

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA

LIAMARA CRISTINA DOS SANTOS

SITUAÇÕES COTIDIANAS SOB O OLHAR DA PROBABILIDADE

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2019

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA**

**LIAMARA CRISTINA DOS SANTOS**

**SITUAÇÕES COTIDIANAS SOB O OLHAR DA  
PROBABILIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Daniela Trentin Nava

TOLEDO

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM  
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "Situações cotidianas sob o olhar da probabilidade" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº -- de --/--/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Daniela Trentin Nava

Regiane Slongo Fagundes

Suellen Ribeiro Pardo Garcia

TOLEDO

2019

## RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso versa sobre a probabilidade em situações corriqueiras do dia a dia. Foram realizadas pesquisas de natureza bibliográfica com abordagem qualitativa objetivando apresentar a origem, a grande importância e funcionalidade da teoria de probabilidade presente em situações cotidianas, como por exemplo, no jogo da dança das cadeiras, na senha padrão utilizada para bloqueio de tela inicial de celulares e em apostas de loteria, como a Mega-Sena. Também é apresentado um breve relato histórico da origem da teoria de probabilidade e seus principais estudiosos. Para as situações escolhidas, foram realizados cálculos probabilísticos e, a partir dos resultados obtidos, se torna evidente que a teoria das probabilidades, que ganhou grande importância ao longo do tempo por possuir muitas aplicações nas mais diversas áreas científicas, pode ser verificada através de simples situações cotidianas.

**Palavras-chave:** Teoria das probabilidades. História da probabilidade. Aplicações de probabilidade.

## ABSTRACT

This research work deals with Probability in daily situations. We performed bibliographic researches with a qualitative approach which the goal was to present the origin, the importance and functionality of the probability theory as seen in daily situations, as for example, in the musical chair dance game, in the cell phone password used to unlock the initial screen and in lottery betting, like the mega-sena. We also describe a brief history of the origin of the probability theory and its most important researchers. We performed probabilistic calculations to the chosen daily situations, from the results it is evident that the theory of probabilities, which has gained great importance over time because of so many applications in various scientific areas, can be viewed in simple everyday situations.

**Palavras-chave:** History of probability. Probability applications. Probability theory.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Osso astrálagio. . . . .	12
2.2	Representação dos três tipos de senha, numérica, alfanumérica, e padrão, respectivamente. . . . .	19
2.3	Representações das senhas padrão (a) 14789632 e (b) 23698741. . . . .	19
4.1	Representações das senhas padrão (a) 1598732, (b) 24765 e (c) 5289731, começando por um canto, meio e centro, respectivamente. . . . .	24
4.2	Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no centro	24
4.3	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no centro e seguido para os cantos. . . . .	25
4.4	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no centro e seguido para os meios. . . . .	25
4.5	Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no canto.	26
4.6	Representação de (a) meios “a” localizados diretamente ao lado do canto inicial e (b) meios “b” localizados do lado oposto. . . . .	26
4.7	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no canto e seguido para o centro. . . . .	27
4.8	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no canto e seguido para os meios “a”. . . . .	27
4.9	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no canto e seguido para os meios ”b”. . . . .	28
4.10	Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no meio.	28
4.11	Representação de (a) cantos “a” localizados diretamente ao lado do meio inicial e (b) cantos “b” localizados do lado oposto. . . . .	29
4.12	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para o centro. . . . .	29
4.13	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para outro meio. . . . .	30
4.14	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para os cantos “a”. . . . .	30
4.15	Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para os cantos “b”. . . . .	31

## LISTA DE TABELAS

4.1	Probabilidades de acertar na quadra, quina e sena . . . . .	37
-----	---	----

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b>	<b>6</b>
<b>LISTA DE TABELAS</b>	<b>7</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>11</b>
2.1 Origem e história da probabilidade . . . . .	11
2.2 Probabilidade . . . . .	15
2.3 A probabilidade na dança das cadeiras . . . . .	17
2.4 A segurança da senha padrão . . . . .	18
2.5 Acertando na Mega-Sena . . . . .	20
<b>3 MATERIAL E MÉTODOS</b>	<b>21</b>
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>22</b>
4.1 A probabilidade na dança das cadeiras . . . . .	22
4.2 A segurança da senha padrão . . . . .	24
4.3 Probabilidade de acertar na mega-sena . . . . .	32
4.3.1 Probabilidade de acertar 6 números . . . . .	32
4.3.2 Probabilidade de acertar 5 números . . . . .	34
4.3.3 Probabilidade de acertar 4 números . . . . .	35
4.3.4 Comparando as probabilidades da loteria . . . . .	37
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>38</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>39</b>



# 1 INTRODUÇÃO

O estudo das probabilidades começou, de acordo com alguns autores, como um truque para se ganhar em jogos estratégicos e de azar e hoje nos ajuda a tomar decisões dentro e fora das ciências. A probabilidade passou a ser de grande importância por possuir aplicações na mais diversas áreas científicas, porém ela se mostra muito presente em situações do nosso cotidiano.

É evidente que há muitas publicações sobre suas aplicações em diversas áreas científicas, mas não é necessário ser um estudioso para percebê-la em situações do nosso dia a dia. Basta pensar nas chances de algo ocorrer e estará pensando na probabilidade envolvida na situação, como, por exemplo, nos acontecimentos descritos a seguir.

Em abril de 2004, Ashley Revell, um inglês de 32 anos entrou no Plaza Hotel& Casino, em Las Vegas, com todas as suas posses: uma muda de roupa de baixo e um cheque de US\$ 135 300. Dirigiu-se à roleta e apostou tudo em um só resultado: quando a bolinha branca parasse, ela cairia no vermelho. Assim, Revell assistiu à bolinha diminuir de velocidade, percorrer a trajetória ricocheteando em várias casas, e finalmente parar na casa número 7. Vermelho. Naquele momento Revell dobrou seu patrimônio líquido para US\$ 270 600 (MATTHEWS, 2017).

Em 2013, a atriz Angelina Jolie passou por uma dupla mastectomia preventiva. Uma cirurgia para retirada dos seios para diminuir suas chances de desenvolver câncer de mama ou de ovários (BATISTA, 2017).

No mesmo ano, John Winfield estava na cozinha de sua casa em Breadsall, Derbyshire, quando percebeu que precisava de alguns ovos. Foi a mercearia, voltou com seis ovos e começou a quebrá-los. Para sua surpresa, o primeiro tinha uma gema dupla – algo que ele nunca tinha visto antes na vida. Então quebrou outro, e viu outra gema dupla. Perplexo, continuou quebrando os ovos, e descobriu que todos tinham gemas duplas, inclusive o último – que deixou cair no chão, de tão agitado (MATTHEWS, 2017).

Em determinado dia de julho de 2014, milhares de habitantes da Cidade do México (muito propensa a terremotos) receberam uma notícia que temiam. Um aplicativo de celular que supostamente pegava dados da rede oficial de alertas sísmicos, enviou, por volta da hora do almoço, um alerta de que um grande terremoto estava prestes a acontecer. Em questão de segundos, as pessoas saíram correndo de seus locais de trabalho e ocuparam as ruas, protegendo-se da catástrofe, mas nada aconteceu. Estava claro que havia sido um alarme falso. Os responsáveis pelo aplicativo emitiram um pedido de desculpas, dizendo que haviam interpretado mal uma mensagem da rede oficial. Então, mal se passaram dezoito horas, a cidade foi abalada por um forte terremoto de magnitude 6,3 e o aplicativo de celular ficou silencioso (MATTHEWS, 2017).

Quem lê essas notícias juntas pode pensar que elas nada têm em comum. Um pensamento errôneo. Mas, então, o que a Angelina Jolie tem em comum com ovos de gema dupla? E, ainda, o que esses dois têm em comum com a sorte de Ashley Revell em um cassino e o terremoto na Cidade do México? De fato, as quatro situações possuem um aspecto em comum muito forte: todas têm sua essência baseada em probabilidade.

De acordo com Matthews (2017), a decisão de Revell de apostar tudo no vermelho parece ter sido impulsiva, mas não foi. Ele a planejou durante meses. E, uma vez decidido, Revell fez a coisa certa. As leis da probabilidade mostram que não há meio mais seguro de dobrar o patrimônio em um cassino que fazer o que ele fez: apostar tudo em um só giro da roleta.

Angelina, com 37 anos, descobriu ter um defeito no gene chamado BRCA1. Com 87% de chances de desenvolver um câncer de mama, e 50% de ter um câncer no ovário, decidiu minimizar o risco tomando a decisão de fazer uma dupla mastectomia preventiva. Essa decisão foi baseada unicamente em cálculos probabilísticos (BATISTA, 2017).

Matthews (2017) também aponta que, segundo o Serviço Britânico de Informação Sobre Ovos, em média, apenas 1 entre 1 000 ovos produzidos tem gema dupla. Assim, a chance de se obter 6 é de 1 em 1 000 000 000 000 000 000 (1 em 1 quintilhão). Porém, considerando que galinhas jovens têm uma probabilidade dez vezes maior de produzir ovos de gema dupla, o número de dúzias de ovos consumidas no Reino Unido e os cálculos corretos, as chances de encontrar 6 ovos de gema dupla aumentam imensamente.

