

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ADRIANA LIVI

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: PROBLEMA DE  
VALOR DE CONTORNO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO  
2019

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

ADRIANA LIVI

**RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS:  
PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Galina

Coorientadora: Profa. Dra. Jocelaine Cargnelutti

TOLEDO

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias: Problema de Valor de Contorno" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº \_\_\_\_ de \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Prof. Orientador Dr. Vanderlei Galina

Profa. Coorientadora Dra. Jocelaine Cargnelutti

Profa. Ma. Marcia Regina Piovesan

Prof. Dr. Gustavo Henrique Dalposso

TOLEDO

2019

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me proporcionar a vida. Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente estiveram comigo durante a graduação e também àqueles que foram indispensáveis para que eu pudesse iniciá-la.

Quero deixar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Dr. Vanderlei Galina, por ter compartilhado parte de seu imenso saber, por disponibilizar seu tempo para que a conclusão desse trabalho fosse possível, pela sua dedicação, paciência e todos os conselhos, da mesma forma agradeço minha coorientadora Dra. Jocelaine Cargnelutti pelas importantes contribuições.

Gostaria de agradecer ao professor Dr. Wilian Francisco de Araujo, essa pessoa especial com quem aprendi muito durante os dois anos de Iniciação Científica, e, por meio dele, refiro-me a todos os professores, por todo conhecimento repassado durante os quatro anos de graduação.

Com certeza não poderia deixar de demonstrar minha imensa gratidão ao meu noivo João Vitor, por todo amor, apoio e incentivo durante cada etapa desse longo percurso. Agradeço à minha família, que não mediu esforços para me auxiliar, em especial à minha mãe Iara por todas as mensagens de carinho e incentivo, assim como à minha sogra Sueli. Aos meus amigos e colegas de graduação, especialmente à Adriéli e a Judy, que vivenciaram comigo esses quatro anos de inúmeros aprendizados.

Agradeço também aos membros da banca por disponibilizarem de seu tempo para a correção deste trabalho e pelas importantes contribuições.

## RESUMO

Neste trabalho objetivou-se a realização de um estudo sobre problemas de valor de contorno (PVC), aplicando técnicas de resolução analítica e numérica das equações diferenciais ordinárias (EDO) que modelam os PVC's analisados e realizar a comparação entre os resultados obtidos, sendo a simulação numérica realizada no software Scilab. O principal PVC analisado trata da distribuição de calor em uma haste metálica aquecida posicionada entre duas paredes com temperaturas constantes, porém distintas, a EDO que modela o sistema é linear de segunda ordem não homogênea e contém o coeficiente de transferência de calor, específico do sistema, o qual leva em consideração as transferências por convecção e por condução presentes no sistema. Foi utilizado o método dos coeficientes indeterminados para determinar a solução analítica do PVC, já para solução numérica utilizou-se o método das diferenças finitas (MDF), substituindo-se as derivadas da EDO original por fórmulas de diferenças finitas, obtendo assim, um conjunto de equações algébricas simultâneas, resolvido pelo método da Eliminação de Gauss. Os resultados numéricos foram comparados com a solução analítica, obtendo-se erro relativo baixo, o que mostra a eficiência do resultado numérico.

**Palavras-chave:** Problemas de valor de contorno. Equações diferenciais ordinárias. Haste aquecida. Simulação numérica. Método das diferenças finitas.

## ABSTRACT

This work aimed to carry out a study on boundary value problems (PVC), applying analytical and numerical resolution techniques of the ordinary differential equations (EDO) that model the analyzed PVC's and perform the comparison between the results obtained, with the numerical simulation being performed in Scilab software. The main analyzed PVC deals with the heat distribution in a heated metal rod positioned between two walls with constant, but distinct temperatures, the EDO that models the system is inhomogeneous second order linear and contains the system-specific heat transfer coefficient, which takes into account the convection and conduction transfers present in the system. The method of indeterminate coefficients was used to determine the analytical solution of PVC, while for numerical solution the finite difference method (MDF) was used, replacing the derivatives of the original EDO with finite difference formulas, thus obtaining a set of simultaneous algebraic equations, solved by the Gaussian Elimination method. The numerical results were compared with the analytical solution, obtaining a low relative error, which shows the efficiency of the numerical result.

**Key-words:** Boundary value problems. Ordinary differential equations. Heated rod. Numerical simulation. Finite difference method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação geométrica das diferenças progressiva ( $d_{pro}$ ), centrada ( $d_{ce}$ ) e regressiva ( $d_{re}$ ) em comparação com a derivada exata ( $d_{ex}$ ) da função $f(x)$ . . . . .	31
Figura 2 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.1), considerando espaçamento de 0,1. . . . .	40
Figura 3 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.1), ao considerar espaçamento de 0,001. . . . .	41
Figura 4 – Haste aquecida pelo posicionamento entre paredes com temperatura constante e distintas. . . . .	42
Figura 5 – Solução analítica da temperatura conforme o comprimento da haste. . . . .	45
Figura 6 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.33), ao considerar espaçamento de 2 m. . . . .	48
Figura 7 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.33), ao considerar espaçamento de 0,2 m. . . . .	49

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultado numérico $y_i$ , analítico $f(x_i)$ e erro relativo ( $ER$ ) em cada ponto $(x_i)$ ao considerar 10 subintervalos. . . . .	39
Tabela 2 – Maior erro relativo ( $ER$ ) obtido na simulação de diferentes valores de subintervalos $n$ no intervalo $[0, 1]$ com espaçamentos $h$ . . . . .	40
Tabela 3 – Resultado numérico $y_i$ , analítico $f(x_i)$ e erro relativo ( $ER$ ) em cada ponto $(x_i)$ ao considerar 5 subintervalos. . . . .	47
Tabela 4 – Maior erro relativo ( $ER$ ) obtido na simulação de diferentes valores de subintervalos $n$ no intervalo $[0, 10]$ com espaçamentos $h$ . . . . .	48
Tabela 5 – Coeficientes da diferença centrada . . . . .	61
Tabela 6 – Coeficientes das diferenças progressiva e regressiva, derivada de ordens 1 e 2 . . . . .	62
Tabela 7 – Coeficientes das diferenças progressiva e regressiva, derivada de ordens 3 e 4 . . . . .	63

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>13</b>
2.1	OBJETIVO GERAL	13
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
<b>3</b>	<b>JUSTIFICATIVA</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>15</b>
4.1	HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	15
4.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	16
4.2.1	Classificação pelo tipo	17
4.2.2	Classificação pela ordem	18
4.2.3	Classificação pela linearidade	18
4.2.4	Solução de equações diferenciais	19
4.3	PROBLEMA DE VALOR INICIAL	20
4.4	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO	21
4.5	SOFTWARE SCILAB	21
4.6	ERROS	22
<b>5</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS</b>	<b>23</b>
5.1	MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUÇÃO DE PVC	23
5.1.1	Teoria preliminar das EDO's de Ordem Superior	23
5.1.2	Método dos coeficientes constantes - EDO homogênea	25
5.1.3	Método dos coeficientes indeterminados: Abordagem por Superposição	28
5.2	MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE PVC	29
5.2.1	Método das Diferenças Finitas	29
5.2.2	Solução de sistemas lineares: Eliminação de Gauss	34
<b>6</b>	<b>ESTUDOS DE CASO</b>	<b>36</b>
6.1	PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO LINEAR	36
6.1.1	Características do Problema	36
6.1.2	Resolução Analítica	36
6.1.3	Resolução Numérica	37
6.2	DISTRIBUIÇÃO DE CALOR EM HASTE METÁLICA AQUECIDA	41
6.2.1	Características do Problema	41

6.2.2 Resolução Analítica . . . . .	44
6.2.3 Resolução Numérica . . . . .	45
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>APÊNDICE A CÓDIGO COMPUTACIONAL PVC LINEAR . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>APÊNDICE B CÓDIGO COMPUTACIONAL PVC HASTE AQUE- CIDA . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>ANEXO A TABELA DE COEFICIENTES PARA DIFERENÇA CEN- TRADA . . . . .</b>	<b>61</b>
<b>ANEXO B TABELA DE COEFICIENTES PARA DIFERENÇAS PRO- GRESSIVA E REGRESSIVA . . . . .</b>	<b>62</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho será realizado um estudo sobre a resolução analítica e numérica de problemas de valor de contorno representados por uma equação diferencial ordinária (EDO), utilizando o método das diferenças finitas com o auxílio do software Scilab. Para alcançar o objetivo, primeiramente, será feita uma revisão bibliográfica sobre equações diferenciais, problemas de valor de contorno, além do estudo sobre os métodos analíticos e numéricos utilizados para resolução de problemas de valor de contorno.

A matemática pode ser aplicada à diversas áreas do conhecimento e uma de suas aplicações é na modelagem de sistemas ou processos. Tanto sistemas simples quanto complexos podem ser modelados matematicamente e, na maioria dos casos, utilizam-se equações diferenciais para representar de forma aproximada e simplificada como ocorre o processo real (THOMAS, 2013).

Um modelo matemático relaciona as variáveis dependentes e independentes do sistema analisado, os parâmetros que refletem as propriedades do sistema e as funções forçantes, que são as interferências externas. A expressão que representa o modelo matemático pode ser simples como uma função algébrica ou então composta por equações diferenciais, algumas vezes conhecidas e com solução analítica, outras vezes equações mais complicadas que requerem métodos computacionais para serem resolvidas (CHAPRA, 2013).

Dessa forma, o estudo das equações diferenciais é de extrema importância, já que não se limitam à área da matemática e aparecem com frequência em modelos que descrevem fenômenos como mecânica de fluidos, fluxo de calor, reações químicas e nucleares e estão presentes na economia, na biologia, entre outras ciências (LOPES; RUGGIERO, 1996).

A solução de um problema pode ser encontrada de forma analítica, experimental ou numérica. A resolução analítica é utilizada nos casos em que é conhecida a lei que rege o sistema, ou seja, existe uma teoria desenvolvida sobre o tipo de sistema e pode ser representado por uma equação. Nesses casos a solução é encontrada por meio da manipulação da equação, baseando-se nas técnicas de cálculo, obtendo assim uma solução exata, de uma equação aproximada. Já na resolução experimental faz-se a coleta e a análise dos dados reais do problema, dessa forma obtém-se uma solução que realmente representa o problema sem aproximações, porém a desvantagem é que esse método pode ser demorado e de alto custo, sendo assim, nem sempre é viável, além disso, esse método é mais suscetível a erros (MAGALHÃES, 2001).

Em muitos casos de importância prática a equação que representa o sistema ainda

não está disponível ou não possui solução analítica, nestes casos os métodos numéricos são alternativas para solucioná-las. Os métodos numéricos utilizam operações lógicas e aritméticas e pelo fato dos computadores executarem essas operações de forma mais rápida e eficiente esses métodos são chamados também de métodos computacionais. A resolução numérica tem a vantagem de conseguir trabalhar com um alto número de equações, além de reduzir a matemática mais avançada a operações matemáticas básicas, conseguindo encontrar detalhes práticos que por outros métodos ficariam ocultos (CHAPRA; CANALE, 2008).

Conforme Boyce e DiPrima (2012), o uso de computadores para resolução de equações diferenciais pode ser extremamente útil, pois são capazes de executar algoritmos refinados para alto nível de generalidade e eficiência. Sendo assim, alguns problemas podem ser solucionados por meio de pacotes já desenvolvidos de softwares. Caso o algoritmo não seja adequado, pode-se criar uma nova sequência de algoritmos que solucionem o problema, para isso o conhecimento sobre programação é necessário.

Quando tem-se o intuito de especificar a solução de uma equação diferencial que representa um problema é necessário conhecer condições auxiliares sobre o sistema. Assim, quando são conhecidas as condições iniciais do problema, este é denominado problema de valor inicial (PVI), mas quando as condições dadas são em valores diferentes da variável independente tem-se um problema de valor de contorno (PVC). Os PVC's aparecem naturalmente quando se integra no espaço e requerem técnicas de solução diferenciadas, algumas dessas relacionadas com as técnicas utilizadas em PVI's outras completamente distintas (CHAPRA, 2013).

O método shooting e o método das diferenças finitas são métodos numéricos que podem ser usados na resolução de problemas de contorno, mas o método das diferenças finitas (MDF) é uma alternativa mais eficiente, o qual baseia-se na substituição das derivadas na equação original, transformando uma equação diferencial linear em um conjunto de equações algébricas simultâneas. O MDF tem a vantagem de ser fácil de programar para sistemas em que utiliza-se a discretização por malha uniforme. Com intuito de facilitar a resolução são utilizados softwares de computação numérica, como o Scilab por exemplo (CHAPRA; CANALE, 2008).

O Scilab é um software livre desenvolvido em 1990 e disponível desde 1994, é uma linguagem de programação de alto nível em que as variáveis são matrizes. Além disso, contém um poderoso ambiente computacional para aplicações científicas e é composto por centenas de funções matemáticas e ferramentas (URROZ, 2001).

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre problemas de valor de contorno e comparar soluções analíticas e numéricas.

### 2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Fazer um estudo teórico preliminar sobre equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem;
- Definir os problemas de valor de contorno que serão abordados;
- Analisar e aplicar as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias adequadas para cada problema;
- Aplicar o método numérico às equações diferenciais que representam os problemas abordados;
- Utilizar o software Scilab para as simulações numéricas.
- Comparar os resultados obtidos analítica e numericamente.

### 3 JUSTIFICATIVA

As equações diferenciais são amplamente aplicadas em situações do cotidiano por meio da modelagem matemática de sistemas físicos que representam fenômenos de diversas áreas do conhecimento. Dentre as situações em que aparecem essas equações estão os circuitos elétricos, condução de calor, crescimento e decréscimo de populações, comportamento elástico de molas, movimento de objeto sob influência da gravidade, reações químicas, além de outras situações aplicadas à engenharia. Ao analisar as situações reais, percebe-se que muitas delas são definidas por condições de contorno, dessa forma torna-se importante o estudo destes problemas que, geralmente, são pouco abordados nos cursos de cálculo. Além disso, a aplicação dos conceitos estudados em disciplinas como cálculo numérico e cálculo diferencial e integral, aliados à estatística e a uma linguagem de programação, têm grande importância para o desenvolvimento acadêmico, produzindo desenvolvimento econômico e social pois promove a solução de problemas reais.

