

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

FERNANDA VENITES BUZINARO

**DE PITÁGORAS A ALLEN FORTE:
ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO

2019

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA**

FERNANDA VENITES BUZINARO

**DE PITÁGORAS A ALLEN FORTE:
ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Prof. Me. Adriano Gomes de Santana

TOLEDO

2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM
MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado “DE PITÁGORAS A ALLEN FORTE: ALGUMAS RELAÇÕES ENTRE MATEMÁTICA E MÚSICA” foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de
--/--/----

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Prof. Me. Adriano Gomes de Santana

Prof. Dr. Wilian Francisco de Araujo

Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan

TOLEDO

2019

RESUMO

Este trabalho se propõe a estudar a Matemática presente na Música em alguns momentos de sua história. Iniciamos com a análise da formação da escala pitagórica, posteriormente adaptada por Andreas Werckmeister com a criação da escala temperada. Também estudamos a formação dos modos gregos e dos campos harmônicos maiores e menores, os quais são a base das composições tonais. Em seguida, estudamos a base da teoria matemática proposta por Allen Forte para realizar análises de músicas atonais, músicas estas que buscam um rompimento das regras do tonalismo. Para poder desenvolver esta teoria utilizamos dois grupos de funções denominadas T/TI e PLR , as quais realizam transposições, inversões e a análise das progressões de acordes quando aplicadas em uma música. Estes dois grupos de funções são ambos isomorfos ao grupo Diehral.

Palavras-chave: Matemática e Música. Escala Pitagórica. Teoria de Forte. Campos Harmônicos. Músicas Atonais.

ABSTRACT

This paper aims to study Math present in music in some moments of its history. We begin with the analysis of the Pythagorean scale formation, later adapted by Andreas Werckmeister with the creation of the temperate scale. We also studied the formation of the Greek modes and the major and minor harmonic fields, which are the basis of tonal compositions. Then we studied the basis of the mathematical theory proposed by Allen Forte to perform analysis of atonal music, those that seek a disruption in tonalism rules. In order to develop this theory we used two function groups named T/TI and PLR , which accomplish transpositions, inversions, and chord progression analysis when applied to a music. These two function groups are both isomorphic to the Dihedral group.

Keywords: Mathematics and Music. Pythagorean Scale. Forte Theory. Harmonic Fields. Atonal Songs.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Monocórdio	10
2.2	Posicionamento das notas na corda	12
2.3	Corda 3	12
2.4	Coma Pitagórico	13
2.5	Teclado	14
2.6	Escala de Dó maior e Sol maior	14
2.7	Partitura de Bach	16
3.1	Simetrias no triângulo equilátero	21
3.2	Simetrias no quadrado	22
3.3	Composições em D_4	22
4.1	Partitura de Schonberg	24
4.2	Enumeração das notas do teclado	25
4.3	Substituição das notas por números na partitura	25
4.4	Classes de equivalência das notas musicais	27
5.1	Análise da partitura de Bach	33
5.2	Hallelujah	34

LISTA DE TABELAS

2.1	Escala Pitágorica e Escala Temperada	13
2.2	Modos Gregos	15
3.1	Tabua de operações de S_3	20
4.1	Transposições e Inversões	28
4.2	Funções PLR	30

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	6
LISTA DE TABELAS	7
1 INTRODUÇÃO	9
2 A MATEMÁTICA NA MÚSICA	10
2.1 O SURGIMENTO DA MATEMÁTICA NA MÚSICA	10
2.2 MÚSICAS TONAIIS	12
3 GRUPOS	17
3.1 INTRODUÇÃO A TEORIA DE GRUPOS	17
3.2 PRINCIPAIS EXEMPLOS DE GRUPOS	18
3.2.1 GRUPO \mathbb{Z}_n	18
3.2.2 GRUPOS DE PERMUTAÇÕES	20
3.2.3 O GRUPO DIEDRAL	20
4 TEORIA DE FORTE	24
4.1 ANÁLISE DAS NOTAS A PARTIR DE NÚMEROS	24
4.2 O GRUPO T/TI	26
4.3 O GRUPO PLR	28
5 ANÁLISE DAS MÚSICAS SEGUNDO FORTE	32
5.1 ANÁLISE DAS MÚSICAS UTILIZANDO O GRUPO T/TI	32
5.2 ANÁLISE DAS MÚSICAS UTILIZANDO O GRUPO PLR	34
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	37
REFERÊNCIAS	37
ANEXO A – Partitura da Música Hallelujah	39

1 INTRODUÇÃO

O tema de nossa pesquisa diz respeito as relações entre a Matemática e a Música, mais especificamente como se dão as relações da teoria de grupos com a teoria de Forte e como ambas se relacionam com as composições musicais. Buscamos estudar e analisar composições pós modernas utilizando a matemática presente na teoria de grupos e na teoria de Allen Forte.

O interesse pelas relações entre a Matemática e a Música surgiu ao ingressar no curso de licenciatura em matemática. Já que existia interesse em ambos os temas dei início ao estudo das relações entre estas áreas do conhecimento. Com a oportunidade oferecida pelo curso e pelo Professor Adriano realizei juntamente com o colega Pablo Chang um minicurso denominado A matemática acústica: da emissão do som à escala pitagórica, que ocorreu na IV SEMAT - SEMANA DA MATEMÁTICA DA UTFPR - TOLEDO no ano de 2016 que já dava início ao envolvimento da matemática com a música. Para este trabalho, após estudarmos vários temas que relacionam ambas, escolhemos a teoria de Allen Forte.

No Capítulo 2 damos início abordando a matemática de Pitágoras na construção de sua escala musical. O que posteriormente veio a ser melhorada por Andreas Werckmeister com a construção da escala temperada, popularmente utilizada em músicas tonais.

Em seguida, no Capítulo 3, realizamos estudos referentes à teoria de grupos, pois a mesma é necessária ao longo do trabalho para o entendimento do funcionamento da teoria de Forte. Este Capítulo se encontra subdividido em uma introdução à teoria de grupos, que contém algumas definições e teoremas importantes. Em seguida apresentamos os grupos \mathbb{Z}_n , o grupo diedral e o grupo das permutações, principais exemplos que possuem maior influência sobre o entendimento do trabalho.

No Capítulo 4 apresentamos uma introdução à teoria matemática de Allen Forte, desenvolvida para ser utilizada na análise de composições atonais. Esta também pode ser utilizada na análise de músicas tonais. Este Capítulo também é subdividido nas principais partes da teoria de Forte, dentre elas o grupo das funções de transposições e inversões T/TI e o grupo das funções PLR .

Já o Capítulo 5 se remete ao desenvolvimento das análises musicais, sendo subdividido nas análises melódicas utilizando o grupo T/TI e nas análises harmônicas utilizando o grupo PLR . Cada um das seções traz uma análise proposta por (SOUZA, 2012) e uma desenvolvida inteiramente pelos autores.

2 A MATEMÁTICA NA MÚSICA

2.1 O SURGIMENTO DA MATEMÁTICA NA MÚSICA

Há séculos o homem é fascinado pela música, mas apenas em 500 a.C Pitágoras relacionou a Matemática com Música. Com o uso de um instrumento conhecido como monocórdio os pitagóricos obtiveram, através de variações do comprimento de sua corda, um conjunto de sons agradáveis quando tocados simultaneamente.

Como ilustrado na Figura 2.1 o monocórdio consiste em uma corda de comprimento L tensionada sob um suporte de madeira tendo fixas as suas extremidades e possui um traste móvel que é utilizado para fazer as divisões da corda.



Figura 2.1: Monocórdio

Fonte: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/poster/daniellemingatos.pdf>.

A corda de comprimento L sofre uma tensão τ que ao ser pinçada produz uma vibração de frequência f relacionada com a unidade linear de massa μ da corda. Esta frequência é reconhecida por nossos ouvidos como um determinado som. A relação entre frequência, comprimento, unidade linear de massa e tensão é apresentada em (HALLIDAY et al., 2008) e pode ser expressa pela equação:

$$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (2.1)$$

Ao aumentarmos a tensão τ da corda a frequência f será afetada de modo que está também irá aumentar, gerando sons mais agudos. Esta variação na tensão da corda é utilizada para a afinação de instrumentos, como por exemplo os violinos. No caso de aumentarmos o comprimento L ou a unidade linear de massa μ a frequência f produzida irá diminuir, produzindo assim sons mais graves.

Se compararmos isto com as cordas de um violão podemos observar que as cordas mais grossas do violão, que possuem maior unidade linear de massa μ , possuem uma sonoridade mais grave. Já as cordas mais finas do violão possuem uma sonoridade mais aguda.

Como mostra (SANTANA, 2016), foi a partir destas alterações na corda que os pitagóricos deram início ao que hoje conhecemos como escala pitagórica.

Ao pinçarmos a corda deste instrumento em seu comprimento total conseguimos um som que serve como nota base para encontrar as demais notas da escala pitagórica. Esta primeira nota pode ser denominada como fundamental ou tônica e é dada pela fração $\frac{1}{1}$ de seu comprimento. Ao dividirmos esta mesma corda ao meio obtemos um som equivalente ao primeiro, isto é, um novo som que tem as mesmas características do som fundamental soando como se fosse a mesma nota, esta se denomina oitava. Ao dividir a corda em três partes iguais e tocar $\frac{2}{3}$ de seu comprimento obtemos um som que não é mais idêntico ao fundamental mas soa de forma agradável em conjunto com este som, o som assim obtido é denominado de quinta, o mesmo acontece para a fração $\frac{3}{4}$ a qual é denominada como quarta. (PEREIRA, 2013)

Assim, para encontrarmos as demais notas da escala pitagórica utilizaremos multiplicações da fração $\frac{2}{3}$ por ela mesma. Esta fração é equivalente à quinta justa da fundamental.

