

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL LIMA MARCATO

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO  
COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE ELÁSTICA-LINEAR DE VIGAS  
DE EULER-BERNOULLI SOBRE APOIOS ELÁSTICOS CONTÍNUOS  
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

CAMPO MOURÃO

2018

GABRIEL LIMA MARCATO

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO  
COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE ELÁSTICA-LINEAR DE VIGAS  
DE EULER-BERNOULLI SOBRE APOIOS ELÁSTICOS CONTÍNUOS  
VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso Superior em Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil – DACOC - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, para obtenção do título de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Waidemam

CAMPO MOURÃO

2018



Ministério da Educação  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Câmpus Campo Mourão  
Diretoria de Graduação e Educação Profissional  
Departamento Acadêmico de Construção Civil  
Coordenação de Engenharia Civil



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

### Trabalho de Conclusão de Curso

**ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE ELÁSTICA-LINEAR DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI SOBRE APOIOS ELÁSTICOS CONTÍNUOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

por

**Gabriel Lima Marcato**

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 16:00 h do dia 28 de novembro de 2018 como requisito parcial para obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

**Prof. Dr. Ronaldo Rigobello**  
(UTFPR)

**Prof. Dr. Marcelo Rodrigo Carreira**  
(UTFPR)

**Prof. Dr. Leandro Waidemam**  
(UTFPR)

*Orientador*

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenadora do Curso de Engenharia Civil:

**Prof. Dra. Paula Cristina de Souza**

*A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.*

## AGRADECIMENTOS

A este trabalho e a minha graduação, dedico e sou grato a minha família, meus pais Claudemir e Rosangela e minha irmã Lorena. Eles, que foram e são as bases dos meus princípios, sempre estiveram ao meu lado, me passando os valores que sigo hoje. Sou grato ao esforço para que nunca houvesse falta de algo, por todo suporte e confiança para que eu possa um dia caminhar com minhas próprias pernas. Agradeço por estarem sempre ao meu lado em todos desafios que enfrentei e por todo acolhimento nos momentos que errei. Estendo o agradecimento os meus demais familiares, aos que sempre estiveram torcendo pelo meu sucesso e me dando apoio.

Não é possível falar de agradecimentos sem citar os amigos. A graduação proporcionou me aproximar e criar laços de amizades que seguirão comigo para o resto de minha vida. Passar o curso ao lado de amigos fez com que esse processo fosse muito mais leve e prazeroso. Também agradeço aos amigos que já estavam presentes na minha vida antes da graduação, que mesmo distantes, morando em cidades e seguindo rotinas distintas, sempre estiveram presentes quando se fez necessário.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Leandro Waidemam, que sempre se fez presente e atencioso quando precisei, seja nas disciplinas cursadas, no programa de monitoria estudantil ou no próprio trabalho de conclusão de curso. Por fim, agradeço a todos os professores que se esforçaram para passar seus ensinamentos, aos que levaram com seriedade o ato de ensinar e que sempre estiveram preocupados em oferecer o seu melhor para que os alunos pudessem construir uma base sólida de conhecimento.

## RESUMO

MARCATO, Gabriel Lima. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos via método dos elementos finitos.** 2018. 73 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2018.

O enfoque deste trabalho é fazer análise elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos utilizando o Método dos Elementos Finitos. No trabalho, apresenta-se a dedução da matriz de rigidez, com a contribuição dos apoios elásticos contínuos, e o vetor de cargas nodais para um elemento de viga composto por dois nós com dois graus de liberdade: deslocamento vertical e rotação na extremidade do elemento. As funções de aproximação que permitem discretizar os campos de deslocamentos ao longo de cada elemento consistem em funções de terceiro grau. Exemplos foram simulados para validar o código computacional desenvolvido no trabalho. Como resultados, o código gera deslocamento, rotação na extremidade do elemento, força cortante e momento fletor ao longo da viga e reações de apoio.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos. Análise elástica linear. Vigas de Euler-Bernoulli. Apoios elásticos contínuos.

## ABSTRACT

MARCATO, Gabriel Lima. **Study and development of computational code for elastic linear analysis of Euler-Bernoulli beams on continuum elastic foundation through Finite Element Method.** 2018. 73 p. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2018.

The main focus of this work is a linear-elastic analysis of Euler-Bernoulli beams on continuum elastic foundation through Finite Element Method. It is presented the deduction of the stiffness matrix, with the contribution of the continuum elastic foundation, and the nodal loads vector for a beam element composed by two nodes, each one with two degrees of freedom: vertical displacement and cross-section rotation. The approximation functions that allows to discretize the fields of displacement along each element is a third degree function. Examples have been simulated to validate the computational code developed in this work. As results, the code generates the displacement and cross-section rotation along the beam, shear force, bending moment and support reactions.

**Palavras-chave:** Finite Element Method, Linear-elastic analysis, Euler-Bernoulli beam, Continuum elastic foundation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplo de viga baldrame. ....	17
Figura 2 - Viga de Euler-Bernoulli.....	20
Figura 3 - Flexão em uma viga.....	21
Figura 4 - Viga sobre base elástica.....	22
Figura 5 - Forças, momentos, deslocamentos e rotações nodais.....	26
Figura 6 - Elemento de barra submetido a carregamento distribuído.....	28
Figura 7 - Forças nodais equivalentes para um elemento de barra submetido a carregamento distribuído.....	29
Figura 8 - Fluxograma do programa desenvolvido.....	32
Figura 9 - Viga sobre apoio elástico contínuo simplesmente apoiada.....	37
Figura 10 - Viga simplesmente apoiada sobre apoio elástico contínuo.....	43
Figura 11 - Viga simplesmente apoiada com apoio elástico contínuo.....	47
Figura 12 - Esquema viga com alvenaria.....	51

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Campo de deslocamentos ( $K=1$ ).....	38
Gráfico 2 - Diagrama de momentos fletores ( $K=1$ ).....	38
Gráfico 3 - Campo de deslocamentos ( $K=200$ ).....	39
Gráfico 4 - Diagrama de momentos fletores ( $K=200$ ).....	39
Gráfico 5 - Comparativo de resultado por número de elementos ( $K=200 \text{ kN/m}^2$ ).....	41
Gráfico 6 - Deslocamento para valores diferentes de $K$ .....	41
Gráfico 7 - Momento fletor para diferentes valores de $K$ .....	42
Gráfico 8 - Convergência de momento fletor de acordo com o número de elementos quando $K=100.000 \text{ KN/m}^2$ .....	46
Gráfico 9 - Convergência do MEF de acordo com o número de elementos. ....	50
Gráfico 10 - Deslocamento ao longo da viga. ....	52
Gráfico 11 - Comparativo do gráfico de momento fletor.....	53



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Coeficiente $K_v$ segundo Moraes e Terzaghi. ....	18
Tabela 2 - Resultados para $K=0$ kN/m <sup>2</sup> . ....	44
Tabela 3 - Deslocamento vertical para diversos valores de $K$ . ....	45
Tabela 4 – Rotação da extremidade do elemento para diversos valores de $K$ . ....	45
Tabela 5 - Momento fletor para diversos valores de $K$ . ....	45
Tabela 6 - Análise de convergência MEF ( $K=0$ kN/m <sup>2</sup> ). ....	48
Tabela 7 -Solução analítica para vários valores de $K$ . ....	48
Tabela 8 - Deslocamento vertical para diversos valores de $K$ . ....	48
Tabela 9 – Rotação na extremidade do elemento para diversos valores de $K$ . ....	49
Tabela 10 - Momento fletor para diversos valores de $K$ . ....	49
Tabela 11 - Resumo dos resultados obtidos. ....	53
Tabela 12 - Resumo de resultados para diversas constantes elásticas. ....	54

## LISTA DE SIMBOLOS E SIGLAS

MEF	Método dos elementos finitos
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais
$E$	Módulo de elasticidade do material
$I$	Inércia de seção
$A$	Área da seção transversal
$L$	Comprimento da viga
$U_i^*$	Trabalho interno virtual
$U_e^*$	Trabalho externo virtual
$K$	Constante de rigidez do apoio elástico
$K_v$	Constante de rigidez do solo
$U$	Deslocamento transversal
$\phi_{ij}$	Elemento da matriz de rigidez da viga
$\Psi_{ij}$	Elemento da matriz de rigidez do solo
$M(x)$	Função do momento fletor
$V(x)$	Função da força cortante
$w(x)$	Função do carregamento distribuído
$\sigma$	Tensão normal
$\varepsilon$	Deformação de um elemento
$[k_e]$	Matriz de rigidez elementar em coordenadas locais
$[k_G]$	Matriz de rigidez em coordenadas globais
$\{u_e\}$	Vetor de deslocamentos e rotações nodais em coordenadas globais
$\{f_e\}$	Vetor de esforços elementar em coordenadas globais
$\Delta$	Deslocamento
$\Delta^*$	Deslocamento nodal virtual
$w_1$	Valor do carregamento distribuído no nó inicial do elemento
$w_2$	Valor do carregamento distribuído no nó final do elemento

## SUMÁRIO

<b>1-</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>2-</b>	<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>15</b>
	2.1- OBJETIVO GERAL .....	15
	2.2- OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	15
<b>3-</b>	<b>JUTIFICATIVAS .....</b>	<b>16</b>
<b>4-</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>17</b>
	4.1- VIGAS SOBRE APOIOS ELÁSTICOS CONTÍNUOS .....	17
	4.2- MODELO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI.....	19
	4.3- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF).....	20
	4.4- FLEXÃO EM VIGAS .....	21
	4.5- MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS A VIGA DE EULER-BERNOULLI SOBRE APOIOS ELÁSTICOS CONTÍNUOS .....	23
<b>5-</b>	<b>ASPECTOS COMPUTACIONAIS.....</b>	<b>31</b>
	5.1- ESQUEMA GERAL DE CÁLCULO .....	31
	5.2- SUB-ROTINAS.....	32
	5.2.1- Declaração de variáveis .....	33
	5.2.2- Abertura de arquivos .....	33
	5.2.3- Leitura de dados .....	33
	5.2.4- Propriedades geométricas .....	33
	5.2.5- Matriz de rigidez.....	33
	5.2.6- Vetor de cargas.....	34
	5.2.7- Condições de contorno .....	34
	5.2.8- Resolução de sistema.....	34
	5.2.9- Reações de apoio .....	35
	5.2.10- Esforços internos .....	35
	5.2.11- Saída de dados.....	35
	5.2.12- Fechamento de arquivos.....	36
<b>6-</b>	<b>VALIDAÇÃO DO SOFTWARE .....</b>	<b>37</b>
	6.1- EXEMPLO 1.....	37
	6.2- EXEMPLO 2.....	43
	6.3- EXEMPLO 3.....	47

6.4- EXEMPLO 4.....	51
<b>7- CONCLUSÃO.....</b>	<b>56</b>
<b>8- REFERÊNCIAS.....</b>	<b>57</b>

## 1- INTRODUÇÃO

Os estudos e pesquisas realizados sobre análise de estruturas implicam no desenvolvimento de novas metodologias que permitem examinar estruturas cada vez mais complexas. Em particular, os métodos computacionais têm passado por avanços e sido otimizados com tendência a continuarem melhorando, o que proporciona refinamentos de projetos.

Com o meio ambiente sofrendo perante aos progressos da humanidade, a busca pela redução do uso e desperdício de materiais está bastante presente em discussões acerca do assunto. Abrangendo a área da construção civil, o desenvolvimento de softwares tem permitido que a redução do uso de materiais ocorra pois permite que a precisão dos dimensionamentos seja mais eficaz.

Um projeto bem executado tende a gerar economias na obra por conseguir evitar um grande número de patologias construtivas e também por reduzir, na medida do possível, o superdimensionamento das estruturas. Os elementos estruturais devem resistir aos esforços que poderão ser aplicados na edificação em algum momento durante sua vida útil; ser capaz de resistir a esforços que estatisticamente jamais serão aplicados, significa desperdício de dinheiro.

Ao dimensionar uma estrutura é fundamental que se especifique os esforços atuantes nos elementos da estrutura. Encontrar o equilíbrio de uma estrutura pode tornar-se uma tarefa complicada pois, dependendo da configuração estrutural, as equações e suas resoluções podem se tornar complexas.

Nesse sentido, na maioria dos casos se torna interessante o uso de programas computacionais nas análises estruturais por possuírem uma capacidade interessante no processamento de dados. Para fazer com que esses programas funcionem, é necessário que haja o desenvolvimento de algoritmos, que por sua vez, necessitam de métodos matemáticos para executarem sua função.

Diversos métodos numéricos são utilizados para a implementação desses programas computacionais. Um deles é o Método dos Elementos Finitos, objeto de estudo deste trabalho, que analisa pequenos elementos de uma estrutura a fim de entendê-la como um todo.

Em uma edificação existem diversos tipos de elementos estruturais. Dentre eles, encontra-se a viga. Essa está presente em praticamente todos os tipos de sistemas estruturais; ela resiste a esforços de flexão e distribui a seus apoios. Há diversos tipos de seções transversais e vinculações tornando muito ampla sua utilização. Também existem alguns modelos físicos que definem esse elemento, como o de Euler-Bernoulli, por exemplo.

Diante desse contexto, nesse trabalho será estudado o modelo de viga de Euler-Bernoulli sobre apoio elástico contínuo. Esse tipo de apoio comporta-se fundamentalmente como molas, possuindo uma energia potencial de deformação. Portanto, quando uma viga tende a deformar devido aos carregamentos, o apoio elástico tende a atenuar seu deslocamento. Um exemplo de apoio elástico é a viga baldrame, que possui o solo como atenuador dos deslocamentos.

## **2- OBJETIVOS**

### **2.1- Objetivo Geral**

O trabalho visa desenvolver e apresentar um código computacional, baseado no Método dos Elementos Finitos, para a análise elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos.

### **2.2- Objetivos Específicos**

Este trabalho tem por objetivos específicos:

- Aplicar teórica e numericamente o Método dos Elementos Finitos para a análise elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos;
- Desenvolver um código computacional capaz de resolver o problema proposto;
- Analisar a influência da rigidez dos apoios elásticos como função atenuadora no deslocamento de uma viga.

### 3- JUTIFICATIVAS

Entender o comportamento mecânico das vigas é de suma importância na vida profissional de um engenheiro civil de estruturas. Estas podem se apresentar em diversas configurações, com variadas formas de seção transversal, tipos de vinculação, carregamentos e materiais que as compõem.

No que se refere aos tipos de vinculação, um em especial pode ser citado: o apoio elástico contínuo. O caso mais comum, presente no cotidiano das edificações, é a viga baldrame. Nessas, o solo, material deformável, auxilia no suporte de tais elementos de forma não rígida.

No projeto de tais elementos, os profissionais podem ou não levar em consideração o suporte do solo em seus projetos. Considerar a influência do mesmo como parâmetro de projeto altera o comportamento estrutural da viga e pode aumentar a eficiência desse elemento, reduzindo o consumo de materiais e consequentemente diminuindo os custos de execução, papel fundamental de um engenheiro.

Algumas teorias são utilizadas para a modelagem da flexão desses elementos. Dentre elas, a teoria de Euler-Bernoulli é a mais aplicada por apresentar solução confiável para os tipos mais usuais de vigas.

Diante desse contexto, este trabalho tende a contribuir por apresentar como produto um código computacional que seja capaz de simular numericamente o comportamento estrutural elástico-linear das vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos.

É importante destacar que o algoritmo será desenvolvido a partir do MEF por ser uma ferramenta eficiente e de fácil implementação computacional. Além do fato de, hoje, ser o método numérico mais utilizado para solucionar problemas de engenharia de estruturas.

Por fim espera-se também contribuir na disseminação do assunto, uma vez que o trabalho e o código computacional ficarão disponíveis para consulta dos demais alunos que tenham interesse sobre o assunto.



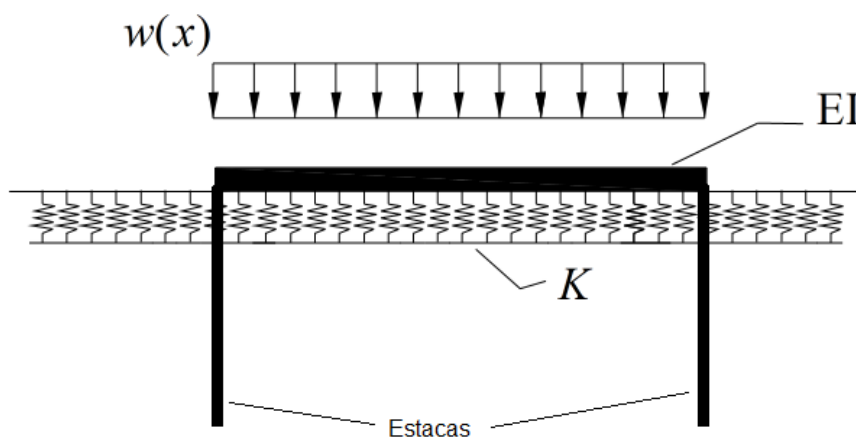
## 4- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 4.1- Vigas Sobre Apoios Elásticos Contínuos

A viga é considerada o elemento mais comum de todo o conjunto estrutural por estar presente em qualquer tipo de edificação, como casas, prédios, ponte e viadutos (LOGAN, 2011).

