UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - PPGMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

MAYCON ODAILSON DOS SANTOS DA FONSECA

PROPOSTA DE TAREFAS PARA UM ESTUDO INICIAL DE DERIVADAS

DISSERTAÇÃO

LONDRINA
2017

MAYCON ODAILSON DOS SANTOS DA FONSECA

PROPOSTA DE TAREFAS PARA UM ESTUDO INICIAL DE DERIVADAS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

LONDRINA
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca UTFPR - Câmpus Londrina

F676p Fonseca, Maycon Odailson dos Santos da
Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas / Maycon Odailson dos Santos da Fonseca. - Londrina : [s.n.], 2017.
100 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Londrina, 2017.
Bibliografia: f. 83-85.

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. 3. Matemática - Estudo e ensino 4. Sequências (Matemática). I. Trevisan, André Luís, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. III. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. IV. Título.

CDD: 510.7

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina/Cornélio Procópio
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

TERMO DE APROVAÇÃO

PROPOSTA DE TAREFAS PARA UM ESTUDO INICIAL DE DERIVADAS

por

MAYCON ODAILSON DOS SANTOS DA FONSECA

Esta dissertação foi apresentada às 13:30 horas do dia 04 de agosto de 2017 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Linha de pesquisa - Recursos Educacionais e Tecnologias no Ensino de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho APROVADO.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____
Prof. Dr. Jader Otávio Dalto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____
Prof^{a}. Dr^{a}. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 04 de agosto de 2017.

"A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática".

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria e Benedito, pelo apoio e paciência durante minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por permitir e me guiar nessa possibilidade de transformar um sonho em realidade.

À minha família, pelos ensinamentos e exemplos de carinho, caráter, educação, dignidade e apoio, pois, em cada momento, os esforços feitos foram fundamentais para realizar esta pesquisa.

Ao professor Dr. André Luis Trevisan, por ter acreditado na minha competência para realizar este trabalho. Mesmo sabendo das minhas dificuldades e limitações, sempre esteve ao meu lado, apoiando e orientando. E também agradeço de maneira especial por ceder as turmas para realização da pesquisa.

Aos professores Dr. Jader Otávio Dalto, Drª. Sonia Abrantes Garcêz Palha, Drª. Pamela Emanueli Alves Ferreira e Drª Marcele Tavares Mendes, por terem aceitado fazer parte da minha banca de defesa.

Aos meus amigos e docentes do PPGMAT, pelos momentos de discussões, trocas de experiências e confraternizações.

Aos colégios onde trabalhei, agradeço por cederem e entenderem a importância do estudo na minha carreira profissional.

Aos meus amigos por compreenderem meus momentos de ausência, inquietude e pelas comemorações realizadas a cada etapa vencida.

Ao projeto em edital Universal do CNPq - Processo 457765/2014-3.

Enfim, a todos envolvidos que de alguma forma contribuíram para essa conquista.

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê (Arthur Schopenhauer).

RESUMO

FONSECA, Maycon Odailson dos Santos da. **Proposta de Tarefas para um Estudo Inicial de Derivadas**. 2017. 100 fls. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2017.

Esta dissertação apresenta uma proposta de tarefas para o estudo inicial de derivadas no ensino de cálculo diferencial e integral (CDI) no Ensino Superior, em turmas regulares de um curso de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) do campus Londrina. Elencou-se como objetivo geral da pesquisa a proposição de tarefas que oportunizem aos estudantes a exploração de ideias necessárias à compreensão do conceito de derivadas, em especial tarefas a serem aplicadas em momentos que iniciam o estudo de derivadas, em sua abordagem mais formal. Por se tratar de um mestrado em âmbito profissional, intencionou-se a construção de caderno de tarefas (o produto educacional), na qual após a aplicação de dois ciclos de pesquisa, elencaram-se três tarefas para compor o produto final da pesquisa, a qual por meio das análises notou-se a necessidade entre os ciclos a adaptação/reformulação das tarefas, e em especial na tarefa 3 a intencionalidade de uma nova reformulação e aplicação em um novo ciclo de pesquisa.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas Matemáticas. Derivadas.

ABSTRACT

FONSECA, Maycon Odailson dos Santos da. **Tasks Proposal for an Initial Derivative Study**. 2017. 100 fls. Dissertation (Professional Master's in Mathematics Teaching) - Federal Technology University - Paraná. Londrina, 2017.

This dissertation presents a proposal to the initial study of derivatives in the teaching of differential and integral calculus (CDI) in higher education, in regular classes of an engineering degree from the Federal University of technology-Paraná (UTFPR) campus. Presented as general purpose of research the proposition of tasks that create opportunities for students to exploration of ideas necessary for the understanding of the concept of derived in particular tasks to be applied at times to begin the study of derived, in your more formal approach. As a master's degree in professional, intended the construction of notebook (the educational product), in which after two cycles of research, bleeding cool is-if three tasks to compose the final research product, which by means of analyses the need was noted between cycles the adaptation/recasting of tasks, and in particular in task 3 the intentionality of a new makeover and application in a new cycle of research.

Keywords: Teaching of Mathematics. Teaching of differential and Integral Calculus. Mathematical Tasks. Derived.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao questionarmos alunos nos diferentes níveis de ensino, seja ele Fundamental ou Médio, sobre o que eles pensam a respeito de Matemática, muitos responderão que é uma disciplina difícil, que não conseguem entender ou que não gostam. No Ensino Superior possivelmente não será diferente. A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), foco deste trabalho, mesmo tendo sua aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento, é considerada de difícil entendimento, sendo o número de reprovações um fator que incomoda muitos docentes e que preocupa as instituições (LIMA et al., 2014).

Rezende (2003) destaca diversas razões, apontadas pelos pesquisadores, que explicam essa situação, e destaca a alta reprovação na disciplina em contextos tanto nacionais quanto internacionais. Segundo ele, parte das dificuldades de aprendizagem de CDI é de natureza epistemológica (ou seja, inerentes aos próprios conceitos), uma vez que o aprender implica um constante sair de um pensamento mais "simples" para um mais elaborado, em transformar algo específico em algo geral como, em uma transição do "pensamento finito" para o infinito.

Na perspectiva do mesmo autor, a disciplina de CDI, tal como está estruturada, encontra-se, "semanticamente, muito mais próxima da Análise do que do próprio Cálculo" (REZENDE, 2003, p. 15), sendo preciso "recalibrá-la" em relação ao par técnica/significado. Assim, ao invés de se tratar conhecimentos e conceitos de CDI "num nível do conhecimento já sistematizado, deve-se ter em mente a construção de redes de significações das ideias básicas para, num momento posterior, buscar a sistematização dos elementos dessa rede" (REZENDE, 2003, p. 16).

Nessa direção, Fischer (2009, p. 312) destaca que o conhecimento não é,

> [...] um produto acabado, aguardando ser passado adiante, nem o processo de transmiti-lo assegura aprendizagem efetiva, uma vez que esta só se processa quando o sujeito toma parte ativa, envolvendo-se inteiramente com o objeto de conhecimento.

Baseando-se nos dois pontos de vista da matemática tomada ora como corpo de conhecimentos rigoroso, formal e dedutivo (como exposto em tratados e livros texto de alto nível), ora como uma atividade humana (matemática como processo criativo), apresentados por Fischbein (1994) apud Igliori (2009, p.15) aponta essa complexidade como um possível fator de desinteresse dos jovens pelo estudo da Matemática, e propõe que a busca das causas e meios de enfrentamento deva ser “uma tarefa primordial para nós, pesquisadores”.

Em caso específico de CDI, Lima (2014, p.3) reforça que, “durante muito tempo, o foco do curso foi a apresentação formal e rigorosa do conteúdo matemático, em uma abordagem centrada nela mesma”, vinculada a uma estratégia tradicional de ensino, pautada no tripé definição-exemplo-exercício. O autor lembra que as pesquisas em Didática de CDI, mais frequentes a partir da década de 1980, evidenciaram que,

> […] mesmo o aluno se empenhando em seus estudos e o professor desempenhando seu trabalho de maneira tida como adequada segundo os paradigmas atuais de ensino e aprendizagem, certamente ele enfrentará algumas dificuldades, já que muitas destas são inerentes aos próprios conceitos usualmente trabalhados nesta disciplina (LIMA, 2014, p.3).