Considerando que a afinação da corda do monocórdio, representada pela Figura 2.2, esteja em Dó temos que $\frac{1}{1}$ equivale a nota Dó, portanto obtemos a quinta de Dó, que é o Sol, na fração $\frac{2}{3}$ do comprimento da corda. Sabendo que a quinta é agradável de se escutar simultaneamente com a fundamental, então, outro possível som agradável será a quinta de Sol, que é a nota Ré, portanto se $\frac{2}{3}$ de Dó é Sol, então Ré será $\frac{2}{3}$ de Sol, ou seja, a fração $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Porém esta nota se encontra uma oitava acima, assim como a nota correspondente a fração $\frac{1}{2}$ de Dó que é o próprio Dó uma oitava acima. Devido a isso iremos multiplicar este valor por 2 para que o mesmo esteja dentro do intervalo de $\frac{1}{2}$ até 1, deste modo teremos $2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$ que será equivalente ao Ré uma oitava abaixo. De forma análoga, encontraremos a quinta de Ré que é o Lá correspondente a fração $\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$. A quinta de Lá é o Mi, que corresponde a $\frac{2}{3} \cdot \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$. Como o Mi encontrado está uma oitava acima multiplicaremos esta fração por dois para que ele desça uma oitava, então teremos $2 \cdot \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$. Analogamente encontramos a quinta de Mi que é o Si: $\frac{2}{3} \cdot \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$.

Portanto as sete frações equivalentes às sete notas são:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}, \frac{128}{243} e \frac{3}{4}$$

Colocando as frações em ordem crescente teremos:

$$\frac{1}{1}, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27} e \frac{128}{243}$$

Estas são as sete notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si da escala pitagórica com afinação em Dó.

Se continuarmos este processo de obter notas a partir de intervalos de quintas obteremos também os acidentes os quais são as frações $\frac{512}{729}$, $\frac{1024}{2187}$, $\frac{4096}{6561}$, $\frac{16384}{19683}$ e $\frac{32768}{59049}$ referentes as notas fá#, dó#, sol#, ré# e lá# respectivamente. Porém, quando obtemos a próxima

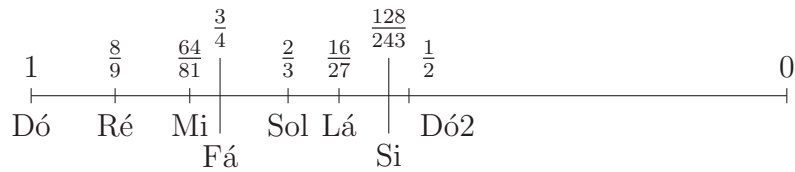


Figura 2.2: Posicionamento das notas na corda
Fonte: Os autores (2019)

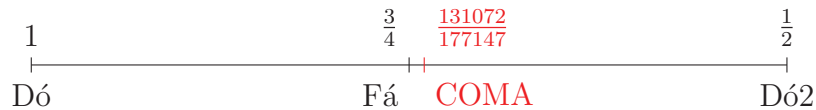


Figura 2.3: Corda 3
Fonte: Os autores (2019)

nota pelo processo de quintas obtemos a fração $\frac{131072}{177147}$ que muito se aproxima à nota fá como ilustrado na Figura 2.3. Esta distância entre a fração $\frac{3}{4}$ e $\frac{131072}{177147}$ ficou conhecida como *coma pitagórico*.

Em 1691, Andreas Werckmeister desenvolveu o que ficou conhecido como a escala temperada. Foi criada com o intuito de resolver o coma pitagórico, já que até o momento não era possível tocar uma música em diferentes tonalidades em um mesmo instrumento. Segundo (PEREIRA, 2013, p.13) “O temperamento consiste na divisão da escala musical de forma que as distância das notas tanto na corda como nas frequências sejam iguais em uma escala logarítmica”.

Deste modo foram adicionadas cinco novas notas à escala pitagórica denominadas acidentes para que o coma pitagórico se espalhasse por toda a escala, tornando possível reproduzir músicas de diferentes tonalidades em um mesmo instrumento. A escala temperada, portanto, é constituída pelas sete notas da escala pitagórica e ainda as cinco novas notas totalizando as doze notas que a compõe. A Tabela 2.1 representa os comprimentos das divisões da corda nas escalas pitagórica e temperada.

Podemos observar, pela tabela, que o que determina os intervalos musicais entre as notas não é mais uma fração racional, mas uma potência. Por exemplo, se na escala pitagórica a relação entre a tônica e sua quinta justa era a fração $\frac{2}{3}$, agora na escala temperada é a potência $0,5^{\frac{7}{12}}$. A posição das notas em comparação com estas duas escalas podem ser vistas na Figura 2.4.

2.2 MÚSICAS TONAIIS

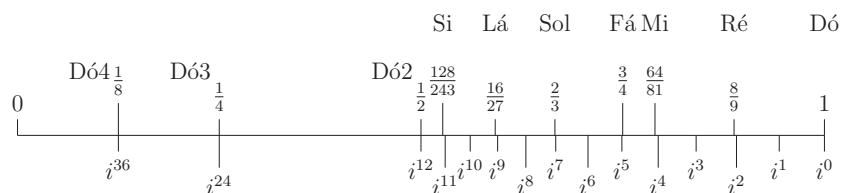
As composições até o século XX eram ditas tonais. Segundo (SOUZA, 2012) composições como as de Wolfgang Amadeus Mozart feitas no século VIII utilizavam se

Tabela 2.1: Escala Pitagórica e Escala Temperada

X	Pitágoras intervalos de 5 ^o	Temperada exponencial $0,5^{\frac{1}{12}}$
Tônica	$\frac{1}{1} = 1$	$0,5^{\frac{0}{12}} = 1$
II	$\frac{8}{9} = 0,88$	$0,5^{\frac{1}{12}} = 0,944$
III	$\frac{64}{81} = 0,790$	$0,5^{\frac{2}{12}} = 0,891$
IV	$\frac{3}{4} = 0,750$	$0,5^{\frac{3}{12}} = 0,841$
V	$\frac{2}{3} = 0,667$	$0,5^{\frac{4}{12}} = 0,794$
VI	$\frac{16}{27} = 0,592$	$0,5^{\frac{5}{12}} = 0,749$
VII	$\frac{128}{243} = 0,527$	$0,5^{\frac{6}{12}} = 0,707$
VIII	$\frac{1}{2} = 0,5$	$0,5^{\frac{7}{12}} = 0,667$
		$0,5^{\frac{8}{12}} = 0,629$
		$0,5^{\frac{9}{12}} = 0,595$
		$0,5^{\frac{10}{12}} = 0,561$
		$0,5^{\frac{11}{12}} = 0,529$
		$0,5^{\frac{12}{12}} = 0,5$

Fonte: acervo dos autores (2019).

Escala Pitagórica (intervalo de 5)



Escala Temperada ($i = \sqrt[12]{1/2}$)

Figura 2.4: Coma Pitagórico

Fonte: (SANTANA, 2016)

de análise combinatória e probabilidade, obras as quais também seguiam as regras de tonalismo. Essas regras são: o agrupamentos de notas tocadas de modo harmônico e ordenação dos acordes a serem reproduzidos.

(MED, 1996) apresenta que a distância entre duas notas sons denomina-se intervalo. Entre esses intervalos existem tons e semitons, sendo que semitom é o nome dado a menor distância possível entre duas notas, já o tom é dobro do semitom. A seguinte notação será utilizada para tons e semitons: T para tom e ST para semitom.

Os acidentes da escala temperada podem ser representado como sustenidos, utilizando o símbolo # ou os bemois, utilizando o símbolo b . Segundo (MED, 1996) o Sustenido eleva a altura da nota natural um semitom, já o Bemol abaixa a nota natural um semitom. Por exemplo, a nota da escala temperada que aparece logo após a nota Dó mas antes da nota Ré pode ser representada com Dó# (lê-se Dó Sustenido) ou Réb (lê-se

Ré Bemol).

Na Figura 2.5 a seguir temos uma representação de um teclado musical, no qual a parte interna ao retângulo vermelho é denominada oitava. Uma oitava é composta pelas notas: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si e Dó nessa ordem, o teclado inteiro é formado pelas várias repetições das oitavas.



Figura 2.5: Teclado
Fonte: Acervo dos autores (2019)

Dentre as notas que compõe o teclado, as brancas já possuem uma harmonia própria, esta gera o campo harmônico de Dó maior que, assim como os demais campos harmônicos maiores, satisfaz a seguinte sequência de intervalos T T ST T T T ST entre suas notas, a qual corresponde ao modo grego denominado Jônio ou escala maior. Vale observar também que esta sequência de notas nada mais é do que as notas da escala pitagórica para a afinação em Dó.

Apesar da escala temperada ser composta de doze notas, a maior parte das composições clássicas e populares utilizam somente um pequeno conjunto destas notas, a este conjunto de notas é dado o nome de escala harmônica ou campo harmônico. As notas dos campos harmônicos são enumeradas utilizando algarismos romanos conforme na Figura 2.6 que apresenta a escala de Dó maior e Sol maior respectivamente.

	DÓ	RÉ	MÍ	FÁ	SOL	LÁ	SÍ	DÓ
	T	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	SOL	LÁ	SÍ	DÓ	RÉ	MÍ	FÁ	SOL
	T	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Figura 2.6: Escala de Dó maior e Sol maior
Fonte: Acervo dos autores 2019.