Por fim, analisando o incidente da Cidade do México, Robert Matthews (2017) afirma que se o risco de um terremoto grande ocorrer ao longo de um período for menor que “poucos por cento”, o alerta de terremoto provavelmente é um alarme falso, a menos que sua taxa de falsos positivos seja inferior a esses “poucos por cento”. Isso exige que os precursores usados pelo sistema tenham essa taxa de falsos positivos. E, mesmo que encontrassem algum precursor com uma taxa de 100% de verdadeiros positivos, a taxa de falsos positivos ainda precisaria ser menor que cerca de 1 em 1.000 para compensar a baixa probabilidade de ocorrência de um grande tremor.

Essas situações refletem bem como a probabilidade está presente em situações do cotidiano, que podem ser sérias como uma doença terminal e um desastre natural, ou tão simples quanto comprar ovos. Isso nos faz questionar a importância dada a probabilidade por pesquisadores e estudiosos, pois os estudos sobre sua origem são poucos e quando estudada sempre está embasada em uma área científica, mesmo sendo possível estudá-la em sua forma pura e de forma significativa a partir de eventos do dia a dia.

Por este motivo, este trabalho tem como objetivo apresentar dados históricos a respeito da origem e importância da teoria das probabilidades e sobre a sua funcionalidade em algumas situações cotidianas a partir de pesquisas bibliográficas e análise de tais situações.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Origem e história da probabilidade

A probabilidade é o ramo da matemática que se dedica à modelagem de fenômenos não determinísticos, isto é, aqueles fenômenos em que o acaso representa um papel preponderante, sendo o acaso um conjunto de forças não controladas que exercem um papel crucial na ocorrência de diferentes resultados de um experimento ou fenômeno (VIALI, 2008).

Por exemplo, ao lançar uma moeda, os possíveis resultados são “cara” e “coroa”. Porém, antes de realizar os lançamentos não é possível antecipar qual dos dois resultados irá ocorrer. Isto acontece porque os fatores que determinam esses resultados não podem ser identificados e controlados (VIALI, 2008). O acaso relaciona-se também com outros exemplos, como a determinação da vida útil de um equipamento eletrônico e as previsões do tempo. Ou seja, é possível observar como o acaso pode estar associado aos jogos de azar, aos fenômenos naturais e aos eventos ocorridos no cotidiano (CALABRIA & CAVALARI, 2013).

A ideia de acaso é quase tão antiga quanto as primeiras civilizações, porém a percepção de que isto é um fenômeno natural veio a ocorrer bem mais tarde. Inicialmente o acaso era percebido como obra da divindade. As principais teorias sobre o surgimento de cálculos probabilísticos remetem ao tempo das primeiras civilizações no início da era pré-Cristã, como os Babilônios, os Egípcios, os Gregos e os Romanos, tendo seus primeiros indícios a partir do jogo Tali e do cálculo de seguros (CALABRIA & CAVALARI, 2013; VIALI, 2008).

Tali, o jogo do osso, era um jogo de dado praticado com astrálagos, um osso do calcanhar de um animal específico que possui o formato de um tetraedro irregular, podendo ser referido como ancestral do dado moderno, o hexaedro regular. No astrálogo, as quatro faces não eram idênticas, havia o lado côncavo, o convexo, o plano e o sinuoso. Com isso, neste dado as faces não mostravam a mesma frequência de ocorrência, havendo assim, uma pontuação diferente para cada lado. O jogo era usado para apostas, previsões sobre o futuro, na decisão de disputas e na divisão de heranças (HACKING, 2006).



Figura 2.1: Osso astrálagos.  
Fonte: Calabria & Cavalari (2013).

Não há certeza de como eram realizados os cálculos para os valores dos seguros na época, realizados inicialmente por comerciantes mesopotâmicos e fenícios. Especula-se que esses valores eram baseados na probabilidade dos acontecimentos que envolviam acidentes, ou seja, aplicavam a perda da carga de navios por naufrágio ou roubo e baseavam-se em estimativas para os acidentes. Dessa forma, caso fosse registrado alto índice de acidentes em uma rota marítima, com certeza o preço cobrado seria acima da média estipulada.

Com estas ideias, alguns autores defendem que as tentativas de quantificação dos riscos associados a naufrágios, acidentes, mortes, junto com a quantificação das possibilidades de se ganhar em jogos de azar, foram os fatores pioneiros para o início da Teoria das Probabilidades (VIALI, 2008; CALABRIA & CAVALARI, 2013). Porém, apesar dos jogos e da navegação fazerem parte do desenvolvimento da humanidade, uma abordagem matemática do acaso e do risco só teve início efetivamente a, aproximadamente, 500 anos.

Até este momento, não existia a pretensão de utilizar a probabilidade como uma forma de determinar as possíveis chances de se ganhar um jogo. Os jogos estavam relacionados a brincadeiras, a prever o futuro e a apostas, ou seja, o propósito dos cálculos limitava-se à descrição e ao estudo dos jogos de azar e quase todo o esforço era concentrado no cálculo do valor de certas probabilidades de interesse, não havendo preocupação probabilista exata (FELLER, 1967; VIALI, 2008). Dessa forma, a prática de jogos de azar ainda não era pensada de maneira a reduzi-las à forma matemática como, por exemplo, calcular os casos favoráveis de um jogo e estimar a regularidade do acontecimento dos eventos.

Há indícios de que os primeiros estudos probabilísticos foram realizados por mentes italianas dos séculos XV e XVI, como frei Luca Pacioli (1445 - 1517), Niccolò Fontana, mais conhecido como Tartaglia (1499 - 1557) e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Eles foram além da simples enumeração das possibilidades para resolver problemas de comparação de frequências de ocorrências e ganhos em jogos de azar, mas não formularam conceitos e teoremas que se baseassem em alguma teoria, limitaram-se apenas a resolver problemas concretos (SILVEIRA, 2001; VIALI, 2008).

Frei Luca Pacioli dedicou-se ao estudo do problema conhecido como o problema dos pontos, ou divisão de apostas, publicando em 1494, na obra intitulada *Summa de arithmetica, geometria, propotiononi e propotionalità*, uma solução para o problema que apresenta a seguinte situação: “Um jogo termina quando um dos jogadores vence seis partidas. Suponha-se que por algum motivo o jogo tenha que ser interrompido e, neste momento, o primeiro jogador tenha sido vencedor em cinco partidas e o segundo em apenas três. Como as apostas devem ser repartidas?” Pacioli publicou que os jogadores deveriam dividir a aposta numa proporção de 5 por 3, o que foi determinado incorreto por Tartaglia em sua obra intitulada *General Trattato* de 1556, e, mais tarde, resolvido por Pascal e Fermat. Ao inspirar muitos outros estudiosos, este problema é considerado como o fundador do cálculo das probabilidades (VIALI, 2008; KATZ, 2009; CALABRIA & CAVALARI, 2013).

Girolamo Cardano publicou em 1663 a obra *Liber de Ludo Alae* (Livro de Jogos de Azar), um manual de jogos “[...] que buscava permitir a tomada de boas decisões nos problemas de jogos de azar encontrados naquela época” (COUTINHO, 2007). Sendo viciado em jogos, ele foi o primeiro a estudar o lançamento de dados. Viali (2008) considera Cardano como o pioneiro do cálculo de probabilidade, pois foi o primeiro a introduzir técnicas de combinatória no cálculo dos casos possíveis de um evento e também a considerar a probabilidade de um evento como a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Ele também conhecia a ideia de eventos independentes e a regra da multiplicação entre eles. Porém, seus estudos ficaram limitados a casos concretos de jogos de azar principalmente o de dados.

Depois da participação de Tartaglia e Cardano na origem da teoria das probabilidades, não existe registro de outros estudiosos do século XVI que estudaram este assunto, apesar de haver algumas evidências de cálculos probabilísticos realizados por Galileu Galilei (1564 - 1642) relacionados com jogos de dados (DAVID, 1962).

Galileu Galilei também publicou um manual sobre jogos, o *Sopra le scoperta dei dadi*. Ele se dedicou ao estudo de um problema semelhante ao de Cardano. Tal problema consistia em justificar porque quando são lançados três dados o número nove e o número 10 podem aparecer em seis combinações diferentes e a prática mostra que o número 10 aparece mais frequentemente do que o nove. Além disso, há evidências de sua relação com a distribuição normal, pois foi um dos primeiros a perceber que os erros de observações astronômicas apresentavam um comportamento típico. Ele percebeu que variavam em torno de um resultado supostamente verdadeiro e que a sua frequência decrescia com o aumento do valor (TODHUNTER, 1965; VIALI, 2008).

Partindo de uma visão francesa, a probabilidade se desenvolve evidentemente a partir da troca de correspondências entre Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665). Com elas, esses estudiosos apresentaram uma solução para um problema semelhante ao problema dos pontos citado anteriormente e para outro problema que ques-

tionava o número mínimo de lançamentos de um par de dados equilibrados para que se tenha um par de seis com probabilidade superior a 50%. Problemas estes apresentado a Pascal por Antoine Gombauld (1610 - 1685), um homem que ganhava a vida jogando e era conhecido como cavaleiro de Méré (VIALI, 2008; CALABRIA & CAVALARI, 2013).