Outro elemento destacado por Lima (2014) é a questão da transição dos estudantes ao deixarem a Educação Básica. Ao ingressarem no Ensino Superior, muitos não estão acostumados a formular hipóteses, discutir estratégias, elaborar questões, interpretar os resultados obtidos nas tarefas matemáticas. Embora essas sejam ações importantes em qualquer nível de ensino, em âmbito do Ensino Superior são fundamentais para o desenvolvimento de habilidades inerentes às diferentes atividades profissionais.

Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) destacam que as últimas décadas de pesquisa em CDI têm contribuído para uma melhor compreensão do modo como se organiza o pensamento matemático e a aprendizagem de conceitos como limite, derivada e integral. Tais resultados trazem elementos na direção de compreender as dificuldades e obstáculos apresentados pelos alunos na aprendizagem da disciplina e de como os alunos aprendem. Estas pesquisas têm demonstrado, no entanto, pouco impacto em sala de aula.

Palha (2013, p. 143, tradução nossa) aponta que “um tipo de ensino que envolva os estudantes como aprendizes ativos não é fácil de ser implementado em salas de aulas regulares”. Análises de como estudantes raciocinam quando resolvem tarefas matemáticas provenientes de livros didáticos apontam para um raciocínio imitativo e superficial (LITHNER, 2000).

Torna-se imprescindível pensar propostas que vão de encontro àquilo que usualmente se observa nas salas de aula de CDI (aulas expositivas, seguidas da proposição de “listas de exercícios”, elaboradas quase que exclusivamente a partir da réplica de modelos apresentados previamente ou exemplificados no livro didático).

Apoiamo-nos na abordagem defendida por Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker, Gravemeijer (2015): os autores propõem a organização de ambientes de aprendizagem para contextos reais de ensino por meio de *shift problem lessons* (o que traduzimos como *episódios de resolução de tarefas*), planejados por meio da elaboração ou adaptação, a partir de livros didáticos, de sequências de tarefas, a serem resolvidas em grupos heterogêneos. Nesse contexto, mostra-se fundamental um processo de reflexão que envolva a seleção, adaptação e refinamento das tarefas que são propostas aos estudantes.

Elencamos como objetivo geral deste trabalho a proposição de tarefas que oportunizem aos estudantes a exploração de ideias necessárias à compreensão do conceito de derivadas e como questão de pesquisa: Quais as contribuições dessas tarefas na exploração de tais ideias? Mais especificamente pretendemos:

- Realizar um estudo sobre tarefas e ambientes de aprendizagem;
- Selecionar/criar/adaptar tarefas para aulas de CDI que antecedam o estudo de derivadas;
- Apresentar, na forma de um caderno, uma proposta de ensino por meio dessas tarefas.

Embora derivadas seja um conteúdo presente em qualquer material de ensino de CDI 1, em geral sua apresentação se dá em um nível de conhecimento já sistematizado, sem que o estudante possa realizar explorações de “ideias básicas” em um nível intuitivo (conforme citação de Rezende (2003) já apresentada previamente), como diferença entre termos consecutivos de diferentes tipos de sequências, taxa de variação média, crescimento e decrescimento de uma função, concavidade de um gráfico (outras que serão tratadas posteriormente), com vistas a construir redes de significações que sejam sistematizadas em um momento posterior do curso. Essa abordagem intuitiva, aliada a uma perspectiva de trabalho por meio de resolução de tarefas, apresenta-se como um elemento diferencial e justifica o caráter inovador deste trabalho, na medida em que se apresenta como uma alternativa às práticas usuais de ensino para a disciplina de CDI, observadas em salas de aulas de Universidades das diferentes regiões do país.

Por se tratar de um mestrado em âmbito profissional, temos o caderno de tarefas (o produto educacional) que se constituirá a partir de um processo cíclico de seleção, adaptação e refinamento a partir da sua aplicação em ambientes reais de ensino de CDI. Tais tarefas, constituídas em forma sequencial, buscam possibilitar, por parte do estudante, uma exploração intuitiva de ideias necessárias à compreensão do conceito de ideias, com vistas a subsidiar uma abordagem para o seu ensino, no qual esse conceito seja gradativamente refinado ao longo do curso de CDI 1[1].

Este trabalho insere-se no âmbito de um projeto de pesquisa intitulado "Investigação de um ambiente educacional para o CDI em condições reais de ensino", aprovado em edital do CNPq, que objetiva analisar processos envolvidos na caracterização, na implementação e na avaliação de um ambiente educacional para a disciplina de CDI e suas consequências para a aprendizagem. Tem como objetivos específicos, entre outros, caracterizar um ambiente educacional para a disciplina de CDI e organizar tarefas que o integrem.

Este texto é organizado em quatro capítulos, divididos do seguinte modo. O capítulo 2 apresenta o referencial teórico. Inicialmente, trata dos diferentes conceitos de tarefas matemáticas nas concepções de diferentes autores. Na sequência, conceitua ambientes de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas, preconizados por Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker, Gravemeijer (2015) e trata da inserção de tecnologias como possibilidade para a elaboração das tarefas que compõem esse ambiente[2]. Por fim, explora o objeto matemático subjacente às tarefas propostas (derivadas) e discute uma proposta de abordagem para seu ensino, respaldada nos trabalhos de Weigand (2004, 2014).

---

[1] Adotamos a expressão CDI para o Cálculo Diferencial e Integral enquanto área de conhecimento, abarcando as disciplinas de CDI 1, CDI 2, CDI 3 etc., usualmente presentes na grade curricular de cursos superiores no Brasil.

[2] Embora fosse nossa intenção inicial que essa incorporação se constituísse como elemento central na elaboração das tarefas, as condições reais de nosso ambiente de trabalho nos levaram a considerar os recursos tecnológicos como uma possibilidade (no caso de algum dos integrantes do grupo de trabalho ter disponibilidade de levar *notebook* ou *tablet* para aula), e não como essenciais ao desenvolvimento do trabalho.

O capítulo 3 trata dos procedimentos metodológicos que adotamos para este trabalho: o contexto de coleta de dados, os participantes e os encaminhamentos realizados para a seleção, adaptação e refinamento das tarefas. Caracterizamos também a abordagem da pesquisa utilizada: a pesquisa de desenvolvimento (*design research)*. Em linhas gerais, esse tipo de pesquisa envolve o “delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou representações” (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527). Tem um carácter cíclico, envolvendo as fases de (i) desenvolvimento e previsão (no nosso caso, elaboração das tarefas e levantamento de hipóteses acerca do encaminhamento a ser dado pelos estudantes e dos conceitos que a partir delas podem ser sistematizados), (ii) a realização de experiências de ensino e (iii) a reflexão e revisão em formato de um processo iterativo (no nosso caso, o processo de reformulação e refinamento das tarefas).

O quarto capítulo é referente à descrição e análise das tarefas no 1º ciclo e 2º ciclo de aplicação, no qual apresentamos interpretações das produções feitas pelos grupos nas diferentes tarefas e inferências sobre as contribuições dessas tarefas para a compreensão de ideias necessárias à compreensão do conceito de derivadas com o objetivo de subsidiar uma proposta de ensino a partir dessas tarefas. No quinto e último capítulo, tecemos considerações finais e alguns apontamentos em termos de perspectivas de continuidade deste trabalho. O produto educacional oriundo da pesquisa, um caderno de tarefas, é apresentado no Apêndice deste trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 SOBRE TAREFAS MATEMÁTICAS

Em nossa proposta de ambiente de ensino pautado em episódios de resolução de tarefas, estas têm um papel primordial no que diz respeito à organização da dinâmica de sala de aula. Neste capítulo, apresentamos uma revisão de literatura com apontamentos de diferentes autores no sentido tanto de caracterizar o termo “tarefa” quanto de indicar elementos que subsidiem a sua elaboração e análise.

Conforme Watson et al. (2013), as tarefas geram atividades que proporcionam aos estudantes oportunidades para elaborar conceitos matemáticos, formular ideias, desenvolver estratégias, promovendo o pensamento matemático e oportunizando a investigação. Nessa linha de pensamento, os autores definem tarefa como uma gama de “coisas a fazer”, contemplando exercícios de memorização, resolução de problemas ou investigação matemática.