Em se tratando de vigas, existem alguns tipos de vinculações que são suscetíveis de utilização. Dentre esses tipos de vinculação, pode-se destacar os apoios elásticos. Uma viga sobre apoios elásticos contínuos consiste em uma viga convencional que é apoiada sobre algum tipo de atenuador de seus deslocamentos. Um exemplo é a viga baldrame (Figura 1), pois é apoiada sobre o solo, cuja rigidez pode ser aproximada por um comportamento de mola (CASTRO, 2001) e influencia diretamente na rigidez do conjunto.

Figura 1 - Exemplo de viga baldrame.



Fonte: adaptado de Castro (2001).

O fato de o apoio elástico atuar como atenuador na deformação e nos deslocamentos quando a viga é submetida a carregamentos, é possível considerá-lo como uma constante deformável semelhante ao comportamento de molas. Segundo Spada (2003), Winkler em 1867 criou um modelo para uma via férrea e considerou o apoio elástico como molas de módulo de rigidez constante, o que significa que sua reação é proporcional à sua deflexão. Dessa forma, a força de reação do apoio elástico pode ser assim descrita:

$$r = K \cdot \nu \quad (1)$$

onde  $K$  é a constante de deformação da mola e  $\nu$  o deslocamento vertical.

Para estacas, o solo pode ser considerado como um apoio elástico e possui duas constantes de rigidez; a vertical e a horizontal. A constante de rigidez vertical do solo varia de acordo com o tipo de solo e sua profundidade. Porém, para variações mais simples, pode-se adotar alguns valores para a constante vertical ( $K_v$ ), de acordo com o tipo de solo (ALONSO, 1989).

Alguns valores para a constante de reação do solo são mostrados na Tabela 1.

**Tabela 1 - Coeficiente  $K_v$  segundo Moraes e Terzaghi.**

Tipo de solo	$K_v$ (KN/m <sup>3</sup> )
Turva leve - solo pantanoso	5.000 a 10.000
Turva pesada - solo pantanoso	10.000 a 15.000
Areia fina de praia	10.000 a 15.000
Aterro de silte, de areia e cascalho	10.000 a 20.000
Argila molhada	20.000 a 30.000
Argila úmida	40.000 a 50.000
Argila seca	60.000 a 80.000
Argila seca endurecida	100.000
Silte compactado com areia e pedra	80.000 a 100.000
Silte compactado com areia e muita pedra	100.000 a 120.000
Cascalho miúdo com areia fina	80.000 a 120.000
Cascalho médio com areia fina	100.00 a 120.000
Cascalho grosso com areia grossa	120.000 a 150.000
Cascalho grosso com pouca areia	150.000 a 200.000
Cascalho grosso com pouca areia compactada	200.000 a 250.000

**Fonte: Guedes (1976).**

Guedes (2014) afirma que o coeficiente de reação vertical não é o valor direto da constante de rigidez de mola a ser considerada no modelo estrutural. O autor ainda afirma que o coeficiente relaciona a resistência ao deslocamento por uma pressão imposta e não por uma força; portanto, tem unidade de força por comprimento.

Costa e Almeida Neto (2017) explicam que, se  $b$  é a largura da viga, então a rigidez das molas de Winkler (rigidez por unidade de comprimento) será dada por  $K = K_v \cdot b$  (N/m<sup>2</sup>).

## 4.2- Modelo De Viga De Euler-Bernoulli

Na mecânica dos sólidos, duas teorias são amplamente utilizadas para caracterizar o comportamento mecânico desses elementos, sendo essas os modelos de viga de Euler-Bernoulli e o de Timoshenko (MENIN, 2003).

Na teoria de Euler-Bernoulli, algumas hipóteses são consideradas. Migotto (2011) destaca:

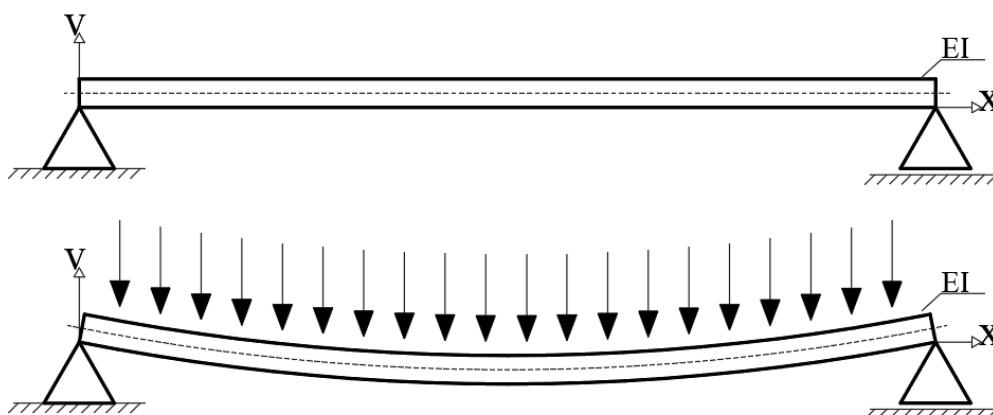
- as dimensões da seção transversal são pequenas se comparada com o seu comprimento;
- há uma linha neutra onde a viga não sofre ações de tração nem de compressão;
- a viga é constituída por um material elástico e homogêneo;
- as seções planas permanecem planas após a deformação e a curvatura da viga é assumida pequena;
- há a desconsideração das deformações por cisalhamento.

Dessa maneira, por possuir o comprimento muito superior quando comparado às dimensões da seção transversal, a viga pode ser considerada como sendo um elemento unidimensional (BEER; JOHNSTON, 1982).

O modelo da viga de Euler-Bernoulli considera apenas os efeitos causados pela deformação de momento fletor na equação de movimento, sendo assim conhecida como teoria elementar (ALMEIDA, 2010).

Portanto, a viga de Euler-Bernoulli com seção plana e eixo neutro após a deformação pode ser representada de acordo com a Figura 2.

Figura 2 - Viga de Euler-Bernoulli.



Fonte: autoria própria (2018).

#### 4.3- Método Dos Elementos Finitos (MEF)

O Método dos Elementos Finitos tem sido bastante difundido na engenharia. Por permitir analisar deslocamentos e tensões em estruturas, tornou-se uma ferramenta importante para projetos de dimensionamentos estruturais. O método pode ser utilizado para estudar vários tipos de estruturas, portanto, sendo capaz de analisar estruturas complexas como de pontes, viadutos ou edifícios altos (MARTHA, 1994).

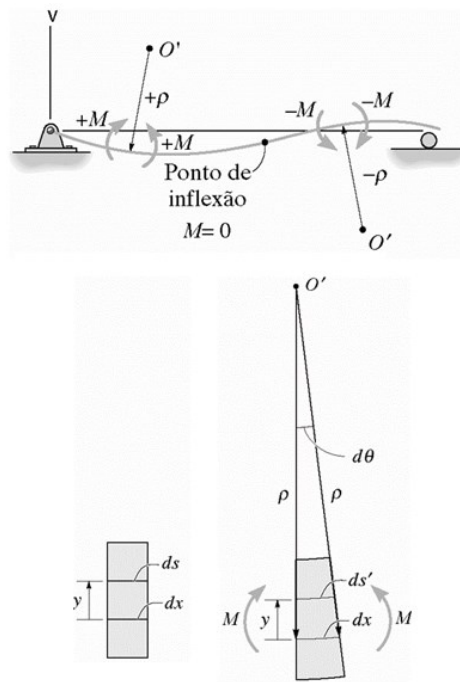
Neste trabalho, o método será utilizado para análise elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli sob base elástica. Dependendo do tipo de vinculação, os cálculos para obtenção dos esforços em uma viga podem ser bastante complexos e extensos. Dessa maneira, ter a disposição softwares de análises estruturais simplifica em muito o processo e permite uma análise mais rápida e eficaz.

Para que seja possível a elaboração de softwares, é necessário que sejam desenvolvidos algoritmos baseados em métodos numéricos. Nesse sentido, o método dos elementos finitos se destaca como um mecanismo numérico bastante utilizado por ser capaz de estruturar o programa por meio de um conjunto de equações algébricas que relacionam as forças aos deslocamentos em pontos pré-definidos, que são chamados de nós (UGURAL, 2009).

#### 4.4- Flexão Em Vigas

Analisando a Figura 3, pode-se compreender o comportamento da viga quando submetida aos esforços sem apoios elásticos contínuos. Dessa maneira, é possível deduzir algumas equações que caracterizam o comportamento mecânico de tal elemento.

**Figura 3 - Flexão em uma viga.**



Fonte: adaptado de Hibbeler (2010).

De acordo com Hibbeler (2010), tem-se que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.I} \quad (2)$$

A Equação (3) representa a curvatura de uma curva qualquer (MASCIA, 2001).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (3)$$

Na análise de vigas,  $\frac{d\psi}{dx}$  representa a rotação na extremidade do elemento. Quando elevado ao quadrado, os valores serão muito próximos de zero. Portanto, pode-se simplificar a equação (3) para:

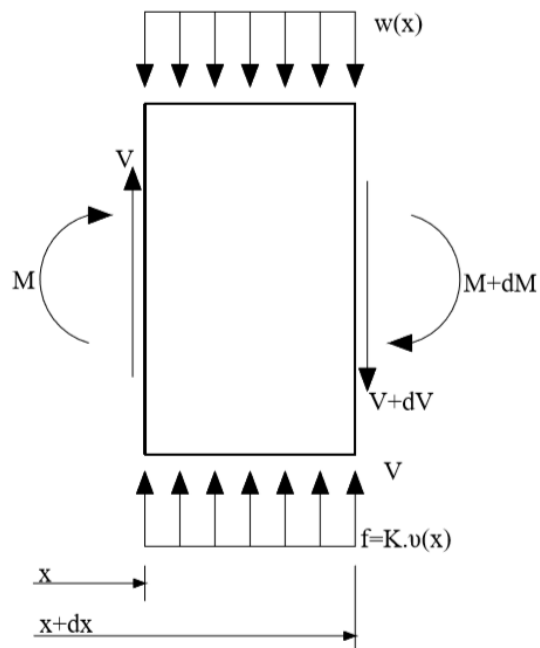
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\psi}{dx^2} \quad (4)$$

Igualando (2) e (4),

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (5)$$

A Figura 4 ilustra o diagrama de corpo livre para um elemento infinitesimal retirado de uma viga sobre base elástica. A viga está submetida a um carregamento  $w(x)$  que, em função da pequena dimensão  $dx$ , pode ser considerado uniforme em sua extensão. Além disso a viga está apoiada sobre uma base elástica de constante  $k$  que fornece uma força reativa também considerada uniforme na extensão  $dx$ .

**Figura 4 - Viga sobre base elástica.**



**Fonte: adaptado de Costa; Neto (2017).**

Partindo do equilíbrio de forças e momentos, pode-se deduzir, respectivamente, as equações (6) e (7):

$$\frac{dV}{dx} = -w + K.v \quad (6)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7)$$

A partir dessa premissa e derivando-se a equação (5) mais duas vezes em relação a  $X$ , tem-se que,

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V(x)}{E.I} \quad (8)$$

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{-w(x) + K.v(x)}{E.I} \quad (9)$$

Portanto,

$$K.v(x) - w(x) = E.I. \frac{d^4v}{dx^4} \quad (10)$$

Rearranjando a equação (10) é possível obter a equação diferencial da linha elástica da viga sob influência dos apoios elásticos contínuos (CASTRO, 2001):

$$w(x) = K.v(x) - E.I. \frac{d^4v}{dx^4} \quad (11)$$

#### **4.5- Método Dos Elementos Finitos Aplicados A Viga De Euler-Bernoulli Sobre Apoios Elásticos Contínuos**

Para se obter as requeridas equações de equilíbrio para posterior aplicação do MEF, inicialmente pode-se fazer o uso do princípio dos trabalhos virtuais aplicado para um único elemento finito.

O princípio estabelece que “se a um corpo deformável, sujeito a deslocamentos reais provocados por um sistema de forças em equilíbrio, é aplicado um sistema equilibrado de forças virtuais, o trabalho virtual externo produzido pelas forças virtuais externas quando ocorrem deslocamentos reais é igual ao trabalho virtual interno produzido pelos esforços virtuais internos quando ocorrem as deformações reais” (BEER; JOHNSTON, 1982). Dessa maneira, pode-se escrever a igualdade apresentada na equação (12).

$$U_e^* = U_i^* \quad (12)$$

O princípio enunciado pode ser tratado também sobre uma outra ótica. Em um corpo sujeito a cargas reais, o trabalho virtual externo realizado pelas forças reais a partir da imposição de um deslocamento virtual é igual ao trabalho virtual interno produzido pelos esforços reais internos quando ocorrem deformações virtuais.

Assim, em um corpo sujeito à um carregamento externo representado pela ação de forças e momentos concentrados e forças distribuídas por unidade de comprimento, a partir da imposição de um campo de deslocamentos virtuais, na equação (12), a parcela de trabalho virtual externo pode ser explicitado como segue:

$$U_e^* = F.\Delta^* + M.\phi^* + \int_0^L w(x).\Delta^* dx \quad (13)$$

Desprezando a parcela do trabalho interno devido às tensões de cisalhamento e considerando a contribuição dos apoios elásticos contínuos, a parcela do trabalho virtual interno presente na equação (12) é apresentada na equação (14).

$$U_i^* = \int_V \sigma \cdot \delta\varepsilon^* dV + \int_0^L K \cdot v \cdot \delta v^* dx \quad (14)$$

De acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, a deformação normal em uma fibra da viga distante  $y$  em relação ao seu centroide é obtida a partir da derivada segunda do deslocamento, conforme apresentado na equação (15).

$$\varepsilon = y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad (15)$$



Considerando a relação entre tensão e deformação definida para o material em regime elástico, a partir da equação (15), pode-se definir a tensão normal na mesma fibra como segue:

$$\sigma = E \left( y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \quad (16)$$

Inserindo as relações (15) e (16) em (14) obtém-se:

$$U_i^* = \int_V E \cdot \left( y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \cdot \left( y \cdot \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} \right) \cdot dV + \int_0^L K \cdot v \cdot \delta v^* dx \quad (17)$$

A integral de volume pode ser redefinida como uma integral dupla na área da seção transversal e no comprimento da viga, resultando na equação (18).

$$U_i^* = E \cdot \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \cdot \left( \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} \right) \cdot \left( \int_A y^2 \cdot dA \right) dx + \int_0^L K \cdot v \cdot \delta v^* dx \quad (18)$$

Na equação (18) a integral de área representa o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo neutro (HIBBELER, 2010). Considerando a seção transversal constante ao longo do comprimento do elemento, a equação (18) pode ser reescrita como segue:

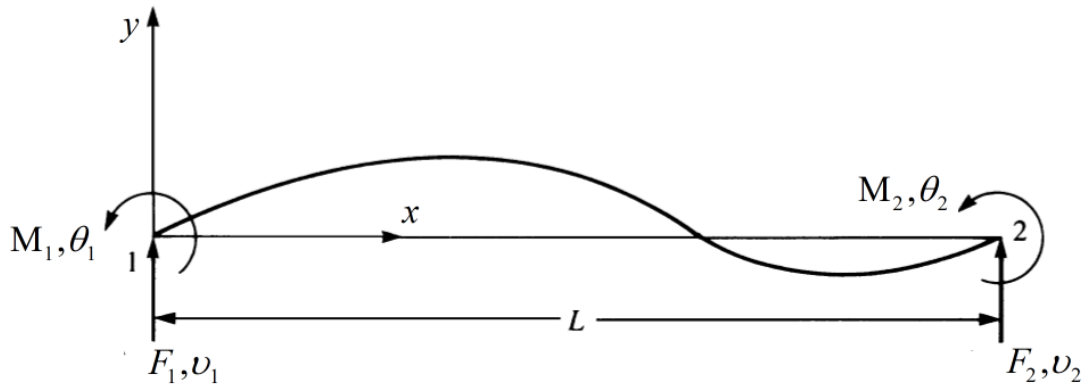
$$U_i^* = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \cdot \left( \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} \right) dx + \int_0^L K \cdot v \cdot \delta v^* dx \quad (19)$$

Voltando para a condição inicial, onde o trabalho virtual externo é igual ao trabalho virtual interno (equação (12)), chega-se a seguinte equação:

$$F \cdot \Delta^* + M \cdot \phi^* + \int_0^L w(x) \cdot \Delta(x)^* dx = EI \cdot \int_0^L \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \cdot \left( \frac{d^2 \delta v^*}{dx^2} \right) dx + \int_0^L K \cdot v \cdot \delta v^* dx \quad (20)$$

Os momentos, forças, rotações e deslocamentos para a utilização no MEF devem ser nodais. Portanto, os esforços aplicados a viga devem ser concentrados nos nós do elemento. Dessa maneira, os carregamentos distribuídos ou concentrados fora dos nós, serão transmitidos para os nós, considerando as forças e momentos nodais equivalentes. (FISH; BELYTSCHKO, 2000).