Juntos, Pascal e Fermat apresentaram a seguinte relação para o problema que generaliza o problema dos pontos: suponha que um jogo é interrompido quando o primeiro jogador precisa de  $r$  jogos para vencer enquanto que o segundo necessita de  $s$  jogos, onde  $r + s \geq 1$ . Então o primeiro jogador deve receber:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} / 2^n, \quad (2.1)$$

onde  $n = r + s - 1$  é o número máximo de jogadas restantes.

Diante disso, a correspondência entre Pascal e Fermat iniciou a teoria das probabilidades, pois estudar esses problemas desencadeou um interesse crescente pelo assunto e estudiosos da época começaram a publicar obras a respeito da probabilidade. Como, por exemplo, o holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695), considerado o primeiro cientista a apresentar de forma sistemática os problemas já discutidos por Pascal e Fermat, adotando regras e concedendo a primeira ideia de expectativa matemática em 1657 na obra intitulada *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (DAVID, 1962). Também o francês Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) que publicou em 1812 a obra *Théorie Analytique des Probabilités* que discutia os princípios da teoria e principalmente aplicações nos jogos de azar, filosofia natural, ciência morais, testemunho, decisões judiciais e mortalidade. Além da regra de Bayes e o conceito de esperança matemática, o livro apresentava, ainda, métodos de determinar probabilidades de eventos compostos quando as probabilidades dos eventos simples são conhecidas, uma discussão do método dos mínimos quadrados, o problema da agulha de Buffon e a probabilidade inversa (VIALI, 2008).

A partir da obra de Laplace, os estudos na área cresceram ainda mais e tiveram a atenção de grandes matemáticos, como o alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), o suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), o russo Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922), e os franceses Siméon Denis Poisson (1781 - 1840), Jules Henri Poincaré (1854 - 1912), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956), Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941), Jean Le Rond d'Alembert (1717 - 1783) (VIALI, 2008; CALABRIA & CAVALARI, 2013).

Assim, a história da teoria da probabilidade mostra uma interação estimulante entre a teoria e a prática. Em seu desenvolvimento, o progresso da teoria abre novos campos de aplicação aumentando seu campo de influência e conduzindo a novos problemas e a pesquisas produtivas.

De acordo com Feller (1976), o sucesso da teoria das probabilidades explica-se

pelo fato dela ter se limitado ao estudo da “chance”. A noção intuitiva de probabilidade está ligada a afirmações tais como: “Paulo é provavelmente um homem feliz” ou “Este livro será provavelmente um fracasso”, afirmações dessa natureza são de interesse para o filósofo e para o lógico e se constituem no objeto de estudo de uma teoria matemática.

Para Matthews (2017) as leis da probabilidade são capazes de muita coisa além de apenas entender eventos probabilísticos, ele defende que elas têm se mostrado cruciais para separar impurezas aleatórias do ouro das evidências e, portanto, a necessidade de compreender probabilidade, risco e incerteza nunca foi tão necessária. Isso, pois em meio a agitações políticas, confusões nos mercados financeiros, riscos, ameaças e calamidades, todos ficam ansiosos por uma certeza.

## 2.2 Probabilidade

Nesta subseção serão apresentados alguns conceitos e definições principais da Teoria das Probabilidades, os quais serão utilizados durante o desenvolvimento das situações cotidianas escolhidas.

**Experimentos aleatórios** são experimentos que podem conduzir a diferentes resultados mesmo quando as condições iniciais são as mesmas, existindo a imprevisibilidade do resultado. São exemplos o lançamento de um dado, o lançamento de uma moeda e retirar uma carta de um baralho devidamente embaralhado (CORREA, 2003).

O **espaço amostral** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento. Por exemplo, o espaço amostral do experimento “lançamento de um dado” é o conjunto  $S = \{cara, coroa\}$ . Já, o espaço amostral do evento “lançar um dado” é o conjunto  $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  (CORREA, 2003).

Um **evento aleatório** é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Um resultado obtido de cada experimento aleatório, que não é previsível. Por exemplo, o evento  $E$ : *obter 6 no lançamento de um dado honesto* (CORREA, 2003).

Diante disso, a **probabilidade de um evento**  $E$  ocorrer,  $P(E)$ , é dado por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n}, \quad (2.2)$$

onde  $n(E)$  é o número de resultados favoráveis a  $E$  e  $n$  o número total de resultados possíveis (ROSS, 2010).

De acordo com Yates e Goodman (2017), dados dois eventos podemos calcular a probabilidade de ocorrência do evento A condicionada a ocorrência prévia do evento B. Assim, se A e B são eventos quaisquer e  $P(B) > 0$ , é definida a **probabilidade condicional** de A dado B por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (2.3)$$

Da qual, segue que

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \quad (2.4)$$

Em sequência, dois eventos são independentes quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade de ocorrência do outro (YATES & GOODMAN, 2017). Dessa forma, se A e B são independentes,

$$P(A|B) = P(A). \quad (2.5)$$

Dessa relação, segue-se a definição de eventos independentes apresentada pelos autores: A e B são ditos **eventos independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (2.6)$$

Funções que associam números reais aos eventos de um espaço amostral descrevendo os resultados de um experimento com números ao invés de palavras são ditas **variáveis aleatórias**. Denomina-se variável aleatória discreta quando os possíveis valores que a variável pode assumir se resumem a um conjunto enumerável de valores. Por outro lado, denomina-se variável aleatória contínua se os resultados do experimento podem ser qualquer valor de um intervalo contínuo (NETO & CYMBALISTA, 2006).

A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória é uma descrição das probabilidades associadas aos valores possíveis para ela. Para uma variável aleatória discreta, a distribuição é dada por uma lista de valores possíveis juntamente com a probabilidade de cada um. Esta lista deve satisfazer duas condições: cada probabilidade deve ser maior ou igual a zero ( $P(X = x_i) \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$ ) e a soma das probabilidades deve ser igual a 1 ( $\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$ ). Para uma variável aleatória contínua, a distribuição é dada por uma função que associa seus valores com a probabilidade de cada e as mesmas condições anteriores devem ser verificadas para que uma função de variável aleatória contínua seja denominada de função de densidade de probabilidades, ou seja,  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  (MONTGOMERY & RUNGER, 2018).

As principais distribuições teóricas de probabilidades, de acordo com a variável, são:

- Variáveis Aleatórias Contínuas: Normal, Exponencial, *t-Student*, Gama, Erlang, Qui-quadrado, Uniforme contínua.
- Variáveis Aleatórias Discretas: Binomial, Poisson, Uniforme discreta, Geométrica, Pascal, Hipergeométrica.



Cada distribuição teórica possui um modelo que pode ser usado para diversas situações do dia-a-dia. A escolha do melhor modelo depende da situação sob estudo. Neste trabalho, interessa a distribuição teórica de variável discreta geométrica e hipergeométrica.

Supondo um experimento que consiste na repetição de uma prova, que só pode gerar sucesso ou fracasso, até se obter o primeiro sucesso, dado que são provas independentes e de mesma probabilidade de sucesso  $p$ , então o número de tentativas necessárias para obter sucesso é descrita pela **distribuição geométrica** dada por

$$P(X = x) = p \cdot q^{x-1}, \quad (2.7)$$

em que a esperança matemática de  $X$  geométrica é  $E(X) = \frac{1}{p}$  e a variância é  $Var(X) = \frac{q}{p}$  (NETO & CYMBALISTA, 2006).

Por fim, de acordo com Montgomery e Runger (2018), a distribuição hipergeométrica descreve a probabilidade de  $k$  sucessos em  $n$  retiradas, sem reposição, de uma população de tamanho  $N$  que contém exatamente  $k$  sucessos. Seja a variável aleatória  $X$  : o número de sucessos na amostra, então  $X$  é uma variável aleatória com **distribuição hipergeométrica** e sua função de distribuição de probabilidades é dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}. \quad (2.8)$$

Para  $X$  hipergeométrica, tem-se  $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ ,  $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . A esperança matemática de  $X$  é  $E(X) = n \frac{k}{N}$  e a variância  $Var(X) = n \left(\frac{k}{N}\right) \left(\frac{N-k}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ .

As próximas subseções versam sobre as situações cotidianas estudadas que são analisadas com os devidos cálculos probabilísticos na Seção 5 – Resultados e Discussões.

## 2.3 A probabilidade na dança das cadeiras

A dança das cadeiras é uma brincadeira simples que estimula agilidade, atenção, estratégia, movimento e ritmo. Por este motivo é muito trabalhado com crianças, mas não é impedimento para diversão de adultos. Suas regras básicas são:

- O número de cadeiras deve ser menor que o número de jogadores;
- As cadeiras devem estar organizadas em círculo;
- Enquanto toca uma música, os participantes devem dançar andando em volta das cadeiras;
- Quando a música parar, todos se sentam. Quem sobrar em pé está eliminado;
- O ultimo jogador restante será o vencedor.