Ponte (2014) cita que as tarefas devem valorizar a formulação e raciocínio matemático como uma atividade humana, com valorização da experiência dos alunos. Para ele, as tarefas matemáticas são ferramentas norteadoras essenciais para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Segundo o autor, uma tarefa:

> [...] pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar. Pode dar lugar a atividades diversas, conforme o modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem, e a sua própria capacidade e experiência anterior (PONTE, 2014, p. 16).

Na perspectiva da Educação Matemática Realística (RME)[3], a matemática deve ser vista de modo a oportunizar a reinvenção de conceitos, por meio de um processo guiado pelo professor, em que os alunos têm um papel ativo na elaboração

---

[3] Do inglês *Realistic Mathematics Education*, é uma abordagem de ensino que tem origem na Holanda no final da década de 1960, inspirado pelas ideias do matemático Hans Freudenthal. Opondo-se ao formalismo da Matemática Moderna, Freudenthal entende matemática como uma atividade natural e social cuja evolução acompanha a do indivíduo e a das necessidades de um mundo em expansão, uma atividade de organização (ou matematização).

do conhecimento. Na perspectiva da RME, as tarefas matemáticas devem ser trabalhadas em contextos que levem os estudantes a imaginá-las e realizá-las.

Ferreira e Buriasco (2015) apontam que o contexto da tarefa pode ser um potencializador para a oportunidade de matematização. Segundo elas, enquanto os estudantes trabalham com problemas de diferentes contextos, espera-se que eles possam desenvolver ferramentas matemáticas, compreensão e estratégias que sejam intimamente ligadas ao contexto matemático.

De forma complementar, Gafanhoto e Canavarro (2014) apontam que, na maioria das vezes, a escolha das tarefas a serem propostas aos estudantes é diretamente influenciada pelos manuais escolares, livros didáticos e outros mediadores curriculares acessíveis, em especial na Internet. Lembram, no entanto, que “nem sempre estes recursos se adequam da melhor maneira aos alunos de uma dada turma e ao propósito de ensino dos professores” e reforçam que a “seleção, adaptação ou criação de boas tarefas para a sala de aula constitui um desafio para muitos professores” (GAFANHOTO; CANAVARRO, 2014, p. 115).

Nesse sentido, Trevisan e Buriasco (2015) destacam a importância de

> [...] analisar, organizar e aplicar Matemática de forma flexível em situações que sejam significativas para eles [os estudantes], e os problemas devem ser acessíveis, convidativos, e que “valham a pena” serem resolvidos. Também devem ser desafiadores, deixando claro para os estudantes por que algo está sendo perguntado (TREVISAN; BURIASCO, 2015, p. 177).

Para Stein e Smith (2009, p. 105) “uma tarefa é definida como um segmento da actividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular”, e pode ser vista sob diferentes perspectivas: sua natureza, suas características, estratégias para sua resolução, sua demanda cognitiva, os tipos de raciocínio requeridos para sua resolução. Pode ser planejada de acordo com o nível de demanda cognitiva, relacionando-se com o tipo de raciocínio exigido dos alunos para sua resolução. Assim,

> [...] tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem (STEIN; SMITH, 2009, p. 22).

De acordo com as autoras, há quatro tipos de demanda cognitiva de uma tarefa (memorização, procedimentos sem conexão com significados, procedimentos com conexão com significado e fazer matemática), sendo que as duas primeiras são consideradas de baixo nível, enquanto as outras duas são de alto nível cognitivo. O Quadro 1 apresenta características de cada um desses níveis, adaptadas por Cyrino e Jesus (2014).

Memorização	**Procedimento sem conexão com significados**
- envolvem ou a reprodução dos fatos aprendidos previamente, regras, fórmulas, ou a memorização de fatos, regras, fórmulas ou definições; - não podem ser resolvidas usando procedimentos porque estes não são exigidos ou porque o tempo no qual a tarefa será completada é curto para utilização de um procedimento; - não são ambíguas: tanto a questão que envolve uma reprodução exata do material visto previamente quanto o que é para ser reproduzido está claro e diretamente apresentado; - não têm conexão alguma com os conceitos ou significados que embasam os fatos, regras, fórmulas ou definições que estão sendo aprendidos ou reproduzidos.	- são algorítmicas, de modo que o uso do procedimento ou é especificamente pedido ou está evidente a partir de uma instrução prévia, experiência, ou localização da questão; - requerem uma demanda cognitiva limitada para uma conclusão bem-sucedida, e existe pequena ambiguidade sobre o que necessita ser feito e como fazê-lo; - não têm conexão com conceitos ou significados que estão por trás dos procedimentos usados inicialmente; - estão focadas na produção de respostas corretas ao invés do desenvolvimento da compreensão matemática; - não exigem explicação, ou, quando exigem, são explicações que focam, unicamente, a descrição do procedimento que foi usado.
Procedimento com conexão com significados	**Fazer Matemática**
- focam a atenção dos alunos sobre o uso de procedimentos, a fim de desenvolver, mais profundamente, os níveis de entendimento dos conceitos e ideias matemáticas; - sugerem explícita ou implicitamente caminhos a serem seguidos, que são procedimentos amplos e gerais que têm íntima conexão com as ideias conceituais; - usualmente, permitem representação em múltiplos caminhos, com diagramas visuais, manipuladores, símbolos, e situações problemas, fazendo conexões entre múltiplas representações que ajudam a desenvolver os significados; - exigem esforço cognitivo. Apesar de procedimentos gerais poderem ser seguidos, eles não podem ser seguidos sem compreensão. Os alunos precisam envolver-se com ideias conceituais que estão por trás dos procedimentos a serem seguidos para completarem a tarefa com sucesso e desenvolvendo a compreensão.	- exigem um pensamento complexo e não algorítmico, e não é sugerido explicitamente, pela tarefa, um caminho previsível, instruções para sua execução, ou um exemplo a ser seguido, que bem treinado leva à resolução da mesma; - exigem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos matemáticos, procedimentos, ou relações; - exigem alta monitoração ou alta regulamentação de seu próprio processo cognitivo; - exigem que os alunos mobilizem conhecimentos relevantes e experiências, e façam uso apropriado destes no trabalho durante a resolução da tarefa; - exigem que os estudantes analisem a tarefa e examinem ativamente se ela pode ter possibilidades limitadas de estratégias de resoluções e soluções; - exigem um considerável esforço cognitivo e podem envolver alguns níveis de ansiedade para o aluno por não ter uma lista antecipada de processos exigidos para a solução.

Quadro 1 - Demanda cognitiva de tarefas matemáticas
Fonte: Stein e Smith (1998), adaptadas por Cyrino e Jesus (2014).

Inspirados nas ideias desses autores, por tarefa matemática, Trevisan, Borssoi e Elias (2015, p.3) caracterizam tarefa como um “amplo espectro composto por ‘coisas a fazer’ pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos”.

Segundo os autores, a tarefa pode ser pensada como algo único, ou por meio de um sequenciamento, no qual o conjunto de tarefas esteja inter-relacionado, possibilitando, a partir de uma mesma situação ou contexto inicial, explorar diferentes objetivos ou conteúdos. Assim, “uma sequência de tarefas começa a partir de uma situação particular, que remeta ao uso de estratégias e representações informais, e progressivamente leva à formalização e generalização dos procedimentos de solução” (TREVISAN; BORSSOI; ELIAS, 2015, p.3).

Em luz a tais considerações, reforçamos o papel das tarefas enquanto promotoras de momentos de interação e colaboração entre professor e estudantes, respeitando a produção, valorizando seu processo de resolução e buscando, no encaminhamento da tarefa, promover a aprendizagem e o desenvolvimento do conhecimento matemático.

2.2 AMBIENTES DE APRENDIZAGEM PAUTADOS EM EPISÓDIOS DE RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

Segundo Moreira (2007),

> O ambiente de aprendizagem escolar é um lugar previamente organizado para promover oportunidades de aprendizagem e que se constitui de forma única na medida em que é socialmente construído por alunos e professores a partir das interações que estabelecem entre si e com as demais fontes materiais e simbólicas do ambiente (MOREIRA, 2007, sp.).