Figura 5 - Forças, momentos, deslocamentos e rotações nodais.



Fonte: adaptado de Logan (2011).

Portanto, com os carregamentos distribuídos ao longo do comprimento do elemento sendo iguais a zero, a relação diferencial entre os deslocamentos e os carregamentos distribuídos são expressas de acordo com a equação (10), resultando em:

$$\left(\frac{d^4 v}{dx^4}\right) = 0 \quad (21)$$

A solução para a equação (21) é admitida como uma função cúbica na coordenada  $X$ , ou seja:

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (22)$$

Derivando a função (22) em relação à coordenada  $x$ , alcança-se a rotação na extremidade do elemento  $\theta$ , sendo dado por:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \quad (23)$$

As constantes presentes em (22) e (23) podem ser obtidas a partir das condições de contorno do problema, ou seja, a partir dos deslocamentos e rotações nodais. Assim, substituindo-se os valores nodais em suas respectivas coordenadas nas mencionadas equações, é possível encontrar a função deslocamento:

$$v(x) = x^3 \left( \frac{\theta_1}{L^2} + \frac{\theta_2}{L^2} + \frac{2v_1}{L^3} + \frac{2v_2}{L^3} \right) + x^2 \left( -\frac{2\theta_1}{L} - \frac{\theta_2}{L} - \frac{3v_1}{L^2} + \frac{3v_2}{L^2} \right) + x\theta_1 + v_1 \quad (24)$$

Fazendo o rearranjo de (24), tem-se:

$$v(x) = \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right) v_1 + \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{3x^3}{L^2} \right) \theta_1 + \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right) v_2 + \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \theta_2 \quad (25)$$

que simplificada, pode ser escrita como segue:

$$v(x) = \phi_1 v_1 + \phi_2 \theta_1 + \phi_3 v_2 + \phi_4 \theta_2 \quad (26)$$

onde  $\phi_1 = \left( 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right)$ ,  $\phi_2 = \left( x - \frac{2x^2}{L} + \frac{3x^3}{L^2} \right)$ ,  $\phi_3 = \left( \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \right)$  e  $\phi_4 = \left( -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)$ .

Utilizando a equação (26) para definir tanto os deslocamentos reais quanto os virtuais e substituindo na equação (19), tem-se:

$$U_i^* = EI \int_0^L \left( \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) v_1 \delta v_1^* + \dots + \left( \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_4}{dx^2} \right) \theta_2 \delta \theta_2^* dx + \quad (27)$$

$$+ K \int_0^L (\phi_i \phi_i) v_i \delta v_i^* + \dots + (\phi_4 \phi_4) \theta_2 \delta \theta_2^* dx$$

Definindo as funções  $\varphi$  e  $\Psi$  :

$$\varphi_{ij} = \int_0^L \left( \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} \right) dx \quad ; \quad \Psi_{ij} = \int_0^L (\phi_i \phi_j) dx \quad (28)$$

e rearranjando-se a equação (27) na forma matricial, obtêm-se:

$$U_i^* = \left( EI \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{41} & \Psi_{42} & \Psi_{43} & \Psi_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_1^* \\ \delta \theta_1^* \\ \delta v_2^* \\ \delta \theta_2^* \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

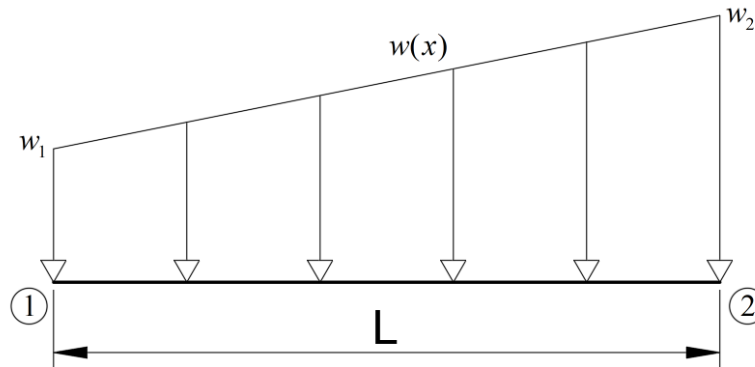
Na equação (29), adotando-se os valores virtuais como unitários e realizando-se o processo de integração, encontra-se, por fim, a parcela final do trabalho virtual interno:

$$U_i^* = \left( EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & -\frac{13L^2}{420} \\ \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} \\ \frac{9L}{70} & \frac{13L^2}{420} & \frac{13L}{35} & -\frac{11L^2}{210} \\ -\frac{12L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} & -\frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

O vetor de forças neste trabalho será composto por meio da associação de forças externas concentradas e dos carregamentos distribuídos em um elemento. Pelo Método dos Elementos Finitos os deslocamentos e rotações nodais são relacionados com forças e momentos nodais. Dessa maneira, quando um elemento está submetido a carregamentos distribuídos, torna-se apropriado a substituição desses carregamentos por forças nodais equivalentes aplicadas nos nós dos elementos.

Portanto, para definir a equação do trabalho virtual externo (equação (13)), são admitidos forças e momentos nodais como ilustram as Figuras 6 e 7.

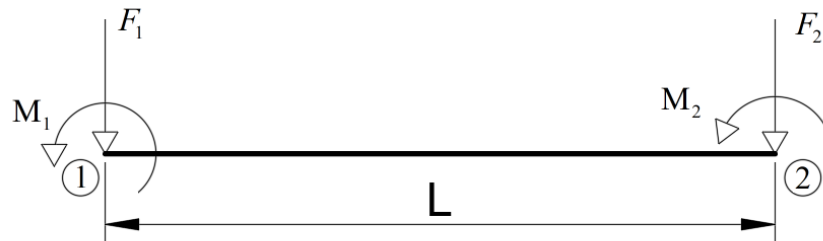
**Figura 6 - Elemento de barra submetido a carregamento distribuído.**



**Fonte: autoria própria (2018).**

A fim de determinar os valores para as forças e momentos equivalentes ao carregamento distribuídos, foi admitido que os  $w_1$  e  $w_2$ , com  $w_2 \geq w_1$ , são os valores do carregamento distribuído quando  $x=0$  e  $x=L$ , respectivamente.

**Figura 7 - Forças nodais equivalentes para um elemento de barra submetido a carregamento distribuído.**



**Fonte: autoria própria (2018).**

Assumindo que o carregamento seja distribuído linearmente, a equação do carregamento distribuído pode ser expressa como segue:

$$w(x) = a \cdot x + b \quad (31)$$

Aplicando as condições de contorno, tem-se que:

Para  $x=0$   $w(0) = w_1 \therefore b = w_1$  (32)

Para  $x=L$   $w(L) = w_2 \therefore a = \frac{w_2 - w_1}{L}$

Dessa forma, retornando (32) em (31), obtêm-se:

$$w(x) = \frac{w_2 - w_1}{L} \cdot x + w_1 \quad (33)$$

Considerando a equação (33) como o carregamento linear para a viga e que o campo de deslocamentos virtuais verticais pode ser representado de acordo com a equação (26), a parcela do trabalho externo em (13) referente ao carregamento distribuído pode ser descrito como segue:

$$\int_0^L w(x) \cdot \Delta^* = \int_0^L \left[ \frac{w_2 - w_1}{L} \cdot x + w_1 \right] \cdot [\phi_1 v_1^* + \phi_2 \theta_1^* + \phi_3 v_2^* + \phi_4 \theta_2^*] dx \quad (34)$$

Portanto, resolvendo a equação (34) e considerando-se todos os deslocamentos virtuais como unitários, determina-se as forças nodais equivalentes dadas em (35).

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{7L}{20} \cdot w_1 + \frac{3L}{20} \cdot w_2\right) \\ -\left(\frac{L^2}{20} \cdot w_1 + \frac{L^2}{30} \cdot w_2\right) \\ -\left(\frac{3L}{20} \cdot w_1 + \frac{7L}{20} \cdot w_2\right) \\ \left(\frac{L^2}{30} \cdot w_1 + \frac{L^2}{20} \cdot w_2\right) \end{Bmatrix} \quad (35)$$

Substituindo-se as equações (34) e (35) em (20) obtém-se a equação de equilíbrio para um elemento finito de viga que, na forma compacta, pode ser representada como segue:

$$[k_e]\{u_e\} = \{f_e\} \quad (36)$$

Onde  $[k_e]$  é a matriz de rigidez elementar em coordenadas locais, dado pela equação (37),  $\{u_e\}$  vetor de deslocamentos e rotações nodais em coordenadas globais e  $\{f_e\}$  é o vetor de forças elementar em coordenadas globais.

$$[k_e] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{9L}{70} & -\frac{13L^2}{420} \\ \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & \frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} \\ \frac{9L}{70} & \frac{13L^2}{420} & \frac{13L}{35} & -\frac{11L^2}{210} \\ -\frac{12L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} & -\frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \quad (37)$$

## **5- ASPECTOS COMPUTACIONAIS**

Para a elaboração desse trabalho, um código computacional foi desenvolvido na linguagem FORTRAN. Embasado no Método dos Elementos Finitos, o código é capaz de fazer análises elásticas-lineares de vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos sobre efeito de diferentes tipos de carregamentos e vinculações. O código é dividido em três módulos, sendo um módulo de entrada, um de processamento de dados e um módulo de saída.

O módulo de entrada realiza a leitura dos dados existentes em um arquivo (.txt) que contém uma sequência de dados que serão fornecidos pelo usuário. As informações necessárias e suas respectivas ordens são explicadas no manual do usuário do software.

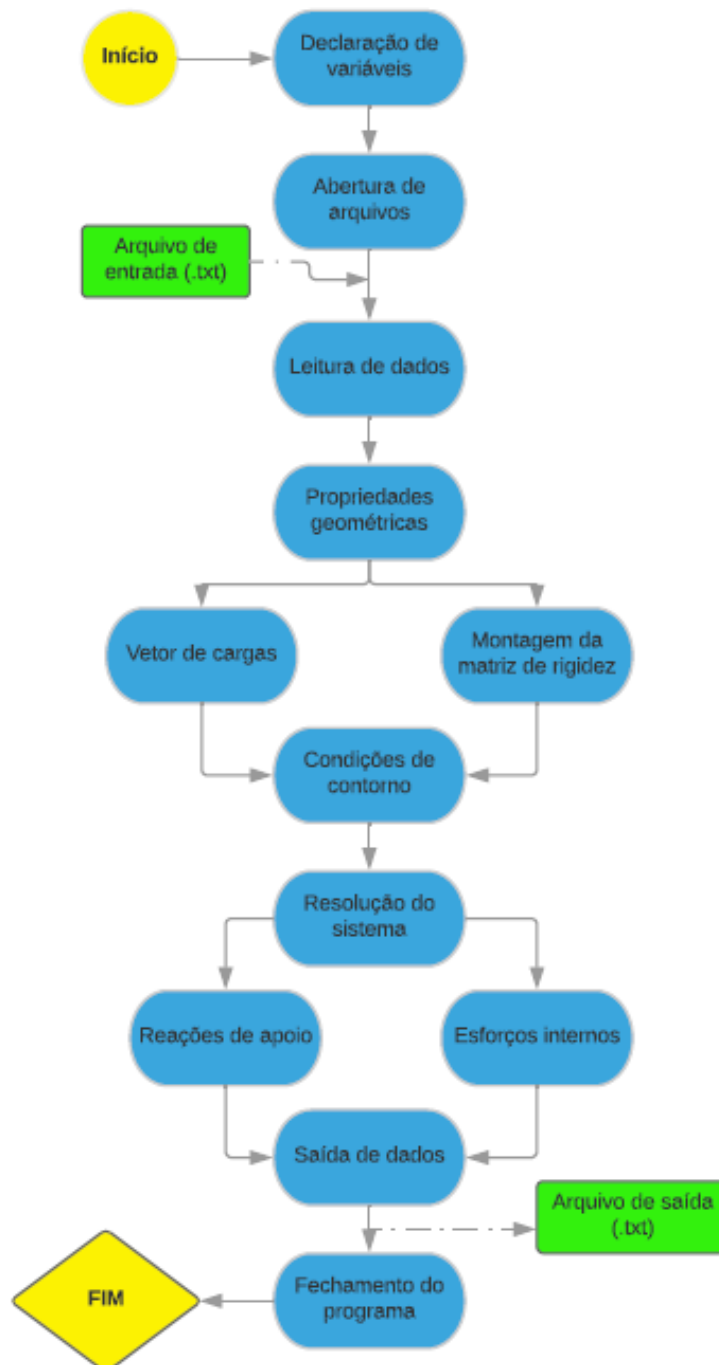
No módulo de processamento de dados os cálculos necessários para retornar os resultados esperados são realizados pelo programa. O programa cria os vetores de força nodais equivalentes e o vetor de cargas da estrutura, monta a matriz de rigidez do elemento e da estrutura e por fim resolve o sistema de equações algébricas. A partir dos deslocamentos obtidos, o software também calcula as reações de apoio e os valores de momento fletor e força cortante nos nós dos elementos.

O módulo de saída consiste basicamente na geração de um arquivo (.txt) que contém todos os resultados esperados.

### **5.1- Esquema Geral De Cálculo**

A Figura 8 mostra o fluxograma do programa desenvolvido. Através desse, pode-se visualizar mais facilmente os passos do código computacional para que os resultados esperados sejam alcançados.

Figura 8 - Fluxograma do programa desenvolvido.



Fonte: autoria própria (2018).

## 5.2- Sub-Rotinas

O módulo de processamento de dados é dividido em diversas sub-rotinas. Estas são responsáveis por resolver partes do problema proposto e uma depende da outra para que o



resultado final seja obtido. Na sequência, é descrito a função de cada sub-rotina presente no fluxograma ilustrado.

#### 5.2.1- Declaração de variáveis

As variáveis que serão utilizadas pelo software devem ser declaradas nesse módulo previamente.

#### 5.2.2- Abertura de arquivos

Esta sub-rotina é necessária para a abertura dos arquivos de entrada e saída de dados. O arquivo de entrada de dados, obrigatoriamente, deve ser um arquivo pré-existente, preparado pelo usuário seguindo o manual do usuário. O arquivo de saída será elaborado pelo próprio software.

#### 5.2.3- Leitura de dados

Nesta sub-rotina, os dados do arquivo de entrada serão interpretados pelo código e agregados ao programa.

#### 5.2.4- Propriedades geométricas

A sub-rotina propriedades geométricas calcula o comprimento de cada elemento, utilizando a subtração das coordenadas do nó final pelo nó inicial que delimitam o elemento.

#### 5.2.5- Matriz de rigidez

Nesta sub-rotina a matriz de rigidez global é montada a partir do cálculo das matrizes de rigidez dos elementos. A matriz de rigidez de cada elemento é alocada na matriz de rigidez global a partir da sua incidência.

### 5.2.6- Vetor de cargas

A sub-rotina vetor dos esforços é responsável por elaborar um vetor de cargas externos (equação (38)), somando os carregamentos concentrados com os distribuídos, conforme a equação (35), de cada elemento, alternando as forças e os momentos nodais.

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} F_1 + f_1 \\ M_1 + m_1 \\ F_2 + f_2 \\ M_2 + m_2 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

### 5.2.7- Condições de contorno

As condições de contorno do problema são introduzidas por esta sub-rotina tendo como intuito de tornar a matriz de rigidez da estrutura  $k$  inversível, para posterior resolução do sistema linear de equações. Insere-se as condições de contorno de acordo com os graus de liberdade impedidos em cada nó da estrutura. Assim, atribui-se o valor unitário na diagonal principal da linha correspondente ao grau de liberdade restrito, e as outras posições da linha e coluna concorrentes a esta posição são anuladas. Esse último processo também é repetido no vetor de cargas onde deverá ser anulada a posição referente ao grau de liberdade restrito.