De acordo com as regras, se no início da brincadeira há  $n$  jogadores participando, o número de cadeiras deverá ser  $n - 1$ . Ao final da primeira rodada, quando o primeiro jogador for eliminado, ficarão  $n - 1$  jogadores e  $n - 2$  cadeiras, pois a cada jogada são retirados da brincadeira um jogador e uma cadeira, assim, tem-se:

- Rodada 1:  $n$  jogadores e  $n - 1$  cadeiras;
- Rodada 2:  $n - 1$  jogadores e  $n - 2$  cadeiras;
- Rodada 3:  $n - 2$  jogadores e  $n - 3$  cadeiras;
- Rodada 4:  $n - 3$  jogadores e  $n - 4$  cadeiras;
- Rodada 5:  $n - 4$  jogadores e  $n - 5$  cadeiras;
- $\vdots$
- Rodada  $i$ :  $(n - i + 1)$  jogadores e  $(n - i)$  cadeiras.

Diante dessas informações, a probabilidade de um jogador ganhar ou ser eliminado em certa rodada é descrita na Seção 5.

## 2.4 A segurança da senha padrão

O celular se tornou um objeto comum e indispensável. Crianças, adultos e idosos acabaram por depender deste pequeno aparelho para muitas funções, como por exemplo conversas, redes sociais, fotos, informações bancárias, relógio, músicas e tantas outras funcionalidades que tornam a principal função, a de telefonar, obsoleta. Por isso, diante do fato de que carregamos cada vez mais informações pessoais e importantes no celular, existe um grande esforço em manter tais dados protegidos.

Uma das formas de proteger esses dados é por meio do bloqueio do celular através do uso de senhas de acesso. Além do leitor de digital, dentre as possíveis senhas para celulares com sistema operacional *Android*, existem:

- **Senha numérica**, na qual são utilizados apenas números, de 0 a 9, sendo necessário ter no mínimo 4 e no máximo 16 caracteres. Por exemplo, a senha 1234;
- **Senha alfanumérica**, na qual podem ser utilizados números, letras maiúsculas e minúsculas e alguns símbolos como ponto, vírgula, hífen e outros. Nesta senha, também é necessário ter no mínimo 4 e no máximo 16 caracteres. Um exemplo é a senha: \_Prob.123\_;
- **Senha padrão**, na qual as senhas são padrões de ligações entre 9 pontos dispostos em um quadrado 3x3.

Uma representação gráfica de cada uma dessas senhas pode ser verificada na Figura 2.2.



Figura 2.2: Representação dos três tipos de senha, numérica, alfanumérica, e padrão, respectivamente.

Fonte: Autor (2019).

Para atender aos objetivos deste trabalho, daremos foco somente à análise da senha padrão. Como mostra a Figura 2.2 (c), a base para os padrões se constitui de nove pontos na qual o padrão deve ser constituído pela ligação de no mínimo quatro pontos, podendo ser feito em qualquer direção e com as seguintes restrições: um ponto não pode ser selecionado mais de uma vez e não é possível passar por um ponto sem selecioná-lo.

Em uma senha padrão, a ordenação dos pontos tem influência sobre a senha. As duas representações da Figura 2.3 abaixo, apesar de possuírem o mesmo desenho gráfico, representam senhas padrões distintas, uma vez que a ordenação dos pontos difere. A saber, ao trocar os pontos por números, a senha (a) da Figura 2.3 é a sequência 14789632 e a senha (b) é a sequência 23698741.

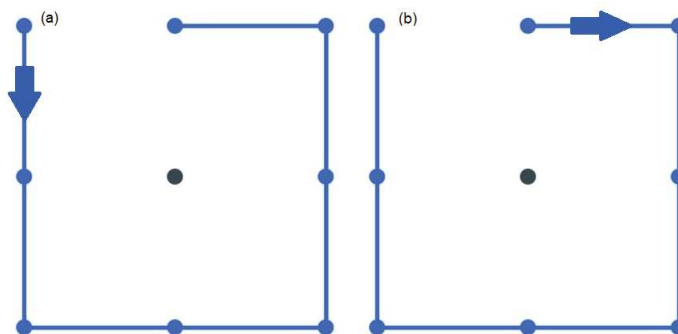


Figura 2.3: Representações das senhas padrão (a) 14789632 e (b) 23698741.

Fonte: Autor (2019).

Marte Loge (2015), apontou em sua pesquisa que os usuários desta senha utilizam em média 5 pontos no padrão de segurança. Diante disso, se torna interessante investigar quantos são os padrões possíveis que utilizam 5 pontos para, assim, determinar

a probabilidade de alguém sem autorização acertar o padrão de segurança. Os resultados são apresentados na Seção 5.

## 2.5 Acertando na Mega-Sena

A Caixa Econômica Federal é a responsável pela administração e gestão das loterias no Brasil, existindo dez tipos de jogos: Mega-Sena, Lotofácil, Quina, Lotomania, Timemania, Duplasena, Federal, Loteca, Lotogol e Dia De Sorte (CAIXA, 2019)

A Mega-Sena é o jogo que paga o maior prêmio dentre os jogos de loteria da Caixa e também é o que possui a menor probabilidade de acerto (CAIXA, 2019). Isso, pois para ganhar o prêmio máximo é necessário acertar os seis números sorteados no conjunto de 1 a 60, sendo a aposta mínima de 6 números e a máxima de 15. Também são pagos prêmios a quem acerta 4 ou 5 números dos 6 sorteados, denominados quadra e quina, respectivamente. Na Seção 5 são apresentados os resultados da análise de cada caso.

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

Com o objetivo de provar a importância e possibilidade de estudo da teoria das probabilidades através de simples situações cotidianas, além de uma pesquisa bibliográfica realizada para embasamento sobre a origem dos estudos de probabilidade, outra foi realizada com objetivo de escolha das situações para o estudo.

Tais situações foram determinadas arbitrariamente, descritas e resolvidas manualmente. Para o jogo da dança das cadeiras, utilizou-se a probabilidade condicional, dado que para vencer a  $i$ -ésima rodada é necessário ter vencido as  $i-1$  rodadas anteriores no jogo.

Para o estudo da senha padrão, utilizada como bloqueio de tela inicial de celulares, foram necessários diagramas de árvore para analisar todas os padrões possíveis e a distribuição de probabilidades geométrica para calcular a probabilidade presente na situação determinada.

Por fim, a análise das probabilidades presentes na Mega-Sena baseou-se na distribuição de probabilidades hipergeométrica. Tal distribuição foi utilizada para determinar, em jogos de 6 a 15 números, as chances de acerto na quadra, quina e sena. Também apresentou-se uma comparação destas probabilidades e dos valores sobre os jogos.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 A probabilidade na dança das cadeiras

Considere a situação a seguir.

[**Situação**] Suponha que em uma turma hajam 13 crianças que participarão da dança das cadeiras. Qual a probabilidade de uma criança ganhar em 3 rodadas? Qual a probabilidade de uma criança ganhar em no mínimo 1 e no máximo 3 rodadas? Considerando que a criança tenha sorte de não ter saído nas três primeiras rodadas, qual a probabilidade dela sair na quarta rodada da brincadeira?

Para descrever a probabilidade na situação, é necessário considerar os seguintes pontos:

1. Como há 13 crianças participando da brincadeira, sabe-se que o número de cadeiras é 12;
2. A quantidade de cadeiras diminui a cada rodada, mudando a probabilidade de vencer em cada rodada;
3. Para que a criança vença uma rodada, é necessário que tenha vencido todas as anteriores, isto é, a probabilidade de vencer a  $i$ -ésima rodada está condicionada a probabilidade de vencer as  $i-1$  rodadas anteriores.

Consideradas estas informações, torna-se possível revolver as três questões apontadas através da probabilidade condicional.

Primeiramente, segue que a probabilidade de uma criança vencer em 3 rodadas pode ser descrita como

$$P(X = 3) = P(X_1 \cap X_2 \cap X_3), \quad (4.1)$$

tal que  $X_i$ : a criança ganhar na rodada  $i$ . Para resolvê-la, sabe-se, como descrito na Equação 2.4 de probabilidade condicional, que

$$P(X_1 \cap X_2 \cap X_3) = P(X_1 \cap X_2) \cdot P(X_3|X_1 \cap X_2),$$

na qual

$$P(X_1 \cap X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2|X_1).$$

Além disso, sabe-se que  $P(X_1) = \frac{1}{12}$  e que  $P(X_2|X_1) = \frac{1}{11}$ , pois a segunda rodada possui uma cadeira a menos que a primeira. Assim,

$$P(X = 3) = P(X_1) \cdot P(X_2|X_1) \cdot P(X_3|X_1 \cap X_2)$$

$$P(X = 3) = \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1}{11}\right) \left(\frac{1}{10}\right)$$

$$P(X = 3) \approx 0,000758.$$

Logo, a probabilidade da criança ganhar em 3 rodadas é de aproximadamente 0,0758%.

Agora, para calcular a probabilidade da criança ganhar em no mínimo 1 e no máximo 3 rodadas, isto é,  $P(1 \leq X \leq 3)$ , tem-se que

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3), \quad (4.2)$$

na qual  $P(X = 1)$  é a probabilidade da criança ganhar a primeira rodada,  $P(X = 2)$  a probabilidade de ganhar na segunda rodada e  $P(X = 3)$  a probabilidade de ganhar na terceira rodada.