Ao observarmos a Figura 2.6 podemos notar que uma partitura é composta por cinco linhas com espaçamentos iguais entre elas. A este conjunto de linhas chamamos pentagrama. As notas musicais são escritas tanto nas linhas quanto nos espaços, quanto

mais alta a nota é escrita na partitura mais agudo é o o som que ela produz, já notas escritas mais abaixo possuem sons mais graves. A partitura também possui um símbolo colocado no começo da linha denominado clave.

Na partitura possuímos mais de um tipo de clave, nas partituras apresentadas neste trabalho apresentamos partituras com a clave de sol que é tocada utilizando a mão direita, esta, indica que a segunda linha do pentagrama é a nota Sol, e a clave de fá como vemos na Figura 2.7 utilizada para a mão esquerda, a qual indica que na quarta linha teremos a nota Fá.

Apesar de termos sete modos gregos Jônio, Eólio, Dórico, Frígio, Lídio, Mixolídio e Lócrio os mais utilizados em composições populares são o Jônio (escala maior) e o Eólio (escala menor). Todos os modos gregos podem ser encontrados através das rotações da sequência dos intervalos T T ST T T T ST. A Tabela 2.2 apresenta a forma de todos os modos gregos e seus respectivos nomes.

Tabela 2.2: Modos Gregos

Modo	Intervalos
Jônio	T T ST T T T ST
Dórico	T ST T T T ST T
Frígio	ST T T T ST T T
Lídio	T T T ST T T ST
Mixolídio	T T ST T T ST T
Eólio	T ST T T ST T T
Lócrio	ST T T ST T T T

Fonte: Os autores (2019).

Uma composição que é fiel ao campo harmônico é a Jesus Alegria dos Homens de Johann Sebastian Bach, (BACH, 1716), ilustrada na Figura 2.7. Podemos notar que, tanto na Figura apresentada, como em toda a composição, ao olhar para a armadura de clave¹ nota-se que as notas utilizadas por Bach estão todas dentro do campo harmônico de Sol maior.

¹A armadura de clave é um ou mais símbolos de sustenido # ou bemóis *b* sobre as linhas da partitura onde a nota natural é substituída por um acidente. No caso do campo harmônico de sol maior um símbolo de sustenido é colocado na 5^a linha do pentagrama da clave de sol e na 4^a linha do pentagrama da clave de Fá, mostrando que a nota fá sempre será tocada sustenida nesta composição.

Jesus Alegria dos Homens

J.S.Bach



Figura 2.7: Partitura de Bach

Fonte: <https://musescore.com>.

Dentro da música existe um padrão denominado acorde. A formação de um acorde consiste em um agrupamento de notas tocadas simultaneamente. Existem as tríades e as tétrades, o que vamos estudar é especificamente a formação dos acordes conhecidos como tríades. Estes acordes são compostos de três notas, sendo elas a fundamental, a terça e a quinta.

No campo harmônico de Dó maior, que possui as notas dó, ré, mi, fá sol, lá e si, é possível formar sete tríades sendo elas $\langle \text{dó, mi, sol} \rangle$, $\langle \text{ré, fá, lá} \rangle$, $\langle \text{mi, sol, si} \rangle$, $\langle \text{fá, lá, dó} \rangle$, $\langle \text{sol, si, ré} \rangle$, $\langle \text{lá, dó, mi} \rangle$ e $\langle \text{si, ré, fá} \rangle$. Nesta lista o primeiro, o quarto e o quinto acordes possuem o intervalo de 2T (dois tons) da tônica para a terça e de $1\frac{1}{2}T$ (um tom e meio) da terça para a quinta. Esta sequência de intervalos determinam um acorde maior. Já o segundo, o terceiro e o sexto acordes possuem a sequência de $1\frac{1}{2}T$ e 2T de intervalos entre suas notas, caracterizando acordes menores. O último acorde possui a sequência $1\frac{1}{2}T$ e $1\frac{1}{2}T$ de intervalos entre suas notas, característica de um acorde diminuto. Resumidamente os acordes do campo harmônico de dó maior, na notação americana, são *C*, *Dm*, *Em*, *F*, *G*, *Am*, *B°* onde “*m*” denota que o acorde é menor e ° denota que o acorde é diminuto.

A fundamental é a nota que fornece a nomenclatura do acorde, e é também a partir desta que encontramos as demais notas que compõe o acorde. A terça estará dois tons da fundamental se for um acorde maior e um tom e meio da fundamental se o acorde for menor. A quinta também possui variantes, mas os acordes maiores e menores utilizam da quinta justa que está localizada a três tons e meio da fundamental.

- Tríades menores - fundamental, terça menor e quinta justa.
- Tríades maiores - fundamental, terça maior e quinta justa.

Os acordes pertencentes a um determinado campo harmônico são formados por apenas notas desta escala. Para encontrar o campo harmônico montamos os acordes a partir de cada uma das notas de uma escala, sendo que as escalas dos modos gregos possuem sete notas, então teremos sete acordes em um campo harmônico.

3 GRUPOS

Para um melhor entendimento dos conteúdos abordados iremos realizar um breve estudo sobre alguns conceitos da teoria de grupo. Estes conteúdos são necessários para se entender o funcionamento da teoria de Allen Forte.

3.1 INTRODUÇÃO A TEORIA DE GRUPOS

Definição 3.1 (Grupo) *Denomina-se grupo um sistema matemático que contém um conjunto não vazio G e uma operação $(x, y) \mapsto x * y$ em G , se essa operação satisfaz as seguintes condições:*

- *Elemento Neutro: Existe um elemento e pertencente a G tal que $e * x = x * e = x$ para qualquer x pertencente a G ;*
- *Elemento Inverso: Para todo elemento x , existe um elemento denominado x' pertencente a G tal que $x' * x = x * x' = e$;*
- *Associativa: $x * (y * z) = (x * y) * z$ para quaisquer x, y, z pertencente a G .*

Se a operação também for comutativa, isto é, se para todo x e y pertencentes a G , $xy = yx$, então o grupo é dito abeliano.

Além da Definição 3.1 é importante relembrarmos algumas propriedades de grupos, sendo $(G, *)$ um grupo (DOMINGUES; IEZZI, 2003) que demonstra a unicidade do elemento neutro e também a unicidade do elemento inverso. Dizemos que um grupo $(G, *)$ é finito se G for um conjunto finito.

Definição 3.2 *Seja $(G, *)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:*

- *H é fechado para a operação $*$ (isto é, se $a, b \in H$ então $a * b \in H$)*
- *$(H, *)$ também é um grupo*

Teorema 3.3 (Subgrupo) *Seja $H \subset G, H \neq \emptyset, (H, *)$ é subgrupo de $(G, *)$, se, e somente se, para todo $a, b \in H$, então $a * b' \in H$*

Prova: (\Rightarrow) Sejam e e e_n , respectivamente os elementos neutros de G e H como

$$e_n * e_n = e_n = e_n * e$$

e todo elemento do grupo é regular em relação a operação $*$, então $e = e_n$. seja $b \in H$ e b' e b'_n seus simétricos em G e H como

$$b'_n * b = e_n = e = b' * b$$

então $b'_n = b'$. Logo se $a, b'_n \in H$ e por hipótese $(H, *)$ é um grupo, como $b'_n = b'$ então $a * b' \in H$.

(\Leftarrow) Por hipótese, H não é vazio, então existe $x \in H$, assim $e = x * x' \in H$. Seja $b \in H$, da hipótese e do fato de que $e \in H$ temos que $b' = e * b' \in H$. Se $a, b, c \in H$, então $a, b, c \in G$, pois $H \subset G$, sendo G um grupo temos que $a * (b * c) = (a * b) * c$. Portanto H com a operação $*$ é um subgrupo de G . \square

Definição 3.4 *Dá-se o nome de homomorfismo de um grupo $(G, *)$ num grupo (J, \cdot) toda aplicação $f : G \rightarrow J$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in G$*

$$f(x * y) = f(x) \cdot f(y) \quad (3.1)$$

Seja $f : G \rightarrow J$ um homomorfismo de grupos. Se f for também uma bijeção, então será chamado de isomorfismo do grupo G no grupo J . Neste caso, diz-se que G e J são isomorfos. Se $G = J$ e a operação é a mesma, então f é um automorfismo de G .

Quando existe um isomorfismo $f : G \rightarrow J$ as estruturas dos grupos G e J serão similares, embora possam ter naturezas distintas. Assim, dados G e J dois grupos isomorfos, se G é finito, então J será finito, se H é um subgrupo de G , então $f(H)$ é um subgrupo de J , se G é cíclico, então J também é cíclico e assim por diante.

Definição 3.5 *Seja $(G, *)$ um grupo. Dizemos que G é cíclico se existe $a \in G$ onde para todo $x \in G$*

$$x = a^m \quad (3.2)$$

para algum $m \in \mathbb{Z}$

Teorema 3.6 *Todo subgrupo de um grupo cíclico é também cíclico*

Prova: (DOMINGUES; IEZZI, 2003) \square

3.2 PRINCIPAIS EXEMPLOS DE GRUPOS

3.2.1 GRUPO \mathbb{Z}_n

Seja \mathbb{Z} o conjunto dos números inteiros e $n \in \mathbb{Z}^*$, e seja a relação R sobre \mathbb{Z} por $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | b - a = nk \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$. Assim definido R é uma relação de

equivalência também denominada relação de congruência módulo n . Se $(a, b) \in R$ então escrevemos $a \equiv b \pmod{n}$.

Se $n = 3$, a relação é $a \equiv b \pmod{3}$. Podemos definir as classes de equivalência desta relação para cada elemento $a \in \mathbb{Z}$ como.