## 4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 4.1 HISTÓRICO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O conhecimento sobre o desenvolvimento das equações diferenciais é importante, já que está fortemente ligado ao desenvolvimento geral da matemática. Sabe-se que as leis fundamentais que regem problemas da física, da mecânica, da eletricidade e da termodinâmica foram formuladas baseadas, geralmente, em observações empíricas sobre a variação das propriedades e dos sistemas, essas leis, dadas em termos de variações espaciais e temporais, mostram mecanismos de variações. Assim, quando combinadas com outras leis, como a da continuidade da energia, da massa e do momento, geram equações diferenciais (CHAPRA, 2013).

Segundo Bassanezi e Ferreira (1988), foram justamente os problemas observados da mecânica que estimularam o estudo e o aperfeiçoamento das equações diferenciais, como o movimento dos planetas e o estudo da oscilação do pêndulo, tais problemas foram estudados por Leonardo da Vinci (1452 - 1519), Johannes Kepler (1571 - 1630), Galileu Galilei (1564 - 1642) e Christiaan Huygens (1629 - 1695). No entanto, não conseguiram modelar os fenômenos, pois naquela época faltava-lhes a teoria matemática sobre as equações diferenciais que foi desenvolvida posteriormente.

Foram Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que iniciaram os estudos sobre equações diferenciais propriamente ditas, estudos estes iniciados no século XVII. Newton fez descobertas interessantes sobre cálculo e sobre as leis da mecânica, de modo que seu desenvolvimento do cálculo forneceu a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII. Além disso, Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem em três tipos, sendo elas,  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ,  $\frac{dy}{dx} = f(y)$ ,  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , então desenvolveu um método utilizando séries infinitas para resolver o último tipo, no qual  $f(x, y)$  é um polinômio com variáveis  $x$  e  $y$  (BOYCE, 2012).

Leibniz, um autodidata, chegou aos resultados fundamentais do cálculo um pouco depois de Newton, porém foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Como compreendia o poder de uma boa notação, criou a notação para derivada  $\frac{dy}{dx}$  e o símbolo de integral utilizado atualmente. Além do mais, descobriu o método de separação de variáveis, redução de equações homogêneas a equações separáveis e também o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694. Posteriormente, os irmãos Jakob e Johann Bernoulli auxiliados pelo cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica, formulando-os como equações diferenciais (BOYCE, 2012).

Leonhard Euler, o maior matemático do século XVIII, foi aluno de Johann Bernoulli, ele se interessava por todas as áreas da matemática e muitos campos de

aplicação. Euler identificou as condições necessárias para que as equações diferenciais de primeira ordem fossem exatas, desenvolveu a teoria sobre fatores integrantes, além de encontrar a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, posteriormente estendendo para equações lineares não homogêneas. Também propôs um procedimento numérico para aproximação de problema de valor inicial de primeira ordem (BASSANEZI; FERREIRA, 1988).

Além desses matemáticos importantes, Joseph-Louis Lagrange fez um importante trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações e mostrou que a solução geral de uma equação linear homogênea de ordem  $n$  é uma combinação linear  $n$  de soluções independentes. Na mesma época, Pierre-Simon de Laplace desenvolveu a transformada de Laplace, que é fundamental em ramos da física matemática, entretanto sua utilização na resolução de equações diferenciais foi descoberta posteriormente (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

Ao final do século XVIII, muitos métodos elementares de resolução de equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos, por isso a resolução explícita perdeu destaque e as equações diferenciais que não haviam sido solucionadas por métodos analíticos estimularam a investigação de métodos de aproximação numérica. O desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou a quantidade de problemas que podem ser investigados por métodos numéricos (BOYCE, 2012).

No século XX foram criados métodos geométricos ou topológicos, desenvolvidos principalmente para equações não-lineares, buscando-se observar o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, mas quando deseja-se maiores detalhes, estes podem ser obtidos por aproximações numéricas. Apesar de tantos estudos ao longo dos tempos, as equações diferenciais ainda geram problemas importantes e que despertam interesses nos pesquisadores e matemáticos (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

## 4.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Com o intuito de compreender, analisar e solucionar problemas envolvendo equações diferenciais é necessário conhecer alguns conceitos envolvidos no assunto, por isso esta seção aborda os conceitos, definições e terminologias utilizadas no decorrer do estudo.

Uma equação diferencial é uma lei que relaciona determinada função com suas derivadas e solucionar a equação diferencial é encontrar a função que a satisfaz. Há duas formas de representar a derivada de uma função, a derivada da função  $y = f(x)$  é representada por  $y'$  na notação de Lagrange ou por  $\frac{dy}{dx}$  na notação de Leibniz. Conforme Zill e Cullen (2007), define-se:

**Definição 4.1** *Uma equação diferencial é uma equação composta por derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis*

*independentes.*

Existem classificações variadas para as equações diferenciais, as quais podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

#### 4.2.1 Classificação pelo tipo

Na classificação quanto ao tipo tem-se as equações diferenciais ordinárias e as parciais, de acordo com Zill (2012), denomina-se equação diferencial ordinária (EDO) uma equação que contém somente derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, como por exemplo,

$$\frac{dy}{dx} = 5y, \quad (4.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x, \quad (4.2)$$

$$\frac{dy}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - 2x = 0. \quad (4.3)$$

Observa-se que em (4.1) há uma variável independente  $x$  e uma variável dependente  $y$ , assim como em (4.2). Porém, a EDO em (4.3) contém uma variável independente  $t$  e duas variáveis dependentes  $x$  e  $y$ .

Quando a equação apresenta derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é denominada equação diferencial parcial (EDP) (ZILL, 2012).

Como exemplos de EDP's têm-se,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.6)$$

Nota-se que em (4.4) há duas variáveis dependentes  $u$  e  $v$  e duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ . Enquanto em (4.5) há uma variável dependente  $u$  e duas variáveis independentes  $x$  e  $y$ , assim como na equação (4.6).

### 4.2.2 Classificação pela ordem

A ordem de uma EDO ou EDP é definida pela derivada mais alta presente na equação. Dessa forma, pode-se classificar (4.1) e (4.3) como equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e (4.2) como equação diferencial ordinária de segunda ordem (ZILL, 2012).

Segundo Boyce e DiPrima (2012), uma equação diferencial ordinária  $n$ -ésima ordem com uma variável dependente  $y$  pode ser representada da seguinte forma,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.7)$$

onde  $F$  é uma função de valores reais com  $n + 2$  variáveis em que  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ .

Considera-se que é possível encontrar a solução de uma equação diferencial na forma descrita em (4.7) e que esta solução é única, apesar de existir algumas exceções. Desse modo, pode-se representar a derivada de maior ordem em função das  $n + 1$  variáveis remanescentes de  $F$ , obtendo-se,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (4.8)$$

onde  $f$  é uma função contínua de valores reais.

A equação (4.8) é chamada forma normal de  $F$ . Assim, a forma normal das equações de primeira e segunda ordem são dadas, respectivamente, por,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'). \quad (4.9)$$

A fim de solucionar uma EDO de ordem maior que um, em alguns casos pode-se fazer a redução de ordem por meio de métodos pré estabelecidos.

### 4.2.3 Classificação pela linearidade

Uma classificação fundamental de equações diferenciais é sobre sua linearidade. Conforme Boyce (2012), define-se:

**Definição 4.2** *Uma equação diferencial ordinária do tipo (4.7) é linear se  $F$  é uma função linear da variável dependente  $y$  e de suas derivadas  $y', \dots, y^{(n)}$ .*

Portanto, a forma geral de uma EDO linear de ordem  $n$  é escrita como,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0, \quad (4.10)$$

que também pode ser representada por,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (4.11)$$

onde os coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  e  $g(x)$  são polinômios na variável  $x$ .

Uma EDO é dita não linear se não satisfaz as condições anteriores, ou seja, se não pode ser escrita na forma (4.11).

Segundo Boyce (2012), a resolução de equações lineares é mais simples se comparada com equações não lineares, pois a teoria e os métodos para resolução de EDO's lineares estão bastante desenvolvidos. Sendo assim, muitos problemas que envolvem equações diferenciais não lineares são aproximados por equações lineares, processo este denominado linearização.

Uma equação linear de ordem  $n$  é dita homogênea se  $g(x) = 0$  em (4.11), ou seja,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \quad (4.12)$$

caso contrário diz-se que a EDO é não-homogênea.

#### 4.2.4 Solução de equações diferenciais

Ao tratar de um problema que envolve equações diferenciais tem-se como objetivo solucioná-lo, portanto é necessário conhecer como se define uma solução, de acordo com Boyce (2012), a solução de uma EDO é dada por,

**Definição 4.3** *A solução de uma EDO na forma da equação (4.8) é toda função  $\phi$  definida em um intervalo  $I$ , com ao menos  $n$  derivadas contínuas em  $I$ , que satisfaz,*

$$\phi^n(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)),$$

para todo  $x$  que pertence a  $I$ .

Portanto, encontrar a solução de uma EDO significa encontrar uma função que a satisfaz, observando que não é possível pensar em uma solução sem definir o intervalo, conhecido por intervalo de definição, intervalo de existência, intervalo de validade ou domínio da solução, este intervalo pode ser aberto, fechado ou até mesmo infinito. Vale ressaltar que uma equação diferencial normalmente possui infinitas soluções, mas que as soluções associadas a determinado parâmetro podem ser agrupadas, formando assim uma família de soluções, na qual a função nula, chamada solução trivial, está inserida (ZILL, 2012).

Quando a EDO não depende de parâmetros arbitrários encontra-se uma solução particular, de forma que a solução geral é dada pelo conjunto de todas as soluções. Na maioria das vezes deseja-se determinar um único elemento da família de soluções, por isso uma equação diferencial é normalmente acompanhada por condições auxiliares, para que a solução encontrada seja específica (CHAPRA, 2013).

Uma equação diferencial juntamente com as condições auxiliares constituem problemas de valor inicial ou de contorno, de acordo com os valores em que as condições são especificadas, assunto este detalhado nas seções 4.3 e 4.4. Encontrar a solução de um problema de valor inicial ou de contorno é encontrar uma função que satisfaz, simultaneamente, a equação diferencial e as condições auxiliares (BRONSON; COSTA, 2008).

### 4.3 PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Conforme Zill (2012), um problema de valor inicial é composto por uma equação diferencial e por condições auxiliares sobre a função incógnita e suas derivadas em que todas são especificadas para o mesmo valor da variável independente. Por exemplo, a equação diferencial (4.11), definida em um intervalo  $I$ , contendo  $x_0$ , juntamente com as condições iniciais para o ponto  $x_0$ , definidas por  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ , geram um problema de valor inicial (PVI) que pode ser expresso como,

$$\begin{cases} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (4.13)$$

A ordem de um PVI é dada de acordo com a ordem da EDO que o compõe, por exemplo, um PVI de primeira ordem é definido por,

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Encontrar a solução de um PVI de ordem  $n$  definido por (4.13) envolve o uso de uma família a  $n$  parâmetros de soluções da equação diferencial dada, aplicando as  $n$  condições iniciais de  $x_0$ , encontrando assim, a solução particular em algum intervalo  $I$  em que o ponto inicial  $x_0$  está inserido (ZILL, 2012).

De acordo com Zill (2012), ao resolver um problema de valor inicial que envolve equações diferenciais, a existência e unicidade de soluções é garantida pelo seguinte teorema,

**Teorema 4.4** *Sejam  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  e  $g(x)$  contínuas em um intervalo  $I$  e seja  $a_n(x) \neq 0$  para todo  $x$  em  $I$ . Se  $x = x_0$  for um ponto qualquer nesse intervalo, então existe uma única solução  $y(x)$  do PVI (4.13) nesse intervalo.*

A partir do Teorema 4.4, dado um PVI, é possível verificar se o PVI apresenta solução e, além disso, se a solução é única. Sendo assim, ao trabalhar com um problema que envolve um PVI, antes de iniciar a resolução é importante verificar se esse satisfaz as condições do Teorema 4.4.

#### 4.4 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO

Um problema de valor de contorno (PVC) é composto por uma equação diferencial linear de segunda ordem ou ordem superior, sujeita às condições auxiliares, denominadas condições de contorno. Essas condições são necessárias para determinar as constantes de integração que resultam no processo de resolução da EDO (CHAPRA, 2013).

Conforme Zill e Cullen (2007), um problema de valor de contorno composto por uma equação diferencial de  $n$ -ésima ordem requer  $n$  condições de contorno, as quais são especificadas em diferentes pontos da variável independente, assim um PVC de ordem  $n$  é dado por,

$$\begin{cases} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_{n-1}) = y_{n-1}, \end{cases} \quad (4.15)$$

onde  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  são constantes reais. Um PVC dado na forma (4.15) e que satisfaz as condições do Teorema de Existência e Unicidade 4.4 pode apresentar várias soluções, uma única solução ou nenhuma solução.

Existem vários tipos de condições de contorno utilizadas na engenharia e na ciência, entre elas têm-se a condição de contorno de Dirichlet e a de Neumann, a primeira é uma condição fixa e é especificada para valores da função, enquanto a segunda é dada para valores da derivada da função. Além dessas condições de contorno, utiliza-se também a condição de contorno mista, na qual algumas das condições são dadas para um valor da função e as outras para um valor da derivada (GIACOMINI, 2009).

Problemas de valor de contorno aparecem em casos em que deseja-se, por exemplo, determinar a posição ou a velocidade de um corpo em queda, frequente nos casos em que a variável tempo aparece. Todavia, os PVC's são mais comuns quando integra-se no espaço, como por exemplo, em uma simulação da distribuição de temperatura em estado estacionário por uma haste fina e longa posicionada entre duas paredes com temperaturas distintas (CHAPRA, 2013).