Realizando os cálculos separadamente, obtém-se os seguintes resultados:

- $P(X = 1) = P(X_1) = \frac{1}{12} \approx 0,083333$ ,
- $P(X = 2) = P(X_1 \cap X_2) = P(X_1) \cdot P(X_2|X_1) = \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1}{11}\right) \approx 0,007576$

e, pela questão anterior,  $P(X = 3) \approx 0,000758$ . Assim, a soma das probabilidades de  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  e  $P(X = 3)$  resulta em

$$P(1 \leq X \leq 3) \approx 0,091667.$$

Dessa forma, a probabilidade da criança ganhar de uma a três rodadas é de aproximadamente 9,1667%.

No último caso, o objetivo é obter a probabilidade da criança sair na quarta rodada da brincadeira, ou seja,  $P(X = 4)$  dado por

$$P(X = 4) = P(X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap \overline{X_4}), \quad (4.3)$$

na qual  $\overline{X_4}$  é a probabilidade de sair na quarta rodada, ou seja,  $\overline{X_4} = 1 - X_4$ . Logo,

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1}{11}\right) \left(\frac{1}{10}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$P(X = 4) \approx 0,000673.$$

Portanto, a probabilidade da criança sair exatamente na quarta rodada é de aproximadamente 0,0673%.

## 4.2 A segurança da senha padrão

Conforme descrito na Seção 3.5, a senha é constituída por padrões na base apresentada na Figura 2.2 (c). Para quantificar tais padrões, é possível dividir o processo em três partes: padrões que comecem pelos cantos, padrões que comecem pelo meio e padrões que comecem pelo centro. Abaixo, a Figura 4.1 exemplifica tais padrões, sendo (a) 1598732, (b) 24765 e (c) 5289731, começando pelo canto, meio e centro, respectivamente.

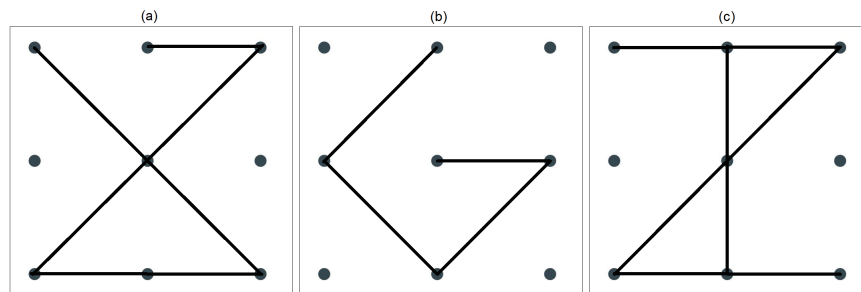


Figura 4.1: Representações das senhas padrão (a) 1598732, (b) 24765 e (c) 5289731, começando por um canto, meio e centro, respectivamente.

Fonte: Autor (2019).

Em um padrão onde o primeiro ponto é o central, temos que os possíveis caminhos a seguir, isto é, os possíveis segundos pontos são 4 cantos e 4 meios, como mostra a Figura 4.2.

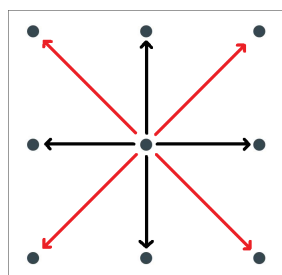


Figura 4.2: Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no centro

Fonte: Autor (2019).

Seguindo a diante, dos 4 cantos possíveis, pode-se seguir para um dos 4 meios ou 1 canto. Por outro lado, se o segundo ponto for um dos 4 meios, as possibilidades são seguir para um dos 4 cantos ou um dos 3 meios possíveis. Com este raciocínio, é possível construir um diagrama de árvore que quantifica cada caminho até o quinto ponto do



padrão iniciado no ponto central. A Figura 4.3 é um diagrama que quantifica os padrões iniciados no centro e seguido para os cantos.



Figura 4.3: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no centro e seguido para os cantos.

Fonte: Autor (2019).

A partir da Figura 4.3 é possível calcular quantos padrões são possíveis sabendo que se iniciam no centro e seguem para um dos quatro cantos. Para isso, deve-se multiplicar os elementos dentro de cada linha e somar os resultados obtidos, obtendo 512 padrões possíveis.

Da mesma forma, calcula-se o restante. A Figura 4.4 representa o diagrama que quantifica os padrões iniciados no centro e seguido para os meios.

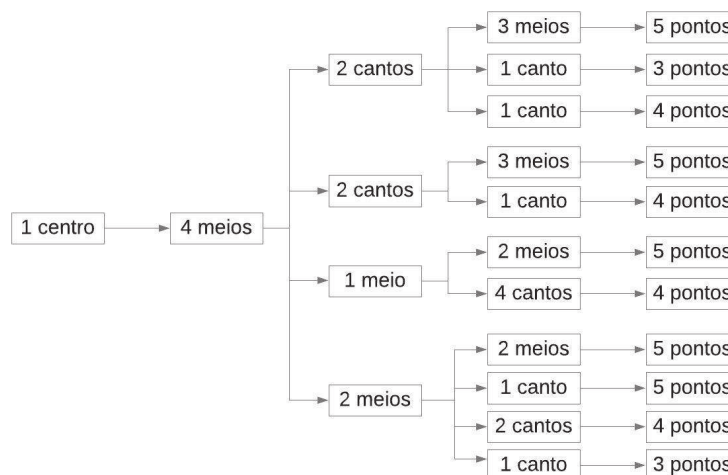


Figura 4.4: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no centro e seguido para os meios.

Fonte: Autor (2019).

Assim, ao multiplicar os elementos das linhas e somar seus resultados obtém-se 640 padrões possíveis que se iniciam no centro e seguem para um dos quatro meios.

Ou seja, é possível traçar 1.152 padrões diferentes iniciados no ponto central. Analogamente, quantificamos os caminhos possíveis para padrões que se iniciam em cantos e para padrões que se iniciam em meios.

Partindo dos cantos, os padrões tem como opção de segundo ponto o centro ou os meios, como mostra a Figura 4.5.

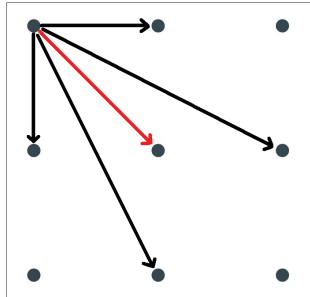


Figura 4.5: Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no canto.  
Fonte: Autor (2019).

Neste caso, além do ponto central, tem-se que meios diretamente ao lado do ponto inicial geram caminhos diferentes dos meios localizados do lado oposto. A Figura 4.6 a seguir exemplifica a situação, denominando (a) meios “a” para diretamente ao lado e (b) meios “b” para o lado oposto ao canto inicial.

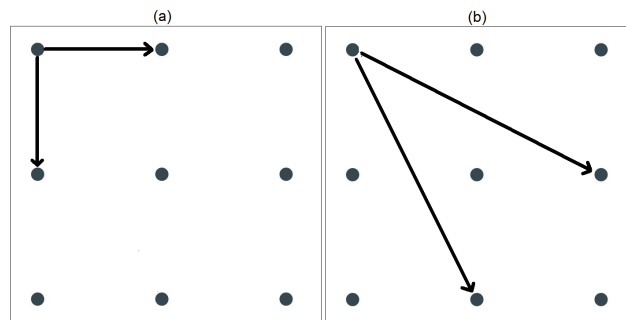


Figura 4.6: Representação de (a) meios “a” localizados diretamente ao lado do canto inicial e (b) meios “b” localizados do lado oposto.

Fonte: Autor (2019).

O diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto um canto e o segundo ponto o centro é representado na Figura 4.7.

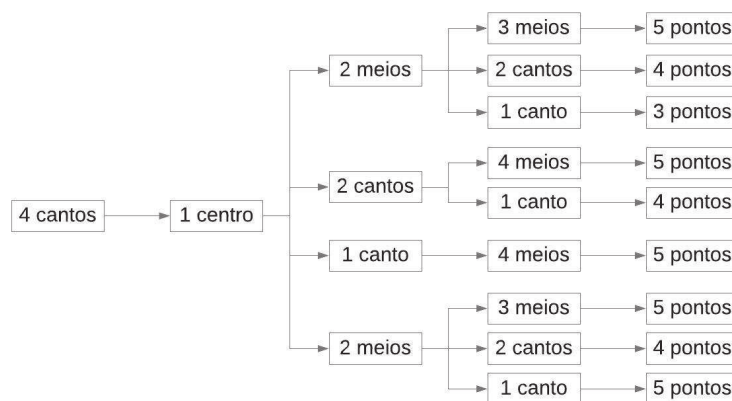


Figura 4.7: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no canto e seguido para o centro.

Fonte: Autor (2019).

Da Figura 4.7 resultam 704 padrões que se iniciam no canto e têm o centro como segundo ponto.

Seguindo, o diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto um canto e o segundo ponto o meio “a” é representado na Figura 4.8.