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x, a) \in R\}. \quad (3.3)$$

No caso de $n = 3$ as classes de equivalência serão $\bar{0} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$, $\bar{1} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ e $\bar{2} = \{\dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$ e a classe de equivalência dos outros números inteiros coincidirão com estas. Neste caso podemos observar que existem apenas três classes de equivalência distintas. O conjunto formado pelas classes de equivalência módulo 3, denotado por $\mathbb{Z}/R = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, é chamado de conjunto quociente.

Em geral se $n \neq 0$ o conjunto quociente módulo n possui n elementos e é escrito como $\mathbb{Z}/R = \mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$.

Teorema 3.7 *Dados $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ a soma e o produto dados por $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ e $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$ são bem definidas.*

Prova: Sejam $a, b, r, s \in \mathbb{Z}$ onde $\bar{a} = \bar{r}$ e $\bar{b} = \bar{s}$. Como $\bar{a} = \bar{r}$, então $a \equiv r \pmod{n}$, ou seja, $r - a = nk$, com $k \in \mathbb{Z}$. De forma análoga $s - b = nl$, com $l \in \mathbb{Z}$, deste modo

$$r = nk + a \text{ e } s = nl + b \quad (3.4)$$

logo $(r + s) - (a + b) = n(k + l)$ portanto $\overline{a+b} = \overline{r+s}$. Analogamente, $rs - ab = n(knl + kb + al)$. Deste modo $\overline{ab} = \overline{rs}$ \square .

Teorema 3.8 $(\mathbb{Z}_n, +)$ é grupo abeliano.

Prova: De fato dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) &= \overline{a + \overline{b+c}} \\ &= \overline{a + (b+c)} \\ &= \overline{(a+b) + c} \\ &= \overline{a+b} + \bar{c} \\ &= (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= \overline{a+b} \\ &= \overline{b+a} \\ &= \bar{b} + \bar{a}. \end{aligned}$$

Além disso, existe $0 \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $\overline{0} + \overline{a} = \overline{0+a} = \overline{a}$. E por fim, para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{a} + \overline{-a} = \overline{a+(-a)} = \overline{0}$ \square .

3.2.2 GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

Seja $S = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto com n elementos, uma permutação de elementos de S é qualquer função $f : S \rightarrow S$ bijetiva. Definimos o conjunto $S_n = \{f : S \rightarrow S \text{ bijetiva}\}$ o conjunto das permutações de S .

Seja $S = \{1, 2, 3\}$ um conjunto com três elementos. Um exemplo de permutação dos elementos desse conjunto é a função $f : S \rightarrow S$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 2$ e $f(3) = 1$. Uma outra forma de representar esta função é pela notação $f = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$.

O grupo das permutações de S é, portanto, o conjunto

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.5)$$

com a operação de composição de funções, sendo $e = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$ o elemento neutro de S_3 e $f_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$, $f_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$, $f_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$.

Fazendo todas as composições possíveis dos elementos de S_3 como mostra a Tabela 3.1 podemos observar que este não é um grupo abeliano, pois $f_1 \circ f_3 = f_4$ e $f_3 \circ f_1 = f_5$.

Tabela 3.1: Tabua de operações de S_3

	S_3					
0	e	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
e	e	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	e	f_4	f_5	f_3
f_2	f_2	e	f_1	f_5	f_3	f_4
f_3	f_3	f_5	f_4	e	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	e	f_2
f_5	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	e

Fonte: Os autores (2019)

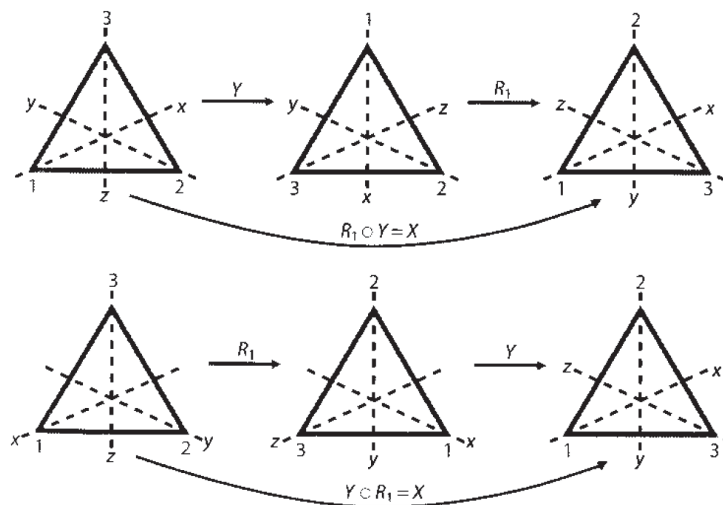
3.2.3 O GRUPO DIEDRAL

Segundo (DOMINGUES; IEZZI, 2003) denominamos simetria de um triângulo equilátero T qualquer aplicação bijetora $f : T \rightarrow T$ que preserve as distâncias entre seus

pontos.

Para analisarmos geometricamente a simetria do triângulo equilátero identificaremos seus vértices como 1, 2 e 3, nesta ordem, e traçaremos as retas x , y e z passando pelo centro e por cada vértice do triângulo equilátero. A Figura 3.1 a seguir ilustra as rotações e as reflexões de um triângulo equilátero. As rotações serão denotadas respectivamente por R_0, R_1 e R_2 , sendo $R_0 = 0, R_1 = \frac{2\pi}{3}$ e $R_2 = \frac{4\pi}{3}$. Para denotarmos as reflexões utilizaremos X, Y e Z em sentido anti-horário. Assim, segundo (DOMINGUES; IEZZI, 2003), temos exatamente o conjunto de simetrias $\{R_0, R_1, R_2, X, Y, Z\}$

Figura 3.1: Simetrias no triângulo equilátero



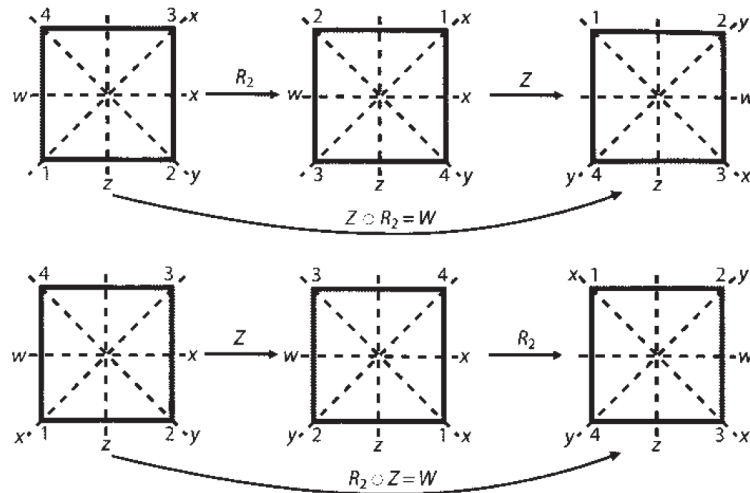
Fonte:(DOMINGUES; IEZZI, 2003)

Segundo (DOMINGUES; IEZZI, 2003) se realizarmos todas as combinações possíveis podemos verificar que o conjunto das simetrias de um triângulo equilátero é grupo, mas não é abeliano. Denominaremos esse grupo por D_3 .

De forma análoga, as simetrias de um quadrado Q assim como as do triângulo são aplicações dadas por $f : Q \rightarrow Q$ que preserva as distâncias. Denotaremos o conjunto das simetrias do quadrado como sendo D_4 . Os vértices do quadrado serão denominados por 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Consideraremos também as diagonais do quadrado denotadas por x e y sendo que x passa por 1 e 3 e y passa em 2 e 4. As retas w e z traçadas dividem o quadrado passando pelo centro, w , a partir do lado 14 e z a partir do lado 12.

As rotações serão denotadas por R_0, R_1, R_2 e R_3 , sendo $R_0 = 0, R_1 = \frac{\pi}{4}, R_2 = \pi$ e $R_3 = \frac{3\pi}{4}$ e as reflexões serão denotadas por X, Y, Z e W em sentido anti-horário. Deste modo segundo (DOMINGUES; IEZZI, 2003) obteremos $D_4 = \{R_0, R_1, R_2, R_3, X, Y, Z, W\}$. A Figura 3.2 ilustra a forma geométrica das simetrias do quadrado.

Figura 3.2: Simetrias no quadrado



Fonte: (DOMINGUES; IEZZI, 2003)

Realizando as demais composições obtemos a tabela ilustrada na Figura 3.3 a seguir.

Figura 3.3: Composições em D_4

\circ	R_0	R_1	R_2	R_3	X	Y	Z	W
R_0	R_0	R_1	R_2	R_3	X	Y	Z	W
R_1	R_1	R_2	R_3	R_0	Z	W	Y	X
R_2	R_2	R_3	R_0	R_1	Y	X	W	Z
R_3	R_3	R_0	R_1	R_2	W	Z	X	Y
X	X	Z	Y	W	R_0	R_2	R_1	R_3
Y	Y	W	X	Z	R_2	R_0	R_3	R_1
Z	Z	Y	W	X	R_3	R_1	R_0	R_2
W	W	X	Z	Y	R_1	R_3	R_2	R_0

Fonte: (DOMINGUES; IEZZI, 2003)

Como (D_4, \circ) satisfaz as três condições necessárias para definir um grupo, então D_4 é grupo, porém não é abeliano pois a operação não é comutativo.