### 5.2.8- Resolução de sistema

Nesta sub-rotina o sistema linear de equações algébricas é resolvido. O método utilizado para a resolução do sistema de equações é a eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

### 5.2.9- Reações de apoio

A partir dos resultados obtidos pela sub-rotina “resolução de sistemas”, o programa terá os dados dos deslocamentos e rotações nodais. Dessa maneira, essa sub-rotina tem a função de fazer a multiplicação entre o vetor de deslocamento e rotações nodais com a matriz de rigidez global da estrutura sem o emprego das condições de contorno. Após esse passo um vetor contendo todas as forças nodais da estrutura é obtido. Subtraindo-se o vetor de forças global, obtêm-se as reações de apoio.

$$\{R\} = [K_G] \cdot \{v\} - [F] \quad (39)$$

Onde  $R$  é a reação de apoio,  $K_G$  é a matriz de rigidez global,  $v$  é o deslocamento e  $F$  é o vetor de forças global.

### 5.2.10- Esforços internos

A função dessa sub-rotina é encontrar os esforços internos presentes na estrutura que está sendo analisada. Os esforços internos, assim como as reações de apoio, são determinados através do vetor de deslocamentos e rotações nodais já obtidos anteriormente.

Através do produto da matriz de rigidez de cada elemento pelo vetor que representa os seus deslocamentos nodais, obtêm-se os esforços internos para cada elemento. Salienta-se que se faz também necessário a subtração do vetor de forças nodais equivalentes.

$$\{F_e\} = [K_e] \cdot \{v_e\} - \{f_e\} \quad (40)$$

Onde  $F_e$  é o esforço interno,  $K_e$  é a matriz de rigidez do elemento,  $v_e$  vetor dos deslocamentos nodais e  $f_e$  é o vetor de forças nodais equivalentes.

### 5.2.11- Saída de dados

Após realizar todas as análises, a sub-rotina saída de dados gera um arquivo (.txt) compilando todos os resultados do processamento, como deslocamentos e rotações nodais, esforços internos de força cortante e momento fletor e as reações de apoio.

### 5.2.12- Fechamento de arquivos

Esta sub-rotina final é responsável por encerrar o programa e fechar o arquivo de texto previamente aberto.

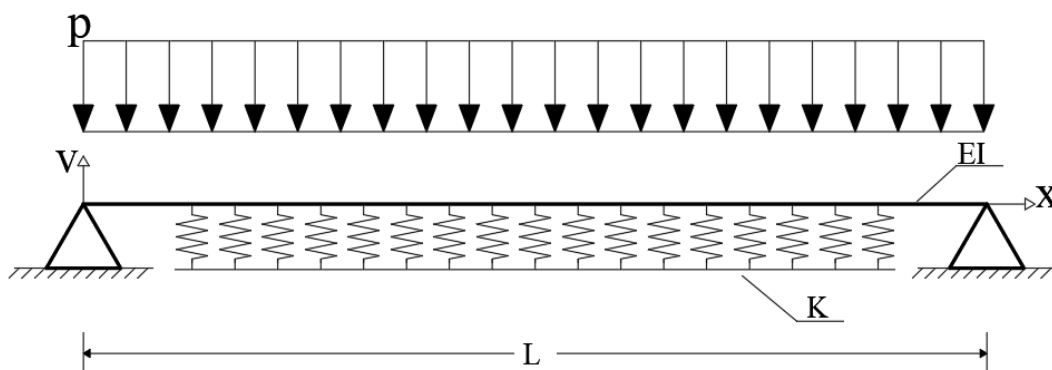
## 6- VALIDAÇÃO DO SOFTWARE

Com o programa implementado, simulou-se diversos exemplos de vigas estruturais com intuito de validar os resultados fornecidos pelo software. Além da validação do programa, analisou-se também o comportamento mecânico de tais elementos. Os resultados gerados foram comparados com resultados fornecidos por outros pesquisadores e/ou obtidos em softwares que estão em destaque no mercado há algum tempo-

### 6.1- Exemplo 1

Uma abordagem de viga sobre apoio elástico contínuo é feita por Castro (2001). No exemplo, o autor fornece a solução analítica para os esforços atuantes em uma viga bi-apoiada com carregamento uniformemente distribuído conforme ilustra a Figura 9.

Figura 9 - Viga sobre apoio elástico contínuo simplesmente apoiada.

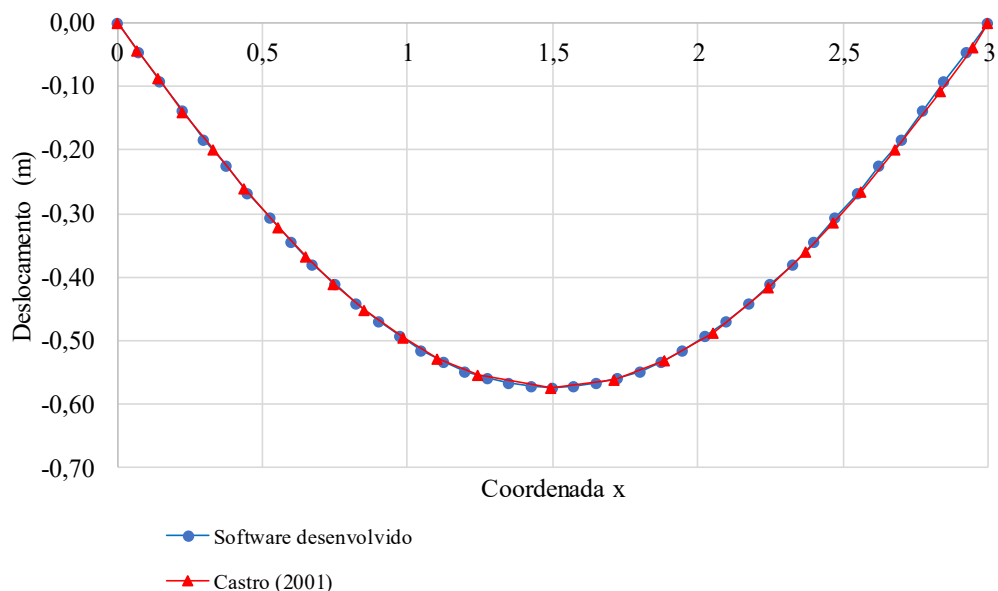


Fonte: adaptado de Castro (2001).

Para a viga é admitido o carregamento distribuído como  $p = 1,00 \text{ kN} / \text{m}$ ,  $L = 3,00 \text{ m}$  e  $EI = 1,00 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ . A constante  $K$  é analisada assumindo valores distintos, sendo eles 1, 5, 20, 40, 100 e  $200 \text{ kN} / \text{m}^2$ . Dessa maneira, os comportamentos dos esforços internos da viga podem ser comparados para diferentes valores da constante do apoio elástico.

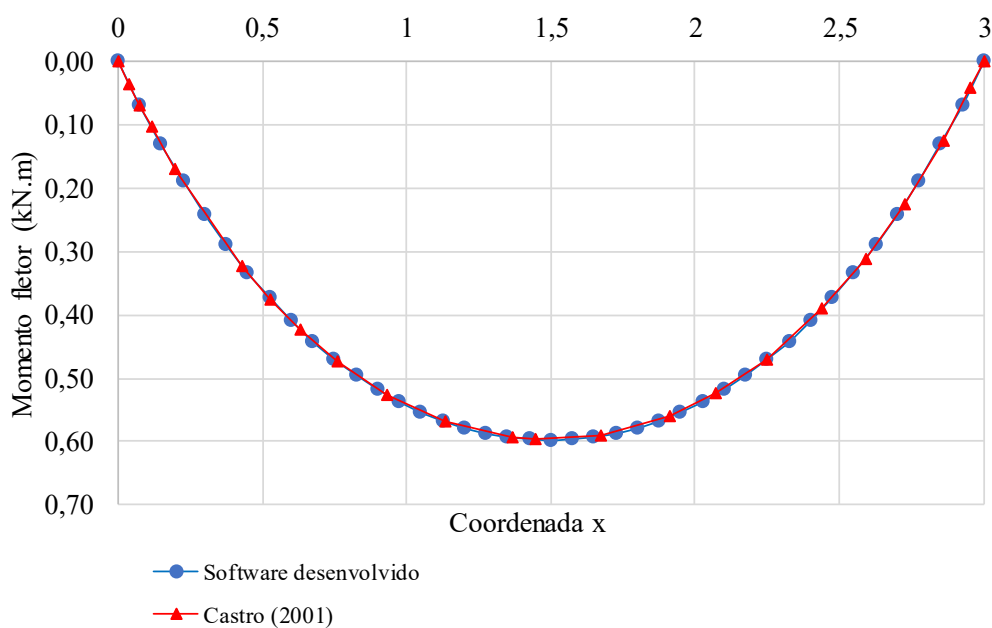
Os Gráficos 1 e 2 ilustram, respectivamente, o deslocamento vertical e o momento fletor atuante na viga com  $K = 1 \text{ kN/m}^2$ . Já os gráficos 3 e 4 ilustram as mesmas grandezas, mas com a constante  $K = 200 \text{ kN/m}^2$ .

**Gráfico 1 - Campo de deslocamentos (K=1).**



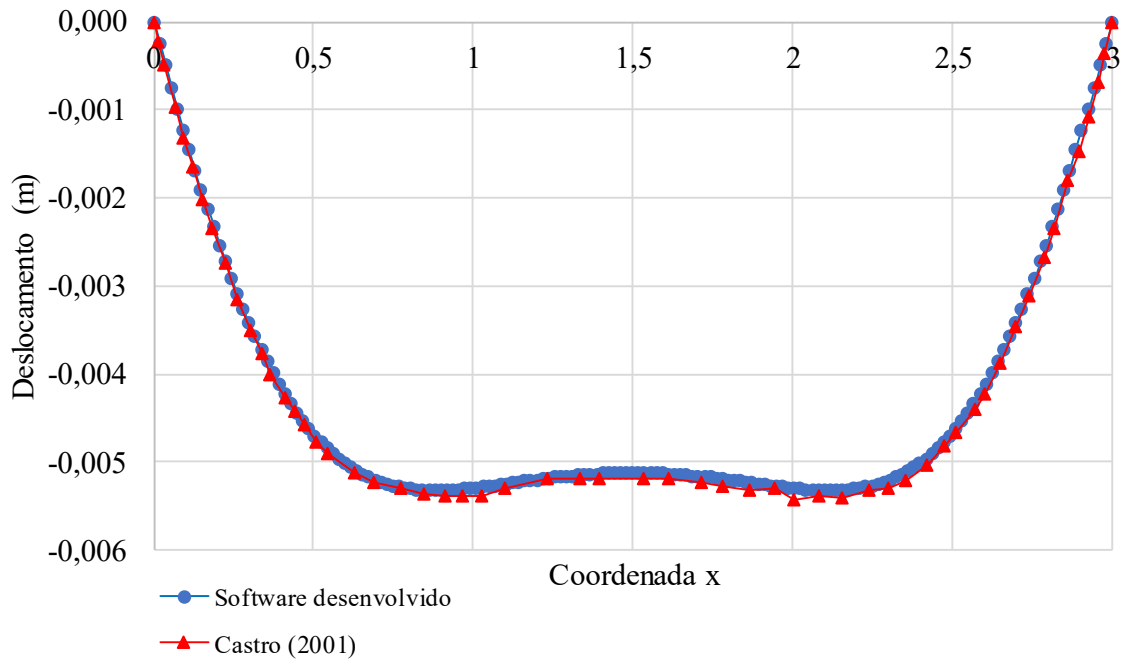
**Fonte: Autoria própria (2018).**

**Gráfico 2 - Diagrama de momentos fletores (K=1).**



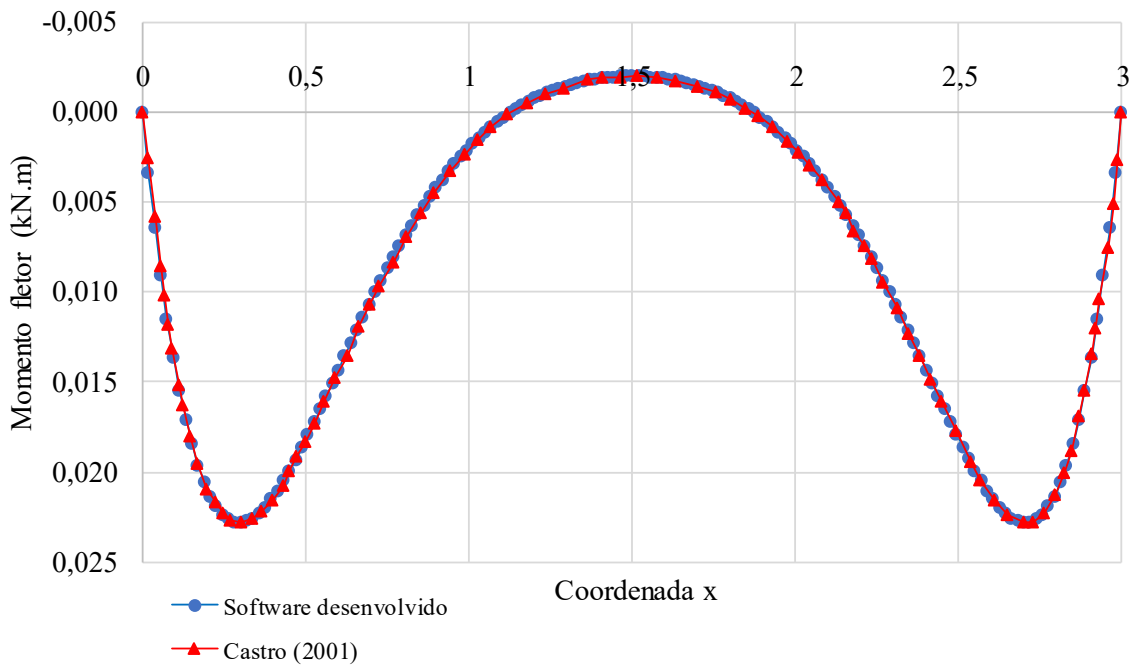
**Fonte: Autoria própria (2018).**

**Gráfico 3 - Campo de deslocamentos (K=200).**



**Fonte: autoria própria (2018).**

**Gráfico 4 - Diagrama de momentos fletores (K=200).**



**Fonte: autoria própria (2018).**

A princípio, com constantes elásticas pequenas, como  $K=1,00 \text{ kN/m}^2$ , os diagramas são semelhantes aos de uma viga sem apoios elásticos. Porém, conforme os valores de  $K$  aumentam, os diagramas passam a apresentar uma forma completamente diferente, com esforços internos muito inferiores aos esforços da viga sem apoio elástico.

O Gráfico 2 contém o diagrama de momento fletor para  $K=1 \text{ kN/m}^2$  com momento fletor máximo próximo a  $0,60 \text{ kN}\cdot\text{m}$ . Já o momento fletor máximo ilustrado no Gráfico 4, que representa o modelo para rigidez do apoio elástico  $K=200 \text{ kN/m}^2$ , encontra-se entre  $0,020 \text{ kN}\cdot\text{m}$  e  $0,025 \text{ kN}\cdot\text{m}$ , ou seja, cerca de 4% do resultado observado quando  $K=1 \text{ kN/m}^2$ . Assim, fica evidente que a contribuição do solo no dimensionamento de uma viga baldrame, por exemplo, pode significar economia de material e, conseqüentemente, dinheiro. Todavia, é interessante observar que aspectos construtivos podem alterar a rigidez do solo.