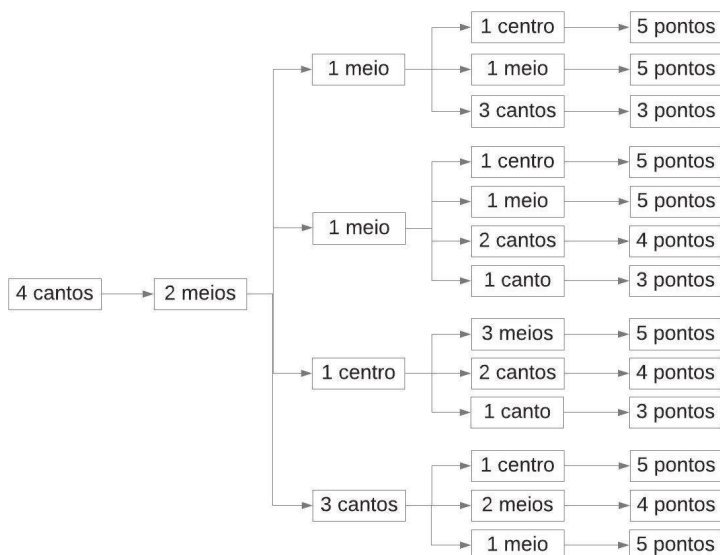


Figura 4.8: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no canto e seguidos para os meios “a”.

Fonte: Autor (2019).

Da Figura 4.8, resultam 960 padrões que se iniciam no canto e seguem para os meios “a”.

Por fim, o diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto

um canto e o segundo ponto um meio “b” é representado na Figura 4.9.

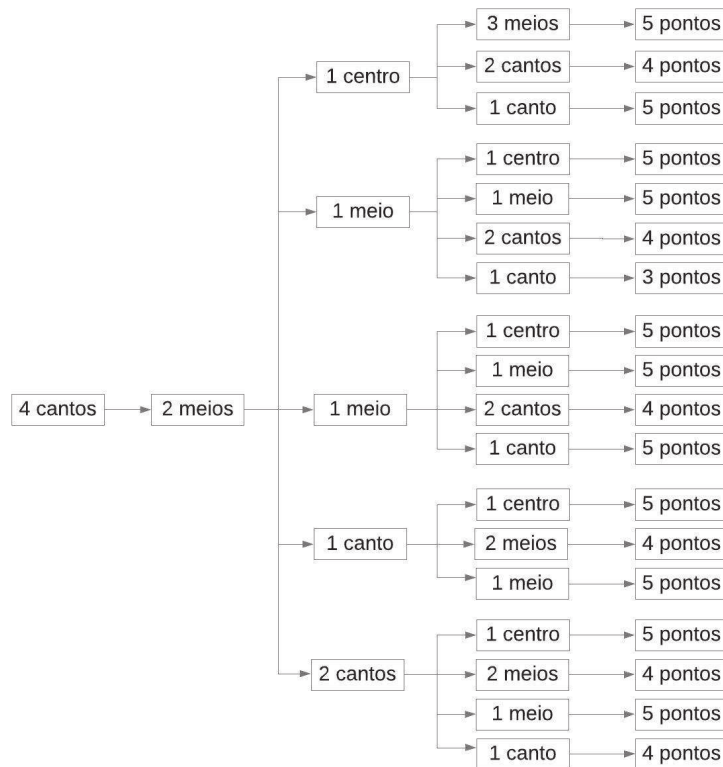


Figura 4.9: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no canto e seguido para os meios “b”.

Fonte: Autor (2019).

Da Figura 4.9, resultam 1.072 padrões que se iniciam no canto e seguem para os meios “b”. Portanto, é possível traçar 2.736 padrões diferentes quando iniciados em qualquer um dos 4 cantos.

Para finalizar, partindo dos quatro meios os padrões tem como opção de segundo ponto o centro, dois meios e quatro cantos, como mostra a Figura 4.10 abaixo.

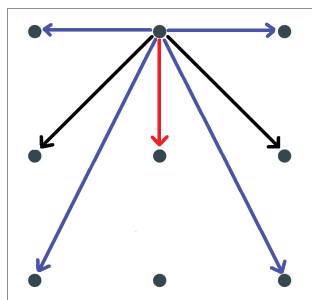


Figura 4.10: Representação do segundo ponto possível em um padrão iniciado no meio.

Fonte: Autor (2019).

Como no caso anterior, neste tem-se que cantos diretamente ao lado do ponto

inicial geram caminhos diferentes de cantos localizados ao lado oposto. A Figura 4.11 a seguir exemplifica a situação, sendo (a) cantos “a” para diretamente ao lado e (b) cantos “b” para o lado oposto ao meio inicial.

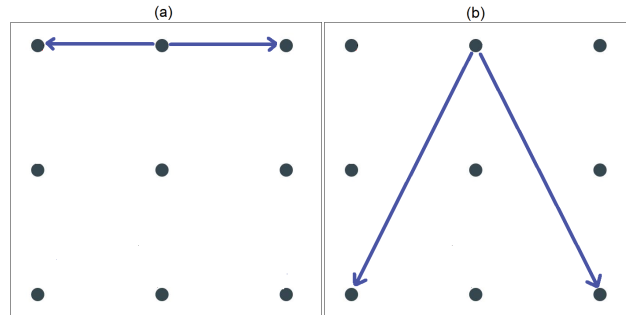


Figura 4.11: Representação de (a) cantos “a” localizados diretamente ao lado do meio inicial e (b) cantos “b” localizados do lado oposto.

Fonte: Autor (2019).

O diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto o centro é representado na Figura 4.12 a seguir. Dele resultam 640 padrões possíveis.

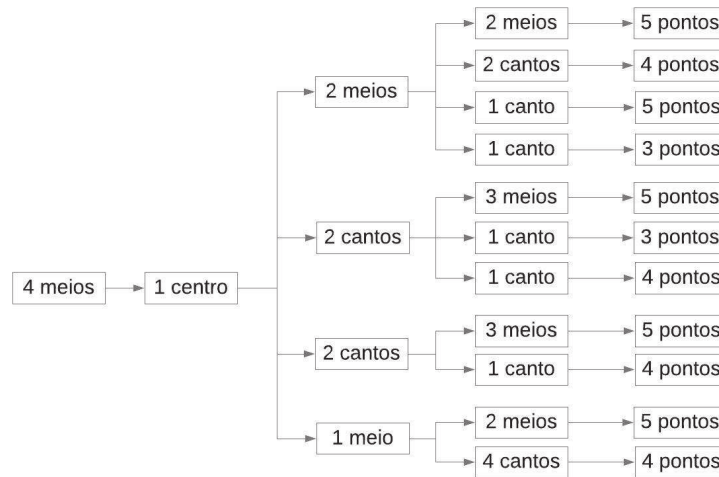


Figura 4.12: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para o centro.

Fonte: Autor (2019).

O diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto outro meio é representado na Figura 4.13 e dele resultam 992 padrões possíveis.

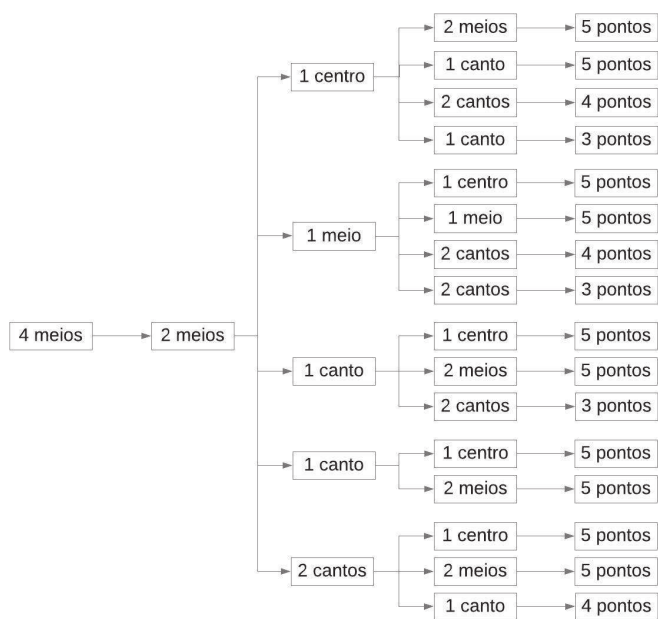


Figura 4.13: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para outro meio.

Fonte: Autor (2019).

O diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto um canto “a” é representado na Figura 4.14 e dele resultam 864 padrões.

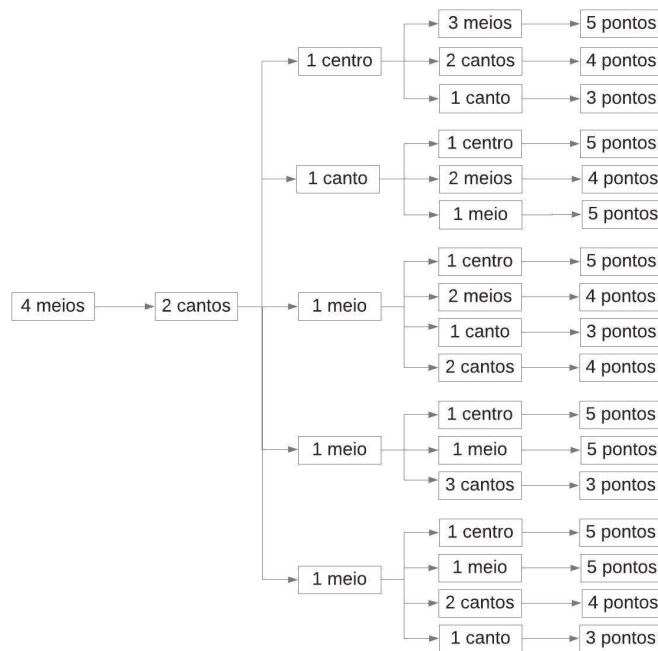


Figura 4.14: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para os cantos “a”.