Para os grupos diedrais de ordem $2n$ usaremos a seguinte notação D_n , com $n \in \mathbb{N}$. O grupo diedral D_n é gerado pela rotação $r = \frac{2\pi}{n}$ e pela reflexão s com relação ao

eixo de simetria que passa pelo vértice 1 do polígono. Em geral:

$$D_n = \{r^0, r^1, \dots, r^{n-1}, s, sr^1, \dots, sr^{n-1}\} \quad (3.6)$$

onde r^0, r^1, \dots, r^{n-1} são as rotações e s, sr^1, \dots, sr^{n-1} são as reflexões. Além disso para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$sr^i = r^{n-i}s. \quad (3.7)$$

Como já vimos anteriormente S_n é um grupo de permutações, também vimos grupos de simetrias os quais denotamos por D_3 e D_4 . Se observarmos S_3 e D_3 notamos que S_3 é isomorfo a D_3 .

Já se analisarmos S_4 e D_4 vemos que eles não são iguais uma vez que S_4 possui $4! = 24$ elementos e D_4 possui apenas 8. Porém o subconjunto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1324 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix} \right\}$$

de S_4 defini um subgrupo isomorfo à D_4 , onde as 4 primeiras permutações de W estão associadas as rotações de D_4 e as 4 últimas às reflexões.

Em geral a função $f : D_n \rightarrow S_n$ tal que $f(r^i) = \begin{pmatrix} 12 \dots (n-1)n \\ n12 \dots (n-1) \end{pmatrix}^i$ e $f(sr^i) = \begin{pmatrix} 12 \dots n \\ 1n \dots 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \dots (n-1)n \\ n12 \dots (n-1) \end{pmatrix}^i$ define um homomorfismo injetor de grupos entre D_n e S_n , desta forma a imagem de f é um subgrupo de S_n isomorfo a D_n . Neste sentido é comum dizermos que D_n é um subgrupo de S_n a menos de isomorfismo.

4 TEORIA DE FORTE

Neste capítulo abordamos uma introdução básica à teorema de Forte, seu funcionamento e definições. Para compreender esta teoria e explicá-la utilizamos conceitos do capítulo anterior.

4.1 ANÁLISE DAS NOTAS A PARTIR DE NÚMEROS

No século XX houve a saturação da música tonal, com isso compositores com Schonberg deram início a fuga do tonalismo. Porém, segundo (SOUZA, 2012), esta transição não ocorreu de forma brusca, alguns compositores já apresentavam traços de atonalismo em suas composições ao mesmo tempo em que outros compositores ainda realizavam obras tonais.

Ainda de acordo com (SOUZA, 2012), Schoenberg foi um dos precursores do atonalismo. O atonalismo consiste em uma fuga das regras do tonalismo citadas anteriormente, já que uma composição atonal busca por uma combinação não usual das notas. Em obras como por exemplo, Suite op. 25, Figura 4.1, Schonberg tinha como objetivo tocar todas as doze notas da escala temperada antes de tocar novamente uma nota que já havia sido reproduzida.

The image shows a musical score for 'Suite for Piano, Op. 25, Prelude' by A. Schoenberg. The score is in 6/8 time, marked 'Rasch' with a tempo of quarter note = 80. It features dynamic markings such as p, sf, mf, and fp. The score is presented in a grand staff with treble and bass clefs. A logo 'Every Note' is visible in the top left corner.

Figura 4.1: Partitura de Schonberg
Fonte: https://everynote.com/goods.pic/Scho_P_SuiPi25.gif.

Com este movimento, a Matemática existente na Música até o momento não era mais suficiente para analisar as novas composições. Para solucionar esse problema, Allen Forte, teórico musical e musicólogo americano, especializado em música atonal e análise musical do século XX, desenvolveu uma teoria matemática para a análise das músicas atonais. (SOUZA, 2012) cita que para desenvolver sua teoria, Forte utilizou o

conjunto \mathbb{Z} para modelar as notas musicais do sistema igualmente temperado. Assim, pela teoria de Forte, cada nota é representada por um número.

A Figura 4.2 a seguir representa uma parte de um teclado no qual substituímos as notas por números inteiros. A Figura 4.3 representa as mesmas notas do teclado escritas na partitura. Algumas notas possuem um único som, porém recebem nomes distintos, estas notas são conhecidas como enarmônicas. Um exemplo de nota enarmônica são as notas Dó# e Réb, essas notas recebem um mesmo número.



Figura 4.2: Enumeração das notas do teclado
Fonte: Os autores 2019

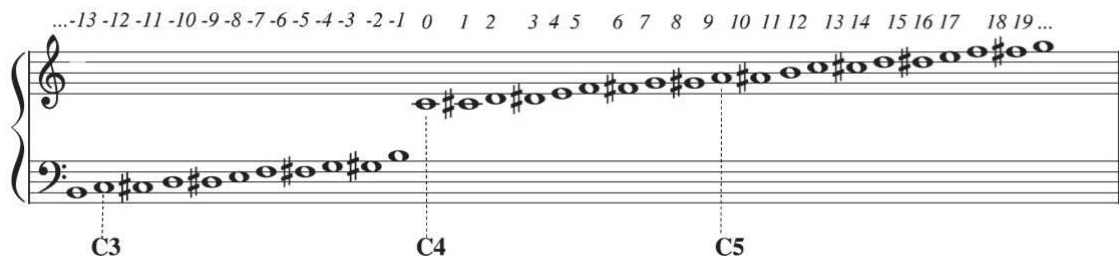


Figura 4.3: Substituição das notas por números na partitura
Fonte: Os autores 2019

Substituindo a nomenclatura das notas obtemos o seguinte: Dó = 0, Dó# \ Réb = 1, Ré = 2, Ré# \ Mib = 3, Mi = 4, Fá = 5, Fá# \ Solb = 6, Sol = 7, Sol# \ Láb = 8, Lá = 9, Lá# \ Síb = 10, Sí = 11. Deste modo (SOUZA, 2012) afirma que.

Se uma nota é representada por um número inteiro n , a nota que estiver acima será representada pelo número $n + 1$ e a nota que estiver meio tom abaixo pelo número $n - 1$. Esta correspondência, naturalmente, preserva a relação de ordem do conjunto dos números inteiros de forma que, se progredirmos cromaticamente na direção das notas mais agudas, progredimos crescentemente nos valores numéricos correspondentes e vice-versa. Desse modo, o espaço que contém todas as notas musicais fica representado pelo conjunto dos números inteiros. (SOUZA, 2012)

Nesta associação cada intervalo musical é um número inteiro obtido pela diferença entre as notas. Por exemplo, a diferença entre as notas Ré= 2 e a nota Lá= 9 é igual a $9 - 2 = 7$. Da mesma forma, qualquer diferença que possua o mesmo resultado será um intervalo de quinta justa. Assim também quando realizamos uma transposição musical de n semitons, estamos somando ou subtraindo n as notas da composição. Isso significa que o conjunto de todas as notas musicais está intimamente relacionado com o conjunto dos números inteiros, sua operação de adição e sua ordem.

4.2 O GRUPO T/TI

Embora o conjunto de notas musicais possa ser pensado como um conjunto infinito, algumas notas possuem o mesmo nome mesmo estando em localizações distintas, por exemplo as notas representadas pelos números 0 e 12 que são notas Dó com diferentes frequências. Isso significa que existe uma relação de equivalência entre as notas musicais, onde duas notas são equivalentes se possuem o mesmo nome. Essa mesma relação dá origem, na teoria dos grupos, ao grupo \mathbb{Z}_{12} .

Estas doze classes de notas musicais podem ser organizadas em um dodecágono conforme a Figura 4.4. Em sua teoria, Forte mostra que as simetrias desta figura representam transformações musicais que são utilizadas em composições pós modernas. Essas simetrias são as rotações e as reflexões do dodecágono, ou seja, os elementos do grupo diedral D_{12} .

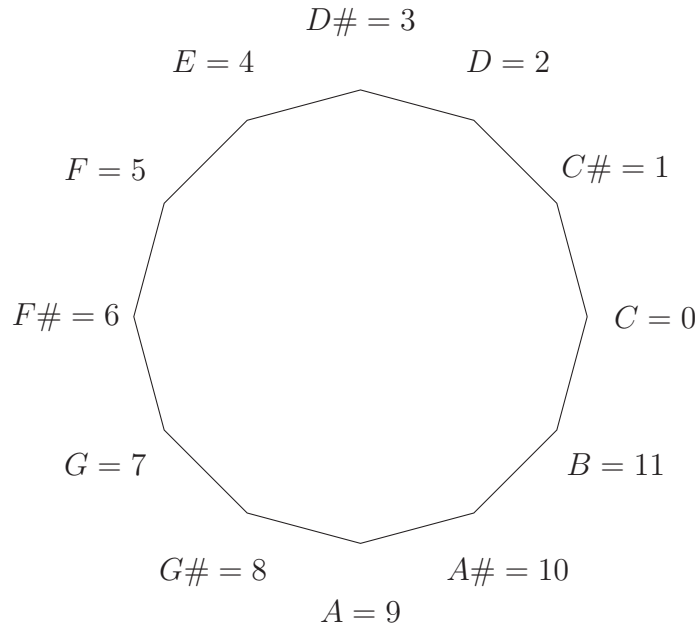


Figura 4.4: Classes de equivalência das notas musicais

Fonte: Os autores 2019.

Uma transposição é nada mais do que somar um certo valor n a todas as notas da sequência, por exemplo, sendo $a = \langle 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 \rangle$, que é a sequência que gera o campo harmônico de Dó maior, a transposição de sete semi-tons dá como resultado $T_7(a) = \langle 0 + 7, 2 + 7, 4 + 7, 5 + 7, 7 + 7, 9 + 7, 11 + 7 \rangle = \langle 7, 9, 11, 0, 2, 4, 6, 7 \rangle$ que gera o campo harmônico de Sol maior.

Esta ação de transpor n semitons nada mais é do que a rotação de $n\frac{2\pi}{12}$ no sentido anti-horário do dodecágono da Figura 4.4.