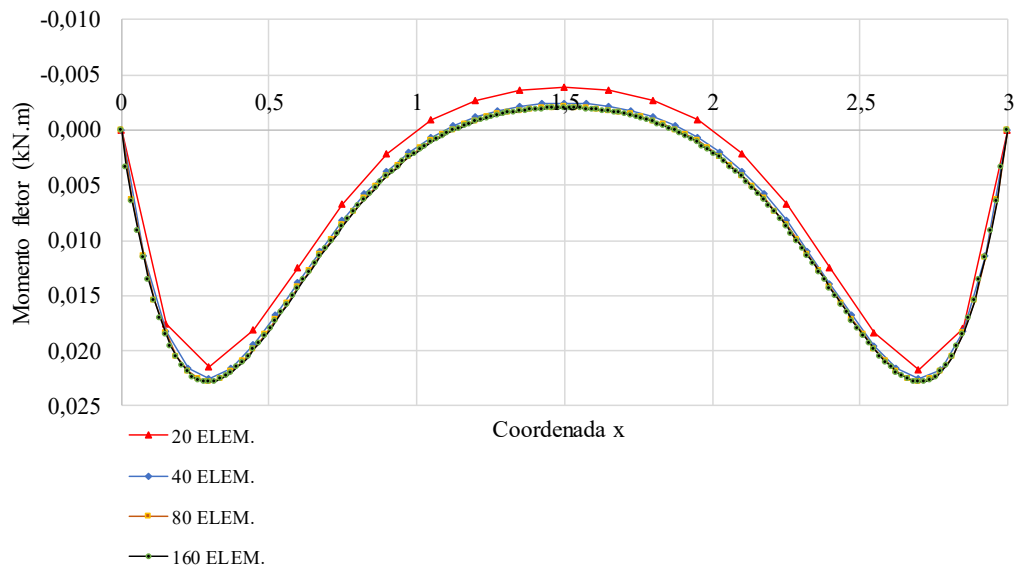
Analisando-se ainda o Gráfico 4, é interessante notar que, para o caso de constantes elásticas elevadas, o momento fletor pode acabar invertendo o sentido, semelhante à situações onde houvesse um apoio no meio do vão.

Em termos de linha elástica, os Gráficos 1 e 3 mostram o efeito do apoio elástico para o deslocamento vertical da viga. Para esse caso, o resultado também é muito diferente. O deslocamento máximo para  $K=200 \text{ kN/m}^2$  é cerca de 1% do deslocamento máximo quando  $K=1,00 \text{ kN/m}^2$ .

Foi notado também que coeficientes mais altos de constantes elásticas requerem um maior refinamento de malha a fim de se obter resultados aceitáveis. Tal comportamento é ilustrado no Gráfico 5.



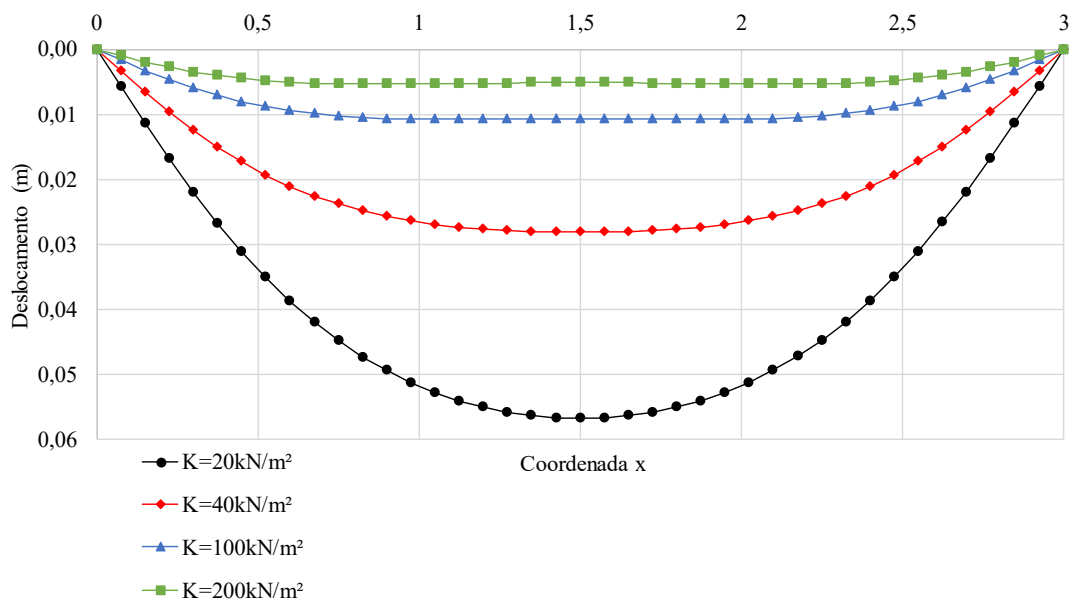
**Gráfico 5 - Comparativo de resultado por número de elementos ( $K=200 \text{ kN/m}^2$ )**



**Fonte: autoria própria (2018).**

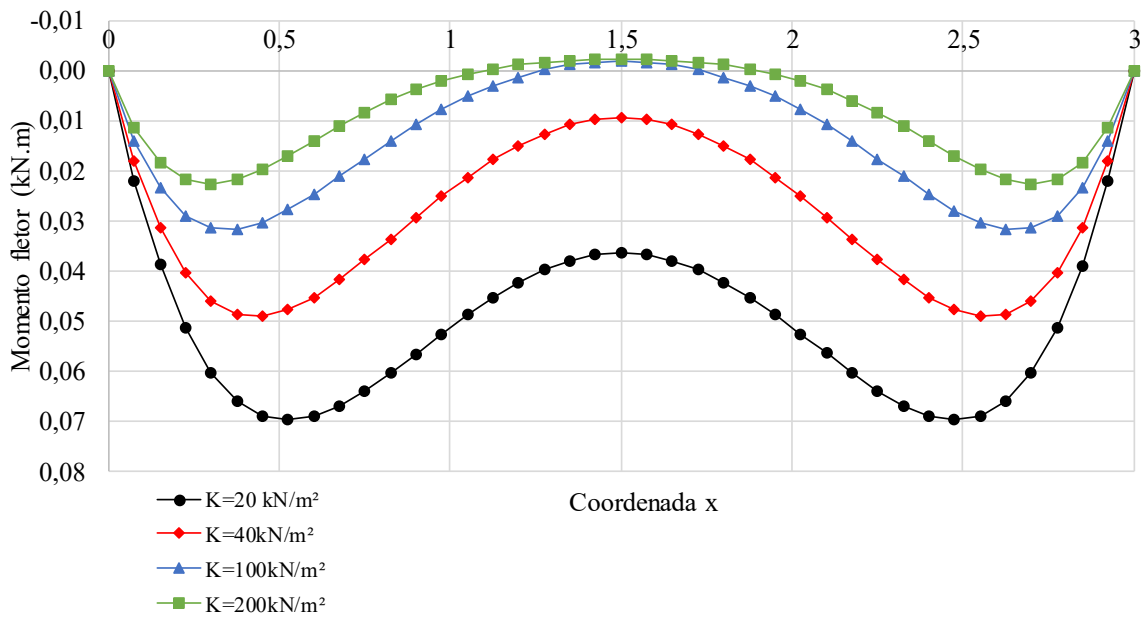
Para finalizar nos Gráficos 6 e 7 são apresentados, respectivamente, os resultados de deslocamento vertical e momento fletor para diversas constantes elásticas. Ressalta-se que, apesar de não estar explícito, todas as análises foram realizadas com um refinamento de malha suficiente para o fornecimento de soluções precisas.

**Gráfico 6 - Deslocamento para valores diferentes de K.**



**Fonte: autoria própria (2018).**

**Gráfico 7 - Momento fletor para diferentes valores de K.**



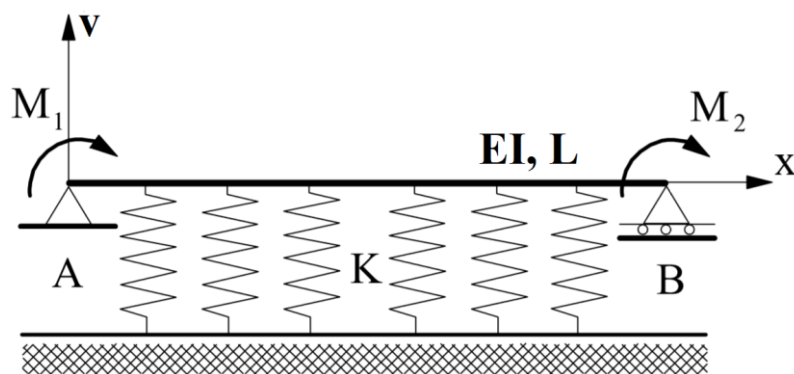
**Fonte: autoria própria (2018).**

## 6.2- Exemplo 2

Pereira (2003) introduz a teoria da viga de Timoshenko para analisar vigas sobre apoios elásticos. Um código computacional foi elaborado, utilizando o Método dos Elementos Finitos, para determinar resultados de esforços internos da viga. A fim de validar o software, o autor comparou os seus resultados com a solução analítica do problema.

Os resultados fornecidos por Pereira (2003) para a solução analítica serão utilizados para a validação do software implementado neste trabalho.

Figura 10 - Viga simplesmente apoiada sobre apoio elástico contínuo.



Fonte: adaptado de Pereira (2003).

Para este exemplo, será analisada a viga representada na Figura 9. Para esse caso, o efeito do esforço cortante será desprezível nos resultados dos esforços internos. Os dados a serem considerados para a análise desse elemento são:  $L = 5,00 \text{ m}$ ,  $EI = 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ , e  $M_1 = M_2 = -10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ . Neste exemplo também serão analisados diferentes valores para a constante  $K$ , variando entre 0, 10, 100, 1.000, 10.000 e 100.000  $\text{kN/m}^2$ .

Os resultados serão analisados em pontos específicos da viga. A deflexão da viga e o momento fletor são avaliados na posição  $L/4$  e a rotação  $\theta$  é medido na extremidade A ou B da viga.

Pereira (2003) optou por fazer a análise pelo Método de Rayleigh-Ritz e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Os resultados obtidos pelo software desenvolvido neste trabalho sem a presença de apoios elásticos contínuos serão comparados com solução analítica de Beer e Johnston (1995) apresentada por Pereira (2003).

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos para deslocamento, rotações de seção transversal e momento fletor quando  $K=0 \text{ kN/m}^2$ . São também apresentados os resultados analíticos fornecidos por Beer e Johnston (1995).

**Tabela 2 - Resultados para  $K=0 \text{ kN/m}^2$ .**

N ELEM.	Desl. v (m)	Erro (%)	$\theta$ (rad)	Erro (%)	M (kN.m)	Erro (%)
2	-0,0390625	0,00	-0,083333	0,00	50,00	0,00
Sol. Analítica (BEER; JOHNSTON, 1995): $w = -0,039063 \text{ m}$ ; $\theta_A = \theta_B = -0,083333 \text{ rad}$ ; $M = 50 \text{ kN.m}$						

**Fonte: autoria própria (2018).**

Comparando os resultados obtidos com a solução analítica verifica-se novamente a correta implementação do código computacional elaborado. É importante ressaltar que a formulação apresentada neste trabalho é capaz de, para este problema, fornecer a solução exata com a utilização de apenas um elemento finito. No entanto, a malha utilizada foi de dois elementos, pois o código implementando fornece somente resultados nodais e, assim, não é capaz de fornecer os resultados em pontos localizados ao longo do comprimento do elemento. Assim, justifica-se a necessidade de se inserir um nó na coordenada  $x = L/4$  e a malha composta por dois elementos.

Em se tratando ainda de refinamento de malha, apesar de não ser apresentado neste trabalho, destaca-se que Pereira (2003) necessitou de uma malha composta por 244 elementos finitos para obter a convergência da solução. Vale lembrar que o autor utilizou a teoria de vigas de Timoshenko em sua formulação do MEF.

Pereira (2003) apresentou ainda, para os diferentes valores de rigidez  $K$ , os resultados analíticos de deslocamento e momento fletor em  $x = L/4$  e a rotação da extremidade do elemento sobre os apoios A e B. Os resultados fornecidos pelo software desenvolvido neste trabalho estão expostos nas Tabelas 3, 4 e 5.

**Tabela 3 - Deslocamento vertical para diversos valores de K.**

K (kN/m <sup>2</sup> )	N ELEM.	Desl. v (m) (Software desenvolvido)	Desl. v (m) (Sol. Analítica. Pereira, 2003)	Erro (%)
10	20	-0,0389	-0,0389	0,00
100	20	-0,0375	-0,0375	0,00
1.000	20	-0,0275	-0,0275	0,00
10.000	20	-0,0069	-0,0069	0,00
100.000	20	-0,0002	-0,0002	0,00

Fonte: autoria própria (2018).

**Tabela 4 – Rotação da extremidade do elemento para diversos valores de K.**

K (kN/m <sup>2</sup> )	N ELEM.	$\theta$ (rad) (Software desenvolvido)	$\theta$ (rad) (Sol. Analítica. Pereira, 2003)	Erro (%)
10	20	-0,0832	-0,0831	0,00
100	20	-0,0813	-0,0813	0,00
1.000	20	-0,0685	-0,0685	0,00
10.000	20	-0,0399	-0,0399	0,00
100.000	20	-0,0224	-0,0224	0,00

Fonte: autoria própria (2018).

**Tabela 5 - Momento fletor para diversos valores de K.**

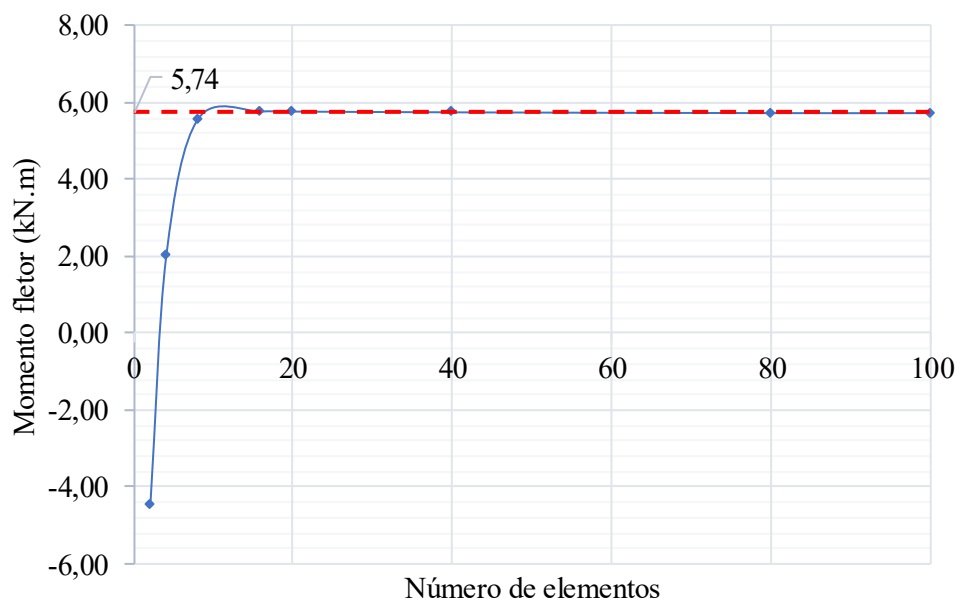
K (kN/m <sup>2</sup> )	N ELEM.	M (kN.m) (Software desenvolvido)	M (kN.m) (Sol. Analítica. Pereira, 2003)	Erro (%)
10	20	49,75	49,75	0,00
100	20	47,54	47,56	0,04
1.000	20	31,74	31,88	0,44
10.000	40	-0,12	-0,20	40,00
100.000	20	-5,78	-5,74	0,70

Fonte: autoria própria (2018).

Para os resultados apresentados, obteve-se um erro percentual baixo, inferiores a 1%. Destaca-se que, a convergência das soluções foi obtida com discretizações com cerca de 20 elementos. O Gráfico 8 mostra a convergência de momento fletor, para  $K=100.000 \text{ kN/m}^2$  em função da quantidade de elementos utilizado.

Ainda comparando os resultados, nota-se que, para momento fletor, o erro percentual quando  $K=10.000 \text{ kN/m}^2$  é muito alto. Isso se explica pelo fato do valor do momento fletor ser muito próximo de zero. Nesse caso, o aumento do número de elementos na malha não teve influência efetiva.

**Gráfico 8 - Convergência de momento fletor de acordo com o número de elementos quando  $K=100.000 \text{ KN/m}^2$**



**Fonte: autoria própria (2018).**

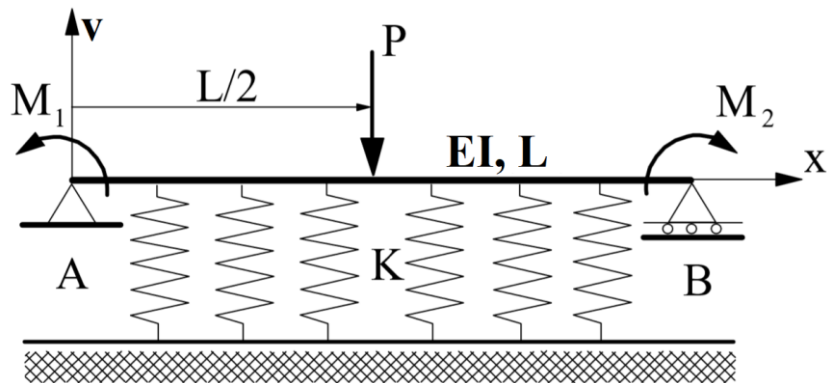
Novamente percebe-se a influência do fator  $K$  nos valores de deslocamento e forças internas. A medida que a base elástica se torna mais rígida, menores são os valores das grandezas mencionadas.

