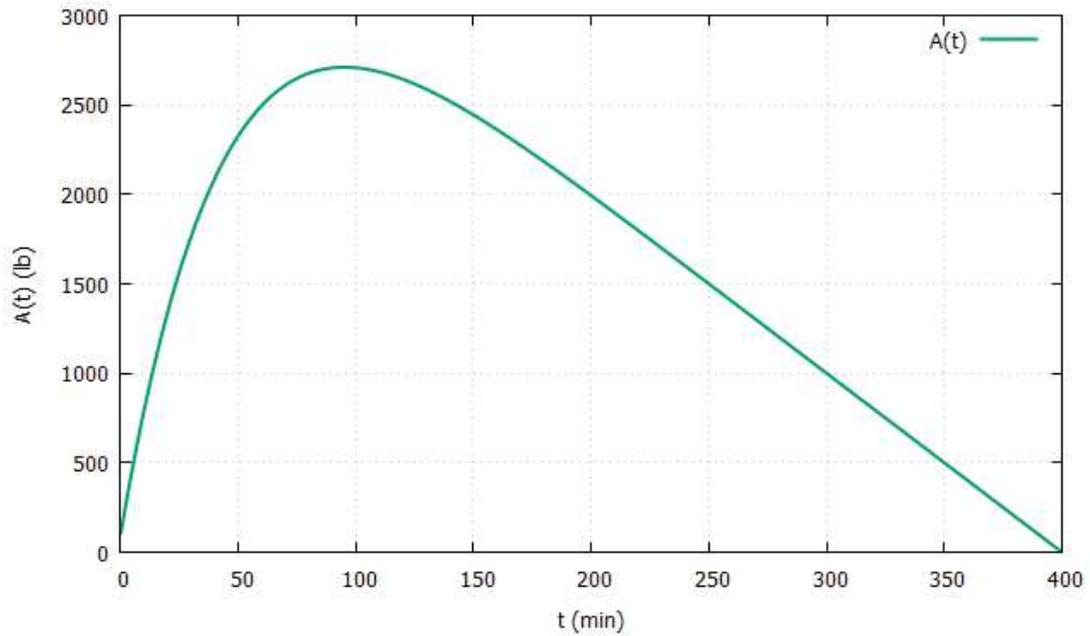


Figura 5.9: Solução analítica do problema da mistura de aditivo em gasolina.  
 Fonte: Os autores (2019).

Analisando o gráfico da Figura 5.9, nota-se que o comportamento da função condiz com situação apresentada pelo problema, a variação da quantidade de aditivo com o passar do tempo se comporta dentro do esperado. Como o tanque de estocagem está se esvaziando, a quantidade de aditivo na mistura aumenta até certo ponto e em seguida, diminui. Em aproximadamente 95 minutos a mistura no tanque atinge a sua maior concentração de aditivo na gasolina e quantidade nula de aditivo em 400 minutos.

### 5.3.3 Solução numérica

O problema foi resolvido numericamente utilizado-se vários tamanhos de passos  $h$  a fim de obter maior precisão na solução numérica.

A Figura 5.10 mostra a solução analítica e numérica do problema para  $h = 5$ . Os valores obtidos numericamente foram aproximados considerando o intervalo  $0 \leq t \leq 400$ , resultando em um total de 80 subintervalos.