Um ambiente de aprendizagem é um ambiente onde o indivíduo está sujeito a oportunidades para aprender. Em grande parte das definições o termo ambiente de aprendizagem é utilizado como metáfora a “espaço físico” onde são oportunizadas as práticas educativas. (BRAGANÇA; FERREIRA; PONTELO, 2014).

Neste trabalho consideramos a definição adotada por Bragança, Ferreira e Pontelo (2014, p. 2), sendo “um ambiente de aprendizagem como um conjunto formado entre sujeitos, objetos e recursos que interagem no processo de aprendizagem". Nesse ambiente de aprendizagem, consideramos como um ambiente previamente planejado/organizado, para que assim ocorram "práticas de aprendizagem", na qual o professor tem um papel fundamental, seja na preparação, organização e sistematização da aprendizagem, na direção e orientação de práticas pedagógicas.

Pautados em tais ideias elencamos um esquema (Figura 1), com os pressupostos considerados na pesquisa sobre o ambiente de aprendizagem.

Figura 1 - Ambiente de aprendizagem
Fonte: autores.

As tarefas investigativas nesta abordagem de aprendizagem enfatizam dois aspectos centrais, conforme Gravemeijer (1999, p. 34) cita:

> 1. A matemática deve começar em um nível no qual as noções e conceitos são experimentalmente reais para os alunos;
> 2. Através dos processos de orientação, organização e reflexão, os alunos construirão as relações necessárias para construir uma estrutura relacional.

Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker, Gravemeijer (2015), à luz de pressupostos da RME, defendem a organização de *ambientes de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas* (tradução que estamos adotando para *shift problem lessons*).

Tais momentos não substituem outros presentes no contexto de uma sala de aula regular, como aqueles envolvendo a exposição de conceitos pelo professor ou o trabalho com resolução de tarefas rotineiras. Entretanto, diferem significativamente de uma aula expositiva “usual”, tendo como pressupostos:

- O fato de que um novo conteúdo nem sempre precisa ser apresentado aos estudantes previamente. Ao invés disso, são propostas, aos estudantes, sequências de tarefas com elementos que estimulem sua reflexão e a elaboração de um raciocínio conceitual.
- O papel ativo do aluno, a partir da resolução da tarefa em pequenos grupos de forma colaborativa.
- O papel docente que, ao invés de fornecer explicações, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos alunos na resolução.

Um elemento que destacamos, ao pensar o desenho das tarefas que compõem esse ambiente, é a possibilidade de incorporação de recursos tecnológicos, uma vez que possibilitam ao aluno um papel mais ativo na elaboração do conhecimento, conforme preconiza a RME. A incorporação da tecnologia permite que os alunos explorem problemas mais autênticos e realísticos, apoiando a reinvenção, com base em seus conhecimentos prévios, das matemáticas que se espera que aprendam.

Além disso, a tecnologia oferece aos alunos mais oportunidade para interatividade, na direção do que Borba, Silva e Gadanidis (2015) caracterizam como “experimentação com tecnologias”. Uma tarefa elaborada nessa perspectiva deve oferecer aos alunos meios, para (entre outros): geração de conjecturas matemáticas e realização de testes usando um grande número de exemplos; criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de representações de objetos matemáticos; incentivo à combinação dos raciocínios intuitivo, indutivo ou abdutivo, que podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

De forma mais ampla, esses autores defendem que tarefas matemáticas criadas na base da experimentação das tecnologias devem buscar contribuir com:

- Criação e simulação de modelos matemáticos;
- Geração de conjecturas matemáticas;
- Exploração de diversificadas formas de resolução;
- Manipulação dinâmica de objetos construídos;
- Realização de testes de conjecturas usando um grande número de exemplos;
- Convencimento sobre a veracidade das conjecturas;
- Elaboração de novos tipos de problemas e construções matemáticas;
- Criação de conexão entre diferentes tipos de representação;
- Exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- Incentivo a combinação de raciocínios intuitivos, indutivo ou abdutivo, para contribuir com o raciocínio dedutivo;
- Criação de atividades matemáticas "aberto-controlada";
- Ensinar e aprender matemática de forma alternativa;
- Compreensão de conceitos;
- Conhecimento de novas dinâmicas;
- Envolvimento com um novo tipo de linguagem na comunicação matemática;
- Criação de diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas;
- Aprofundamento em variados níveis de rigor matemático;
- Identificação de incoerências conceituais (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015, p. 51-52).

S*oftwares* educativos podem contribuir para a compreensão de problemas de CDI, pois possibilitam a visualização, reflexão e deduções para refinar o conhecimento. O Geogebra é um desses *softwares*, caracterizado por uma integração entre a geometria dinâmica e as representações de funções, além de contemplar um cenário inovador para experimentação com tecnologia, em especial por conta da ferramenta "controle deslizante".

Entretanto, por si só nenhum *software* educativo garante tais processos: é necessário um cuidadoso processo de planejamento para sua utilização. Em especial, o processo de elaboração, aplicação e refinamento de tarefas que façam uso desse recurso configura-se como uma importante atividade no âmbito da Educação Matemática e, mais especificamente, no caso do CDI. Tal aspecto evidencia a importância de estudos como o que aqui apresentamos.

2.3 O CONTEÚDO DERIVADAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

O conceito de derivada de uma função é central em Matemática e tem muitas aplicações não-matemáticas de grande importância. Seu estudo (como refinamento das ideias de taxa de variação e taxa média de variação) desempenha um papel importante quando é necessário quantificar ou medir a taxa de variação de uma determinada grandeza em relação à outra. No seu ensino, no entanto, tem-se priorizado a apresentação de definições formais (via limite) e aspectos algorítmicos referentes às suas propriedades e regras para o cálculo.

Uma análise em livros usualmente adotados em cursos de CDI de diferentes instituições brasileiras de Ensino Superior, a constar Leithold (1994), Anton et al. (2007), Hugges-Hallet et al. (2008) e Stewart (2014) abordam o conteúdo “derivadas” de forma bastante semelhante.

Assim, de maneira análoga, Leithold (1994), Anton et al. (2007) e Stewart (2014), introduzem ao tema abordando o problema da reta tangente, explorado em menção a um contexto puramente matemático. Todos apresentam esse conteúdo em capítulo posterior à exploração do tema “limites”, tomando-o assim como pré-requisito.

O primeiro destaca que a reta tangente pode ser “determinada por sua inclinação pelo ponto de tangência” (LEITHOLD, 1994, p. 139). Com isso, toma uma função genérica f para investigar a inclinação da reta tangente em um ponto qualquer do seu gráfico, denotado como $P(x_1, f(x_1))$. Toma outro ponto próximo, $Q(x_2, f(x_2))$, e a partir dele encaminha um cálculo para a inclinação da reta secante passando por ambos, dada pela equação a seguir (com $\Delta x = x_2 - x_1$):

$$m_{pq} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{1}$$

Utiliza então a ideia de “aproximação” do ponto Q ao P, quando apenas Q tem posição variável, de modo que, para que possamos encontrar a inclinação da reta em P, o ponto Q deve tender a ele, então Δx deve tender a zero. Portanto, utilizando-nos do limite, temos que a inclinação $m(x_1)$ é:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \qquad (2)$$

O limite acima, em existindo, é então definido como a derivada da função f no ponto $P(x_1, f(x_1))$.

Stewart (2014), por sua vez, apresenta na abertura do livro um texto inicial intitulado “O Problema da Tangente”, no qual apresenta informalmente essa ideia, para posteriormente apresentar um tratamento matemático que pressupõe o conhecimento do conceito de limite. Assim, após no capítulo 3 do livro (após um capítulo dedicado ao estudo de funções, e outro de limites de funções), retoma esse problema da reta tangente, associando-o ao estudo do movimento retilíneo e à determinação da velocidade instantânea de um objeto em movimento. Para isso, utiliza-se da função particular $y = x^2$, e propõe encontrar a inclinação m da reta tangente ao gráfico dessa função no ponto $P(1,1)$, tomando para tal outro ponto $Q(x, x^2)$, próximo a P. Da inclinação m_{PQ} da reta secante PQ, discute que, quanto mais próximos os dois pontos estiverem, mais próximo x estará de 1, assim como m_{PQ} estará de 2, o que é “confirmado” por meio do cálculo de um limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2 \qquad (3)$$

Na sequência, reformula essa ideia e a utiliza para definir a derivada de uma função num ponto. A abordagem utilizada por Anton et al. (2007) é análoga a essa.