#### 4.5 SOFTWARE SCILAB

A sociedade atual vem se desenvolvendo de modo acelerado e esse desenvolvimento requer o aperfeiçoamento tecnológico constante, pois faz-se necessária a realização de processos e a execução de tarefas com alta complexidade, repetição eficiente ou precisão, de forma extremamente ágil. Assim, a utilização de máquinas e computadores é essencial, mas, para que o computador consiga coletar as informações, processá-las e fornecer um resultado coerente são indispensáveis programas capazes de utilizar os recursos da máquina e realizar essas operações, um exemplo desse tipo de programa é o Scilab (LOPES, 2004).

O Scilab (Scientific Laboratory) é um software disponível gratuitamente, com um ambiente gráfico utilizado para cálculo científico e uma linguagem de programação estruturada própria. Desenvolvido desde 1990 por pesquisadores na França, com intuito de ser um sistema aberto que permitisse ao usuário definir novos tipos de dados e operações, disponibilizando centenas de funções matemáticas e a possibilitando a interação com outros programas. Um software de uso internacional, tanto para fins acadêmicos como industriais, sendo por isso, uma plataforma com atualizações e aperfeiçoamentos constantes (URROZ, 2001).

Todos os softwares, assim como o Scilab, baseiam-se em algoritmos para construção de uma representação lógica a ser instruída ao computador. Assim, programar é o ato de construir algoritmos, que são a descrição, de forma lógica, das etapas a serem executadas para realização de determinada tarefa, compostos por uma série de operações primitivas conectadas e bem definidas, sobre um conjunto de objetos. No Scilab, um conjunto de comandos em um arquivo, definido por algoritmos, é chamado *script*, um código computacional executado em ordem sequencial, como se cada algoritmo fosse individualmente digitado na linha de comandos do Scilab (LOPES, 2004).

#### 4.6 ERROS

Processos de simulação matemática ou numérica envolvem inúmeras etapas de manipulação de dados ou valores, sendo inevitável o surgimento de erros ou incertezas que interferem no resultado final. Nesse sentido, faz-se necessária a análise dos erros inerentes ao processo a fim de validar o método utilizado (CUNHA, 2000).

Ao realizar uma simulação numérica para determinada situação, assume-se erros na modelagem do problema, erros de truncamento e erros de arredondamento. Os erros na modelagem são adquiridos ao representar a situação por modelo matemático não adequado ou pela utilização de dados experimentais errôneos. Os erros de truncamento e arredondamento ocorrem ao representar um número infinito por um número finito, situação necessária para realização das operações, erros esses reduzidos com a utilização de instrumentos computacionais (CUNHA, 2000).

Conforme Lopes e Ruggiero (1996), o erro pode ser expresso como erro absoluto (EA), obtido pela diferença entre o valor exato ( $x$ ) e o valor aproximado ( $\bar{x}$ ),  $EA = |x - \bar{x}|$ , mas, algumas vezes o erro absoluto não é suficiente para avaliar a precisão do erro, então utiliza-se o erro relativo (ER), o qual leva em consideração a ordem de grandeza dos números envolvidos e é calculado por,

$$ER = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}. \quad (4.16)$$

## 5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção serão abordados os métodos de resolução utilizados para problemas de valores de contorno, os métodos analíticos e numéricos. Algumas das técnicas utilizadas envolvem métodos semelhantes aos empregados para solucionar PVI's, outras são completamente distintas.

### 5.1 MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUÇÃO DE PVC

Com o objetivo de determinar as soluções, nas seções seguintes será feita uma abordagem da teoria preliminar sobre as equações diferenciais de ordem superior, dos métodos analíticos utilizados para resolução de EDO's de primeira e segunda ordem lineares, abordando as equações homogêneas e as não homogêneas e os respectivos métodos de resolução.

#### 5.1.1 Teoria preliminar das EDO's de Ordem Superior

Como já definido na seção 4.2.4, a solução de uma equação diferencial linear de ordem  $n$  é dada por,

$$\phi^n(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)), \quad (5.1)$$

onde  $f$  é uma função com  $n$  variáveis e  $y = \phi(x)$  satisfaz a EDO de ordem  $n$  para todo  $x$  de um intervalo  $I$  (BOYCE; DIPRIMA, 2012).

A fim de determinar as soluções das EDO's faz-se necessário o conhecimento de alguns conceitos básicos sobre as EDO's de ordem superior, os quais são apresentados nesta seção.

**Definição 5.1** *Um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  é dito linearmente dependente em um intervalo  $I$ , se existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , não todas nulas, de modo que,*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

*para todo  $x$  no intervalo. Caso o conjunto de funções não seja linearmente dependente no intervalo, esse conjunto é dito linearmente independente (ZILL, 2012).*

Com intuito de exemplificar a definição, considera-se um conjunto de duas soluções linearmente dependente, então,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0, \quad (5.2)$$

com as constantes  $c_1$  e  $c_2$  não nulas simultaneamente. Assim, considerando  $c_1 \neq 0$ ,

$$f_1(x) = c_2 \frac{f_2(x)}{c_1}, \quad (5.3)$$

ou seja, a função  $f_1$  é um múltiplo constante de  $f_2$ . Desse modo, conclui-se que um conjunto com duas soluções é linearmente dependente quando uma das funções é um múltiplo constante da outra no intervalo (ZILL, 2012).

Estendo esse conceito para um conjunto de funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ , diz-se que esse conjunto é linearmente dependente se, em um intervalo  $I$ , pelo menos uma das funções pode ser expressa como uma combinação linear das funções remanescentes.

Seja um conjunto de  $n$  soluções de uma EDO linear homogênea de ordem  $n$ , então utiliza-se um determinante, chamado wronskiano, para verificar se as soluções são linearmente independentes.

**Definição 5.2** *Considerando que cada uma das funções  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  tenha pelo menos  $n - 1$  derivadas, então, o determinante definido por,*

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_3' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & f_3 & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

onde as linhas representam as derivadas, é chamado de wronskiano das funções.

O wronskiano é utilizado para verificar se as soluções de uma EDO são linearmente independentes. Além do mais, quando trata-se das soluções de uma EDO não homogênea, vale o teorema do princípio da superposição, o qual estabelece que a soma de duas ou mais soluções é também uma solução, conforme o Teorema 5.3.

**Teorema 5.3** *Sejam  $y_1, y_2, \dots, y_k$  soluções da equação diferencial homogênea de ordem  $n$  definida em (4.12), em um intervalo  $I$ . Então, a combinação linear,*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x),$$

onde  $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, k$  são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Do Teorema 5.3 segue que um múltiplo constante de uma solução de uma EDO homogênea é também uma solução. Além de que uma EDO linear homogênea sempre admite a solução trivial  $y = 0$ .

A partir do wronskiano, definido em 5.2 pode-se estabelecer o teorema de independência linear.

**Teorema 5.4** *O conjunto  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $n$  soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem  $n$ , definida em (4.12), é linearmente independente em  $I$  se e somente se o wronskiano dessas funções é diferente de zero.*

A partir do Teorema 5.4, o conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes da EDO homogênea (4.12) é chamado de conjunto fundamental de soluções no intervalo. Definido o conjunto fundamental de soluções, pode-se determinar a solução geral da equação no intervalo  $I$ , a qual é dada por,

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x), \quad (5.4)$$

onde  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  são constantes arbitrárias.

Uma função  $y_p$  é chamada solução particular da EDO não-homogênea quando satisfaz a equação (4.11). Assim, se  $y_p$  é qualquer solução particular de (4.11) em um intervalo  $I$ , e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  é um conjunto fundamental de soluções da EDO homogênea (4.12) em  $I$ , então, a solução geral da equação no intervalo é dada por,

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p, \quad (5.5)$$

onde  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  são constantes arbitrárias.

A combinação linear de  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$  em (5.5) é chamada solução complementar ( $y_c$ ) da EDO. Portanto, a solução geral de uma EDO não homogênea é representada por,

$$y = y_p + y_c. \quad (5.6)$$

### 5.1.2 Método dos coeficientes constantes - EDO homogênea

Dentre as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, encontram-se as EDO's com coeficientes constantes. O método será desenvolvido de acordo com Zill (2012), para isso considera-se uma equação linear homogênea, da forma,

$$ay' + by = 0, \quad (5.7)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes não nulas.

Dividi-se todos os membros da EDO em (5.7) pelo coeficiente dominante e, por meio do método de separação de variáveis, obtém-se  $y' = ky$ , onde  $k$  é uma constante não nula.

Desse modo, observa-se que a derivada da equação é um múltiplo de si mesma, esse fato ocorre apenas para uma equação exponencial do tipo  $e^{mx}$ . Então, substituindo  $y = e^{mx}$  e  $y' = me^{mx}$  em (5.7), tem-se,

$$ame^{mx} + be^{mx} = 0, \quad (5.8)$$

a qual pode ser reescrita como,

$$e^{mx}(am + b) = 0. \quad (5.9)$$

Como  $e^{mx}$  não se anula para valores reais de  $x$ , a equação (5.9) é verdadeira somente quando  $m$  é uma solução da equação polinomial  $am + b = 0$ , assim, para esse único valor de  $m$ , a equação  $y = e^{mx}$  é solução da equação diferencial (5.7).

Esse procedimento descrito para uma EDO de primeira ordem pode também ser aplicado para solucionar EDO's de ordens superiores, em particular para uma EDO de segunda ordem.

Uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes pode ser escrita da forma,

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (5.10)$$

Conforme Zill e Cullen (2007), a solução da EDO (5.10) pode ser encontrada buscando-se uma solução exponencial da forma  $y = e^{mx}$ , então  $y' = me^{mx}$  e  $y'' = m^2e^{mx}$ , substituindo-se em (5.10), tem-se,

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0, \quad (5.11)$$

a qual pode também ser expressa por,

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0. \quad (5.12)$$

Sendo assim, como  $e^{mx}$  é diferente de zero para qualquer  $x$  pertencente aos reais, segue que  $y = e^{mx}$  será solução de 5.12 se  $am^2 + bm + c = 0$ , onde  $m$  é a raiz de,

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (5.13)$$

A equação (5.13) pode apresentar 3 tipos de soluções, sendo elas raízes reais e distintas, raízes reais e iguais ou raízes complexas, logo, serão analisados os três casos separadamente.

- **Raízes reais e distintas:** sejam  $m_1$  e  $m_2$  raízes reais distintas da equação característica (5.13), duas soluções da forma  $y_1 = e^{m_1x}$  e  $y_2 = e^{m_2x}$  são linearmente independentes, já que,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix}, \quad (5.14)$$

$$W(y_1, y_2) = e^{m_1x}m_2e^{m_2x} - e^{m_2x}m_1e^{m_1x}, \quad (5.15)$$

$$W(y_1, y_2) = m_2e^{m_1x+m_2x} - m_1e^{m_1x+m_2x}, \quad (5.16)$$

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \quad (5.17)$$

para todo  $x$ . Assim, pelo Teorema 5.4,  $y_1 = e^{m_1x}$  e  $y_2 = e^{m_2x}$  formam a solução da EDO (5.10), sendo a solução geral dada por,

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}. \quad (5.18)$$

- **Raízes reais e iguais:** neste caso  $m_1 = m_2$ , então uma das soluções particulares é dada por  $y_1 = e^{m_1x}$ . Para formar o conjunto fundamental de soluções, é necessário buscar uma segunda solução de modo que seja linearmente independente com a primeira. Assim, será utilizado o método de redução de ordem, onde a segunda solução é dada por,

$$y_2 = e^{m_1x} \int \frac{e^{-(b/a)x}}{e^{2m_1x}} dx, \quad (5.19)$$

como  $m_1 = -b/2a$ , a equação (5.19) pode ser reorganizada para,

$$y_2 = e^{m_1x} \int dx \quad (5.20)$$

$$y_2 = xe^{m_1x}. \quad (5.21)$$

Pelo Teorema 5.4, podemos mostrar que o conjunto das soluções  $y_1, y_2$  é linearmente independente, pois,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{m_1x} & xe^{m_1x} \\ m_1e^{m_1x} & e^{m_1x} + xm_1e^{m_1x} \end{vmatrix}, \quad (5.22)$$

$$W(y_1, y_2) = e^{m_1x}(e^{m_1x} + xm_1e^{m_1x}) - xe^{m_1x}m_1e^{m_1x}, \quad (5.23)$$

$$W(y_1, y_2) = e^{2m_1x}, \quad (5.24)$$

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \quad (5.25)$$

para todo  $x$ . Desse modo, a solução geral da EDO (5.10) é dada por,

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}. \quad (5.26)$$

- **Raízes complexas:**  $m_1$  e  $m_2$  são dadas por  $m_1 = \alpha + i\beta$  e  $m_2 = \alpha - i\beta$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são reais e maiores que zero e  $i^2 = -1$ , com isso a solução geral é dada por,

$$y = c_1e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (5.27)$$

Como é preferível trabalhar com funções reais, em vez de exponenciais complexas, utiliza-se a fórmula de Euler, segundo a qual,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta, \quad (5.28)$$

onde  $\theta$  é um número real qualquer.

A partir da equação (5.27) e da fórmula de Euler (5.28), mostra-se que as funções  $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  e  $e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)$  são soluções para a equação diferencial em (5.10).

O wronskiano das soluções  $y_1$  e  $y_2$ , conforme o Teorema 5.4, é dado por,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x} \sin(\beta x) & \alpha e^{\alpha x} \sin(\beta x) + \beta e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{vmatrix} \quad (5.29)$$

$$W(y_1, y_2) = \beta e^{2\alpha x} \quad (5.30)$$

$$W(y_1, y_2) \neq 0, \quad (5.31)$$

para todo  $x$ , pois  $\beta > 0$ .

Assim,  $y_1, y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções linearmente independentes e a solução geral da EDO pode ser expressa por,

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)). \quad (5.32)$$

Para os três casos as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas por meio das condições de contorno apresentadas no problema.