As rotações são as transposições, as reflexões também estão relacionadas à música como as inversões. Por exemplo, sendo $a = \langle 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 \rangle$ a reflexão obtida pelo eixo que passa pelos vértices 0 e 6, levam este conjunto de notas ao conjunto $I(a) = \langle 0, 10, 8, 7, 5, 3, 1 \rangle$ que é correspondente a escala de Fá menor. Outra forma de obter a escala de Fá menor a partir da escala de Dó maior é substituindo todos os números pelos seus opostos, assim $I(a) = \langle -0, -2, -4, -5, -7, -9, -11 \rangle$ que é igual $\langle 0, 10, 8, 7, 5, 3, 1 \rangle$ pois estamos trabalhando em \mathbb{Z}_{12} .

As transposições levam escalas maiores em maiores e escalas menores em menores, já as inversões levam as escalas maiores em menores e escalas menores em maiores. Esta mesma propriedade é encontrada não somente nas escalas como também podem ser vistas em acordes. Conforme a Tabela 4.1

Em particular representamos a transposição de ângulo $n\frac{2\pi}{12}$ por T_n e a inversão associada ao eixo de reflexão que passa pelo vértice n por $T_{-n}IT_n$. Como $IT_n = T_{-n}I$ então $T_{-n}IT_n = T_{-n}T_{-n}I = T_{-2n}I$, isso significa que o conjunto das transformações

Tabela 4.1: Transposições e Inversões

Transposições		Inversões	
$T_0(C) = C$	$T_6(C) = F\#$	$T_0I(C) = Fm$	$T_6I(C) = Bm$
$T_1(C) = C\#$	$T_7(C) = G$	$T_1I(C) = F\#m$	$T_7I(C) = Cm$
$T_2(C) = D$	$T_8(C) = G\#$	$T_2I(C) = Gm$	$T_8I(C) = C\#m$
$T_3(C) = D\#$	$T_9(C) = A$	$T_3I(C) = G\#m$	$T_9I(C) = Dm$
$T_4(C) = E$	$T_{10}(C) = A\#$	$T_4I(C) = Am$	$T_{10}I(C) = D\#m$
$T_5(C) = F$	$T_{11}(C) = B$	$T_5I(C) = A\#m$	$T_{11}I(C) = Em$

musicais das transposições e inversões é o conjunto

$$T \setminus TI = \{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, I, T_1I, \dots, T_{n-1}I\} \quad (4.1)$$

este conjunto, contendo 24 transformações musicais, com a operação de composições de funções é isomorfo ao grupo diedral D_{12} .

4.3 O GRUPO PLR

Denomina-se progressão um sequência de dois ou mais acordes que possui um som harmônico. Uma progressão muito utilizada em composições populares é a $I \rightarrow IV \rightarrow V$, porém este não é o único encadeamento de acordes, existem vários outros. Na teoria de Forte as funções P , L e R são responsáveis por criar progressões de acordes que fogem do tonalismo, além de ser ferramentas para a análise das progressões existentes.

Progressões com maior harmonia são aquelas que possuem uma similaridade entre os acordes, como por exemplo o acorde de Dó maior e o acorde de Lá menor, sendo $C = \langle 0, 4, 7 \rangle$ e $Am = \langle 9, 4, 7 \rangle$. As funções P , L e R são aplicações com domínio e contra domínio no conjunto das tríades maiores e menores S , que levam cada acorde maior em um acorde menor e vice-versa. Estas funções produzem uma progressão harmoniosa ao manter duas notas iguais quando realizam as transições de um acorde para outro.

Para definir a função P (SOUZA, 2012) apresenta um conjunto de proposições que mostra como esta aplicação age sobre acordes menores e maior. Tais proposições são apresentadas abaixo

Teorema 4.1 *Dado $X = \langle m, n, p \rangle$ maior existe um único acorde $Y = \langle p, y, m \rangle$ menor onde $y = m + 3$ ou $y = p - 4$*

Prova: (SOUZA, 2012, pg. 139) □

Teorema 4.2 *Dado $X = \langle m, n, p \rangle$ menor existe um único acorde $Y = \langle p, y, m \rangle$ maior onde $y = m - 3$ ou $y = p + 4$*

Prova: (SOUZA, 2012, pg. 140) □

A partir destes resultados definimos.

Definição 4.3 *Define se $P : S \rightarrow S$ como a aplicação dada por*

$$P\langle m, n, p \rangle = \begin{cases} \langle p, m + 3, m \rangle = \langle p, p - 4, m \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \text{ é maior} \\ \langle p, m - 3, m \rangle = \langle p, p + 4, m \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \text{ é menor} \end{cases} \quad (4.2)$$

Como qualquer acorde maior é da forma $T_k(C)$ para algum $k \in \{0, \dots, 11\}$, então existe um $r \in \{0, \dots, 11\}$ tal que $PT_k(C) = T_r I(C)$. Na prova dos teoremas anteriores (SOUZA, 2012) encontra que $r = k + 7$. Analogamente, como qualquer acorde menor é da forma $T_k I(C)$ para algum $k \in \{0, \dots, 11\}$, então existe um $r \in \{0, \dots, 11\}$ tal que $PT_k I(C) = T_r(C)$. E novamente (SOUZA, 2012) encontra que $r = k + 5$.

Assim, temos que ao aplicarmos a função P , esta levará um acorde maior em seu respectivo menor, e também levará cada acorde menor em seu respectivo maior. Deste modo temos que a função P é sua própria inversa.

De forma análoga (SOUZA, 2012) define a função L apresentando um conjunto de proposições que mostra como esta aplicação age sobre acordes menores e maior. Tais proposições são apresentadas abaixo

Teorema 4.4 *Dado $X = \langle m, n, p \rangle$ menor existe um único acorde $Y = \langle y, p, n \rangle$ maior onde $y = p + 4$ ou $y = n + 7$*

Prova: (SOUZA, 2012, pg. 143) □

Teorema 4.5 *Dado $X = \langle m, n, p \rangle$ menor existe um único acorde $Y = \langle y, p, n \rangle$ maior onde $y = p - 4$ ou $y = n - 7$*

Prova: (SOUZA, 2012, pg. 144) □

A partir destes resultados definimos.

Definição 4.6 *Define se $L : S \rightarrow S$ como a aplicação dada por*

$$L\langle m, n, p \rangle = \begin{cases} \langle n + 7, p, n \rangle = \langle p + 4, p, n \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \text{ é maior} \\ \langle n - 7, p, n \rangle = \langle p - 4, p, n \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \text{ é menor} \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, como para a função P , qualquer acorde maior será da forma $T_k(C)$ para algum $k \in \{0, \dots, 11\}$, então também existe um $r \in \{0, \dots, 11\}$ tal que $LT_k(C) = T_r I(C)$. Na prova dos teoremas anteriores (SOUZA, 2012) encontra que $r = k + 11$. Analogamente como qualquer acorde menor é da forma $T_k I(C)$ para algum $k \in \{0, \dots, 11\}$, então existe um $r \in \{0, \dots, 11\}$ tal que $LT_k I(C) = T_r(C)$. E novamente (SOUZA, 2012) encontra que $r = k + 1$.

A função R também é definida por (SOUZA, 2012) de forma análoga, seguindo resultados.

Teorema 4.7 *Dado $X = \langle m, n, p \rangle$ maior existe um único acorde $Y = \langle n, m, y \rangle$ menor onde $y = m - 3$ ou $y = n - 7$*

Prova: (SOUZA, 2012, pg. 147) □

Teorema 4.8 *Dado $X = \langle m, n, p \rangle$ maior existe um único acorde $Y = \langle n, m, y \rangle$ menor onde $y = m + 3$ ou $y = n + 7$*

Prova: (SOUZA, 2012, pg. 148) □

A partir destes resultados definimos.

Definição 4.9 *Define se $R : S \rightarrow S$ como a aplicação dada por*

$$R\langle m, n, p \rangle = \begin{cases} \langle n, m, m - 3 \rangle = \langle n, m, n - 7 \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \text{ é maior} \\ \langle n, m, n + 7 \rangle = \langle n, m, m + 3 \rangle & \text{se } \langle m, n, p \rangle \text{ é menor} \end{cases} \quad (4.4)$$

Da mesma forma (SOUZA, 2012) mostra que $RT_k(C) = T_r I(C)$ onde $r = k + 4$ e $RT_k I(C) = T_r(C)$ onde para esta última igualdade $r = k + 8$.

Conseguimos apresentar na Tabela 4.2 como as funções P , L e R agem sobre acordes maiores $T_k(C)$ e menores $T_k I(C)$.

Tabela 4.2: Funções PLR

Acorde	função P	função L	função R
$T_k(C)$	$T_{k+7} I(C)$	$T_{k+11} I(C)$	$T_{k+4} I(C)$
$T_k I(C)$	$T_{k+5}(C)$	$T_{k+1}(C)$	$T_{k+8}(C)$

Fonte: adaptado de (SOUZA, 2012, pg. 152).

Uma vez que P , L e R são funções bijetivas do conjunto de acordes S e o conjunto das funções bijetivas de S é grupo isomorfo a S_{24} , então P , L e R são geradores de um subgrupo de S_{24} . Vamos tentar entender qual é este subgrupo denotado por $\langle P, L, R \rangle$ ou por PLR .