Vemos nesses três autores uma ênfase bastante acentuada nos aspectos formal e algorítmico da matemática, citados por Fischbein (1994 apud IGLIORI, 2009), ao introduzirem o conceito de derivada. Percebe-se uma afirmação à matemática enquanto corpo de conhecimento rigoroso, formal e dedutivo, em detrimento de sua abordagem como processo criativo. Embora a relação entre derivada e velocidade instantânea sugira uma proximidade com o aspecto intuitivo do conhecimento matemático, essa aproximação é feita com vistas a ilustrar uma possível “aplicação” de um conceito já construído, no caso dos livros de Anton et al. (2007) e Stewart (2014).

Buscando “inverter” essa construção, Hugges-Hallet et al. (2008) inicia o segundo capítulo de seu livro com uma sessão intitulada “Como medimos velocidade?”, antes de qualquer menção ao conteúdo “limites”. O problema de determinar a velocidade de um objeto em movimento em determinado instante toma como estratégia a ideia de determinar a velocidade média desse objeto em intervalos de tempo cada vez menores. Um aspecto que chama a atenção é o fato de que esse contexto serve de motivação para que os autores introduzam a partir daí o conceito de limite. Em outras palavras, o aspecto intuitivo do problema da velocidade instantânea prevalece, e uma abordagem mais formal e algorítmica vem depois.

Visto que parte relativamente grande dos estudantes apresentam problemas com a compreensão do conceito de limite de uma sequência, o que impacta no entendimento de conceitos mais amplos, como o limite de uma função ou o processo de limite inerente aos conceitos de derivada e integral definida, a abordagem proposta por esses últimos autores poderia ser bastante promissora.

Weigand (2014) faz algumas ressalvas a esses dois tipos de abordagem: enquanto as três primeiras obras pressupõem um entendimento formal do conceito de limite de uma função (cuja compreensão é, em geral, bastante difícil para os alunos), a última adota uma abordagem intuitiva que pode tornar-se “esvaziada” em função da restrição ao estudo de expressões polinomiais (na qual ocorrem, como casos particulares do cálculo de limites, simplificações por meio de uso de técnicas de fatoração).

Visto que as sequências são objetos fundamentais para o desenvolvimento/elaboração de conceitos do CDI, Weigand (2004, 2014) defende uma “revitalização” do tema (que, há algumas décadas, constituíram o tema inicial de cursos de CDI na Europa), não como um tópico isolado, mas distribuído ao longo do currículo da Educação Básica (em nosso caso, adaptável ao longo do curso de CDI).

Como exemplo, aponta que o quociente de diferenças pode ser tomado como base para a compreensão do quociente diferencial; por sua vez, o estudo das sequências de diferenças pode contribuir como uma base intuitiva para a compreensão do quociente de diferenças. Dada uma sequência $\{a_n\}_{n\in IN^*}$, a sequência de diferenças a ela associada, $\{\Delta a_n\}_{n\in IN^*}$, é tal que $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.

O autor sugere, na forma de uma sequência de etapas, uma proposta de ensino que poderia anteceder o estudo de derivadas em um curso de CDI, na qual o conceito de taxa de variação média é desenvolvido a partir da discussão do comportamento de diferentes sequências de diferenças, sem que o conceito de limite seja apresentado formalmente nesse momento. Tal proposta serviu como inspiração para a elaboração de parte da sequência de tarefas proposta neste trabalho, conforme discutiremos na continuidade do texto.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, envolvendo um estudo em sala de aula em condições reais de ensino. Trata-se de um recorte de um trabalho desenvolvido no âmbito de um projeto maior, intitulado "Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino", sob coordenação do orientador deste trabalho, e contando com participação de outros quatro docentes pertencentes ao quadro permanente do Programa de Mestrado no qual o trabalho é desenvolvido, alunos de iniciação científica da UTFPR dos cursos de Engenharia e Licenciatura em Química, e outros mestrandos do PPGMAT - Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, campus Londrina/Cornélio Procópio.

Este trabalho foca em um dos objetivos específicos deste projeto, no caso *organizar tarefas que integrem um ambiente educacional para a disciplina de CDI*, em especial *tarefas a serem aplicadas em momentos que antecedem o estudo de derivadas*, em sua abordagem mais formal.

A vivência com o CDI que o autor desta dissertação trazia, ao ingressar no programa no 2º semestre de 2015, era enquanto estudante no curso de Licenciatura em Matemática. Apesar da atuação enquanto professor da Educação Básica, um duplo desafio colocou-se: por um lado, "desconstruir" uma concepção de ensino de CDI centrada do professor, oriunda da sua formação inicial; por outro, pensar uma proposta de produto educacional sem a vivência enquanto professor de CDI.

A pesquisa estrutura-se a partir de um processo que contempla: (i) estudos teóricos, que contribuíram para uma nova concepção de ensino de CDI, pautado em episódios de resolução de tarefas; (ii) resgate de conteúdos do CDI 1, como limites e derivadas; (iii) acompanhamento de aulas de CDI 1[4], no 2º semestre de 2015; (iv) planejamento e aplicação[5], no 1º semestre de 2016, de uma primeira versão do

---

[4] As turmas nas quais desenrolam-se as ações (iii) em diante são diferentes e tiveram como professor responsável o orientador deste trabalho.

[5] Em alguns momentos (que caracterizaram o Estágio de Docência do curso), o autor esteve responsável pela condução do trabalho em sala de aula; em outros, acompanhou a condução realizada pelo orientador do trabalho (enquanto professor regente das turmas).

produto educacional; (v) análise de dados oriundos dessa primeira aplicação, no sentido de identificar objetivos atingidos e outros não atingidos nessa primeira aplicação, bem como reformular as tarefas, quando necessário; (vi) realização de um novo ciclo de aplicação das tarefas, no 2º semestre de 2016, que subsidia uma nova análise de dados; (vii) sistematização dos dados coletados nas etapas anteriores, redação da dissertação e organização da versão final do produto educacional, no 1º semestre de 2017.

O desenvolvimento da pesquisa envolve assim um processo cíclico que adota pressupostos da pesquisa de desenvolvimento (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015), expressão utilizada como tradução para a língua portuguesa de *design research*. De modo geral, uma pesquisa desse tipo envolve o “delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões” (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Uma característica marcante de tal pesquisa é o seu caráter cíclico, como mostra a Figura 2. Nas palavras de Eerde (2013), o pesquisador, baseado no conhecimento atual (K - *knowledge*), realiza experimentos de pensamento “antecipação” e *design* de tarefas (D - *design*), conduz um experimento (E - *experiment*) a partir dessas tarefas e reflete a respeito do experimento (R - *reflection*). Isso resulta em novo conhecimento (K), e o ciclo inicia-se. Assim, uma pesquisa de desenvolvimento estrutura-se nas seguintes fases: (i) fase de preparação e concepção, (ii) experiência de ensino e (iii) análise retrospectiva, que leva à necessidade de reformulação e formação de novos ciclos de acompanhamento. Do modo como nosso trabalho estruturou-se, e em função dos limites temporais para realização de uma dissertação de mestrado, foi possível a realização de dois ciclos (1º e 2º semestres de 2016) desse esquema.

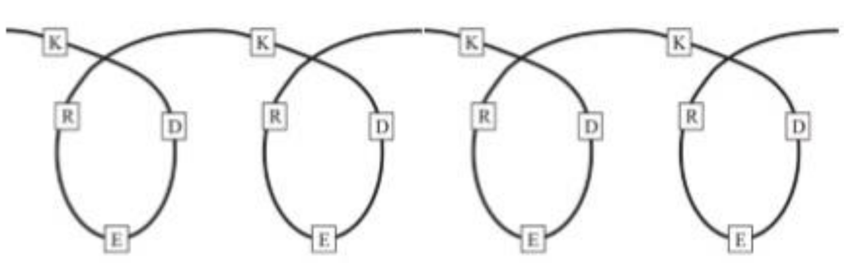


Figura 2 - Caráter cíclico da pesquisa de desenvolvimento
Fonte: Eerde (2013, p. 3).