### 5.1.3 Método dos coeficientes indeterminados: Abordagem por Superposição

Tratando-se de EDOs não-homogêneas, conforme a equação (5.33), Zill e Cullen (2007) apresentam o método dos coeficientes indeterminados, com uma abordagem por superposição como uma forma de solucionar EDO's não homogêneas com coeficientes constantes apresentadas da forma,

$$ay'' + by' + cy = g(x), \quad (5.33)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes não nulas e  $g(x)$  é uma função dependente da variável  $x$ .

O método dos coeficientes indeterminados limita-se aos casos em que  $g(x)$  é uma função constante, polinomial, exponencial, seno, cosseno ou, ainda, uma combinação linear dessas funções, apresentando-se da forma  $k, x^n, x^n e^{\alpha x}, x^n e^{\alpha x} \cos(\beta x)$  e  $x^n e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  em que  $\alpha$  e  $\beta$  pertencem aos reais e  $n$  é um inteiro não negativo. Já para os casos em que  $g(x)$  são funções do tipo,

$$g(x) = \ln x, \quad (5.34)$$

$$g(x) = 1/x, \quad (5.35)$$

$$g(x) = \operatorname{tg} x, \quad (5.36)$$

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x, \quad (5.37)$$

o método dos coeficientes indeterminados não se aplica, sendo necessária a utilização de outro método, o qual baseia-se na variação dos parâmetros. Vale ressaltar que funções constantes, polinomiais, exponenciais, senos e cossenos possuem uma importante propriedade de que as derivadas das somas e produtos continuam sendo somas e produtos de funções do mesmo tipo (ZILL, 2012).

A solução geral da EDO (5.33) é dada por  $y = y_c + y_p$ , onde  $y_c$  é determinada por meio do método dos coeficientes constantes apresentado na seção 5.1.2 e  $y_p$  é uma solução particular da EDO (5.33), tem-se que  $ay_p'' + by_p' + cy_p = g(x)$ , desse modo pode-se considerar que  $y_p$  tem a mesma forma que  $g(x)$  (ZILL, 2012).

Também é importante observar se a solução particular contém os mesmos termos encontrados na solução complementar, caso isso ocorra é necessário multiplicar essa solução particular por  $x^n$ , onde  $n$  é o menor inteiro positivo que elimina a duplicidade dos termos (ZILL; CULLEN, 2007).

## 5.2 MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE PVC

Os métodos numéricos são técnicas pelas quais os problemas matemáticos podem ser formulados e resolvidos, por meio de aproximações, com operações lógicas e aritméticas, utilizados para solucionar problemas com grande número de equações, equações diferenciais ordinárias em que a solução analítica é muito trabalhosa de ser obtida ou quando não é possível determiná-la. De modo geral, os métodos numéricos discretizam o domínio para tornar o problema finito e, assim, por meio de técnicas computacionais, viabilizar sua resolução (CHAPRA; CANALE, 2008).

Vale ressaltar que, enquanto a solução analítica permite determinar os valores em qualquer ponto pertencente ao domínio, os métodos numéricos se limitam a uma quantidade finita de pontos. Logo, a escolha desses pontos, denominados nós, é uma das etapas fundamentais das análises numéricas (SCHELBAUER, 2019).

Vários métodos numéricos são utilizados para a resolução de equações diferenciais, entre eles, o Método Shooting (ALVES; JUNIOR, 2016), o Método dos Elementos Finitos (JUNIOR, 2006) e o Método das Diferenças Finitas (MOHAMMADI; NADGARAN; AGIO, 2005), (RIBEIRO, 2007), (VIANA, 2018) e o Método do Reticulado de Boltzmann (CARGNELUTTI J.; GALINA, 2017), (GALINA et al., 2016), (GALINA et al., 2017). Neste trabalho será utilizado o Método das Diferenças Finitas.

### 5.2.1 Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas consiste em substituir as derivadas da EDO original do problema por fórmulas de diferenças finitas que dependem apenas da função incógnita, obtendo assim, um conjunto de equações algébricas simultâneas, que pode ser resolvido pelos métodos existentes de resolução de sistemas. Dessa forma, a solução encontrada é aproximada, porém pode se aproximar muito bem da exata (CHAPRA, 2013).

O MDF baseia-se em resolver a EDO em pontos discretos do domínio, sendo denominado malha o conjunto desses pontos discretos, os pontos podem ser igualmente

espaçados, gerando uma malha regular, mas o MDF também se aplica quando os pontos possuem espaçamento aleatório (JUNIOR, 2006). O Método das Diferenças Finitas pode ser aplicado em situações uni, bi e multidimensionais (MOHAMMADI; NADGARAN; AGIO, 2005); (ALMEIDA; COELHO; PEDROSO, 2016); (JUNIOR, 2006), no entanto neste trabalho será utilizado o sistema unidimensional.

Para aplicação do método, inicialmente faz-se uma subdivisão do intervalo de solução. De acordo com Lopes e Ruggiero (1996), considera-se um intervalo de solução  $[a, b]$ , onde  $a = x_0$  e  $b = x_n$ , então divide-se  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos iguais com comprimento  $h$ , que é obtido por  $h = (b - a)/n$ . Ao subdividir o intervalo contínuo, faz-se a discretização do domínio, obtendo-se um domínio discreto. A partir disso, pode-se definir os demais pontos  $x_k$  pertencentes ao intervalo de solução e também aproximar os valores de  $y_k$  por,

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.38)$$

$$y_k \approx y(x_k) = y(x_0 + kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.39)$$

Após aproximar os valores de  $y(x_k)$ , as derivadas de primeira ordem do problema são aproximadas por meio de diferenças finitas, as quais são obtidas, em um ponto  $x_i$ , nas formas de diferenças progressiva, centrada e regressiva, respectivamente equações (5.40), (5.41) e (5.42),

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad (5.40)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (5.41)$$

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (5.42)$$

As aproximações da derivada por meio de diferenças finitas progressiva, centrada e regressiva podem ser representadas geometricamente. A Figura 1 ilustra as aproximações da derivada por diferenças finitas juntamente com a derivada exata (ou real) no ponto  $x_i$ .

Um erro é cometido ao encontrar as derivadas a partir dessas diferenças, pois se faz uma aproximação. Sendo assim, utilizando a série de Taylor ou o polinômio de Taylor é possível expandir essas diferenças a fim de estimar o erro cometido (LOPES; RUGGIERO, 1996).

Conforme Guidorizzi (2001), dada uma função  $y(x)$  diferenciável  $n$  vezes em um intervalo  $I = [a, b]$ , onde  $x_i$  pertence a  $I$ , pode-se aproximar  $y$  pelo polinômio de Taylor, de forma que o  $n$ -ésimo polinômio de  $y$  em torno de  $x_i$  é dado por,

$$p_n(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n. \quad (5.43)$$

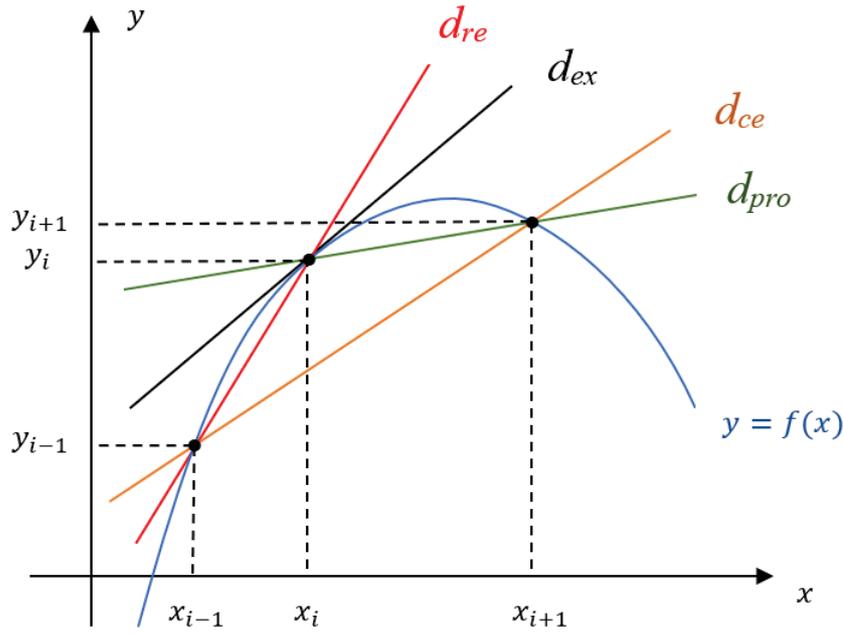


Figura 1 – Representação geométrica das diferenças progressiva ( $d_{pro}$ ), centrada ( $d_{ce}$ ) e regressiva ( $d_{re}$ ) em comparação com a derivada exata ( $d_{ex}$ ) da função  $f(x)$ .

Fonte: Os autores (2019).

O polinômio descrito na equação (5.43) é a função aproximada de  $y$  em torno do ponto  $x_i$ , onde  $p_1(x) \approx y(x)$  é uma aproximação linear,  $p_2(x) \approx y(x)$  é quadrática,  $p_3(x) \approx y(x)$  é cúbica e assim por diante.

De acordo com Lopes e Ruggiero (1996) e Guidorizzi (2001), com intuito de dimensionar o erro ao utilizar a aproximação pela diferença, considera-se um ponto  $\xi_x$  entre  $x$  e  $x_i$  de forma que, a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange pode ser expressa por,

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n + \frac{y^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_i)^{(n+1)}, \quad (5.44)$$

quando  $n = 1$ , a equação descrita em (5.44), torna-se linear, da forma,

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(\xi_x)}{2!}(x - x_i)^2, \quad (5.45)$$

a equação (5.45) no ponto  $x = x_{i+1} = x_i + h$  é dada por,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(\xi_{i+1})}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2. \quad (5.46)$$

Substituindo  $x_{i+1} - x_i = h$  na equação (5.46) e isolando  $y'(x_i)$ , obtém-se a derivada primeira,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \frac{h}{2}y''(\xi_{i+1}), \quad (5.47)$$

onde o último termo representa o erro gerado ao aproximar a derivada primeira pela diferença progressiva, erro esse da ordem de  $h$ . Então, ao aproximar os valores exatos  $y(x_i)$  e  $y(x_{i+1})$  por  $y_i$  e  $y_{i+1}$ , respectivamente, obtém-se,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (5.48)$$

De maneira análoga é possível verificar que o erro para a diferença regressiva é também da ordem de  $h$ . A fim de dimensionar a ordem do erro quando utiliza-se a diferença centrada, considera-se  $n = 2$  na equação (5.44), obtendo assim,

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi_x)}{3!}(x - x_i)^3, \quad (5.49)$$

fazendo  $x = x_{i+1}$  tem-se,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi_x)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3, \quad (5.50)$$

como  $x_{i+1} - x_i = h$ , obtém-se,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi_{i+1})}{6}h^3. \quad (5.51)$$

Da mesma forma, ao considerar  $x = x_{i-1}$ , a equação (5.49) assume a forma,

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{y'''(\xi_x)}{3!}(x_{i-1} - x_i)^3, \quad (5.52)$$

como  $x_{i-1} - x_i = h$ , tem-se,

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi_{i-1})}{6}h^3. \quad (5.53)$$

Subtraindo (5.53) de (5.51) e reorganizando o resultado obtém-se,

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{12}[y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})], \quad (5.54)$$

agora considerando a aproximação  $y(x_i) \approx y_i$  e  $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ ,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{12}[y'''(\xi_{i+1}) + y'''(\xi_{i-1})]. \quad (5.55)$$

Nesse sentido, pode-se concluir que a derivada primeira pode ser aproximada pela expressão,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (5.56)$$

O erro ao utilizar a diferença centrada é da ordem de  $h^2$ , como utiliza-se  $h < 1$  pode-se concluir que essa aproximação é mais precisa que as demais, essa precisão pode ser observada também na Figura 1, pela representação geométrica da derivada de primeira ordem (LOPES; RUGGIERO, 1996).

Após realizar a aproximação para a derivada primeira, também é necessário aproximar a derivada segunda, para isso utiliza-se novamente a série de Taylor. Considere-se  $n = 3$  na equação (5.44) e utilizam-se os pontos  $x_{i+1}$  e  $x_{i-1}$  para obter, respectivamente, as seguintes expressões,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{y^{(iv)}(\xi_{i+1})}{4!}h^4, \quad (5.57)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{y^{(iv)}(\xi_{i-1})}{4!}h^4. \quad (5.58)$$

Ao somar (5.57) e (5.58), obtém-se,

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + y''(x_i)h^2 + \frac{y^{(iv)}(\xi_{i+1})}{24}h^4 + \frac{y^{(iv)}(\xi_{i-1})}{24}h^4, \quad (5.59)$$

isolando o termo  $y''(x_i)$  tem-se,

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{24}[y^{(iv)}(\xi_{i+1}) + y^{(iv)}(\xi_{i-1})]. \quad (5.60)$$

Assim, a aproximação da derivada segunda é feita pela expressão,

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad (5.61)$$

admitindo um erro na ordem de  $h^2$ .

Trefethen (1996), apresenta os coeficientes das diferenças divididas para aproximação das derivadas de primeira ordem até quarta ordem, com várias ordens de precisão, as quais representam a ordem do erro admitido, conforme a Tabelas 5 disponível no Anexo A e as Tabelas 6 e 7 dispostas no Anexo B. Com isso, as expressões das diferenças divididas são rapidamente determinadas, a Tabela 5 contém os coeficientes das diferenças centradas, enquanto as Tabelas 6 e 7 apresentam os coeficientes da diferença progressiva, os quais são os mesmos para a diferença regressiva, alterando somente os sinais dos coeficientes.