Tomando mais uma vez as vigas baldrame como objeto de discussão, a influência do fator  $K$  ilustra a importância do solo e de seu grau de compactação no dimensionamento de tais elementos. Como já comentado, a atenuação das forças internas pode implicar em economia no custo total da obra e a atenuação nos deslocamentos pode evitar patologias comuns na engenharia civil, como trincos em alvenarias.

### 6.3- Exemplo 3

Pereira (2003) também analisa uma viga simplesmente apoiada solicitada por momentos nas extremidades e força concentrada no meio do vão, conforme ilustra a figura 10.

Figura 11 - Viga simplesmente apoiada com apoio elástico contínuo.



Fonte: adaptado de Pereira (2003).

Os dados a serem considerados para esse exemplo são:  $L = 10,00 \text{ m}$ ,  $EI = 10^3 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ ,  $M_1 = -M_2 = 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}$  e  $p = -150,00 \text{ kN}$ .

Para este caso, a primeira análise também foi feita desprezando a contribuição do apoio elástico, ou seja,  $K=0 \text{ kN/m}^2$ . Dessa vez o deslocamento  $v$  e o momento fletor são analisados em  $x=L/2$  e a rotação da extremidade do elemento sobre os apoios. Os resultados obtidos são comparados com a solução analítica apresentada por Beer e Johnston (1995), para a constante de rigidez do apoio elástico nula, e Timoshenko e Gere (1984).

Os resultados obtidos pelo programa desenvolvido nesse trabalho estão apresentados na Tabela 6. Nota-se que, mesmo com poucos elementos, se tratando do  $K=0 \text{ kN/m}^2$  o erro obtido chega a zero.

**Tabela 6 - Análise de convergência MEF (K=0 kN/m<sup>2</sup>).**

N ELEM.	Desl. v (m)	Erro (%)	$\theta$ (rad)	Erro (%)	M (kN.m)	Erro (%)
2	-1,875	0,00	-0,437500	0,00	275,00	0,00

Sol. Analítica (BEER; JOHNSTON, 1995); (TIMOSHENKO; GERE, 1984):  $v = -1,8750$  m;  $\theta_B = -\theta_A = -0,43750$  rad;  $M = 275$  kN.m

**Fonte: autoria própria (2018).**

Ao abordar o apoio elástico e considerando sua influência, Pereira (2003) fornece os resultados analíticos para o problema em questão, conforme apresentado na Tabela 7.

**Tabela 7 - Solução analítica para vários valores de K.**

K (kN/m <sup>2</sup> )	Desl. v (m)	$\theta$ (rad)	M (kN.m)
10	-0,967322	-0,153711	184,58
100	-0,234544	0,065563	105,59
1.000	-0,055138	0,072385	58,51
10.000	-0,00943	0,039763	29,45
100.000	-0,001677	0,022361	16,77

**Fonte: adaptado de Pereira (2003).**

As Tabelas 8, 9, e 10 apresentam os resultados obtidos através do código computacional desenvolvido neste trabalho. Nota-se que, fazendo o refinamento com o número de elementos necessários, quando comparado a solução analítica apresentada por Pereira (2003), o percentual de erro tende a ser baixo.

**Tabela 8 - Deslocamento vertical para diversos valores de K.**

K (kN/m <sup>2</sup> )	N ELEM.	Desl. V (m) (Software desenvolvido)	Desl. v (m) (Sol. Analítica. Pereira, 2003)	Erro (%)
10	20	-0,9673	-0,9673	0,00
100	20	-0,2346	-0,2345	0,00
1.000	40	-0,0551	-0,0551	0,00
10.000	40	-0,0094	-0,0094	0,00
100.000	100	-0,0017	-0,0017	0,00

**Fonte: autoria própria (2018).**



**Tabela 9 – Rotação na extremidade do elemento para diversos valores de K.**

K (kN/m <sup>2</sup> )	N ELEM.	$\theta$ (rad) (Software desenvolvido)	$\theta$ (rad) (Sol. Analítica. Pereira, 2003)	Erro (%)
10	20	-0,1537	-0,1537	0,00
100	20	0,0655	0,0656	0,00
1.000	40	0,0724	0,0724	0,00
10.000	40	0,0398	0,0398	0,00
100.000	100	0,0224	0,0224	0,00

**Fonte: autoria própria (2018).**

**Tabela 10 - Momento fletor para diversos valores de K.**

K (kN/m <sup>2</sup> )	N ELEM.	M (kN.m) (Software desenvolvido)	M (kN.m) (Sol. Analítica. Pereira, 2003)	Erro (%)
10	20	184,37	184,58	0,114
100	20	105,09	105,59	0,474
1.000	40	58,12	58,51	0,667
10.000	40	28,96	29,45	1,664
100.000	100	16,63	16,77	0,834

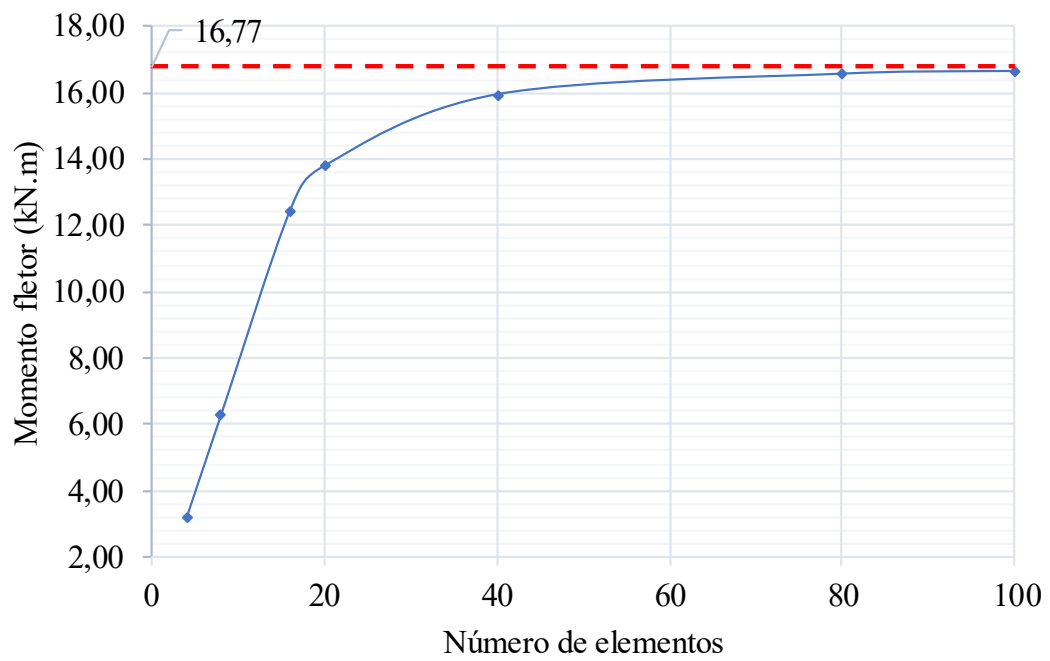
**Fonte: autoria própria (2018).**

Novamente, percebe-se que com a variação da constante do apoio elástico os esforços finais da viga também serão variados. Como exemplo, se for comparado o momento fletor em  $L/2$  para  $K = 0 \text{ kN/m}^2$  e  $K = 100.000 \text{ kN/m}^2$ , o momento fletor para a viga sobre o apoio mais rígido será cerca de 6,04% da viga sem apoio elástico.

Percebe-se que o deslocamento no eixo  $y$  começa a tender a zero tratando-se de constantes elásticas altas. Ao simular o sistema estrutural em análise com um apoio rígido, ou seja, uma constante elástica tendendo ao infinito, o deslocamento  $v$ , a rotação, a força cortante e o momento fletor são iguais a zero. O mesmo aconteceria, para o deslocamento  $v$  e a rotação, para uma viga com rigidez à flexão ( $EI$ ) também tendendo ao infinito. Porém, para esse caso, os esforços de momento fletor e força cortante teriam comportamento similar ao caso da constante elástica nula.

O Gráfico 9 mostra a convergência do momento fletor para a rigidez do apoio elástico de  $100.000 \text{ kN/m}^2$ . Nota-se que a partir de 80 elementos os resultados passam a convergir para o esperado.

**Gráfico 9 - Convergência do MEF de acordo com o número de elementos.**

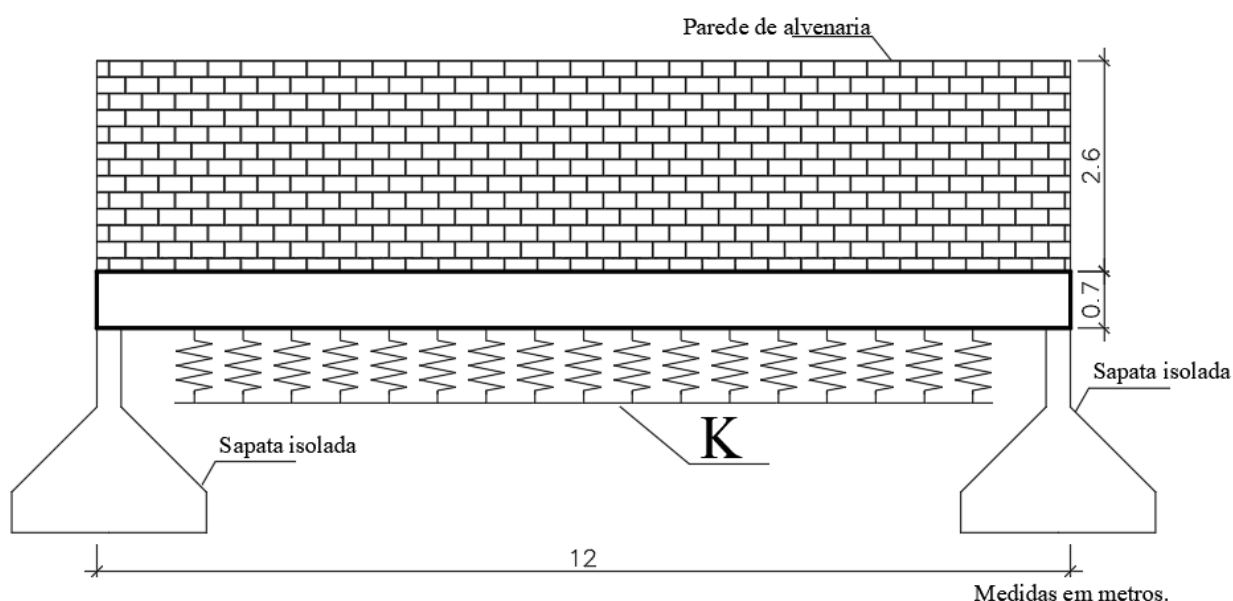


**Fonte: autoria própria (2018).**

#### 6.4- Exemplo 4

Nesse estudo de caso, proposto por Guedes (2014), será abordada a análise de uma viga de fundação em concreto armado, apoiada em duas sapatas isoladas, com comprimento de 12 metros e recebendo carregamento de alvenaria de 2,60 metros de altura (Figura 12). A viga possui dimensões de 20 cm (largura) por 70 cm (altura) e estará também apoiada em uma camada de solo composto por silte e argila compactada.

Figura 12 - Esquema viga com alvenaria.

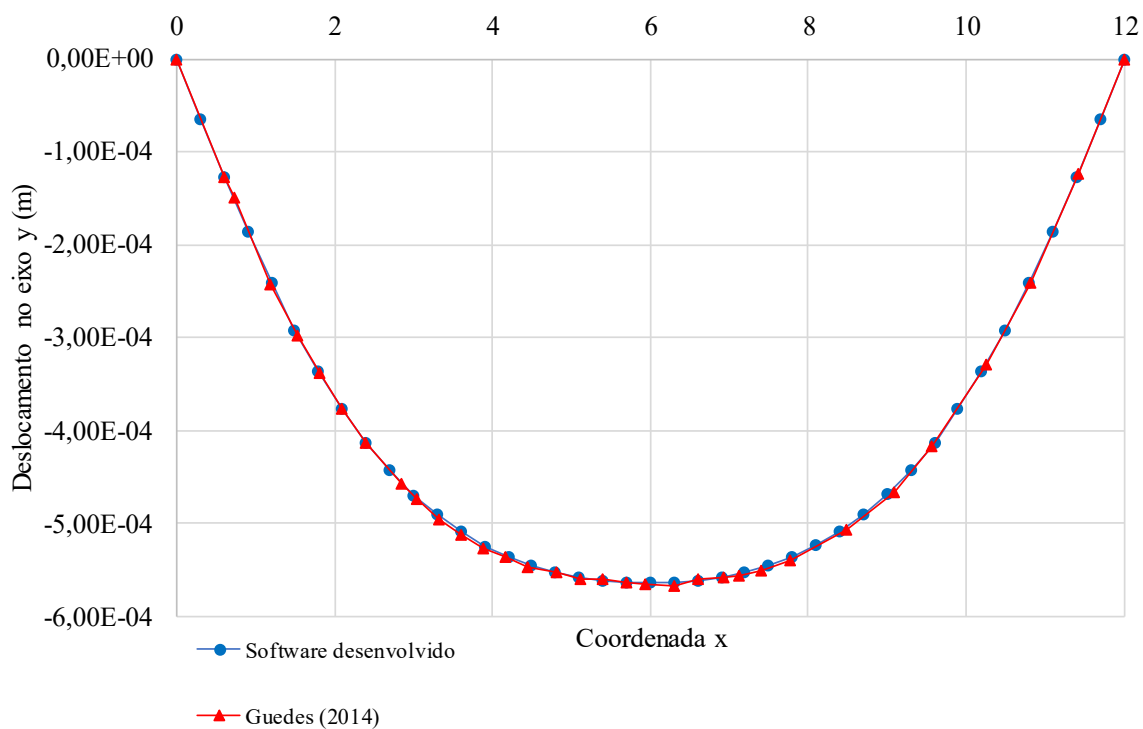


Fonte: autoria própria (2018).

A viga possui rigidez à flexão  $EI = 150.000 \text{ kN.m}^2$  e carregamento de peso próprio e sobrecarga devido à alvenaria  $q = 10 \text{ kN/m}$ . O autor estabeleceu o coeficiente de reação do solo  $K_v = 100.000 \text{ kN/m}^3$ . Assim, a constante de rigidez do apoio elástico é de:  $K = 100.000 \cdot A_{\text{inf}}$  onde  $A_{\text{inf}}$  é a área de influência a ser considerada, que no caso é de 0,20m (base da viga) vezes o comprimento de influência ao longo do eixo da viga. Para o caso da solução analítica, o valor de  $K$  é de  $100.000 \text{ kN/m}^3 \times 0,20 \text{ m} = 20.000 \text{ kN/m}^2$  (apoio elástico contínuo).