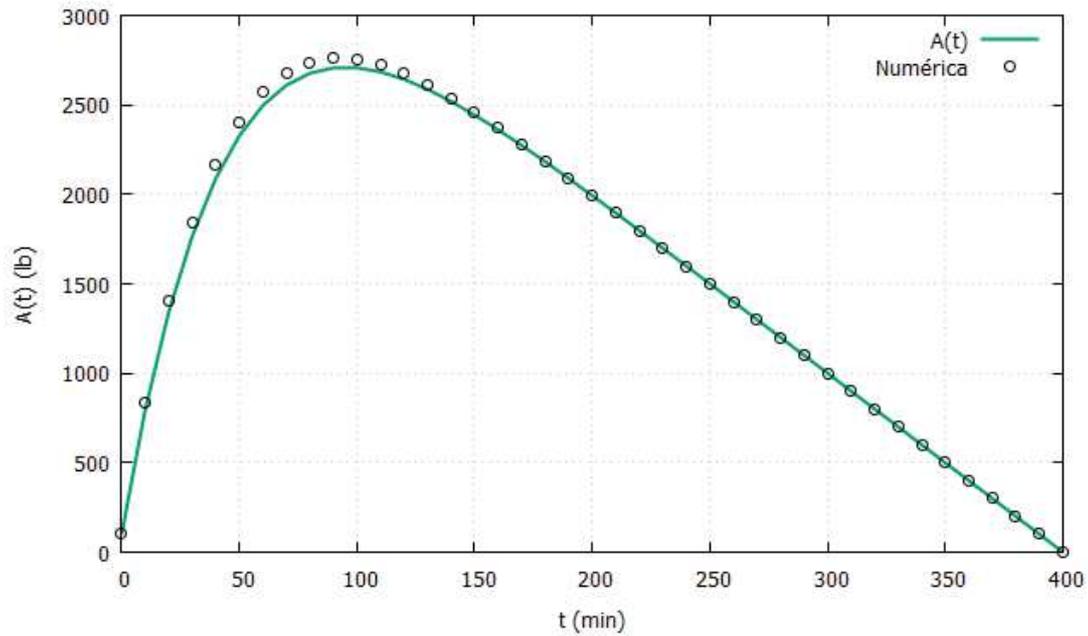


Figura 5.10: Solução analítica e numérica do problema da quantidade de aditivo em gasolina para  $h = 5$ .

Fonte: Os autores (2019).

Para avaliação do erro foram considerados quatro valores para o passo  $h$ . A Tabela 5.3 apresenta o máximo erro relativo obtido em cada simulação.

Tabela 5.3: Máximo erro relativo obtido na simulação do problema de estocagem em uma refinaria de petróleo para diferentes valores de  $h$

$h$	$m$	$ER$
5	80	4,830627
1	400	0,914566
0,5	800	0,454261
0,01	40000	0,009027

Fonte: Os autores (2019).

A Figura 5.11 ilustra as soluções analítica e numérica considerando  $h = 0,01$ . Para este passo, o domínio de solução tem 40000 subintervalos.

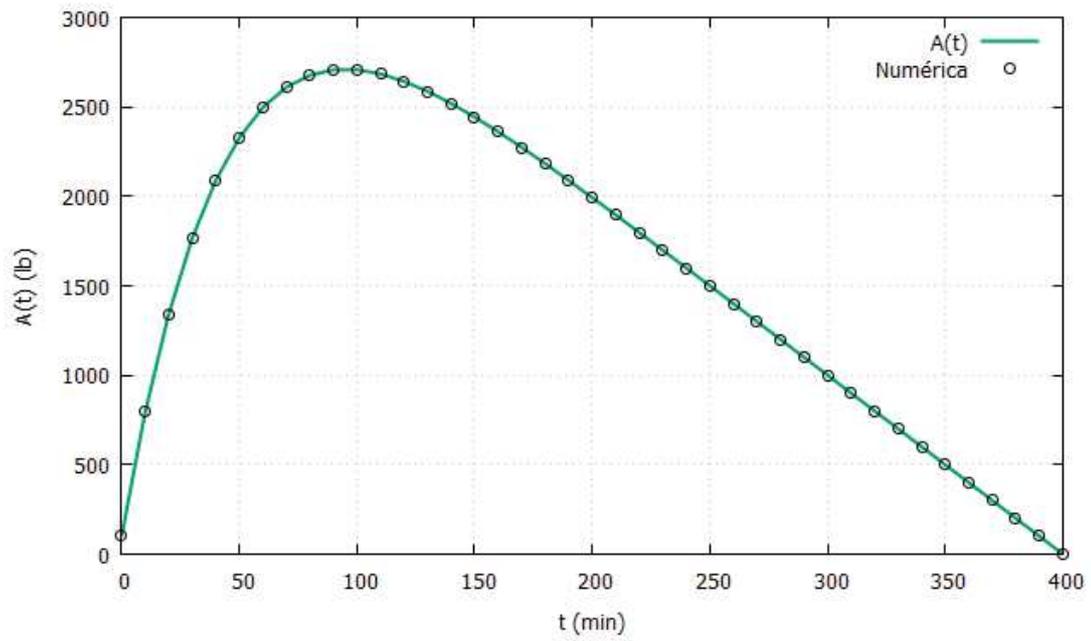


Figura 5.11: Solução analítica e numérica do problema da quantidade de aditivo em gasolina para  $h = 0,01$ .

Fonte: Os autores (2019).

E assim, o maior erro relativo corresponde a 0.009027%. Novamente o método de Euler apresenta um resultado preciso, como observado nos valores simulados descritos na Tabela 5.3.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho tornou possível um melhor entendimento acerca de equações diferenciais, da modelagem de problemas envolvendo misturas de substâncias e também o quanto o método numérico de Euler é de simples aplicação e grande precisão na obtenção da solução numérica dos problemas abordados. A revisão bibliográfica e o estudo dos problemas de mistura utilizando mais de um método de resolução, juntamente com diferentes meios de registros de representação semiótica, resultou em um aprendizado muito significativo.