A partir das tabelas dos coeficientes das diferenças é possível aproximar as derivadas por meio das diferenças divididas rapidamente. Por exemplo, utilizando a diferença centrada, ou seja, os coeficientes da Tabela 5, a derivada de quarta ordem com grau de precisão 4 é dada por,

$$y^{(iv)}(x_i) \approx \frac{-\frac{1}{6}y_{i-3} + 2y_{i-2} - \frac{13}{2}y_{i-1} + \frac{28}{3}y_i - \frac{13}{2}y_{i+1} + 2y_{i+2} - \frac{1}{6}y_{i+3}}{h^4}. \quad (5.62)$$

Ao utilizar a diferença progressiva, conforme a Tabela 7, a derivada de quarta ordem com grau de precisão 4 é aproximada pela expressão,

$$y^{(iv)}(x_i) \approx \frac{\frac{28}{3}y_i - \frac{112}{2}y_{i+1} + 142y_{i+2} - \frac{1219}{6}y_{i+3} + 176y_{i+4} - \frac{185}{2}y_{i+5} + \frac{82}{3}y_{i+6} - \frac{7}{2}y_{i+7}}{h^4}. \quad (5.63)$$

Para aproximar a derivada de quarta ordem com grau de precisão 4 por meio da diferença regressiva, também utiliza-se a Tabela 7, porém é necessário trocar os sinais de todos os coeficientes, obtendo,

$$y^{(iv)}(x_i) \approx \frac{-\frac{28}{3}y_i + \frac{112}{2}y_{i-1} - 142y_{i-2} + \frac{1219}{6}y_{i-3}}{h^4} + \frac{-176y_{i-4} + \frac{185}{2}y_{i-5} - \frac{82}{3}y_{i-6} + \frac{7}{2}y_{i-7}}{h^4}. \quad (5.64)$$

A diferença centrada é mais precisa, porém nem sempre se tem as informações sobre todos os pontos exigidos para a sua utilização. Então, dependendo do problema, aplica-se uma precisão mais baixa, ou ainda, utiliza-se a diferença regressiva ou progressiva.

### 5.2.2 Solução de sistemas lineares: Eliminação de Gauss

Ao utilizar o método das diferenças finitas para solucionar um PVC obtém-se um sistema de equações algébricas simultâneas e uma das técnicas para solucionar esse sistema é a Eliminação de Gauss, a qual é um dos algoritmos mais importantes atualmente e a base da resolução de equações lineares em diversos pacotes disponibilizados por softwares (CHAPRA; CANALE, 2008).

Um sistema de  $n$  equações e  $n$  incógnitas é dado por,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5.65)$$

onde os coeficientes são dados por  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , as variáveis por  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  e as constantes por  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

O sistema 5.65, de ordem  $n$ , pode ser representado na forma matricial  $Ax = b$  como,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (5.66)$$

Para encontrar a solução do sistema 5.65 basta determinar o vetor  $x$  de 5.66. Para isso, modifica-se convenientemente o sistema original 5.66, combinando equações a fim de eliminar variáveis, ou seja, realizando a triangulação da matriz  $A$  do sistema 5.66 (CHAPRA; CANALE, 2008).

Conforme Lopes e Ruggiero (1996), para realizar a triangulação aplica-se sobre as equações do sistema, uma sequência de operações elementares, como:

- i. trocar duas equações;
- ii. multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- iii. adicionar um múltiplo de uma equação a outra.

Desse modo, encontra-se um sistema linear equivalente ao original, com a matriz dos coeficientes triangular superior e com elementos da diagonal não nulos, que possui a mesma solução do sistema original.

## 6 ESTUDOS DE CASO

Neste capítulo, serão desenvolvidos dois estudos de caso representados por problemas de valor de contorno, na seção 6.1 será feito um estudo sobre um PVC linear e na seção 6.2 um estudo sobre a distribuição de calor em uma haste metálica aquecida. Serão apresentadas as características e as soluções, tanto analítica quanto numérica, de cada um dos casos.

### 6.1 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO LINEAR

Nesta seção, aborda-se o PVC descrito na equação (6.1) com o objetivo de exemplificar a aplicação do método das diferenças finitas.

#### 6.1.1 Características do Problema

O problema de valor de contorno a ser desenvolvido é representado por (LOPES; RUGGIERO, 1996),

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases} \quad (6.1)$$

Observa-se que esse PVC é composto por uma equação diferencial linear de segunda ordem e apresenta condições de contorno em dois pontos distintos, quando  $x = 0$  e  $x = 1$ .

#### 6.1.2 Resolução Analítica

A EDO que representa o PVC é linear de segunda ordem não homogênea, sendo assim pode ser resolvida analiticamente pelo método dos coeficientes indeterminados, conforme descrito na seção 5.1.3. Para isso, é necessário encontrar, primeiramente, a solução complementar, que é a solução da EDO homogênea associada a EDO do PVC (6.1), dada por,

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad (6.2)$$

a qual tem como equação característica,

$$m^2 + 2m + 1 = 0, \quad (6.3)$$

onde  $a = 1$ ,  $b = 2$  e  $c = 1$ , em comparação com a equação (5.13).

Como  $b^2 - 4ac = 0$ , as raízes  $m_1$  e  $m_2$  da equação (6.3) são reais e iguais, sendo  $m_1 = m_2 = -1$ . Assim, as soluções particulares da EDO homogênea (6.2) são dadas por  $y_1 = e^{-x}$  e  $y_2 = xe^{-x}$ . Portanto, a solução complementar é,

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}. \quad (6.4)$$

Determinada a solução  $y_c$ , basta determinar  $y_p$ , que é uma solução particular qualquer da EDO de (6.1). Como  $g(x) = x$ , sabemos que a solução  $y_p$  deve ser da forma  $Ax + B$ , então substituindo na EDO em (6.1) tem-se,

$$0 + 2A + Ax + B = x, \quad (6.5)$$

$$Ax + (2A + B) = x. \quad (6.6)$$

Como (6.6) é supostamente uma identidade, tem-se o sistema linear,

$$\begin{cases} A = 1, \\ 2A + B = 0, \end{cases} \quad (6.7)$$

o qual resulta  $A = 1$  e  $B = -2$ .

Então, uma solução particular é  $y_p = x - 2$ , desse modo, a solução da EDO não homogênea é,

$$y = y_c + y_p \quad (6.8)$$

$$y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x - 2. \quad (6.9)$$

Aplicando as condições de contorno  $y(0) = 0$  e  $y(1) = -1$  na equação (6.8), obtém-se o sistema de equações,

$$\begin{cases} y(0) = c_1 - 2 = 0 \\ y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} - 1 = -1, \end{cases} \quad (6.10)$$

resolvendo-o por meio da substituição, encontram-se  $c_1 = 2$  e  $c_2 = -2$ . Portanto, a solução analítica do PVC (6.1) é dada por,

$$y = (1 - x)2e^{-x} + x - 2. \quad (6.11)$$

### 6.1.3 Resolução Numérica

O método numérico utilizado para solucionar o PVC (6.1) será o Método das Diferenças Finitas, descrito na seção 5.2.1. A fim de solucioná-lo, primeiramente é necessário fixar um valor de  $n$ , ou seja, definir a quantidade de subintervalos, para assim, definir o espaçamento  $h = (b - a)/n = 1/n$ . Assim, o intervalo  $[a, b] = [0, 1]$  será discretizado, de modo que  $x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_j = jh, \dots, x_{n-1} = (n - 1)h$  e  $x_n = 1$ .

Será utilizado  $y_0 = y(x_0)$  e  $y_n = y(x_n)$ , além de  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ , de modo que, para cada  $i = 1, 2, \dots, n-1$  serão consideradas as aproximações para as derivadas de primeira e segunda ordem, obtidas por meio da diferença centrada, ambas com erro da ordem  $h^2$ , onde definiu-se  $y'(x_i)$  e  $y''(x_i)$  como,

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (6.12)$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \quad (6.13)$$

Dessa forma, substituindo as aproximações (6.12) e (6.13) na equação do PVC (6.1), obtém-se a equação discretizada para cada  $i$ ,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} + y_i = x_i, \quad (6.14)$$

a qual pode ser reescrita como,

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + hy_{i+1} - hy_{i-1} + h^2y_i = h^2x_i, \quad (6.15)$$

aplicando  $x_i = ih$  e evidenciando os termos  $y_{i-1}, y_i$ , e  $y_{i+1}$ , a equação (6.15) torna-se,

$$(1-h)y_{i-1} + (h^2-2)y_i + (1+h)y_{i+1} = ih^3. \quad (6.16)$$

Considerando  $i = 1$ , obtém-se,

$$(1-h)y_0 + (h^2-2)y_1 + (1+h)y_2 = h^3, \quad (6.17)$$

utilizando a condição inicial  $x_0 = 0$  e  $y(x_0) = 0$ , a equação (6.17) torna-se,

$$(h^2-2)y_1 + (1+h)y_2 = h^3. \quad (6.18)$$

De forma análoga determina-se a última das equações, quando  $i = n-1$ ,

$$(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} + (1+h)y_n = (n-1)h^3, \quad (6.19)$$

utilizando a condição final  $x_n = 1$  e  $y(x_n) = -1$ , tem-se,

$$(1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} = (1+h) + (n-1)h^3. \quad (6.20)$$

A partir das equações (6.18), (6.16) e (6.20) tem-se o seguinte sistema de equações algébricas lineares,

$$\begin{cases} (h^2-2)y_1 + (1+h)y_2 = h^3, \\ (1-h)y_{i-1} + (h^2-2)y_i + (1+h)y_{i+1} = ih^3, & 2 \leq i \leq (n-2) \\ (1-h)y_{n-2} + (h^2-2)y_{n-1} = (n-1)h^3 + h + 1, \end{cases} \quad (6.21)$$



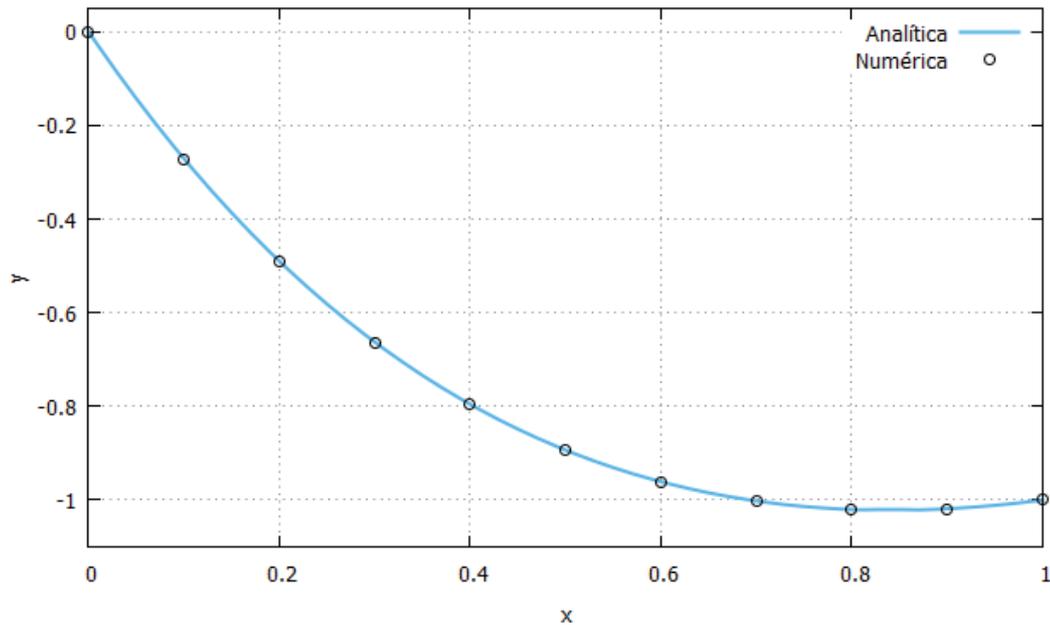


Figura 2 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.1), considerando espaçamento de 0,1.

Fonte: Os autores (2019).

O sistema (6.25) também foi resolvido para  $n = 30, 50, 100, 500$  e  $1000$ , ou seja, com espaçamentos de  $0,033333; 0,02; 0,01; 0,002$  e  $0,001$ , respectivamente, a fim de verificar a precisão do MDF. A Tabela 2 apresenta o maior erro relativo para cada um dos espaçamentos considerados.

Tabela 2 – Maior erro relativo ( $ER$ ) obtido na simulação de diferentes valores de subintervalos  $n$  no intervalo  $[0, 1]$  com espaçamentos  $h$ .

$n$	$h$	ER (%)
10	0,100000	0,249275
30	0,033333	0,029760
50	0,020000	0,010870
100	0,010000	0,002747
500	0,002000	0,000111
1000	0,001000	0,000028

Fonte: Os Autores (2019).

Observa-se na Tabela 2 que o erro relativo diminui à medida que se aumenta o o número de subintervalos no intervalo de resolução. A Figura 3 traz a representação geométrica dos resultados analíticos e numéricos ao considerar um espaçamento  $h$  de  $0,001$ . Ao comparar os resultados obtidos para  $h = 0,1$  e  $h = 0,001$ , fica evidente que a redução no comprimento dos subintervalos produz significativa redução do máximo erro relativo, que passou de  $0,249275\%$  para  $0,000028\%$ .