3.2 CENÁRIO PARA INVESTIGAÇÃO

As turmas[6] nas quais os dados foram coletados eram compostas por estudantes ingressantes em turmas de CDI 1, no curso de Engenharia de Materiais da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), com ingresso no 1º e 2º semestres do ano de 2016. É um curso integral, com aulas ocorrendo no período diurno. Para essas turmas, as seis aulas semanais de CDI aconteceram às segundas, terças e quintas-feiras, no horário das 8h20min às 10h00min, totalizando uma carga de 102 aulas de 50 minutos cada. Além dessa disciplina, os estudantes do 1º período têm em sua grade outras seis disciplinas, totalizando 27 aulas semanais.

A disciplina de CDI 1 é pré-requisito para CD 2 (cursada no 2º semestre) e CD3 e Equações Diferenciais (cursadas no 3º semestre), além de disciplinas da área de Física (cursadas a partir do 2º semestre). Sua ementa contempla os seguintes conteúdos: Sistematização dos conjuntos numéricos; sistema cartesiano ortogonal; relações e funções reais de uma variável real; limites e continuidade de funções reais de uma variável real; estudo das derivadas de funções reais de uma variável real; estudo da variação de funções através dos sinais das derivadas; teoremas fundamentais do cálculo diferencial; estudo das diferenciais e suas aplicações; estudo das integrais indefinidas; estudo das integrais definidas; aplicações das integrais definidas; integrais impróprias.

A entrada dos candidatos para os cursos de graduação da universidade é realizada pelo Sistema de Seleção Unificado (SISU/MEC), que consiste em um sistema de seleção no qual instituições públicas de educação superior ofertam vagas para os candidatos que realizaram no último ano o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)[7].

O processo de seleção ocorre duas vezes durante o ano, uma no primeiro semestre e outra no segundo semestre, na qual são ofertadas, para cada curso, 44 vagas em cada semestre. Caso as vagas não sejam preenchidas na primeira chamada, são realizadas chamadas adicionais, fazendo com que alguns alunos

---

[6] Uma descrição detalhada deste contexto foi realizada por Ramos, Fonseca e Trevisan (2016), e apenas alguns elementos são destacados neste texto.
[7] Disponível em http://sisu.mec.gov.br/

ingressem semanas após o início do semestre. Assim, as turmas de CDI 1 iniciam-se com cerca de 44 alunos, além de ter 6 a 8 alunos na condição de dependentes.[8]

Uma característica da universidade é que no segundo semestre são disponibilizados editais de trocas de cursos (internas) e transferências externas. Na primeira, os alunos podem optar pela transferência de curso de mesma área de conhecimento, na transferência externa, são destinadas vagas a alunos de outras instituições para entrada nos cursos de graduação da universidade. Logo, muitos ingressam em um curso que não é sua primeira opção, e nele permanecem apenas pela expectativa de conseguir transferência para o curso desejado. Outros acabam iniciando o curso, pois foi uma das duas opções selecionadas pelo SISU, mas vários abandonam nas primeiras semanas, pois são chamados em outros vestibulares, ou abandonam disciplinas nas quais apresentam maiores dificuldades (como é o caso de CDI). Um fato isolado, nas turmas pesquisadas, foi o alto índice de desistência de alunos em função de aprovação em outras universidades do estado, pois tiveram seus calendários alterados devido à greve dos professores ocorrida em 2015.

As salas de aula onde ocorrem as aulas de CDI têm uma organização dita "usual", sendo a lousa, filas alinhadas e a mesa do professor, além de cada sala contar com um *data-show.* Embora haja laboratórios de informática no campus, seu uso para aulas de CDI é inviabilizado por conta de outras disciplinas específicas que neles acontecem. Destacamos também que nas salas onde ocorreram as aulas das turmas investigadas não havia rede *wifi* disponível no 1º semestre e em parte do 2º semestre de 2016. Além disso, poucos estudantes (algo da ordem de 20% do total) tinham disponíveis (ou dispuseram-se a levar para as aulas) *notebook*, *tablet* ou similares.

Os estudantes que ingressam nos cursos de engenharias têm algumas características trazidas da educação básica como: falta de experiências anteriores com tarefas de caráter investigativo, a expectativa de tarefas de resposta única, concepções equivocadas acerca de alguns conceitos matemáticos, além de estarem habituados a trabalhar na maioria das vezes de forma individual, além de aulas expositivas, o que reforçou o desafio em se trabalhar na perspectiva defendida neste trabalho (a organização de episódios de resolução de tarefas).

---

[8] Em geral alunos que foram reprovados com média inferior a 4,0 e/ou frequência inferior a 75% na disciplina.

3.3 A DINÂMICA DAS AULAS DE CDI1

Com vistas a operacionalizar pressupostos discutidos na fundamentação teórica, as aulas de CDI 1 ministradas pelo professor orientador deste trabalho (cenário na qual se fez a coleta de dados), seguem uma organização curricular não usual (contemplando, entretanto, todos os tópicos presentes na ementa da disciplina). A ordem com o conteúdo é explorado e o número médio de aulas dedicadas ao estudo que cada um deles são listados a seguir:

1. O estudo de funções particulares (sequências) - 6 aulas;
2. Sequências de diferenças - 4 aulas;
3. Conceito de convergência - 6 aulas;
4. Funções de domínio real[9] - 6 aulas;
5. Taxa de variação média e instantânea - 8 aulas;
6. Variação Acumulada (Integral) - 8 aulas;
7. Limite de uma função - 12 aulas;
8. Ampliação dos conceitos e técnicas (técnicas de derivação e integração) - 52 aulas;

Nesta proposta, nossa pesquisa foca nos pontos 1, 2 e 5, sendo diretamente relacionados à compreensão do conceito de derivadas. A escolha dos primeiros conteúdos desta organização curricular foi inspirada nos trabalhos de Weigand (2004, 2014) que defende essa “revitalização” do estudo de sequências nessa disciplina, uma vez que é ferramenta para o desenvolvimento de conceitos contínuos inerentes ao estudo de função, limite, derivada e integral.

Além disso, tomamos como pressuposto que os alunos do ambiente real de ensino não necessariamente possuem os “pré-requisitos” considerados “ideais” na organização das ementas “tradicionais”. Ao contrário, acreditamos que certos conceitos usualmente tomados como pré-requisitos possam ser desenvolvidos durante o trabalho na disciplina de CDI (como é o caso do conceito de função).

[9] O conceito de função é um conceito central em Matemática e tem várias aplicações no cotidiano de grande importância, sendo utilizada como ferramenta para a modelagem nos valores de dependência. Assim, nesse momento do curso faz-se a extensão do conceito de sequências (domínio discreto) e o foco passa a ser o estudo de funções reais de variável real.

3.4 A CONSTRUÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Uma versão inicial para o produto educacional foi composta por 5 tarefas, e aplicado junto à turma de Engenharia de Materiais ingressante no 1º semestre de 2016. O objetivo é que essas oportunizem aos estudantes explorar “ideias básicas” necessárias à compreensão do conceito de derivadas. A Figura 3 apresenta ideias que circunscrevem o conceito de derivadas elencadas para compor as tarefas, e que podem ser exploradas intuitivamente antes de uma apresentação formal e construção de técnicas. Para cada uma delas, buscou-se levar os estudantes a lidarem com diferentes tipos de representação (gráfica, algébrica, numérica ou verbal).