Fonte: Autor (2019).

Por fim, o diagrama que quantifica os padrões que têm como primeiro ponto um meio e o segundo ponto algum canto “b” é representado na Figura 4.15 a seguir.

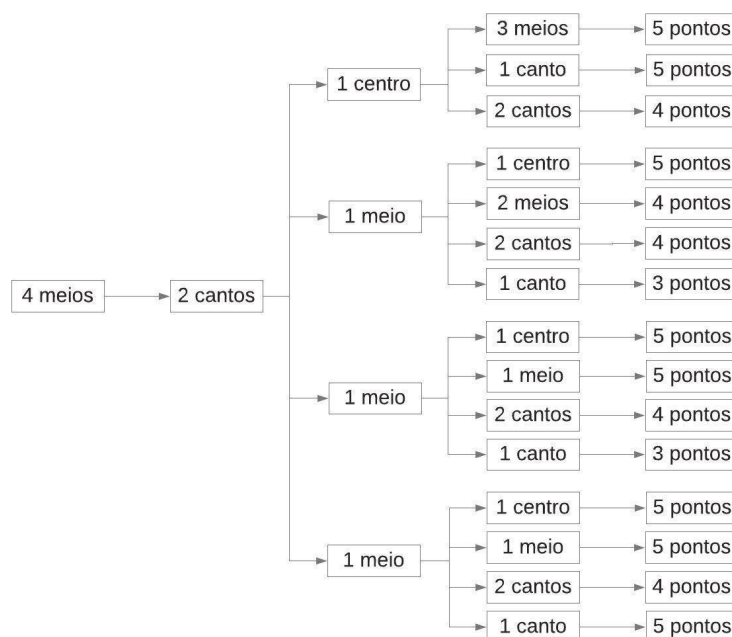


Figura 4.15: Diagrama da quantificação dos padrões iniciados no meio e seguido para os cantos “b”.

Fonte: Autor (2019).

Da Figura 4.15, resultam 768 padrões que se iniciam no meio e seguem para os cantos “b”. Ou seja, é possível traçar 3.264 padrões diferentes iniciados em um dos 4 meios.

Portanto, a soma dos possíveis padrões iniciados no centro, cantos e meios resulta em 7.152 padrões de 5 pontos que podem ser usados como a senha de segurança de um celular.

Diante dessas informações é possível analisar a seguinte situação.

**[Situação]** Suponha uma aposta em que Fulano deve acertar a senha do celular de seu amigo sem utilizar estratégias. Dado que a única informação que possui é que o padrão se inicia no canto superior esquerdo, qual a chance de acertar a senha na décima tentativa?

Como visto, é possível traçar 2.736 padrões quando iniciados em um dos 4 cantos, logo, existem 684 padrões que se iniciam no canto superior esquerdo.

Considera-se que Fulano tentará acertar a senha sem utilizar estratégias, ou seja, fará os padrões aleatoriamente. Assim, a probabilidade de acerto em cada tentativa é de  $\frac{1}{684}$ .

Ao tentar acertar a senha, em cada tentativa existem apenas duas possibilidades: sucesso ou fracasso. Como o objetivo nesta situação é calcular a probabilidade de

acertar a senha, consideramos o sucesso  $p$  : *acertar a senha* e o fracasso  $q$  : *errar a senha*. Dessa forma,  $p = \frac{1}{684}$  e  $q = 1 - \frac{1}{684}$  em cada tentativa.

Para descrever a probabilidade de Fulano acertar a senha na décima tentativa, utiliza-se a distribuição geométrica dada pela Equação 2.7. Isso, pois para obter sucesso na décima tentativa, ocorreram 9 fracassos anteriores, logo:

$$P(X = 10) = \left(\frac{1}{684}\right) \left(1 - \frac{1}{684}\right)^9$$

$$P(X = 10) \approx 0,001443.$$

Portanto, Fulano tem aproximadamente 0,14% de chance de errar a senha 9 vezes e acertar na tentativa seguinte, isso sem usar estratégia alguma para acertar a senha.

### 4.3 Probabilidade de acertar na mega-sena

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para os cálculos das probabilidades de ser premiado na mega-sena, considerando os diversos cenários possíveis.

#### 4.3.1 PROBABILIDADE DE ACERTAR 6 NÚMEROS

Para calcular a probabilidade de acertar os 6 números sorteados na Mega-Sena utiliza-se a equação de distribuição hipergeométrica (FRAGA, 2013) conforme definido na Equação 2.8. Nessa situação,  $x = 6$  é a quantidade de números que quer acertar,  $N = 60$  é o tamanho da população onde  $n = 6$  é o tamanho da amostra, ou seja, a quantidade de números sorteados, e  $6 \leq k \leq 15$  é a característica da população, isto é, a quantidade de números apostados no jogo. Assim,

$$P(X = 6) = \frac{\binom{k}{6} \cdot \binom{60-k}{6-6}}{\binom{60}{6}}. \quad (4.4)$$

Para a aposta mínima de 6 números,  $k = 6$ , ou seja,

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{54}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{1 \cdot 1}{50.063.860} \approx 0,0000002.$$

Portanto, a chance de acertar na Mega-Sena fazendo a aposta mínima é de aproximadamente 0,000002%.

Dessa mesma forma calcula-se as chances do jogador ganhar apostando de 7 a 15 números, como segue abaixo.



- Aposta de 7 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{7}{6} \cdot \binom{53}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{7}{50.063.860} \approx 0,000014\%.$$

- Aposta de 8 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{8}{6} \cdot \binom{52}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{28}{50.063.860} \approx 0,000056\%.$$

- Aposta de 9 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{9}{6} \cdot \binom{51}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{84}{50.063.860} \approx 0,00017\%.$$

- Aposta de 10 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{10}{6} \cdot \binom{50}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{210}{50.063.860} \approx 0,00042\%.$$

- Aposta de 11 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{11}{6} \cdot \binom{49}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{462}{50.063.860} \approx 0,00092\%.$$

- Aposta de 12 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{12}{6} \cdot \binom{48}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{924}{50.063.860} \approx 0,0018\%.$$

- Aposta de 13 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{13}{6} \cdot \binom{47}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{1.716}{50.063.860} \approx 0,0034\%.$$

- Aposta de 14 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{14}{6} \cdot \binom{46}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{3.003}{50.063.860} \approx 0,006\%.$$

- Aposta de 15 números:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{15}{6} \cdot \binom{45}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{5.005}{50.063.860} \approx 0,01\%.$$

Da mesma forma, pode-se calcular as probabilidades de acertar a quina e a quadra, pois, como dito anteriormente, jogadores que acertam 4 ou 5 números dos 6 sorteados também ganham uma premiação.

### 4.3.2 PROBABILIDADE DE ACERTAR 5 NÚMEROS

Ao calcular as chances de acertar 5 dos 6 números sorteados (quina), também utiliza-se a Equação 3.2, porém, nesta situação,  $x = 5$ .

$$P(X = 5) = \frac{\binom{k}{5} \cdot \binom{60-k}{6-5}}{\binom{60}{6}}. \quad (4.5)$$

Assim, a probabilidade de acertar na quina fazendo a aposta mínima é de aproximadamente 0,00065%, pois

$$P(X = 5) = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{54}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{6 \cdot 54}{50.063.860} = \frac{324}{50.063.860} \approx 0,0000065.$$

Analogamente, pode-se calcular as probabilidades para apostas de 7 a 15 números, apenas variando o valor de  $k$  na Equação 4.5.