As análises das resoluções dos problemas por meio do método de Euler comparadas aos resultados obtidos analiticamente, permitem concluir o quanto o método garante bons resultados, além de ser uma ótima alternativa para o cálculo de equações diferenciais ordinárias com uma condição inicial.

Por meio deste estudo, novos conhecimentos matemáticos foram conquistados permitindo assim um amadurecimento por parte da acadêmica como pesquisadora. Além disso, o estudo de problemas aplicados e a busca por novos conhecimentos permite a abertura de novos horizontes. Embora a maioria dos problemas de misturas sejam hipotéticos, isso significa que são suposições de possíveis situações reais, a compreensão do comportamento de tais situações diminui o distanciamento entre a matemática e o mundo real.

Os objetivos definidos inicialmente foram alcançados, os problemas foram resolvidos utilizando-se para isso técnicas analíticas e também pelo método de Euler, seguindo com a comparação dos resultados obtidos e a análise dos mesmo.

Por fim, espera-se que este trabalho auxilie de alguma forma novos pesquisadores interessados na área.

## REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2012.
- BRANNAN, J. R.; BOYCE, W. *Equações diferenciais: uma introdução a métodos modernos e suas aplicações*. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2008.
- BRONSON, R.; COSTA, G. *Equações diferenciais*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- CHAPRA, S. C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas*. 3. ed. Porto Alegre - RS: AMGH, 2013.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. 5. ed. São Paulo - SP: McGraw-Hill, 2008.
- CHINCHIO, A. C. *Introdução às equações diferenciais ordinárias e aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94353/chinchio\\_ac\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94353/chinchio_ac_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y).
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- FILHO, F. F. C. *Algoritmos numéricos, uma abordagem moderna de cálculo numérico*. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- GALINA, V.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; CARGNELUTTI, J.; LOBEIRO, A. M. Simulação de onda de maré por meio do método do reticulado de boltzmann. 2016.
- GALVÃO, D. M. *Equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem existência e unicidade de soluções*. Florianópolis, 2008. 50 p.
- MACHADO, I. M. F. *Matemática aplicada: o uso das equações diferenciais ordinárias em modelos matemáticos de sistemas físicos e bio-químicos*. Anápolis - GO, 2016. Disponível em: <https://www.ifg.edu.br/attachments/article/1704/TCC%20-%20Ivana%20Maria%20Fernandes%20Machado.pdf>.
- MAIOLI, G. *Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/134029/000857260.pdf?sequence=1>.
- SANTOS, R. da S. *Equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes e derivação da equação característica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4528/5/Disserta%3%a7%3%a3o%20-%20Ricardo%20da%20Silva%20Santos%20-%202015.pdf>.
- SIMMONS, G. F.; KRANTZ, S. G. *Equações diferenciais teoria, técnica e prática*. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

TEIXEIRA, F. L. *Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012. Disponível em: [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94355/teixeira\\_fl\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94355/teixeira_fl_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y).

THOMAS, G. B. *Cálculo*. São Paulo: Pearson, 2002. v. 1.

TRIVELATO, G. C. Técnicas de modelagem e simulação de sistemas dinâmicos. *IMPE*, 2003.

YARTEY, N. A. J.; RIBEIRO, S. S. *Equações diferenciais*. UFBA, 2017. Disponível em: [https://educapes.capes.gov.br/retrieve/166324/eBook\\_Equacoes\\_Diferenciais-Licenciatura\\_Matematica\\_UFBA.pdf](https://educapes.capes.gov.br/retrieve/166324/eBook_Equacoes_Diferenciais-Licenciatura_Matematica_UFBA.pdf).

ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo - SP: Cengage Learnig, 2012.

ÇENGEL, Y. A.; PALMII, W. J. *Equações diferenciais*. Porto Alegre: AMGH, 2014.