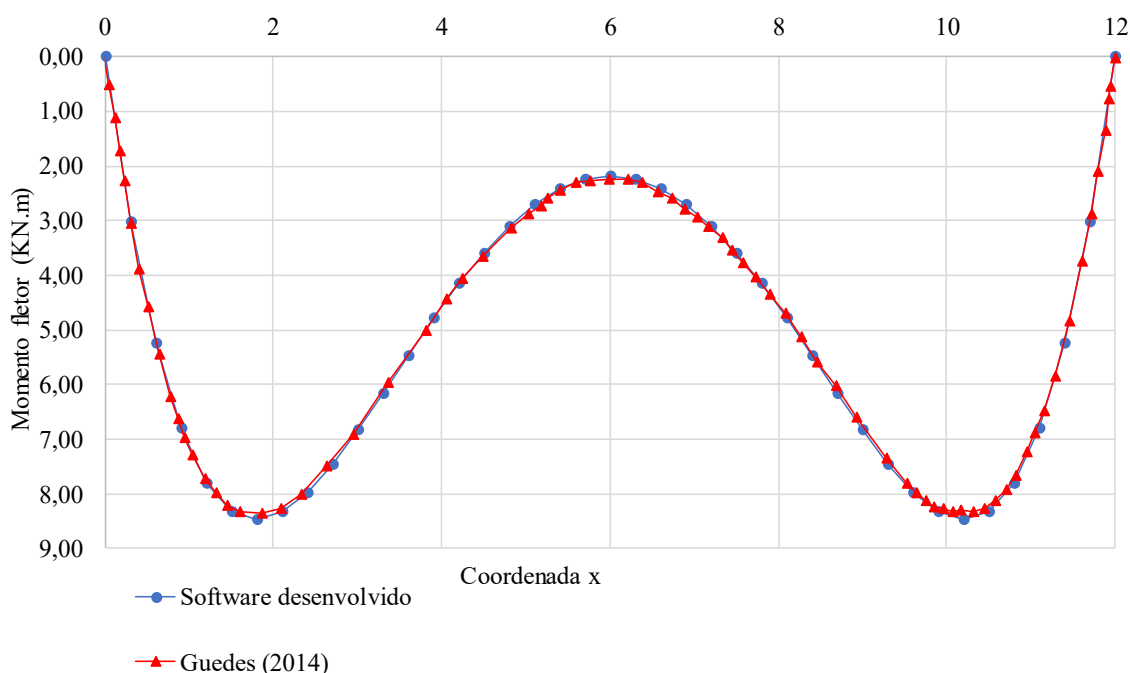
Os resultados obtidos pelo autor através da solução analítica estão comparados com os fornecidos pelo software desenvolvido nesse trabalho, que utilizou 40 elementos para fazer a discretização, nos Gráficos 10 e 11.

**Gráfico 10 - Deslocamento ao longo da viga.**



**Fonte: autoria própria (2018).**

**Gráfico 11 - Comparativo do gráfico de momento fletor.**



**Fonte: autoria própria (2018).**

A Tabela 11 faz um comparativo dos resultados encontrados pelo autor através de três métodos distintos com o software desenvolvido neste trabalho. Guedes (2014) apresentou, além da solução analítica, soluções obtidas através dos programas Ftool e SAP com malhas iguais a 20 e 100 elementos respectivamente.

**Tabela 11 - Resumo dos resultados obtidos.**

Resultado	Exata - analítica	GUEDES, 2014		Software desenvolvido	Erro percentual (%)
		Ftool - 20 ELEM.	SAP - 100 ELEM.		
Deslocamento máximo (meio do vão) (mm)	0,5646	0,5649	0,5630	0,5646	0,004
Máximo momento fletor (kN.m)	8,530	8,629	8,473	8,338	2,303
Reação nos apoios rígidos (kN)	11,520	11,700	11,470	11,520	0,000

**Fonte: autoria própria (2018).**

Para melhor demonstrar o efeito do apoio elástico, os resultados para diversos tipos de solo e suas respectivas constantes elásticas estão expostos na Tabela 12. A tabela ainda compara os resultados da solução analítica realizada por Guedes com os resultados do software desenvolvido.

**Tabela 12 - Resumo de resultados para diversas constantes elásticas.**

Constante do solo (K) (NN/m <sup>3</sup> )	Rigidez do apoio elástico (kN/m <sup>2</sup> )	Momento fletor máximo (kN.m)		Deslocamento transversal máximo (mm)		Reação no apoio rígido (KN)	
		Exata- analítica	Software desenvolvido	Exata- analítica	Software desenvolvido	Exata- analítica	Software desenvolvido
100000	20000	8,53	8,34	0,563	0,565	11,47	11,52
50000	10000	12,30	12,00	1,130	1,130	13,70	13,70
25000	5000	19,60	19,24	2,163	2,168	17,00	16,92
12500	2500	35,70	35,06	3,894	3,907	21,90	21,82
6250	1250	61,80	61,10	6,420	6,440	28,90	28,78
3150	630	92,90	92,20	9,410	9,470	37,10	36,98
0	0	180,00	180,00	17,800	18,000	60,00	60,00

**Fonte: autoria própria (2018).**

Através da Tabela 12, percebe-se o comportamento dos esforços internos de acordo com a constante de deformação do apoio elástico. Quanto menor for a constante, maiores os esforços internos e, portanto, para o caso analisado, os dimensionamentos estruturais da viga em questão exigirão uso maior de materiais.

Uma viga baldrame possui concepção estrutural semelhante a cinta de concreto analisada neste exemplo. Comparando o momento fletor máximo para os casos de  $K = 0 \text{ kN/m}^2$  e  $K = 20.000 \text{ kN/m}^2$ , nota-se que o momento fletor para a rigidez maior corresponde a cerca de 4,64% do valor da rigidez nula.

O aço possui uma parcela significativa nos custos de estruturas em concreto armado. Segundo Pinheiro et al. (2010), de forma simplificada, o dimensionamento de uma viga de concreto armado possui a área de armadura longitudinal da seção transversal diretamente proporcional ao momento fletor solicitante, como mostra a equação (41).

$$A_s = \frac{k_s \cdot M_d}{d} \quad (41)$$

onde,  $A_s$  é a área de armadura da seção transversal,  $k_s$  é uma constante dependente da geometria da seção,  $M_d$  é o momento fletor solicitado e  $d$  é a altura útil da viga. Dessa maneira, considerando o solo como um apoio elástico contínuo, pode-se ter uma economia de até 95% em aço.

Dois pontos devem ser destacados em relação à economia de aço definida neste exemplo. Em um primeiro momento, deve-se considerar que as normas de concreto armado

vigentes estabelecem armaduras mínimas para os elementos estruturais. Tal fato não foi levado em consideração na discussão apresentada. Um segundo ponto diz respeito à constante elástica  $K$  estabelecida para o solo. É evidente que a constante é definida a partir de condições ótimas de compactação do solo, o que na prática, nem sempre é garantido.

## 7- CONCLUSÃO

O objetivo principal desse trabalho foi desenvolver um código computacional para análise elástica-linear de vigas de Euler-Bernoulli sobre apoios elásticos contínuos via Método dos Elementos Finitos.

O código computacional foi viabilizado através do desenvolvimento teórico do Método dos Elementos Finitos, que permitiu deduzir a matriz de rigidez e vetor de cargas do elemento de viga. Dessa maneira, confirma-se a possibilidade de utilização do método para realizar análises elástica-lineares de vigas, considerando-se ou não os apoios elásticos contínuos.

Nos exemplos simulados pôde-se notar que o software foi desenvolvido de maneira correta devido a convergência satisfatória dos resultados obtidos. A possibilidade de se utilizar de diversos tipos de carregamentos e vinculações, permite ao programa melhor aplicabilidade no dia a dia de análises estruturais.

Outro ponto interessante de se ressaltar é a influência dos apoios elásticos contínuos no comportamento das vigas. Considerar o coeficiente de elasticidade do apoio elástico interfere significativamente nos resultados de deslocamentos e esforços internos, em especial o deslocamento vertical e o momento fletor, com redução que varia em função da magnitude da constante elástica assumida.

Ainda em se tratando da consideração dos apoios elásticos em projetos, como os esforços internos da viga são reduzidos, o consumo de material para o correto dimensionamento pode ser reduzido também, gerando economia no custo final da obra.

Para estudos futuros, a sugestão é implementar computacionalmente a análise de vigas de Timoshenko sobre bases elásticas via Método dos Elementos Finitos.



## 8- REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. C.; DE LIMA JR, J. J. **COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UMA VIGA DE EULER-BERNOLLI COM APOIOS AMORTECIDOS E RIGIDEZ VARIÁVEL**, 2010. Nono Simpósio de Mecânica Computacional Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei – MG.

ALONSO, Urbano Rodriguez. **Dimensionamento de fundações profundas**. E. Blucher, 1989.

BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON, Elwood Russell. **Resistência dos materiais**. McGraw-Hill, 1982.

CASTRO, Luís M. S. dos Santos. **ANÁLISE DE VIGAS EM FUNDAÇÃO ELÁSTICA**. Instituto superior técnico. Lisboa, 2001.

CINDRA, José Lourenço. Um esboço da história do conceito de trabalho virtual e suas aplicações. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, p. 3601.01-3601.12, 2008.

COSTA, H. B.; ALMEIDA NETO, E.S. **Viga sobre base elástica – soluções analíticas**. Apostila PEF, USP, 2017.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **Um primeiro curso em elementos finitos**. Grupo Gen-LTC, 2000.

GUEDES, Filipe Rocha. **Vigas sobre base elástica**. Universidade Federal do Pernambuco. 2014.

HIBBELER, Russell Charles. **ESTÁTICA: Mecânica para engenharia**. Pearson, 2010.

LOGAN, Daryl L. **A first course in the finite element method**. Cengage Learning, 2011.

MARTHA, Luiz Fernando. **NOTAS DE AULA DO CURSO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**, 1994. Rio de Janeiro.

MASCIA, Nilson Tadeu. **Flambagem de barras**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

MENIN, Renato César Gavazza; TAYLOR, W. M. S. Resposta pós-crítica de pórticos planos discretizados com elementos de viga de Euler-Bernoulli utilizando uma formulação co-rotacional. In: **XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering/Cilamce**. 2003.

MIGOTTO, Dionéia. **Autofunções e Frequências de Vibração do Modelo Euler-Bernoulli para Vigas Não-Clássicas**. 2011. Tese de Doutorado. Dissertação de mestrado em matemática, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria.

MORAES, M. C. **Estruturas de fundações**. São Paulo: MCGRAW-HILL, 1976.

PEREIRA, Wellington Luís Assis. **Formulações Numéricas para Análise de Vigas em Contato com Bases Elásticas**. Ouro Preto, São Paulo. Universidade Federal de Ouro Preto. 2003.

PINHEIRO, L. M. et al. **Fundamentos do concreto e projeto de edifícios**. Dep. De Estruturas, USP-EESC. São Carlos-SP. 2010.

RODRIGUES, André Filipe da Silva. **Vibrações transversais em vigas finitas sujeitas a cargas móveis: Radiação de transição associada à mudança brusca da rigidez vertical de fundação.** Monte da Caparica: Universidade Nova de Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2009.

SPADA, Jorge Luís Goudene. **Uma abordagem de mecânica dos pavimentos aplicada ao entendimento do mecanismo de comportamento tensão-deformação da via férrea.** 2003. Tese de Doutorado. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.

UGURAL, Ansel C. **Mecânica dos Materiais.** Rio de Janeiro, editora LTC, 2009.

APÊNDICE A – CÓDIGO FONTE DO PROGRAMA COMPUTACIONAL  
APRESENTADO

```

Module Declaracao_Variaveis
Integer :: NumNo
Integer :: No
Integer :: Noi
Integer :: Nof
Integer :: NumEl
Integer :: Elemento
Integer :: NumAp
Integer :: NumCar
Integer :: i
!NumNo - Número de nos
!No - Número do no
!Noi - No Inicial
!Nof - No Final
!NumEl - Número de Elementos
!Elemento - Número do Elemento
!NumAp - Número de Apoios
!NumCar - Número de Cargas (Para forças cortantes e Momentos)
!i - Número Linhas

Real(8), allocatable :: CoordN(:)
Integer, allocatable :: Conex(:, :)
Integer, allocatable :: Apoio(:, :)
Real(8), allocatable :: Carga(:, :)
Real(8), allocatable :: Prop(:, :)
Real(8), allocatable :: Comprim(:)
Real(8), allocatable :: Vetor_esf(:)
Real(8), allocatable :: Vetor_esf_c(:)
Real(8), allocatable :: Vetor_esf_d(:)
Real(8), allocatable :: Vetor_mz_d(:)
Real(8), allocatable :: Vetor_esf_f_d(:)
Real(8), allocatable :: Vetor_esf_d2(:)
!CoordN(:) Cordenadas Nos
!Conex(:, :) Conexão dos Elementos
!Apoio(:, :) Componentes dos Apoios, força em y, momento em z
!Carga(:, :) Componentes das Forças
!Prop(:, :) Propriedades dos Elementos E,A
!Comprim(:) Comprimento do elemento
!Vetor_esf(:) Vetor de esforços
!Vetor_esf_c(:) Vetor de esforços concentrados
!Vetor_esf_d(:) Vetor de esforços distribuidos
!Vetor_mz_d(:) Vetor de esforços distribuidos - parcela de momento z
!Vetor_esf_f_d(:) Vetor de esforços distribuidos - parcela de força y
!Vetor_esf_d2(:) Vetor de esforços distribuidos por elemento p/ subtrair nos esforços internos

!Matrizes a serem desenvolvidas
Real(8), allocatable :: MR(:, :)
!MR(:, :) Matriz de rigidez
Real(8), allocatable :: MR1(:, :)
!MR1(:, :) Matriz proveniente das Condição de Contorno
Real(8) :: M1(4,4)
!M1(4,4) Matriz K referente as propriedades de cada elemento(I,A,E,e L)
Real(8) :: ME(4,4)
!ME(4,4) Matriz do elemento em coordenadas locais para o calculo dos esforços internos

```

**!Dados Esperados na Solucao da Estrutura**

**Real(8), allocatable ::Desloc\_Geral(:)**

**Real(8), allocatable ::Desloc\_Elem(:)**

**Real(8), allocatable ::Esf\_Int(:)**

**Real(8), allocatable ::Desloc\_Nod(:)**

**Real(8), allocatable ::Reacoes\_de\_AP(:)**

**!Desloc\_Geral(:) Vetor de deslocamentos em coordenadas locais**

**!Desloc\_Elem(:) Vetor de esforços internos por elemento em**

**coordenadas globais**

**!Esf\_Int(:) Vetor de esforços internos**

**!Desloc\_Nod(:) Deslocamentos nodais**

**!Reacoes\_de\_AP(:) Vetor de reacoes de apoio**

**end**

**Subroutine Abertura\_de\_Arquivos**

**Use Declaracao\_Variaveis**

**Open(unit=1,access='sequential',file='entrada.txt',status='old')**

**Open(unit=2,access='sequential',file='saida.txt',status='unknown')**

**Return**

**End subroutine**

**Subroutine Leitura\_de\_dados**

**Use Declaracao\_Variaveis**

**NumNo=0**

**NumEI=0**

**NumAp=0**

**NumF=0**

**NumM=0**

**i=0**

**Read(1,\*)NumNo,NumEI,NumAp,NumCar**

**Allocate(CoordN(NumNo))**

**CoordN=0**

**Do i=1,NumNo**

**Read(1,\*) No,CoordN(No)**

**End Do**

**Allocate(Conex(NumEI,2))**

**Conex=0**

**Do i=1,NumEI**

**Read(1,\*) Elemento,Conex(Elemento,1),Conex(Elemento,2)**

**End Do**

**Allocate(Apoio(NumAp,3))**

**Apoio=0**

**Do i=1,NumAp**

**Read(1,\*) Apoio(i,1),Apoio(i,2),Apoio(i,3)**

**End Do**

**Allocate(Carga(NumCar,3))**

**Carga=0**

**Do i=1,NumCar**

**Read(1,\*) Carga(i,1),Carga(i,2),Carga(i,3)**

**End Do**

**Allocate(Prop(NumEI,5))**

**Prop=0**

**Do i=1,NumEI**

**Read(1,\*)**

**Elemento,Prop(Elemento,1),Prop(Elemento,2),Prop(Elemento,3),Prop(El**

**emento,4),Prop(Elemento,5)**

↵

↵

↵

```

End Do
Allocate(Desloc_Nod(2*NumNo))
Return
End Subroutine

```

```

Subroutine Comprimento
Use Declaracao_Variaveis
Allocate(Comprim(NumEl))
Do i=1,NumEl
  Noi=Conex(i,1)
  Nof=Conex(i,2)
  Comprim(i)=CoordN(Nof)-CoordN(Noi)
End Do
Return
End Subroutine

```

```

Subroutine Matriz_de_rigidez
Use Declaracao_Variaveis
Allocate (MR(2*NumNo,2*NumNo))
MR=0.0
Do i=1,NumEl

```

```

M1(1,1)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12+(Prop(i,5)*(Compr
im(i))*13/35)

```

```

M1(1,2)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)+(Prop(i
,5)*(Comprim(i)**2)*11/210)

```

```

M1(1,3)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12+(Prop(i,5)*(Comp
rim(i))*9/70)

```

```

M1(1,4)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)+(-Prop(
i,5)*(Comprim(i)**2)*13/420)

```

```

M1(2,1)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)+(Prop(i
,5)*(Comprim(i)**2)*11/210)

```

```

M1(2,2)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*4*(Comprim(i)**2)+(P
rop(i,5)*(Comprim(i)**3)/105)

```

```

M1(2,3)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)+(Prop(
i,5)*(Comprim(i)**2)*13/420)

```

```

M1(2,4)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*2*(Comprim(i)**2)+(-
Prop(i,5)*(Comprim(i)**3)/140)