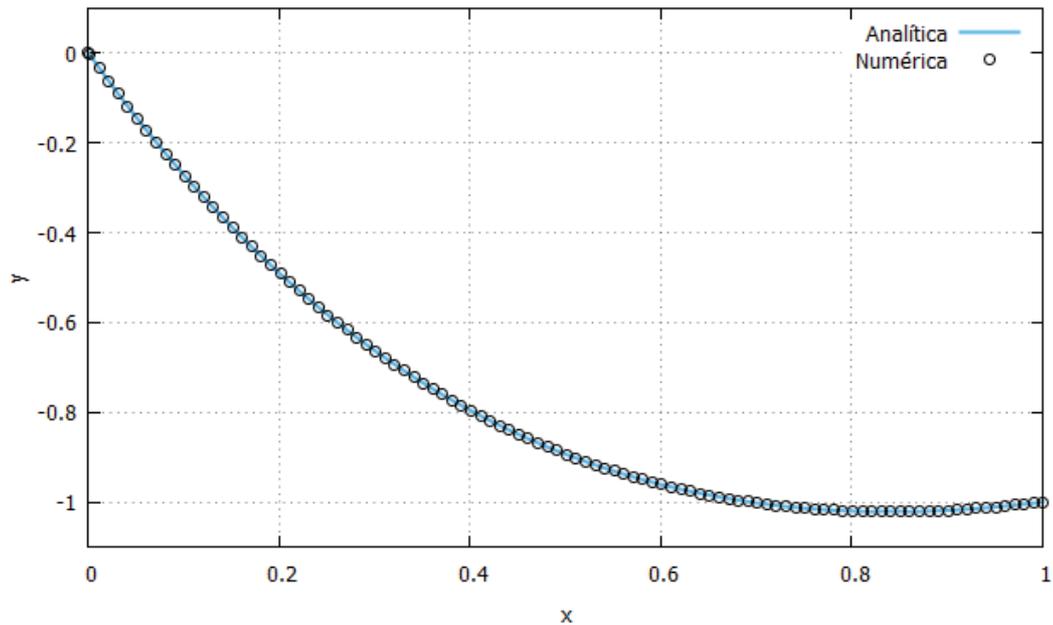


Figura 3 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.1), ao considerar espaçamento de 0,001.

Fonte: Os autores (2019).

## 6.2 DISTRIBUIÇÃO DE CALOR EM HASTE METÁLICA AQUECIDA

Nesta seção será feito um estudo de caso sobre uma aplicação na área da Física, que envolve fenômenos térmicos, devido a relevância do estudo da propagação do calor em um corpo ou entre corpos.

### 6.2.1 Características do Problema

O estudo de caso considerado aborda a distribuição de temperatura em estado estacionário em uma haste metálica. Para este fim, considera-se uma haste fina e longa, aquecida e posicionada entre duas paredes com temperaturas constantes, porém distintas. De forma que, as dimensões suficientemente pequenas da seção transversal da haste tornam as variações de temperatura radiais mínimas, sendo portanto, desconsideradas. Então, nesse sistema a temperatura é uma função dependente apenas da variável de distribuição axial  $x$ .

O sistema está ilustrado na Figura 4, onde a transferência do calor na haste ocorre longitudinalmente por meio da condução e a transferência do calor entre a haste e o ar circundante ocorre por convecção. Na Figura 4, está destacado um fragmento da haste com espessura  $h$ , onde  $T_\infty$  representa a temperatura do ar circundante, em Kelvin (K),  $T_a$  e  $T_b$  são as temperaturas constantes, porém distintas das paredes entre as quais a haste está fixada e  $L$  é o comprimento da haste.

De acordo com a Primeira Lei da Termodinâmica, a energia, neste caso na forma

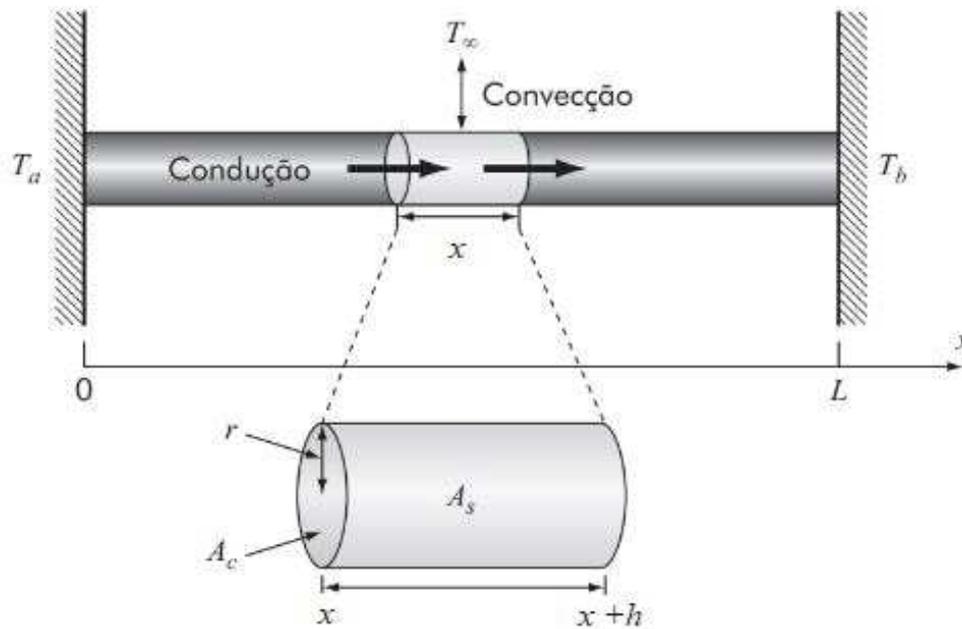


Figura 4 – Haste aquecida pelo posicionamento entre paredes com temperatura constante e distintas.

Fonte: Chapra (2013).

de calor, não pode ser criada nem destruída durante um processo, pode apenas mudar de forma. Este processo é chamado de conservação da energia ou, ainda, balanço de energia, sendo assim, a variação na energia total de um sistema é igual à diferença entre a energia recebida e a rejeitada pelo sistema durante o processo (ÇENGEL, 2012).

O balanço de calor de um sólido em meio a um fluido circundante, como o caso representado pela Figura 4, leva em consideração tanto a variação pela convecção quanto pela condução. Nesses casos, o fluxo de calor  $q$  devido a condução, para uma espessura  $h$ , é regida pela Lei de Fourier e pode ser representado por,

$$q = kA \frac{dT}{dx}, \quad (6.26)$$

onde  $A$  representa a área perpendicular ao fluxo de calor,  $T$  a temperatura e  $k$  a constante de proporcionalidade conhecida como condutividade térmica do sólido em questão (ÇENGEL, 2012).

A outra forma de transferência de calor presente no sistema, dada pela convecção, é regida pela Lei de Resfriamento de Newton, segundo a qual o fluxo de calor é representado por,

$$q = gA(T_s - T_\infty), \quad (6.27)$$

onde  $A$  representa a área de troca de calor,  $T_s$  a temperatura da superfície,  $T_\infty$  a temperatura do fluido circundante e  $g$  é o coeficiente de transferência por convecção, determinado experimentalmente para as condições inerentes ao sistema (ÇENGEL, 2012).

Baseando-se nesses conceitos de transferência de calor, Chapra e Canale (2010) apresentam o balanço do sistema apresentado na Figura 4, ao considerar uma seção de espessura  $h$ , como sendo,

$$0 = q(x)A_c - q(x+h)A_c + gA_s(T_\infty - T), \quad (6.28)$$

onde  $q(x)$  representa o fluxo de entrada e  $q(x+h)$  o fluxo de saída, ambos devido à condução, enquanto o último termo da equação (6.28), refere-se ao fluxo devido a convecção, em que  $A_c = \pi r^2$  é a área da seção transversal,  $r$  o raio da seção e  $A_s = 2\pi r h$  a área da superfície do elemento.

Substituindo-se  $A_s = 2\pi r h$  na equação (6.28) e dividindo-a pelo volume ( $\pi r^2 h = A_c h$ ) do elemento de espessura  $h$ , encontra-se

$$0 = \frac{q(x) - q(x+h)}{h} + \frac{2g}{r}(T_\infty - T). \quad (6.29)$$

Como deseja-se escolher  $h$  de modo que  $h \rightarrow 0$ , a equação (6.29) torna-se,

$$0 = -\frac{dq}{dx} + \frac{2g}{r}(T_\infty - T), \quad (6.30)$$

o fluxo  $q$  pode ser relacionado com a Lei de Fourier, definida em (6.26), de forma que,

$$q = -k \frac{dT}{dx}, \quad (6.31)$$

a qual pode ser derivada em relação a  $x$  e substituída em (6.30). Depois dividi-se o resultado por  $k$  gerando, assim, o modelo matemático que representa a temperatura ao longo da dimensão axial da haste, a EDO de segunda ordem,

$$\frac{d^2T}{dx^2} + gl(T_\infty - T) = 0, \quad (6.32)$$

onde  $gl$ , é um coeficiente de transferência de calor que parametriza a taxa de transferência para o ar circundante, levando em consideração as transferências por convecção e por condução, sendo determinado por  $gl = 2g/rk$ .

Para determinar o PVC desse sistema basta definir as condições de contorno  $T(0) = T_a$  e  $T(L) = T_b$ . Sendo assim, ao considerar uma haste com 10 m de comprimento, com parâmetro de transferência de calor  $gl = 0,05 \text{ m}^{-2}$ ,  $T_\infty = 200 \text{ K} = -73,15 \text{ }^\circ\text{C}$  e as condições de contorno  $T(0) = 300 \text{ K} = 26,85 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $T(10) = 400 \text{ K} = 126,85 \text{ }^\circ\text{C}$ , tem-se o problema de valor de contorno,

$$\begin{cases} \frac{d^2T}{dx^2} + gl(T_\infty - T) = 0 \\ T(0) = 300 \\ T(10) = 400 \end{cases} \quad (6.33)$$

### 6.2.2 Resolução Analítica

A EDO que representa o PVC em (6.33) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\frac{d^2T}{dx^2} - glT = -glT_\infty. \quad (6.34)$$

Assim, verifica-se que a equação é uma EDO linear de segunda ordem não homogênea, desse modo a solução analítica pode ser encontrada pelo método dos coeficientes indeterminados. Para solucioná-la, é necessário encontrar uma solução particular e uma complementar da EDO, primeiramente determina-se uma solução complementar da equação homogênea associada a EDO que representa o PVC (6.33), dada por,

$$\frac{d^2T}{dx^2} - glT = 0, \quad (6.35)$$

com equação característica,

$$m^2 - gl = 0, \quad (6.36)$$

a qual apresenta duas raízes reais e distintas  $m_1 = -\sqrt{gl}$  e  $m_2 = \sqrt{gl}$ . Dessa forma, a solução complementar é escrita como,

$$T_c = c_1e^{-\sqrt{gl}x} + c_2e^{\sqrt{gl}x}, \quad (6.37)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes.

Após determinar a solução complementar é necessário encontrar a solução particular. Por meio do método dos coeficientes indeterminados, verifica-se que uma solução particular  $T_p$  da EDO (6.34), deve ser do tipo constante, pois neste caso  $g(x) = -glT_\infty$ , sendo assim pode-se considerar  $T_p = T_\infty$ . Portanto, a solução geral da EDO (6.34) é dada por,

$$T = T_\infty + c_1e^{-\sqrt{gl}x} + c_2e^{\sqrt{gl}x}, \quad (6.38)$$

substituindo os dados fornecidos pelo problema, obtém-se,

$$T(x) = 200 + c_1e^{-\sqrt{0,05}x} + c_2e^{\sqrt{0,05}x}. \quad (6.39)$$

Para determinar as constantes basta aplicar as condições de contorno do PVC (6.33), obtendo o sistema,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 100 \\ c_1e^{10\sqrt{0,05}} + c_2e^{-10\sqrt{0,05}} = 200, \end{cases} \quad (6.40)$$

resolvendo o sistema de equações pelo método da substituição encontram-se  $c_1 = 20,4671$  e  $c_2 = 79,5329$ .

Portanto, a solução analítica do PVC (6.33) é dada por,

$$T(x) = 200 + 20,4671e^{\sqrt{0,05}x} + 79,5329e^{-\sqrt{0,05}x}, \quad (6.41)$$

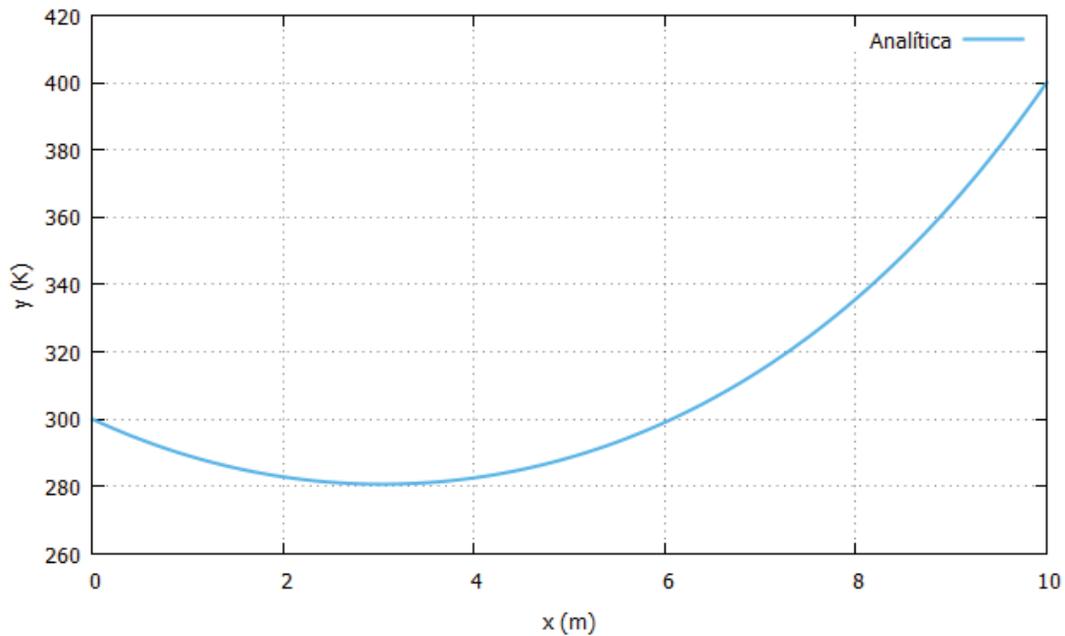


Figura 5 – Solução analítica da temperatura conforme o comprimento da haste.  
Fonte: Os Autores (2019).

a qual é representada pela curva da Figura 5.