# Apêndices

## A Código computacional PVI linear

```
1 function PVI_Euler_completa()
2
3 // [a, b]
4 //m: qde de subintervalos
5 //y'=1-y/x
6 //y(x0)=y(0)=y0=1
7
8 //Dados do PVI
9 a = 0; b = 800; y0 = 50; m = 800; p = 5; //tam. passo dos pontos
    no gráfico e escrita em arquivo
10 deriv_y = "yl=6-(y/100)" //"yl=-x*y"
11 sol = "y=600-550*exp(-0.01*x)" //"y=exp(-x^2/2)"
12
13 deff(' [yl]=fxy(x,y)', deriv_y);
14 deff(' [y]=f(x)', sol);
15
16 x0 = a;
17 h = (b-a)/m;
18
19 vx = zeros(m+1);
20 vy = zeros(m+1);
21 fx = zeros(m+1);
22
23 vx(1) = x0;
24 vy(1) = y0;
25 fx(1) = vy(1);
26
27 for i=1:m
28 vx(i+1) = vx(i) + h;
29 vy(i+1) = vy(i) + h*fxy(vx(i),vy(i));
30 fx(i+1) = f(vx(i+1));
31 end
32
33
34 //Escrita em arquivo
```

```

35 c_dir = pwd(); //caminho padrão pastas scilab
36 fd = mopen(c_dir + '\Euler_result.txt', 'w');
37
38 fprintf(fd, "#_PVI:_%c,_y(%d)=%d\n", deriv_y, x0, y0);
39 fprintf(fd, "#_Sol._Analítica:_%c\n\n", sol);
40 c_vazio='_' //para imprimir o símbolo %
41 fprintf(fd, '#_i_____x_____y(x)_____f(x)_____
    Erro_rel%c(%%)\n\n', c_vazio);
42 v=zeros(1,4);
43 for i=0:p:m
44 v(1)=vx(i+1); v(2)=vy(i+1); v(3)=f(vx(i+1)); v(4)= abs((f(vx(i+1)
    ))-vy(i+1))/f(vx(i+1)))*100;
45 fprintf(fd, "%4d_%12.6f_%12.6f_%12.6f_%12.6f\n", i, v);
46 end
47 fclose(fd);
48
49
50 //Escrita na tela
51 fprintf("\nPVI:_%c,_y(%d)=%d", deriv_y, x0, y0);
52 fprintf("\nSol._Analítica:_%c\n\n", sol);
53 fprintf('#_x_____y(x)_____f(x)_____Erro_
    rel%c(%%)\n', c_vazio);
54 for i=0:m
55 fprintf("\nx%d=_%3.4f\t_%3.6f\t_%3.6f\t_%2.6f", ...
56 i, vx(i+1), vy(i+1), f(vx(i+1)), abs((f(vx(i+1))-vy(i+1))/f(vx(i
    +1))))*100);
57 end
58
59 //Máximo erro relativo
60 M = 0.0;
61 for i = 0:m
62 erro = abs((f(vx(i+1))-vy(i+1))/f(vx(i+1)));
63 if (M < erro) then
64 M = erro;
65 ind_erro = i+1;
66 end
67 end
68
69 fprintf("\n\nMaior_erro_relativo:_%4.6f_%. _Ocorre_em_x%d=_%4.4

```

```

    f'' , M*100 , ind_erro-1 , vx(ind_erro));
70
71
72 //Gráfico da solução
73 xesq = a-0.05;
74 xdir = b+0.05;
75 x2=[xesq:0.05:xdir]; //x2 é um vetor linha
76 [l,c] = size(x2);
77 for i=1:c
78 y2(i) = f(x2(i)); //y2 é um vetor coluna
79 end
80 y2 = y2' //transpor
81
82 //Numérica com menos pontos
83 [l,c] = size(vx); //vx é vetor coluna
84 ind = ceil(l/p);
85 x1=zeros(1,ind);
86 x1(1) = vx(1);
87 for i=2:ind
88 x1(i) = vx(1+(i-1)*p);
89 end
90 x1 = x1';
91
92 y1=zeros(1,ind);
93 y1(1) = vy(1);
94 for i=2:ind
95 y1(i) = vy(1+(i-1)*p);
96 end
97 y1 = y1';
98
99 //Gráfico
100 close;
101 xgrid();
102 a=get('current_axes');
103 a.data_bounds=[xesq,ybaixo;xdir,ycima];
104 a.grid=[17,17] //grid horz e vert , cor 17
105 a.data_bounds=[xesq,-2;xdir,1];
106 plot(x2,y2,'black','linewidth',2);
107 plot(x1,y1,'.red');

```

```
108 //plot(x,fx, '.black');
109 //plot(x,y, '.red'); //repetir gráfico para destacar
110 title('Solução_PVI_-_Método_de_Euler', 'fontsize', 4, 'fontname'
        , 'times_italic', 'color', 'black');
111 xlabel('x', 'fontsize', 3, 'fontname', 'times_italic', 'color',
        'black');
112 ylabel('y(x)', 'fontsize', 3, 'fontname', 'times_italic', 'color'
        , 'black');
113 legend(['Analítica', 'Numérica'],4);
114
115 endfunction
```