- Aposta de 7 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{7}{5} \cdot \binom{53}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{21 \cdot 53}{50.063.860} = \frac{1.113}{50.063.860} \approx 0,0022\%.$$

- Aposta de 8 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{8}{5} \cdot \binom{52}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{56 \cdot 52}{50.063.860} = \frac{2.912}{50.063.860} \approx 0,0058\%.$$

- Aposta de 9 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{9}{5} \cdot \binom{51}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{126 \cdot 51}{50.063.860} = \frac{6.426}{50.063.860} \approx 0,013\%.$$

- Aposta de 10 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{50}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{252 \cdot 50}{50.063.860} = \frac{12.600}{50.063.860} \approx 0,025\%.$$

- Aposta de 11 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{11}{5} \cdot \binom{49}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{464 \cdot 49}{50.063.860} = \frac{22.638}{50.063.860} \approx 0,045\%.$$

- Aposta de 12 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{12}{5} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{792 \cdot 48}{50.063.860} = \frac{38.016}{50.063.860} \approx 0,076\%.$$

- Aposta de 13 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{13}{5} \cdot \binom{47}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{1.287 \cdot 47}{50.063.860} = \frac{60.489}{50.063.860} \approx 0,12\%.$$

- Aposta de 14 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{14}{5} \cdot \binom{46}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{2.002 \cdot 46}{50.063.860} = \frac{92.092}{50.063.860} \approx 0,18\%.$$

- Aposta de 15 números:

$$P(X = 5) = \frac{\binom{15}{5} \cdot \binom{45}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{3.003 \cdot 45}{50.063.860} = \frac{135.135}{50.063.860} \approx 0,27\%.$$

### 4.3.3 PROBABILIDADE DE ACERTAR 4 NÚMEROS

Os cálculos ocorrem analogamente para obter as chances de acertar 4 dos 6 números sorteados, entretanto, nesta situação adota-se  $x = 4$ .

$$P(X = 4) = \frac{\binom{k}{4} \cdot \binom{60-k}{6-4}}{\binom{60}{6}}. \quad (4.6)$$

Assim, a chance de acertar na quadra fazendo uma aposta mínima, é de:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{54}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{15 \cdot 1.431}{50.063.860} = \frac{21.465}{50.063.860} \approx 0,043\%.$$

Para calcular a probabilidade das apostas de 7 a 15 números deve-se variar  $k$  na Equação 4.6, como feito anteriormente para apostas na sena e na quina.

- Aposta de 7 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{53}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{35 \cdot 1.378}{50.063.860} = \frac{48.230}{50.063.860} \approx 0,096\%.$$

- Aposta de 8 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{52}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{70 \cdot 1.326}{50.063.860} = \frac{92.820}{50.063.860} \approx 0,19\%.$$

- Aposta de 9 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{9}{4} \cdot \binom{51}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{126 \cdot 1.275}{50.063.860} = \frac{160.650}{50.063.860} \approx 0,32\%.$$

- Aposta de 10 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{10}{4} \cdot \binom{50}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{210 \cdot 1.225}{50.063.860} = \frac{257.250}{50.063.860} \approx 0,51\%.$$

- Aposta de 11 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{11}{4} \cdot \binom{49}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{330 \cdot 1.176}{50.063.860} = \frac{388.080}{50.063.860} \approx 0,78\%.$$

- Aposta de 12 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{495 \cdot 1.128}{50.063.860} = \frac{558.360}{50.063.860} \approx 1,12\%.$$

- Aposta de 13 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{13}{4} \cdot \binom{47}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{715 \cdot 1.081}{50.063.860} = \frac{772.915}{50.063.860} \approx 1,54\%.$$

- Aposta de 14 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{14}{4} \cdot \binom{46}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{1.001 \cdot 1.035}{50.063.860} = \frac{1.036.035}{50.063.860} \approx 2,07\%.$$

- Aposta de 15 números:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{15}{4} \cdot \binom{45}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{1.365 \cdot 990}{50.063.860} = \frac{1.351.350}{50.063.860} \approx 2,7\%.$$

#### 4.3.4 COMPARANDO AS PROBABILIDADES DA LOTERIA

Até agora as probabilidades de cada aposta e acertos na quadra, quina e sena foram apresentadas separadamente. A Tabela 4.1 mostra os resultados anteriores em proporção e possibilita comparar a probabilidade de cada aposta.

Tabela 4.1: Probabilidades de acertar na quadra, quina e sena

<b>Quantidade de números apostados</b>	<b>Sena (1 em)</b>	<b>Quina (1 em)</b>	<b>Quadra (1 em)</b>
6	50.063.860	154.518	2.332
7	7.151.980	44.981	1.038
8	1.787.995	17.192	539
9	595.998	7.791	312
10	238.399	9.973	195
11	108.363	2.211	129
12	54.182	1.317	90
13	29.175	828	65
14	16.671	544	48
15	10.003	370	37

Fonte: Autor (2019).

Fica evidente que quanto mais números apostados, mais aumentam as probabilidades de acerto, tanto na sena quanto na quina ou na quadra. Em contrapartida, enquanto o valor de uma aposta simples de 6 números atualmente custa R\$4,50, a aposta máxima de 15 números custa R\$22.522,50 (CAIXA, 2019). Ou seja, apesar da probabilidade aumentar de 0,000002% para 0,01% na sena, de 0,0022% para 0,27% na quina e de 0,043% para 2,7% na quadra, há uma diferença monetária de R\$22.518,00 e as chances ainda são menores que 3% em todos os casos.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como visto, o início dos estudos sobre a teoria das probabilidades nos remete a era pré-Cristã, se iniciando a partir de estratégias de jogadores para vencer apostas em jogos de azar, também havendo rumores sobre o desenvolvimento de cálculos a partir da cobrança de seguros. A cada estudo e obra publicada, mais estudiosos se interessavam e investigavam a fundo outras situações, como Girolamo Cardano, Frei Luca Pacioli, Tartaglia e até Galileu Galilei. Dessa forma, a teoria das probabilidades foi se desenvolvendo e conquistando sua importância em diferentes áreas do conhecimento.

Hoje a teoria das probabilidades possui aplicações nas mais diversas áreas científicas e objetivou este trabalho a apresentar que, apesar de sua grandeza, a probabilidade pode ser estudada através de simples situações cotidianas. Nele foram analisadas três situações escolhidas arbitrariamente: o jogo da dança das cadeiras, que utilizou apenas a probabilidade condicional entre eventos; a senha padrão utilizada para bloqueio de tela inicial de celulares, com foco no padrão de 5 pontos, na qual apresentou-se o uso da distribuição da variável discreta geométrica; e as apostas na Mega-Sena, uma das loterias administradas pela Caixa Econômica Federal, na qual estudou-se as probabilidades a partir da distribuição da variável discreta hipergeométrica.

A descrição da probabilidade presente em cada situação analisada mostrou que essa teoria pode ser estudada de forma simplificada e fora de ramos científicos. Em futuras pesquisas, seria de grande interesse a análise de situações ainda mais simples e cotidianas, como preparar uma refeição ou tomar caminhos para um compromisso.

Dessa forma, trabalhos como este se tornam uma grande contribuição ao ensino de probabilidade tanto na educação básica quanto no ensino superior, pois apresentam a probabilidade, considerada difícil, através de situações simples que podem facilitar o primeiro contato com esta ciência. Trabalhar com situações que estejam presentes no dia a dia do aluno ou que sejam de fácil acesso para que o aluno a analise e a entenda pode gerar um grande enriquecimento ao ensino de probabilidade.

## REFERÊNCIAS

- BATISTA, A. A. V. **Incertezas, decisões e o estudo da probabilidade**. 2017. Disponível em: <https://educacao.estadao.com.br/qblogs/blog-dos-colegios-santa-maria/incertezas-decisoes-e-o-estudo-da-probabilidade/>. Acesso em: 01 jun. 2019.
- CAIXA ECONÔMICA FEDERAL. **Loterias Caixa**. 2019. Disponível em: <http://loterias.caixa.gov.br/wps/portal/loterias/landing/megasena/>. Acesso em: 15 jul. 2019.
- CALABRIA, A. R.; CAVALARI, M. F. Um passeio histórico pelo início da Teoria das Probabilidades. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. **Anais...** Campinas: Unicamp, 2013.
- CORREA, S. M. B. B. **Probabilidade e estatística**. 2.ed. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003.
- COUTINHO, C. Q. S. Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. v.2, n.3, p.50-67, 2007.
- DAVID, F. N. **Games, gods and gambling: a history of probability and statistical ideas**. 1.ed. New York: Hafner Publishing Company, 1962.
- FELLER, W. **Introdução à teoria das probabilidades e suas aplicações: parte 1 - espaços amostrais discretos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1976.
- FRAGA, R. R. **O estudo das loterias: uma abordagem motivadora e facilitadora para aprendizagem de probabilidade no ensino médio**. 2013. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.
- HACKING, I. **The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference**. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an introduction**. 3.ed. Boston, Addison Wesley, 2009.
- LOGE, M. D. **Tell Me Who You Are and I Will Tell You Your Unlock Pattern**. 2015. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) - Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2015.

MATTHEWS, R. **As leis do acaso:** como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza. 1.ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2017.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros.** 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

NETO, P. L. O. C.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades:** resumos teóricos, exercícios resolvidos, exercícios propostos. 2.ed. São Paulo: Editora Blucher, 2006.

ROSS, S. **Probabilidade:** um curso moderno com aplicações. 8.ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

SILVEIRA, J. F. P. **Início da Matematização das probabilidades.** 2001. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/histo2c.html>. Acesso em: 24 jun. 2019.

TODHUNTER, I. **Mathematical Theory of Probability:** from the time of Pascal to that of Laplace. New York: Chelsea Publishing Company Bronx, 1965.

VIALI, L. Algumas Considerações sobre a Origem da Teoria das Probabilidades. **Revista Brasileira de História da Matemática.** Rio Grande do Sul, v.8, n.16, p.143-153, 2008.

YATES, R. D.; GOODMAN, D. J. **Probabilidade e processos estocásticos:** uma introdução amigável para engenheiros eletricitas e da computação. 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.