```

```

M1(3,1)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12+(Prop(i,5)*(Comp
rim(i))*9/70)

```

```

M1(3,2)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)+(Prop(
i,5)*(Comprim(i)**2)*13/420)

```

```

M1(3,3)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12+(Prop(i,5)*(Compr
im(i))*13/35)

```

M1(3,4)=(-Prop(i,1)\*Prop(i,2))/(Comprim(i)\*\*3)\*6\*Comprim(i)+(-Prop(i,5)\*(Comprim(i)\*\*2)\*11/210)

M1(4,1)=((Prop(i,1)\*Prop(i,2))/(Comprim(i)\*\*3))\*6\*Comprim(i)+(-Prop(i,5)\*(Comprim(i)\*\*2)\*12/420)

M1(4,2)=((Prop(i,1)\*Prop(i,2))/(Comprim(i)\*\*3))\*2\*(Comprim(i)\*\*2)+(-Prop(i,5)\*(Comprim(i)\*\*3)/140)

M1(4,3)=(-Prop(i,1)\*Prop(i,2))/(Comprim(i)\*\*3)\*6\*Comprim(i)+(-Prop(i,5)\*(Comprim(i)\*\*2)\*11/210)

M1(4,4)=((Prop(i,1)\*Prop(i,2))/(Comprim(i)\*\*3))\*4\*(Comprim(i)\*\*2)+Prop(i,5)\*(Comprim(i)\*\*3)/105)

NoI=Conex(i,1)

NoF=Conex(i,2)

MR((2\*NoI)-1,(2\*NoI)-1)=MR((2\*NoI)-1,(2\*NoI)-1)+M1(1,1)

MR((2\*NoI)-1,(2\*NoI))=MR((2\*NoI)-1,(2\*NoI))+M1(1,2)

MR((2\*NoI)-1,(2\*NoF)-1)=MR((2\*NoI)-1,(2\*NoF)-1)+M1(1,3)

MR((2\*NoI)-1,(2\*NoF))=MR((2\*NoI)-1,(2\*NoF))+M1(1,4)

MR((2\*NoI),(2\*NoI)-1)=MR((2\*NoI),(2\*NoI)-1)+M1(2,1)

MR((2\*NoI),(2\*NoI))=MR((2\*NoI),(2\*NoI))+M1(2,2)

MR((2\*NoI),(2\*NoF)-1)=MR((2\*NoI),(2\*NoF)-1)+M1(2,3)

MR((2\*NoI),(2\*NoF))=MR((2\*NoI),(2\*NoF))+M1(2,4)

MR((2\*NoF)-1,(2\*NoI)-1)=MR((2\*NoF)-1,(2\*NoI)-1)+M1(3,1)

MR((2\*NoF)-1,(2\*NoI))=MR((2\*NoF)-1,(2\*NoI))+M1(3,2)

MR((2\*NoF)-1,(2\*NoF)-1)=MR((2\*NoF)-1,(2\*NoF)-1)+M1(3,3)

MR((2\*NoF)-1,(2\*NoF))=MR((2\*NoF)-1,(2\*NoF))+M1(3,4)

MR((2\*NoF),(2\*NoI)-1)=MR((2\*NoF),(2\*NoI)-1)+M1(4,1)

MR((2\*NoF),(2\*NoI))=MR((2\*NoF),(2\*NoI))+M1(4,2)

MR((2\*NoF),(2\*NoF)-1)=MR((2\*NoF),(2\*NoF)-1)+M1(4,3)

MR((2\*NoF),(2\*NoF))=MR((2\*NoF),(2\*NoF))+M1(4,4)

End Do

End Subroutine

Subroutine Vetor\_cargas

Use Declaracao\_Variaveis

Allocate(Vetor\_esf\_c(2\*NumNo))

Vetor\_esf\_c=0.0

Do i=1,NumNo

Do j=1,NumCar

If (Carga(j,1)==i) then

Vetor\_esf\_c((2\*i)-1)=Carga(j,2)

Vetor\_esf\_c(2\*i)=Carga(j,3)

End if

End Do

End Do

Allocate(Vetor\_esf\_f\_d(NumNo))

Vetor\_esf\_f\_d=0.0

Do i=1,NumNo

Do j=1,NumEl

NoI=Conex(j,1)

NoF=Conex(j,2)



```

if (Noi==i) then

vetor_esf_f_d(Noi)=(((7*Comprim(j)*Prop(j,3))/20)+((3*Comprim(j)*Prop(
j,4))/20))+Vetor_esf_f_d(i)
End if
if (Nof==i) then
vetor_esf_f_d(Nof)=(((3*Comprim(j)*Prop(j,3))/20)+((7*Comprim(j)*Prop(
j,4))/20))+Vetor_esf_f_d(i)
End if
End do
End do
Allocate(Vetor_mz_d(NumNo))
Vetor_mz_d=0.0
Do i=1,NumNo
  Do j=1,NumEl
    Noi=Conex(j,1)
    Nof=Conex(j,2)
    if (Noi==i) then

vetor_mz_d(Noi)=(((Comprim(j)**2)*Prop(j,3))/20)+(((Comprim(j)**2)*Pr
op(j,4))/30))+Vetor_mz_d(i)
End if
if (Nof==i) then

vetor_mz_d(Nof)=((-Comprim(j)**2)*Prop(j,3))/30)+((-Comprim(j)**2)
*Prop(j,4))/20))+Vetor_mz_d(i)
End if
End do
End do
Allocate(Vetor_esf_d(2*NumNo))
Vetor_esf_d=0.0
Do i=1,NumNo
  Vetor_esf_d(2*i-1)=Vetor_esf_f_d(i)
  Vetor_esf_d(2*i)=Vetor_mz_d(i)
End do
Allocate(Vetor_esf_d2(4*NumEl))
Vetor_esf_d2=0.0
Do i=1,NumEl

Vetor_esf_d2(4*i-3)=((7*Comprim(i)*Prop(i,3))/20)+((3*Comprim(i)*Pro
p(i,4))/20)

Vetor_esf_d2(4*i-2)=(((Comprim(i)**2)*Prop(i,3))/20)+(((Comprim(i)**
2)*Prop(i,4))/30)

Vetor_esf_d2(4*i-1)=((3*Comprim(i)*Prop(i,3))/20)+((7*Comprim(i)*Pro
p(i,4))/20)

Vetor_esf_d2(4*i)=((-Comprim(i)**2)*Prop(i,3))/30)+((-Comprim(i)**
2)*Prop(i,4))/20)
End do
Allocate(Vetor_esf(2*NumNo))
Vetor_esf=0.0
Vetor_esf=Vetor_esf_c+Vetor_esf_d
End Subroutine

```

```

Subroutine Condicoes_de_Contorno
Use Declaracao_Variaveis

```

```

Allocate (MR1(2*NumNo,2*NumNo))
MR1=MR
Do i=1,NumAp
  NO=Apoio(i,1)
  If (Apoio(i,2)==1) then
    Do j=1,2*NumNo
      MR1((2*NO)-1,j)=0.0
      MR1(j,(2*NO)-1)=0.0
    End Do
    MR1((2*NO)-1,(2*NO)-1)=1.0
    Vector_esf((2*NO)-1)=0.0
  End If
  If (Apoio(i,3)==1) then
    Do j=1,2*NumNo
      MR1((2*NO),j)=0.0
      MR1(j,(2*NO))=0.0
    End Do
    MR1((2*NO),(2*NO))=1.0
    Vector_esf(2*NO)=0.0
  End If
End Do
End Subroutine

```

```

Subroutine Resolucao_Sistema(A,X,B,n)

```

```

Integer :: n
Real(8), dimension(n,n) :: A
Real(8), dimension(n) :: X,B
Real(8), dimension(n,n+1) :: Triang
Real(8), dimension(n,n) :: Pivo
Real(8) :: Max
Real(8) :: Aux
Real(8) :: Soma
Integer :: linha

Do ii = 1,n
  Do jj = 1,n
    Triang(ii,jj)=A(ii,jj)
  End do
End do
Do ii = 1,n
  Triang(ii,n+1)=B(ii)
End do

Do kk = 1,(n-1)
  Max=0.0
  Do ii = kk,n
    If (DAbs(A(ii,kk))>DAbs(Max)) then
      Max=A(ii,kk)
      linha=ii
    End if
  End do
  If (Max==0) then
    Write(*,*) 'Matriz não inversível'
    Stop
  End if
  Do jj = kk,n+1
    Aux=Triang(linha,jj)

```

```

Triang(linha,jj)=Triang(kk,jj)
Triang(kk,jj)=Aux
End do
Do ii = (kk+1),n
Pivo(ii,kk)=Triang(ii,kk)/Triang(kk,kk)
Do jj = kk,(n+1)
Triang(ii,jj)=Triang(ii,jj)-Pivo(ii,kk)*Triang(kk,jj)
End do
End do
End do

```

```

X(n)=(Triang(n,n+1)/Triang(n,n))
Do ii = (n-1),1,-1
Soma=0
Do jj = (ii+1),n
Soma=Soma+Triang(ii,jj)*X(jj)
End do
X(ii)=(Triang(ii,n+1)-Soma)/Triang(ii,ii)
End do
Return
End subroutine

```

```

Subroutine Reacoes_de_Apoio
Use Declaracao_Variaveis
Allocate (Reacoes_de_AP(2*NumNO))
Reacoes_de_AP=0.0
Reacoes_de_AP= (Matmul(MR,Desloc_Nod)-Vetor_esf_d)
End subroutine

```

```

Subroutine Esforços_Internos
Use Declaracao_Variaveis
Allocate (Esf_Int(4*NumEl))
Esf_Int=0.0
Allocate (Desloc_Elem(4))
Desloc_Elem=0.0
Do i=1,NumEl

```

```

ME(1,1)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12
ME(1,2)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
ME(1,3)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12
ME(1,4)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)

```

```

ME(2,1)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
ME(2,2)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*4*(Comprim(i)**2)
ME(2,3)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
ME(2,4)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*2*(Comprim(i)**2)

```

```

ME(3,1)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12
ME(3,2)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
ME(3,3)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*12
ME(3,4)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)

```

```

ME(4,1)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
ME(4,2)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*2*(Comprim(i)**2)
ME(4,3)=(-(Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*6*Comprim(i)
ME(4,4)=((Prop(i,1)*Prop(i,2))/(Comprim(i)**3))*4*(Comprim(i)**2)
Noi=Conex(i,1)
Nof=Conex(i,2)

```

```

Do j=1,2
  if (j==1) then
    Desloc_Elem(2*j-1:2*j)=Desloc_Nod(2*Noi-1:2*Noi)
  End if
  if (j==2) then
    Desloc_Elem(2*j-1:2*j)=Desloc_Nod(2*Nof-1:2*Nof)
  End if

End Do

Esf_Int(4*i-3:4*i)=(Matmul(ME,Desloc_Elem))

End Do
Esf_Int=Esf_Int-Vetor_esf_d2
End Subroutine

Subroutine Saida_de_Dados
Use Declaracao_Variaveis
Write(2,*) '%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%'
Write(2,*) '%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%'
Write(2,*) ' '
Write(2,*) '_____↵
Write(2,*) ' Deslocamentos e Giros Nodais'
Write(2,*) '_____↵
Write(2,*) ' NO          Des
Y          Giro Z '
Write(2,*) '_____↵
Do i=1,NumNo
  Write(2,1) i,Desloc_Nod(2*i-1),Desloc_Nod(2*i)
  1 Format(6X,I3,18X,F13.7,18X,F13.7)
End Do
Write(2,*) '_____↵
Write(2,*) ' '
Write(2,*) ' '
Write(2,*) '_____↵
Write(2,*) ' Esforços Internos: Cortante'
Write(2,*) '_____↵
Write(2,*) ' Elemento Cortante
Inicial          Final '
Write(2,*) '_____↵
Do i=1,NumEl
  Write(2,2) i,Esf_Int(4*i-3),Esf_Int(4*i-1)
  2 Format(7X,I3,15X,F13.7,18X,F13.7)
End Do
Write(2,*) '_____↵
Write(2,*) ' '
Write(2,*) ' '
Write(2,*) '_____↵

```

```

Write(2,*) ' Esforços Internos: Momento'
Write(2,*) ' _____ ↵
_____ ↵
Write(2,*) ' Elemento Momento ↵
                Fletor Momento ↵
                Fletor ' ↵

Write(2,*) ' ↵ ↵ ↵ ↵
Inicial                Final ' ↵
Write(2,*) ' _____ ↵
_____ ↵

Do i=1,NumEl
  Write(2,3) i,Esf_Int(4*i-2),Esf_Int(4*i)
  3 Format(7X,I3,18X,F13.7,16X,F13.7)
End Do
Write(2,*) ' _____ ↵
_____ ↵

Write(2,*) ' ' ↵
Write(2,*) ' ' ↵
Write(2,*) ' _____ ↵
_____ ↵

Write(2,*) ' Reacoes de apoio' ↵
Write(2,*) ' _____ ↵
_____ ↵

Write(2,*) '      NOReacao em Y ↵
                Momento em Z ' ↵

Write(2,*) ↵
' _____ ↵
_____ ↵

Do i=1,NumAp
  Write(2,4) ↵
  Apoio(i,1),Reacoes_de_AP(2*(Apoio(i,1))-1),Reacoes_de_AP(2*(Apoio(i, ↵
  1))) ↵
  4 Format(6X,I3,18X,F13.6,18X,F13.6)
End Do
Write(2,* ↵
) ↵
_____ ↵
_____ ↵

Write(2,*) ' ' ↵
Write(2,*) ' %%%%%%%%%%% ↵
% ↵
%%%%%%%%%%' ↵

Return
End Subroutine

Subroutine Fechamento_de_Arquivos
close(
1)
close(
2)
return
End subroutine

Program
Calculo_de_vigas Use
Declaracao_Variaveis
Call
Abertura_de_Arquivos
Call Leitura_de_dados

```

```
Call Comprimento
Call Matriz_de_Rigidez
Call Vetor_Cargas
Call Condicoes_de_Contorno
Call Resolucao_Sistema(MR1,Desloc_Nod,Vetor_esf,2*NumNo)
Call Reacoes_de_Apoio
Call Esforços_Internos
Call Saida_de_Dados
Call Fechamento_de_Arquivos
Stop
End Program
```

APÊNDICE B - MANUAL DO USUÁRIO (.TXT) – EXEMPLO 3 (4 ELEM.)

!Nesta primeira linha entra-se com a quantidade de nós, elementos, apoios e quantidade de nós carregados. A quantidade das outras linhas do arquivo dependerá das quantidades aqui estipuladas.

Linha 1: 5 4 2 3

!Da linha 2 até a linha 6 informa-se o número do nó e suas coordenadas em x. Para este exemplo utilizou-se as unidades em metro, contudo o usuário pode definir as unidades desejadas, lembrando que uma vez definida, esta deve ser mantida até o fim do arquivo.

Linha 2: 1 0

Linha 3: 2 2.5

Linha 4: 3 5

Linha 5: 4 7.5

Linha 6: 5 10

!Das linhas 7 à 10 informa-se o número do elemento, seu nó inicial e seu nó final.

Linha 7: 1 1 2

Linha 8: 2 2 3

Linha 9: 3 3 4

Linha 10: 4 4 5

!Na linha 11 até a linha 12 deve-se informar o nó onde existe apoio, sua restrição ao deslocamento vertical, rotação em torno de z, sendo que 1 representa restrito e 0 livre.

Linha 15: 1 1 0

Linha 16: 5 1 0

!Da linha 17 a 19 as informações pertinentes dos nós carregados devem ser acrescentadas, sendo o número portanto primeiro informado o nó em que ela está aplicada, e intensidade da força em y e/ou o momento aplicado em z. Lembrando que valores negativos significam força para baixo (contrário ao eixo y positivo), e flexão na parte inferior da viga, sendo que quando não à força e momento aplicado, deve-se zerar a parcela inexistente.

Linha 17: 1 0 100



Linha 18: 5 0 -100

Linha 19: 3 -150 0

!Da linha 20 até a linha 23 informa-se o número do elemento, com seu respectivo Módulo de Elasticidade Transversal, Momento de Inércia, carregamento distribuído, se existir, em cada nó e também o valor da constante do apoio elástico no elemento (adotaremos 10 para esse caso). Em caso de inexistência de carregamento distribuído, adotar 0.

Linha 20: 1 1000 1 0 0 10

Linha 21: 2 1000 1 0 0 10

Linha 22: 3 1000 1 0 0 10

Linha 23: 4 1000 1 0 0 10