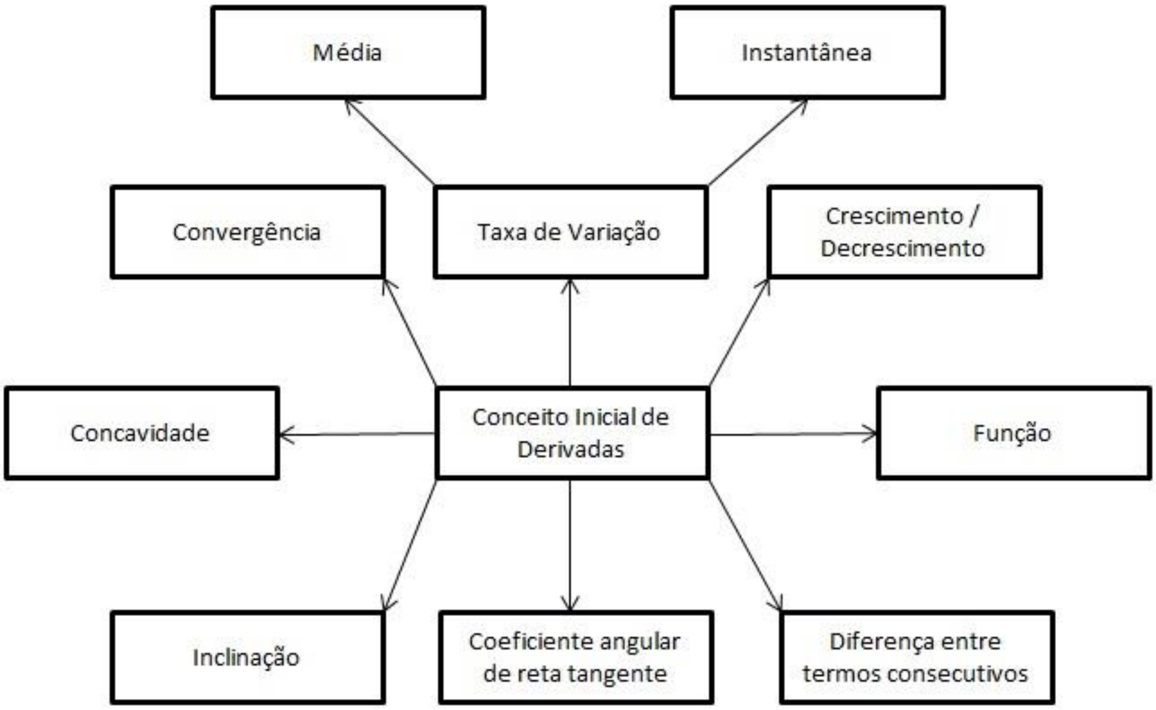


Figura 3 - Ideias que circunscrevem o conceito de derivada.
Fonte: autor.

A primeira tarefa (estabelecer comparação entre diferentes tipos de sequências) é baseada em Weigand (2001), e considera que há inúmeras situações práticas que podem ser descritas por funções ou sequências discretas que, por serem bastante acessíveis, possibilitam que os grupos detectem “padrões” em fenômenos e em situações.

No estudo de sequências de diferença, o mesmo autor cita que, com o auxílio de tal técnica, é possível analisar a modificação geral do comportamento das sequências, sendo uma ferramenta importante para entender as taxas de variação, fato esse levado em conta na proposição da segunda e terceira tarefas da sequência.

No estudo de taxa de variação, Weigand (2001), enuncia que a taxa de variação, em especial a taxa de variação média pode ser utilizada para descrever e explicar muitas situações, nas quais as variáveis são interdependentes. Em especial, destacamos aqui o estudo da velocidade média, tema explorado na quarta e quinta tarefas, que finalizam a proposição das tarefas.

Após esse ciclo, e partir dos dados dele originados, propusemos uma nova aplicação junto à turma, do mesmo curso, ingressante no 2º semestre de 2016. Isso deu origem a uma nova sequência que, a partir da reorganização da versão anterior, passou a ser composta por 3 tarefas. Por fim, a partir dos dados oriundos desse segundo ciclo, fizemos novos ajustes e constituímos uma versão final do produto educacional, apresentada no Apêndice.

Os momentos nos quais ocorreu a coleta de dados foram planejados para constituírem-se enquanto episódios de resolução de tarefas. Assim, os alunos eram organizados em grupos com 3 a 4 integrantes, compostos segundo sua própria escolha; as tarefas eram disponibilizadas à turma por meio de material impresso ou do *WhatsApp*[10]; na medida do possível, o professor da disciplina procurava fomentar à discussão na equipe, e disponibilizar tempo suficiente para que a tarefa fosse desenvolvida integralmente; nos momentos de discussão e socialização ocorridos com a turma com um todo, procurava-se incentivar grupos a compartilharem suas resoluções (grupos esses escolhidos com vistas a apresentar soluções diversificadas) e, a partir delas, ocorria a sistematização de conceitos subjacentes; alternadamente a esses episódios de resolução de tarefas, ocorriam aulas expositivas e de resolução de tarefas que buscavam aprofundar um “tema” conteúdo que havia sido explorado intuitivamente pelas tarefas.

[10] https://www.significados.com.br/whatsapp/

3.5 A COLETA DOS DADOS

Para coleta de dados, fizemos uso de:

- Produção escrita dos grupos enquanto trabalhavam com as tarefas, na qual buscávamos identificar elementos centrais do objetivo das tarefas, através das resoluções e representações utilizadas.
- E de forma complementar o diário de campo organizado pelo pesquisador e compartilhado com o orientador, onde o objetivo era de identificar problemas na formulação das tarefas, pontuar/destacar alguma resolução ou fala de algum grupo e identificar a percepção sobre o encaminhamento da tarefa.

A análise da produção escrita das tarefas toma alguns pressupostos adotados no GEPEMA[11]: enquanto “estratégia de investigação, [adotada] desde 2005, permite obter informações acerca dos processos de ensino e aprendizagem de matemática” (SANTOS, 2014, p.25). Conforme a autora aponta, os estudos desenvolvidos no grupo, que fizeram uso da produção escrita foram realizados, em sua maioria, à luz da Análise de Conteúdo (BARDIN apud SANTOS, 2014), e buscaram identificar estratégias e procedimentos e resolução, seguidos de uma organização da produção escrita em agrupamentos e, por fim, da realização de interpretações e inferências a produções dos participantes.

Tendo em vista a opção pelo trabalho em condições reais de ensino, a coleta de dados foi realizada em turmas de CDI nas quais se buscava manter, da forma mais fiel possível, a dinâmica usual da sala de aula. Nesse sentido, não havia uma mudança no contrato didático estabelecido com a turma de modo que se distinguissem as aulas “usuais” daquelas na qual o pesquisador (autor deste trabalho) estivesse presente (seja acompanhando a aplicação das tarefas, seja conduzindo o trabalho como parte de seu Estágio de Docência).

Como consequência, elencamos algumas limitações no âmbito da coleta (sem que essas, no entanto, comprometam os resultados obtidos). Uma delas foi que nem sempre a aplicação da tarefa ocorreu como planejado. Em função do tempo

[11] http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/

disponível para realização da tarefa, nem sempre foi possível permitir que as equipes explorassem a exaustivamente à tarefa. Em geral, buscava-se organizar o tempo de modo que, em um mesmo encontro, houvesse tempo para a resolução, discussão e sistematização da tarefa. Em função do cronograma bastante apertado da disciplina, nem todas as equipes dispuseram de tempo suficiente para a socialização das resoluções. Condições materiais necessárias à aplicação como planejado: seja por que poucos - ou quase nenhum - aluno levou computador na aula (quando se havia um combinado quanto a isso e a tarefa pressuponha sua utilização, precisando ser “adaptada”), às vezes o projetor falhou; às vezes alunos chegaram atrasados ou saíram durante a aula.

Outra limitação foi que nem sempre a coleta de dados ocorreu como planejado: às vezes a gravação ficou inaudível[12]; outras, o gravador ou a câmera falharam; algumas equipes não entregaram a produção escrita e, quando solicitado na aula seguinte, essa não foi encontrada. Algumas tarefas não eram finalizadas em uma aula, mas na seguinte nem todos estavam presentes, mudando a configuração dos grupos na continuidade do trabalho.

[12] Embora tenhamos coletado o áudio e o vídeo em algumas dos grupos, optou-se para este trabalho na utilização prioritariamente da produção escrita apresentada durante a execução da tarefa.

4 ANÁLISE DOS DADOS

A análise de dados utiliza-se da produção escrita apresentada pelos grupos durante a realização da tarefa, e busca-se por meio dela reconhecer as ideias que circunscrevem o conceito de derivada mobilizadas nas resoluções, buscando identificar de que maneira as tarefas contribuíram para essa exploração.

Para tal, a partir de quadros contendo ideias e conceitos possíveis de serem explorados nas tarefas (que serão apresentados na continuidade), buscamos identificar na produção escrita dos grupos (aqui nomeados como G01, G02, etc) sua presença a partir do modo como *abordaram* e *desenvolveram* a tarefa[13]. No Quadro 2 apresentamos a quantidade de grupos que desenvolveram cada tarefa.