A temperatura das extremidades da haste é conduzida ao longo dela de forma axial, sendo que o calor da extremidade  $T_a = T(0)$  é conduzido da esquerda para a direita, enquanto na extremidade  $T_b = T(10)$  o fluxo de calor ocorre da direita para a esquerda. No decorrer desse processo de condução há perda de calor por convecção para o ar, já que este encontra-se em uma temperatura menor que as extremidades, por isso verifica-se na Figura 5 que a temperatura da haste é reduzida, quando analisada das extremidades em direção ao centro da haste.

Além disso, pelo fato do fluxo de calor devido à convecção ser diretamente proporcional à diferença entre a temperatura do ar circundante e a temperatura da superfície, conforme descrito em (6.27), e esta diferença ser maior na extremidade direita, a redução da temperatura ocorre de forma mais intensa dessa extremidade em direção ao centro da haste.

### 6.2.3 Resolução Numérica

Para determinar a solução numérica de PVC (6.33) também será utilizado o MDF, sendo assim, o intervalo contínuo  $[a, b] = [0, 10]$  será discretizado, de modo a obter  $n$  subintervalos, com espaçamento  $h = (b - a)/n = 10/n$ , chamado de espessura.

A EDO do PVC (6.33) pode ser reescrita como,

$$\frac{d^2T}{dx^2} - glT = -glT_\infty. \quad (6.42)$$



onde  $A$  é a matriz tridiagonal do sistema.

Conforme apresentado no final da seção 6.2.1, deseja-se encontrar a solução do PVC (6.33) ao considerar uma haste com 10 m de comprimento, parâmetro de transferência de calor  $gl = 0,05 \text{ m}^{-2}$ , temperatura do ar circundante  $T_\infty = 200 \text{ K}$ , sendo assim, as constantes foram substituídas no sistema (6.53) e então procedeu-se a resolução utilizando o método da Eliminação de Gauss, com a simulação numérica realizada no software Scilab, conforme o código computacional descrito no Apêndice B.

A resolução numérica do PVC (6.33), foi realizada para diferentes valores de espaçamentos, a fim de obter uma solução aproximada com boa precisão. Portanto, inicialmente considerou-se a quantidade de subintervalos  $n = 5$  e espaçamento  $h = 2 \text{ m}$ , os resultados numéricos obtidos são apresentados na Tabela 3, juntamente com a solução analítica  $T(x) = 200 + 20,4671e^{\sqrt{0,05}x} + 79,5329e^{-\sqrt{0,05}x}$ , e com o erro relativo em cada ponto avaliado.

Tabela 3 – Resultado numérico  $y_i$ , analítico  $f(x_i)$  e erro relativo ( $ER$ ) em cada ponto ( $x_i$ ) ao considerar 5 subintervalos.

$i$	$x_i$	$y_i$	$f(x_i)$	$ER$ (%)
0	0,000000	300,000000	300,000000	0,000000
1	2,000000	283,266031	282,863405	0,142340
2	4,000000	283,185269	282,577550	0,215063
3	6,000000	299,741560	299,084306	0,219756
4	8,000000	336,246164	335,740413	0,150637
5	10,000000	400,000000	400,000000	0,000000

Fonte: Os Autores (2019).

Para auxiliar na comparação dos resultados analíticos e numéricos, na Figura 6 são exibidos os resultados obtidos para o PVC (6.33) ao considerar espessura de 2 m.

Com intuito de verificar se o erro cometido poderia ser reduzido, foram feitas simulações utilizando outros espaçamentos, conforme apresentado na Tabela 4.

Viana (2018), ao utilizar o MDF para uma análise bidimensional do calor por condução em uma placa em que as extremidades recebem uma fonte de calor constante e com valores distintos, constatou que a cada nova interação a solução numérica tronava-se mais precisa em relação ao resultado anterior, além de determinar uma aproximação satisfatória para o comportamento da distribuição da temperatura ao longo da placa. O mesmo pode ser verificado neste estudo, onde nota-se que o erro relativo foi reduzido com a redução dos espaçamentos.

A Figura 7 apresenta o resultado da simulação numérica em comparação com a solução analítica do PVC (6.33) ao considerar espaçamento de 0,2 m.

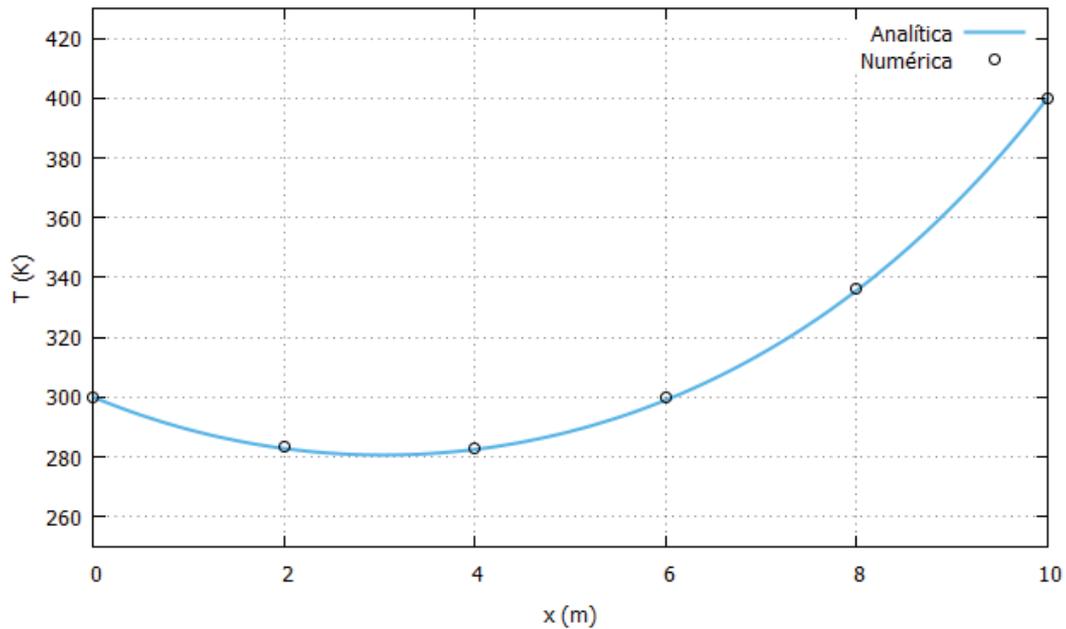


Figura 6 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.33), ao considerar espaçamento de 2 m.

Fonte: Os autores (2019).

Tabela 4 – Maior erro relativo ( $ER$ ) obtido na simulação de diferentes valores de subintervalos  $n$  no intervalo  $[0, 10]$  com espaçamentos  $h$ .

$n$	$h$ (m)	$ER$ (%)
5	2,000000	0,219756
10	1,000000	0,057394
20	0,500000	0,014397
30	0,333333	0,006397
40	0,250000	0,003596
50	0,200000	0,002299

Fonte: Os Autores (2019).

Comparando-se as soluções analíticas e numéricas verifica-se que o MDF é um método eficaz para esse estudo de caso, assim como verificado por Cargnelutti e Galina (2015), ao utilizar o MDF para resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem.

Os estudos de Almeida, Coelho e Pedroso (2016) sobre a distribuição da temperatura interna de uma placa em função do tempo e da posição em um regime transiente, também mostraram que o MDF modela adequadamente a difusão do calor em placas.

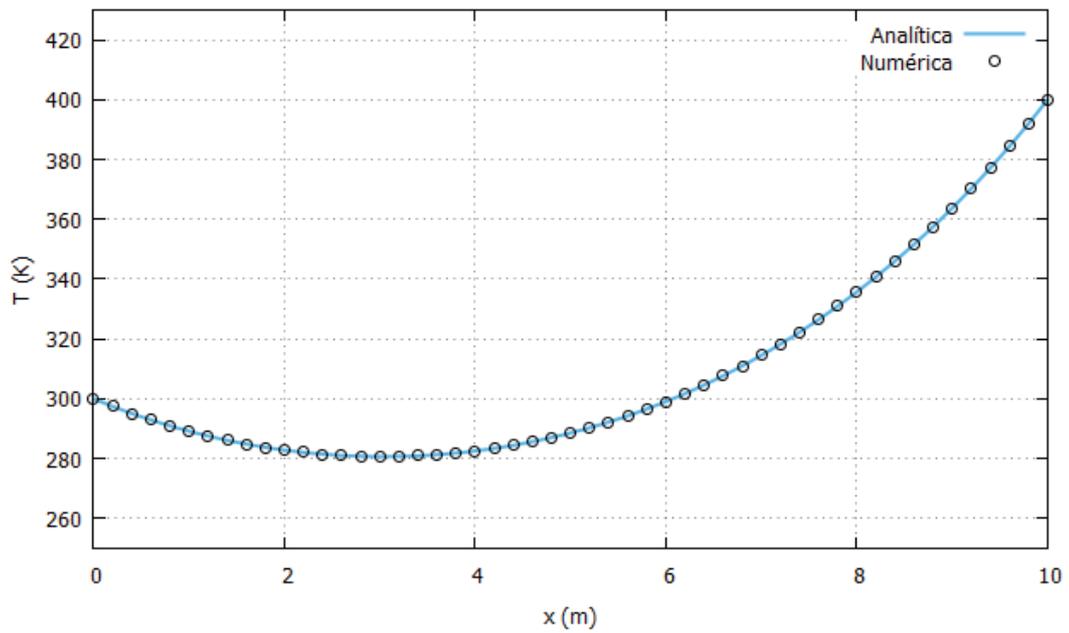


Figura 7 – Representação geométrica da solução analítica e numérica do PVC (6.33), ao considerar espaçamento de 0,2 m.

Fonte: Os autores (2019).

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluiu-se, com este trabalho, que o método das diferenças finitas mostrou-se eficaz na simulação da distribuição de temperatura em uma haste metálica, pois aproximou de forma satisfatória o resultado numérico do analítico. Além disso, verificou-se que o aumento da discretização do domínio forneceu melhores resultados, ou seja, o erro relativo entre a solução analítica e numérica foi reduzido.

Dessa forma, a realização deste trabalho cumpriu com seus objetivos, já que propiciou a ampliação dos conhecimentos a cerca das equações diferenciais e de Problemas de Valor de Contorno, em especial o estudo da distribuição de calor em uma haste aquecida. Permitiu, também, a aplicação de um método numérico aliado ao software Scilab para simulação de problemas representados por uma equação diferencial ordinária e a comparação dos resultados, permitindo a utilização de uma linguagem de programação, por meio de um algoritmo simples e de fácil aplicação.

Neste trabalho analisou-se a distribuição da temperatura em função de uma única variável, a variável espacial. Entretanto, estudos posteriores podem ser feitos considerando-se um meio bi ou multidimensional, por meio de uma abordagem com equações diferenciais parciais aliados a verificação experimental da distribuição do calor na haste.

Esse estudo mostrou-se relevante, pois permitiu a união de diferentes disciplinas cursadas ao longo da graduação para análise de um problema físico real, motivando a modelagem matemática de outros sistemas, de diferentes áreas do conhecimento. Despertando assim, o interesse pela elaboração de uma sequência didática envolvendo esse problema, interligando disciplinas de cálculo diferencial, cálculo numérico e programação, com intuito de realizar uma aula aplicada, que proporcione maior desenvolvimento dos alunos da graduação, preparando-os cada vez mais para os desafios da profissão.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, G. V.; COELHO, N. d. A.; PEDROSO, L. J. Distribuição de temperatura em placas em regime transiente: comparação entre solução analítica e numérica. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, 2016.
- ALVES, J. C.; JUNIOR, E. Análise numérica de risers utilizando um modelo de cabo inextensível. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, 2016.
- BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, W. C. *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo - SP: HARBRA, 1988.
- BOYCE, W. E. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC, 2012.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro - RJ: LTC, 2012.
- BRONSON, R.; COSTA, G. *Equações Diferenciais*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- CARGNELUTTI, J.; GALINA, V. Aplicação do método das diferenças finitas em equações diferenciais ordinárias. *Seminário De Extensão e Inovação da UTFPR – 5º SEI-UTFPR*, 2015.
- CARGNELUTTI J.; GALINA, V. K. E. G. L. M. L. A. M. Two-dimensional numerical simulation of channel ow with submerged obstacles using the lattice boltzmann method. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingeniera*, v. 34, p. 01, 2017.
- CHAPRA, S. C. *Métodos numéricos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas*. 3. ed. Porto Alegre - RS: AMGH, 2013.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Métodos numéricos para engenharia*. 5. ed. São Paulo - SP: McGraw-Hill, 2008.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Numerical methods for engineers*. 6. ed. New York - NY: Mcgraw-Hill New York, 2010.
- CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*. 2. ed. Campinas - SP: [s.n.], 2000.
- GALINA, V.; CARGNELUTTI, J.; KAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Simulação de onda de maré por meio do método do reticulado de boltzmann. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. *I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia*. Curitiba - Brasil, 2016.
- GALINA, V.; CARGNELUTTI J. ANDKAVISKI, E.; GRAMANI, L. M.; LOBEIRO, A. M. Application of lattice boltzmann method for surface runo in watershed. *Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingeniera*, v. 34, p. 01, 2017.