Teorema 4.10 *Dada as funções P , L e R definidas anteriormente temos que*

- i) $(LR)T_k(C) = T_{k+5}(C)$ e $(LR)T_k I(C) = T_{k+7}(C)$*
- ii) $(LR)^{12}$ é identidade;*
- iii) $(LR)^i R = R(LR)^{12-i}$*

Prova: *i)* Dado qualquer acorde maior $T_k(C)$ temos pela Definição 4.9 que $RT_k(C) = T_{k+4}I(C)$ e como $T_{k+4}I(C)$ é um acorde menor temos pela Definição 4.6 que

$$LRT_k(C) = LT_{k+4}I(C) = T_{(k+4)+1}(C) = T_{k+5}(C).$$

De forma análoga, dado qualquer acorde menor $T_kI(C)$ temos pela Definição 4.9 que $RT_kI(C) = T_{k+8}(C)$ e como $T_{k+8}(C)$ é um acorde maior temos pela Definição 4.6 que

$$LRT_kI(C) = LT_{k+8}(C) = T_{(k+8)+11}I(C) = T_{k+19}I(C) = T_{k+7}I(C).$$

ii) Para qualquer acorde maior $T_k(C)$ temos que $(LR)^{12}T_k(C) = T_{k+5 \cdot 12}(C) = T_k(C)$ uma vez que $5 \cdot 12 \equiv 0 \pmod{12}$. Além disso para qualquer acorde menor $T_kI(C)$ temos que $(LR)^{12}T_kI(C) = T_{k+7 \cdot 12}I(C) = T_kI(C)$ uma vez que $7 \cdot 12 \equiv 0 \pmod{12}$.

iii) Primeiramente vamos mostrar que $(LR)^iR(LR)^i = R$. De fato se $i = 1$ como as funções P , L e R são suas próprias inversas então $(LR)R(LR) = L(RR)LR = (LL)R = R$. Se esta igualdade é verdadeira para algum i então

$$\begin{aligned} (LR)^{i+1}R(LR)^{i+1} &= (LR)^i(LR)R(LR)(LR)^i \\ &= (LR)^iR(LR)^i \\ &= R. \end{aligned}$$

Desta forma $(LR)^iR = (LR)^iR(LR)^{12} = (LR)^iR(LR)^i(LR)^{12-i} = R(LR)^{12-i}$. \square

Teorema 4.11 *Dada as funções P , L e R definidas anteriormente temos que*

$$i) P = R(LR)^3$$

$$ii) L = (LR)R = R(LR)^{11}$$

Prova: *i)* Aplicando a função $R(LR)^3$ a um acorde maior $T_k(C)$ e a um acorde menor $T_kI(C)$ quaisquer temos que $R(LR)^3T_k(C) = RT_{k+3 \cdot 5}(C) = T_{k+3 \cdot 5+4}I(C) = T_{k+19}I(C) = T_{k+7}I(C) = PT_k(C)$ e $R(LR)^3T_kI(C) = RT_{k+3 \cdot 7}I(C) = T_{k+3 \cdot 7+8}(C) = T_{k+29}(C) = T_{k+5}(C) = PT_k(C)$.

$$ii) \text{ De fato } L = L(RR) = (LR)R = R(LR)^{11} \quad \square$$

Desta forma uma vez que $P = R(LR)^3$, $L = (LR)R = R(LR)^{11}$ e $R = R(LR)^0$, todo elemento do grupo PLR por ser escrito com $(LR)^i$ ou $R(LR)^i$ para algum $i \in \{0, \dots, 11\}$ ou seja

$$PLR = \{(LR)^0, (LR)^1, \dots, (LR)^{11}, R(LR)^0, \dots, R(LR)^{11}\}. \quad (4.5)$$

Se $f : D_{12} \rightarrow PLR$ tal que $f(r^i) = (LR)^i$ e $f(sr^i) = R(LR)^i$, então f é um isomorfismo de grupos.

5 ANÁLISE DAS MÚSICAS SEGUNDO FORTE

(SOUZA, 2012) utiliza a teoria de Allen Forte para fazer a análise de melodias e harmônias de músicas, tanto eruditas, tonais e atonais, como populares, usando o grupo T/TI para análise melódica, e o grupo PLR para análise harmônica.

5.1 ANÁLISE DAS MÚSICAS UTILIZANDO O GRUPO T/TI

(SOUZA, 2012) apresenta a análise de Laurence Dreyfus para a melodia da composição da invenção n^o1 de *O cravo bem temperado* de (BACH, 1722)¹ a partir das funções do grupo T/TI . Nesta análise é observado que o conjunto das notas $S = \langle 0, 2, 4, 5, 2, 4, 0, 7, 0, 11, 0, 2 \rangle$ aparece, ou totalmente ou em partes, transposta ou invertida, em toda a composição. Logo no início da composição, como mostra a Figura 5.1, o tema S é dividido em três partes sendo eles $a = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$, $b = \langle 2, 4, 0, 7 \rangle$ e $c = \langle 0, 11, 0, 2 \rangle$.

O tema S aparece logo no primeiro compasso². No segundo compasso (SOUZA, 2012) mostra a presença da sequência de notas $\langle 7, 9, 11, 0, 9, 11, 7, 2, 7, 5, 7, 4 \rangle$. Está sequência nada mais é que a transposição $T_7(S) = \langle 7, 9, 11, 0, 9, 11, 7, 2, 7, 6, 7, 9 \rangle$ na qual o $F\acute{a}\#$ é substituído por $F\acute{a}$ e a nota La é substituída por Mi . Com estas substituições a composição se mantém no campo harmônico dentro de $D\acute{o}$ maior.

Na mão esquerda temos sequência de notas $\langle 0, 2, 4, 5, 2, 4, 0, 7, 7 \rangle$ no terceiro compasso. A nota final que deveria ser um $R\acute{e}$ caso seguisse a transposição $T_7(a + b) = \langle 7, 9, 11, 0, 9, 11, 7, 0 \rangle$ acaba sendo substituída por $D\acute{o}$. Já na mão direita, também do terceiro, compasso temos as notas $\langle 9, 7, 5, 4, 7, 5, 9, 7 \rangle \cong \langle 9, 7, 5, 4, 7, 5, 9, 2 \rangle = T_9I(a + b)$ onde a nota Sol deveria ser um $R\acute{e}$ se aplicado exatamente a transformação T_9I .

Na mão direita no quarto compasso temos $\langle 5, 4, 2, 0, 4, 2, 5, 4 \rangle$, esta sequência é aproximadamente $T_5I(a + b) = T_8(T_9I(a, b) = \langle 5, 3, 1, 0, 3, 1, 5, 10 \rangle$. Já na mão direita quinto compasso encontramos $\langle 2, 0, 11, 9, 0, 11, 2, 0 \rangle$ que é aproximadamente $T_9T_5I(a + b) = T_2I(a + b) = \langle 2, 0, 10, 9, 0, 10, 2, 7 \rangle$.

No sexto compasso da mão direita vemos $\langle 11, 9, 7, 6, , 9, 7, 11, 9 \rangle$. Esta sequência se aproxima de uma $T_9T_2I(a + b) = T_{-1}I(a + b) = \langle 11, 9, 7, 6, 7, 11, 4 \rangle$. Com a análise da música observamos que o compositor vai realizando alterações para que a música se encaixe no campo harmônico de $D\acute{o}$ maior, porém o mesmo mantém a nota $6 F\acute{a}\#$ no sexto compasso, que não faz parte do campo harmônico.

¹Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=R4IzqJtD4dM>

²Segundo (MED, 1996) “compasso é a divisão de um trecho musical em séries regulares de tempos.” Na partitura o início e o fim de um compasso é representado por uma barra vertical.

Esta análise das transposições e inversões do tema S se segue por todo restante da composição. A Figura 5.1 mostra os primeiros seis compassos da invenção de Bach com suas análises como apresentadas anteriormente.

Figura 5.1: Análise da partitura de Bach
Fonte: Adaptado de (BACH, 1722)

Neste trabalho analisamos a melodia da mão esquerda da música Hallelujah (CALE, 1991)³ a partir do grupo T/TI . Embora a mão esquerda seja o acompanhamento harmônico, é tocado de forma melódica. O tema que encontramos na partitura foi $S = \langle 0, 7, 0, 4, 0, 11 \rangle$, para encontrar as transposições e inversões do tema dividimos o mesmo em duas partes sendo $a = \langle 0, 7, 0 \rangle$ e $b = \langle 4, 0, 11 \rangle$. Fizemos a transcrição de todas as notas da composição com elementos de \mathbb{Z}_{12} em um arquivo de texto e obtivemos todas as transposições e inversões possíveis em um segundo arquivo. A partir deste segundo arquivo utilizamos um mecanismo de busca para encontrar os locais onde a parte a do tema se repete. Desta forma, quando encontrado a parte a do tema em uma transposição T_k da partitura, sabíamos que a mesma aparecia transposta segundo a função T_{12-k} na original.

O tema S aparece pela primeira vez no primeiro compasso em sua forma natural. No compasso quinze encontramos as notas $\langle 9, 4, 9, 0, 9, 9 \rangle$ que é aproximadamente $T_9(S) = \langle 9, 4, 9, 1, 9, 8 \rangle$, onde a quarta e a sexta nota são substituídas pelas notas 0 e 9. Neste caso denotaremos $\langle 9, 4, 9, 0, 9, 9 \rangle$ por $\cong T_9(S)$. No compasso dezesseis temos as notas $\langle 5, 0, 5, 9, 5, 5 \rangle$ que é uma aproximação da $T_5(S) = \langle 5, 0, 5, 9, 5, 4 \rangle$ a qual tem a última nota substituída pela nota 4. A este conjunto denotaremos por $\cong T_5(S)$. A Figura 5.2 apresenta a posição destas transposições nos compassos quinze ao dezenove.

³Disponível em <https://youtu.be/-gi3J8nPKPE>

Figura 5.2: Hallelujah
Fonte: Adaptado de (CALE, 1991)

Observamos ainda este mesmo padrão ocorrer em toda a partitura como mostra o ANEXO A –.

5.2 ANÁLISE DAS MÚSICAS UTILIZANDO O GRUPO PLR

(SOUZA, 2012) apresenta também a análise da música Octopus's Garden dos The Beatle⁴ com relação a progressão de acordes utilizando as funções PLR . Nesta música aparece a progressão de acordes $E \rightarrow C\#m \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E$ nas estrofes e as progressões $A \rightarrow F\#m \rightarrow D \rightarrow E$ e $A \rightarrow F\#m \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B$. O uso do grupo PLR é visto na primeira progressão uma vez que $C\#m = R(E)$, $A = L(C\#m)$, $B = RLRL(A)$ e $E = LR(B)$ resumidamente temos o esquema

$$E \xrightarrow{R} C\#m \xrightarrow{L} A \xrightarrow{RLRL} B \xrightarrow{LR} E. \quad (5.1)$$

Da mesma forma os esquemas do uso da função PLR nas progressões do solo são

$$A \xrightarrow{R} F\#m \xrightarrow{L} D \xrightarrow{RLRL} E \quad (5.2)$$

e

$$A \xrightarrow{R} F\#m \xrightarrow{L} D \xrightarrow{RLRL} E \xrightarrow{LR} A \xrightarrow{RLRL} B. \quad (5.3)$$

Como as funções PLR caracterizam a similaridade de um acorde para outro nos esquemas das Equações (5.1), (5.2) e (5.3) tal similaridade é mantida pelas poucas composições dessas funções entre as tríades.

Analisamos também as progressões da música Untitled 2014 de Kwon Ji Yong⁵. Na primeira parte temos a progressão de acordes $E \rightarrow G\#m \rightarrow C\#m \rightarrow A$. Cada passagem de um acorde para o outro pode ser representada por uma função do grupo PLR . Por exemplo, na transição $C\#m \rightarrow A$ existe uma função $H \in PLR$ onde $H(C\#m) = A$.

⁴Disponível em <https://youtu.be/PfL7sKcpr3Y>

⁵Disponível em <https://youtu.be/9kaCABIXuyg>

Vamos procurar quem é esta função.

Observe que a transição parte de um acorde menor para um acorde maior, como a função P leva cada acorde menor em seu respectivo maior, e cada acorde maior em seu respectivo menor, então devemos encontrar a transposição T_k tal que $H(C\#m) = T_k P(C\#m) = T_k(C\#)$. Como $Lá-Dó\# = 9 - 1 = 8$ temos que $A = T_8(C\#)$, ou seja, $H = T_8 P$.

Dentro do grupo PLR temos que $P = R(LR)^3$, uma vez que $H(C\#m) = T_8(C\#)$ é uma transposição de um acorde maior temos $H(C\#m) = T_8(C\#) = ((LR)^5)^8(C\#)$ de modo que

$$H = (LR)^{40} R(LR)^3 \in PLR \quad (5.4)$$

A partir dos Teoremas 4.10 e 4.11, podemos simplificar a função H como

$$\begin{aligned} H &= (LR)^{40} R(LR)^3 \\ &= (LR)^4 R(LR)^3 \\ &= (LR)(LR)^3 R(LR)^3 \\ &= (LR)R \\ &= L \end{aligned}$$

De fato a função aplicada deve ser P , L ou R dado que o acorde mantém duas notas em sua transição.

Na segunda parte da música temos a progressão $B \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C\#m \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C\#m$. Observe que a transição entre os acordes E e B é da forma maior para maior, podemos encontrar uma transposição $T_k(E) = B$, neste caso como $B - E = 11 - 4 = 7$ temos que

$$B = T_7(E) = (LR)^5)^7(E) \quad (5.5)$$

Novamente a partir dos Teoremas 4.10 e 4.11, podemos simplificar esta função

fazendo

$$\begin{aligned}
(LR)^5(E) &= (LR)^{35}(E) \\
&= (LR)^{11}(E) \\
&= LR(LR)^{10}(E) \\
&= L(LR)^{12-10}R(E) \\
&= L(LR)^2R(E) \\
&= LLRLRR(E) \\
&= RL(E)
\end{aligned}$$

Observamos assim que, como estamos levando um acorde maior, em outro maior e os mesmos não mantém a similaridade, temos que utilizar mais de uma função do grupo PLR .

De forma análoga realizamos os demais cálculos para obter os esquemas para a primeira e a segunda progressões de acorde da composição. Na progressão obtemos.

$$E \xrightarrow{L} G\#m \xrightarrow{LP} C\#m \xrightarrow{L} A. \quad (5.6)$$

Já para a segunda temos.

$$B \xrightarrow{LR} E \xrightarrow{RL} B \xrightarrow{RLR} C\#m \xrightarrow{L} A \xrightarrow{RL} E \xrightarrow{RL} B. \quad (5.7)$$

Na música analisada podemos observar que as transições entre os acordes são dadas por no máximo três compostas entre as funções P , L e R de forma que a similaridade garantida por essas funções não é perdida.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho podemos observar que a escala pitagórica influenciou a música até o advento do atonalismo, tendo Pitágoras dado início às relações entre as duas ciências através de sua escala e, posteriormente, Andreas surge com a solução do coma pitagórico utilizando as potências. Nos campos harmônicos nascidos da escala pitagórica vemos as sequências mais agradáveis de agrupamentos de notas.

Os campos harmônicos eram o forte das composições tonais, mas por volta do final do século XX ao mesmo tempo em que surgiam composições tonais, artistas como Shoenberg davam início ao desenvolvimento das músicas atonais, de forma organizada, implementando novos conceitos de criação.

Como a matemática existente até então já não se encaixava para descrever as músicas atonais, surgiu a necessidade de buscar um novo conceito matemático que se encaixa-se nesse novo método de composição. Deste modo Allen Forte desenvolveu seu trabalho utilizando-se da teoria de Grupos. Com isso conseguimos ver que os conteúdos da teoria de Grupos também possuem uma ligação com a música.

Estudamos também o desenvolvimento dos grupos de funções T/TI e PLR , os quais facilitam as transições musicais, assim como, o entendimento matemático das composições atonais. Estes grupos de funções podem e foram utilizados para o estudo de músicas tonais.

Por fim o presente trabalho pode ser aprofundado realizando maiores estudos em relação aos grupos de funções T/TI , PLR e incluindo análises de composições atonais.

REFERÊNCIAS

- BACH, J. S. *Jesus alegria dos homens*. 1716. Disponível em: <<https://musescore.com/dashboard>>. Acesso em: 03 jul. 2019. 1 partitura.
- BACH, J. S. *O Cravo Bem Temperado: Invention Nº. 1*. 1722. Disponível em: <<https://musescore.com/dashboard>>. Acesso em: 03 jul. 2019. 1 partitura.
- CALE, J. *Hallelujah*. 1991. Disponível em: <<https://musescore.com/dashboard>>. Acesso em: 03 jul. 2019. 1 partitura.
- DOMINGUES, H.; IEZZI, G. Álgebra moderna, volume único, 4ª edição reformada. *São Paulo*, 2003.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física, 8a. edição, Vol. 2, LTC*. [S.l.]: Wiley, 2008.
- MED, B. *Teoria da música*. [S.l.]: Brasília: Musimed, 1996. v. 996.
- PEREIRA, M. D. C. *Matemática e música: de pitágoras aos dias de hoje*. 2013.
- SANTANA, A. G. de. Algumas relações matemáticas na música. In: _____. NOVAES, B.W.D.; FERNANDES, M; CORDEIRO, M.S; MOREIRA, R.R.; LOBO, V.S.; QUILLENATO, A.L.: UTFPR Toledo 10 anos: Crescimento em pesquisa, ensino e extensão, Toledo: DRHS, 2016. cap. 10, p. 276–290. ISBN 9-788590-546177.
- SOUZA, L. G. S. *Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.

Hallelujah

$\text{♩} = 90$

i've heard there was a
when your faith was strong

secret chord that david played and he pleased the lord but you don't really care
but you needed proof you saw her bathing on the roof her beauty and the moon

for music do ya? it goes like this the fourth the fifth the
light over threw ya she tied you to a kit - chen chair she

mi - nor fall and the major lift the baffled king com - posing ha - lle lu - ja -
broke your throne and she cut your hair and from your lips she drew the ha - lle lu - ja -

C^7 $\cong T_9(C^7)$ C^7 $\cong T_9(C^7)$ C^7

$\cong T_9(C^7)$ C^7 $\cong T_9(C^7)$ $\cong T_5(C^7)$

$\cong T_7(C^7)$ C^7 $\cong T_5(C^7)$ $\cong C^7$ $\cong T_5(C^7)$ $\cong T_7(C^7)$

$\cong T_9(C^7)$ $\cong T_5(C^7)$ $\cong T_7(C^7)$ $\cong T_4(C^7)$ $\cong T_9(C^7)$

20

h hall-e lu-ja - h hall-e lu-ja - h hall-e lu-ja - h hall-e -
 h ha-lle lu-ja - h ha-lle lu-ja - h ha-lle lu-ja - h ha-lle lu-ja - h ha-lle-

$\cong T_9(C^7)$ $\cong T_5(C^7)$ $\cong T_5(C^7)$ $\cong T_9(C^7)$ $\cong T_9(C^7)$ $\cong T_5(C^7)$ $\cong T_5(C^7)$

27

lu - u - hu-hu hu - hu - hu-ja h
 lu - hu - hu-hu hu - hu - hu-ja h

$\cong T_0I(C^7)$ $\cong T_7(C^7)$ $\cong T_9(C^7)$