- GIACOMINI, F. d. F. *Verificação da forma de aplicar condições de contorno em problemas unidimensionais com o método dos volumes finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2009.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2001. v. 1.
- JUNIOR, L. C. d. S. *Uma aplicação dos Méodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à interação fluido-estrutura*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília - DF, 2006.
- LOPES, L. C. O. Utilizando o scilab na resolução de problemas da engenharia química. *XV COBEQ - Congresso Brasileiro de Engenharia Química*, 2004.
- LOPES, V. L. d. R.; RUGGIERO, M. A. G. *Cálculo numérico-aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.
- MAGALHÃES, C. A. d. C. *Estudo analítico e experimental dos fenômenos transitórios ocasionados por grandes bolsas de ar confinadas nos sistemas hidráulicos*. Dissertação (Mestrado), São Carlos - SP, 2001.
- MOHAMMADI, A.; NADGARAN, H.; AGIO, M. Contour-path effective permittivities for the two-dimensional finite-difference time-domain method. *Optics Express*, v. 13, n. 25, dez. 2005.
- RIBEIRO, S. S. *Novos esquemas centrais de diferenças finiras para a simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo*. Tese (Doutorado) — Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2007.
- SCHELBAUER, C. H. *Aplicação do método das diferenças finitas implícito para obtenção da distribuição de temperaturas na seção transversal do tubo receptor de um coletor solar cilíndrico parabólico*. Guarapuava - PR, 2019. Trabalho de Conclusão de Curso.
- THOMAS, L. R. O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros. *Universidade de Brasília - UnB Planaltina*, 2013.
- TREFETHEN, L. N. *Finite Difference and Spectral Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Cornell University, 1996.
- URROZ, G. E. *Introduction to SCILAB*. [S.l.], 2001.
- VIANA, H. S. *Método das Diferenças Finitas aplicado a um problema de condução do calor em estado estacionário*. Castanhal - PA, 2018. Trabalho de Conclusão de Curso.
- ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com aplicação em modelagem*. São Paulo - SP: Cengage Learnig, 2012.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo - SP: Pearson Makron Books, 2007. v. 1.
- ÇENGEL, Y. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. 4. ed. Porto Alegre - RS: AMGH, 2012.

## APÊNDICE A – CÓDIGO COMPUTACIONAL PVC LINEAR

```

1 function pvc_mdf_gnu()
2
3 a = 0; b = 1; //intervalo [a, b]
4 n = 500; //qde. de subintervalos
5 h = (b-a)/n; //espaçamento
6 p = 1; //tam. passo dos pontos em arquivo
7
8 PVC = "d2y+2d1y+uy=x; y(0)=0, y(1)=-1"
9 c1 = 0; //c1=y(a)
10 c2 = -1; //c2=y(b)
11 sol = "y=2*exp(-x)*(1-x)+x-2"
12 deff(' [y]=f(x)', sol);
13
14 A=zeros(n-1,n-1);
15 b=zeros(n-1);
16
17 x = zeros(n+1);
18 y = zeros(n+1);
19 fx = zeros(n+1);
20
21 x(1) = a;
22 y(1) = c1;
23 y(n+1) = c2;
24
25 for i=1:n+1
26     x(i) = a + (i-1)*h;
27 end
28
29 for i=1:n-1
30     A(i, i) = h^2-2;
31 end
32
33 for k=1:n-2
34     A(k, k+1) = 1+h;
35     A(k+1, k) = 1-h;
36 end

```

```

37
38 for i=1:n-2
39     b(i) = i*h^3;
40 end
41 b(n-1) = (n-1)*h^3+h+1;
42
43 [yb] = Eliminacao_Gauss(A,b)
44
45 y(2:n) = yb(1:n-1) //atribui a solução do sistema de ordem n-1
46
47 //Escrita em arquivo - cabeçalho
48 c_dir = pwd(); //caminho padrão pastas scilab
49 fd = mopen(c_dir + '\PVC_MDF_result.txt', 'wt');
50
51 fprintf(fd, string('#_PVC:_'+PVC+'\n'));
52 fprintf(fd, string('#_Sol._Anal tica'+sol+'\n'));
53 fprintf(fd, "#_Espaçamento_h=%2.6f\n",h);
54 fprintf(fd, "#_N mero_de_subintervalos_n=%d\n",n);
55
56 fprintf(fd, string('\n#_i_x_y(x)_f(x)_
    _Erro_abs_(%%)\n\n'));
57
58 v=zeros(1,4);
59 ERm = 0.0;
60
61 //escrita em arquivo - valores simulados
62 //Ponto inicial
63 v(1)=x(1); v(2)=y(1); v(3)=f(x(1)); v(4)= 0.0;
64 fprintf(fd, "%4d_%12.6f_%12.6f_%12.6f_%12.6f\n",0,v);
65
66 //Pontos intermediários
67 for i=1:p:n-1
68     v(1)=x(i+1); v(2)=y(i+1); v(3)=f(x(i+1)); v(4)= abs((f(x
        (i+1))-y(i+1))/f(x(i+1)))*100;
69     fprintf(fd, "%4d_%12.6f_%12.6f_%12.6f_%12.6f\n",i,v);
70 end
71
72 //Ponto final
73 v(1)=x(n+1); v(2)=y(n+1); v(3)=f(x(n+1)); v(4)= 0.0;

```

```

74 fprintf(fd, "%4d %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f\n", n+1, v);
75
76 //Máximo erro relativo
77 for i=1:n-1
78     ER = abs((f(x(i+1))-y(i+1))/f(x(i+1)))*100;
79     if(ER > ERm) then
80         ERm = ER;
81         ind_erro = i+1;
82     end
83 end
84
85 fprintf(fd, "\n#Maior erro relativo: %4.6f%%. Ocorre em x%d=%4.6f", ERm, ind_erro-1, x(ind_erro));
86
87 fclose(fd);
88
89 endfunction
90
91
92
93 function [x] = Eliminacao_Gauss(A,b)
94 //Algoritmo eliminação de Gauss
95 //Transforma Ax=b em Ux=c
96
97 //n: número de variáveis
98 //a_kk diferente de zero na etapa k
99
100 //Etapa de triangulação
101
102 d = size(A); //d é um vetor d=(lin , col)
103 n = d(1);
104
105 for k = 1:n-1
106     for i = (k+1):n
107         m = A(i, k)/A(k, k);
108         A(i, k) = 0.0;
109         for j = (k+1):n
110             A(i, j) = A(i, j) - m*A(k, j);
111         end

```

```
112             b(i) = b(i) - m*b(k);
113         end
114     end
115
116     //Etapa de resolução do sistema Ux=c
117     x(n) = zeros(n);
118     x(n) = b(n)/A(n,n);
119
120     for k = n-1:-1:1
121         s = 0.0;
122         for j = k+1:n
123             s = s + A(k,j)*x(j);
124         end
125         x(k) = (b(k)-s)/A(k,k);
126     end
127
128     endfunction
```

## APÊNDICE B – CÓDIGO COMPUTACIONAL PVC HASTE AQUECIDA

```

1 function pvc_barra_mdf()
2
3 a = 0; b = 10; // intervalo [a, b]
4 n = 20;      // qde. de subintervalos
5 h = (b-a)/n; // espaçamento
6 p = 1;      // tam. passo dos pontos em arquivo
7
8 PVC = "d2T_{+}gl(T_{inf}-T)_{=}0; T(0)=300, T(10)=400"
9 T0 = 300;   // c1=y(a)
10 Tn = 400;  // c2=y(b)
11 gl = 0.05; // parâmetro de transferência de calor
12 Tinf = 200; // temperatura do gás circundante
13 sol = "T_{=}200+20.4671*exp(sqrt(0.05)*x)_{+}79.5329*exp(-sqrt(0.0
      5)*x)"
14
15 deff(' [T]=f(x)', sol);
16
17 A=zeros(n-1, n-1);
18 b=zeros(n-1);
19
20 x = zeros(n+1);
21 T = zeros(n+1);
22 fx = zeros(n+1);
23
24 x(1) = a;
25 T(1) = T0;
26 T(n+1) = Tn;
27
28 for i=1:n+1
29     x(i) = a + (i-1)*h;
30 end
31
32 for i=1:n-1
33     A(i, i) = 2+gl*h^2;
34 end
35

```

```

36 for k=1:n-2
37     A(k,k+1) = -1;
38     A(k+1,k) = -1;
39 end
40
41 b(1)=gl*Tinf*h^2 + T0;
42 for i=2:n-2
43     b(i) = gl*Tinf*h^2;
44 end
45 b(n-1) = gl*Tinf*h^2 + Tn;
46
47 disp(A);
48 disp(b);
49
50 [yb] = Eliminacao_Gauss(A,b)
51
52 T(2:n) = yb(1:n-1) // atribui a soluo do sistema de ordem n-1
53
54 // Escrita em arquivo - cabealho
55 c_dir = pwd(); // caminho padro pastas scilab
56 fd = mopen(c_dir + '\PVC_MDF_barra_result.txt', 'wt');
57 c_vazio=' ' // para imprimir o smbolo %
58
59 mfprintf(fd, string('#_PVC:_'+PVC+'\n'));
60 mfprintf(fd, string('#_Sol._Analtica:_'+sol+'\n'));
61 mfprintf(fd, "#_Espaamento:_h=_%2.6f\n", h);
62 mfprintf(fd, "#_Nmero_de_subintervalos:_n=_%d\n", n);
63
64 mfprintf(fd, string('\n#_i_x_i_y_i_f(x_i)_
        Erro_abs_%c(%%)\n\n'), c_vazio);
65
66 v=zeros(1,4);
67 ERm = 0.0;
68
69 // Escrita em arquivo - valores simulados
70 // Ponto inicial
71 v(1)=x(1); v(2)=T(1); v(3)=f(x(1)); v(4)= 0.0;
72 mfprintf(fd, "%4d_%12.6f_%12.6f_%12.6f_%12.6f\n", 0, v);
73

```

```

74 // Pontos intermediários
75 for i=1:p:n-1
76     v(1)=x(i+1); v(2)=T(i+1); v(3)=f(x(i+1)); v(4)=abs((f(x(
77         i+1))-T(i+1))/f(x(i+1)))*100;
78     fprintf(fd, "%4d %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f\n", i, v);
79 end
80 // Ponto final
81 v(1)=x(n+1); v(2)=T(n+1); v(3)=f(x(n+1)); v(4)= 0.0;
82 fprintf(fd, "%4d %12.6f %12.6f %12.6f %12.6f\n", n+1, v);
83
84 // Máximo erro relativo
85 for i=1:n-1
86     ER = abs((f(x(i+1))-T(i+1))/f(x(i+1)))*100;
87     if(ER > ERm) then
88         ERm = ER;
89         ind_erro = i+1;
90     end
91 end
92
93 fprintf(fd, "\n#Maior erro relativo: %4.6f%. Ocorre em x%d=%d
94     4.6f", ERm, ind_erro-1, x(ind_erro));
95
96
97 endfunction
98
99
100 function [x] = Eliminacao_Gauss(A,b)
101 // Algoritmo eliminação de Gauss
102 // Transforma Ax=b em Ux=c
103
104 // n: número de variáveis
105 // a_kk diferente de zero na etapa k
106
107 // Etapa de triangulação
108
109 d = size(A); // d é um vetor d=(lin, col)
110 n = d(1);

```

```
111
112 for k = 1:n-1
113     for i = (k+1):n
114         m = A(i,k)/A(k,k);
115         A(i,k) = 0.0;
116         for j = (k+1):n
117             A(i,j) = A(i,j) - m*A(k,j);
118         end
119         b(i) = b(i) - m*b(k);
120     end
121 end
122
123 //Etapa de resolução do sistema Ux=c
124 x(n) = zeros(n);
125 x(n) = b(n)/A(n,n);
126
127 for k = n-1:-1:1
128     s = 0.0;
129     for j = k+1:n
130         s = s + A(k,j)*x(j);
131     end
132 x(k) = (b(k)-s)/A(k,k);
133
134 end
135
136 endfunction
```

**ANEXO A – TABELA DE COEFICIENTES PARA DIFERENÇA CENTRADA**

Tabela 5 – Coeficientes da diferença centrada

Derivada	Precisão	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
<b>1</b>	2				-1/2	0	1/2			
	4			1/12	-2/3	0	2/3	-1/12		
	6		-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60	
	8	1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280
<b>2</b>	2				1	-2	1			
	4			-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12		
	6		1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90	
	8	-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560
<b>3</b>	2			-1/2	1	0	-1	1/2		
	4		1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8	
	6	-7/240	3/10	-169/120	61/30	0	-61/30	169/120	-3/10	7/240
<b>4</b>	2			1	-4	6	-4	1		
	4		-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6	
	6	7/240	-2/5	169/60	-122/15	91/8	-122/15	169/60	-2/5	7/240

Fonte: Trefethen (1996).

**ANEXO B – TABELA DE COEFICIENTES PARA DIFERENÇAS PROGRESSIVA E REGRESSIVA**

Tabela 6 – Coeficientes das diferenças progressiva e regressiva, derivada de ordens 1 e 2

<b>Derivada</b>	<b>Precisão</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	1	-1	1						
	2	-3/2	2	-1/2					
	3	-11/6	3	-3/2	1/3				
	4	-25/12	4	-3	4/3	-1/4			
	5	-137/60	5	-5	10/3	-5/4	1/5		
	6	-49/20	6	-15/2	20/3	-15/4	6/5	-1/6	
<b>2</b>	1	1	1	-2	1				
	2	2	-5	4	-1				
	3	35/12	-26/3	19/2	-14/3	11/12			
	4	15/4	-77/6	107/6	-13	61/12	-5/6		
	5	203/45	-87/5	117/4	-254/9	33/2	-27/5	137/180	
	6	469/90	-223/10	879/20	-949/18	41	-201/10	1019/180	-7/10

Fonte: Trefethen (1996).

Tabela 7 – Coeficientes das diferenças progressiva e regressiva, derivada de ordens 3 e 4

Derivada	Precisão	0	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>3</b>	1	1	-1	3	-3	1				
	2	-5/2	9	-12	7	-3/2				
	3	-17/4	71/4	-59/2	49/2	-41/4	7/4			
	4	-49/8	29	-461/8	62	-307/8	13	-15/8		
	5	-967/120	638/15	-3929/40	389/3	-2545/24	268/5	-1849/120	29/15	
	6	-801/80	349/6	-18353/120	2391/10	-1457/6	4891/30	-561/8	527/30	-469/240
<b>4</b>	1	1	1	-4	6	-4	1			
	2	3	-14	26	-24	11	-2			
	3	35/6	-31	137/2	-242/3	107/2	-19	17/6		
	4	28/3	-111/2	142	-1219/6	176	-185/2	82/3	-7/2	
	5	1069/80	-1316/15	15289/60	-2144/5	10993/24	-4772/15	2803/20	-536/15	967/240

Fonte: Trefethen (1996).