<table>
<tr><th>1º ciclo</th><th>Quantidade de Grupos</th><th>2º ciclo</th><th>Quantidade de Grupos</th></tr>
<tr><td>Tarefa 1</td><td>16</td><td>Tarefa 1 (mantida)</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Tarefa 2</td><td>17</td><td colspan="2">Tarefa 2 foi suprimida</td></tr>
<tr><td>Tarefa 3</td><td>14</td><td>Tarefa 3 é adaptada - passa a ser Tarefa 2</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Tarefa 4</td><td>11</td><td rowspan="2">Tarefas 4 e 5 adaptadas - passam a ser Tarefa 3</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td>Tarefa 5</td><td>13</td></tr>
</table>

Quadro 2 - Ciclo de tarefas da pesquisa
Fonte: autor.

4.1 TAREFA 1 - 1º CICLO

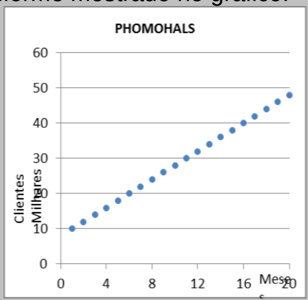
A tarefa (Quadro 3) foi proposta e inspirada na proposta de Weigand (2014), a qual disponibilizamos um arquivo em formato do software Excel, por se tratar de um programa que possivelmente, os grupos sejam familiarizados, com algumas ferramentas e objetos de manipulação. Seu objetivo específico é que os grupos reconhecessem diferentes tipos de sequências e seus comportamentos, e por meio dela os grupos poderiam exploradas as ideias de: sequência como caso particular

[13] Os termos em itálico são inspirados em Dalto e Buriasco (2009), que utilizam a palavra estratégia para se referir à maneira pela qual os estudantes *abordam* uma tarefa, e procedimento com relação ao processo de *desenvolvimento* da tarefa. Embora nossa análise faça uso dessas duas ideias, não buscará, porém, evidenciar essa diferença.

de *função*; *função* como relação variacional; *diferença entre termos consecutivos*; *crescimento/decrescimento*; *convergência* e *concavidade*. No Quadro 4 elencamos ideias e conceitos (aqui denominados IC1, IC2, ...) presentes nas resoluções dos 16 grupos.

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela **PROMOHALS** promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting
A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Quadro 3 - Tarefa 1: o caso Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

	Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados	Grupos
IC1	Sequências como funções particulares	G05, G09, G10, G13, G16.
IC2	Crescimento/Decrescimento	G02, G03, G04, G05, G07, G08, G09, G10, G11, G13, G14, G15, G16.
IC3	Funções como relação variacional	G01, G04, G05, G07, G08, G14, G15, G16.
IC4	Concavidade	G02, G03, G04, G06, G09, G10, G13, G15.
IC5	Diferença entre termos consecutivos	G05, G06, G07, G09.

Quadro 4 - Análise da tarefa 1 do 1º ciclo
Fonte: autor.

Na primeira ideia e conceito possível de serem explorados (sequências como funções particulares), "IC1", há cinco produções agrupadas. A estratégia utilizada pelos grupos foi considerada igual pelos argumentos utilizados.

Nota-se, pelas produções escritas, que os grupos basearam seus argumentos na classificação das sequências em "crescente linear", "crescimento exponencial" e "função logarítmica". Por exemplo, citamos a resposta do G16, "*A agência H&G Adversiting apresenta uma taxa de crescimento de função exponencial (f(x)= 10000.(1.1)^t), ... Já a agência Schleich & CO baseia-se em uma função logarítmica (alto crescimento inicial, porém baixo crescimento a longo prazo)*".

De modo similar, G09 associa os valores da primeira empresa a uma função linear, e da segunda empresa a uma progressão geométrica (Figura 4).

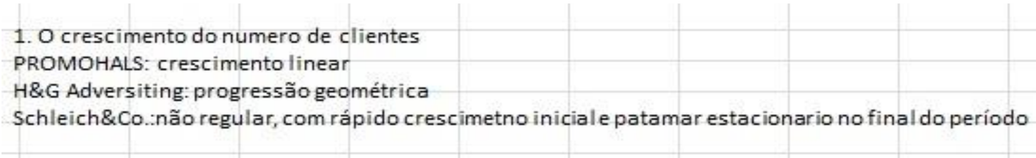

1. O crescimento do numero de clientes
PROMOHALS: crescimento linear
H&G Adversiting: progressão geométrica
Schleich&Co.:não regular, com rápido crescimetno inicial e patamar estacionario no final do período

Figura 4 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

Em IC2, procuramos identificar termos nas resoluções dos grupos como crescimento ou decrescimento para justificar suas respostas. Durante as análises percebemos que treze grupos mobilizaram essas ideias, mostrando compreendê-las (Figura 5 e 6).

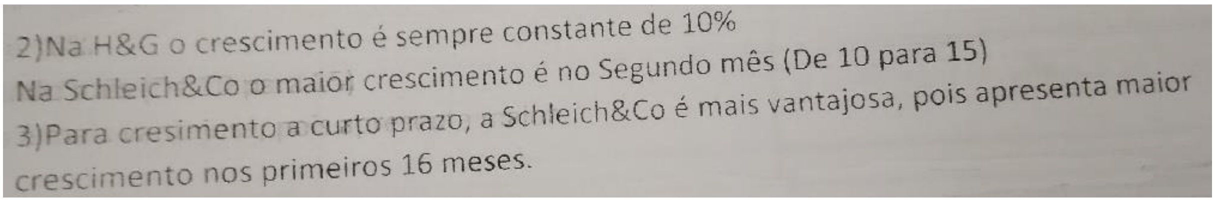

2)Na H&G o crescimento é sempre constante de 10%
Na Schleich&Co o maior crescimento é no Segundo mês (De 10 para 15)
3)Para cresimento a curto prazo, a Schleich&Co é mais vantajosa, pois apresenta maior crescimento nos primeiros 16 meses.

Figura 5 - Produção escrita do grupo G02
Fonte: autor.

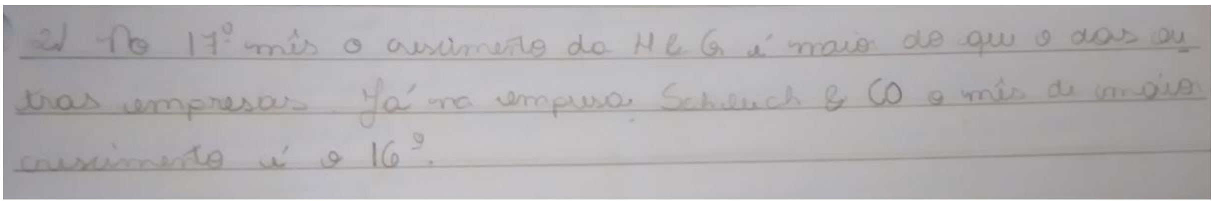

2) No 17º mês o crescimento da H&G é maior do que o das outras empresas. Já na empresa Schleich & CO o mês de maior crescimento é o 16º.

Figura 6 - Produção escrita do grupo G03
Fonte: autor.

IC3 foi adotada por grupos que utilizaram alguma estratégia de resolução em que mostram reconhecer a existência de relação de dependência entre as variáveis envolvidas, o que mostra uma compreensão da ideia variacional relacionada ao conceito de função. Assim, em algumas resoluções pode-se identificar a tentativa dos grupos em busca de uma expressão analítica para cada situação. Embora isso fosse possível para as duas primeiras empresas, no caso da Schleich & CO grande parte desses grupos não conseguiu identificar o tipo função sugerido pelo crescimento da empresa. Um exemplo de solução desse tipo é mostrado nas Figuras 7 e 8. Ao ser questionado sobre sua resolução durante a aula, G05 mencionou utilizar a fórmula de juros compostos aprendida no Ensino Médio. Já no grupo G14, os estudantes recorreram à lei de formação de uma função afim para a primeira empresa, a partir dos dados observados na tabela e, ao serem questionados, associaram os valores utilizados aos coeficientes angular e linear da reta.

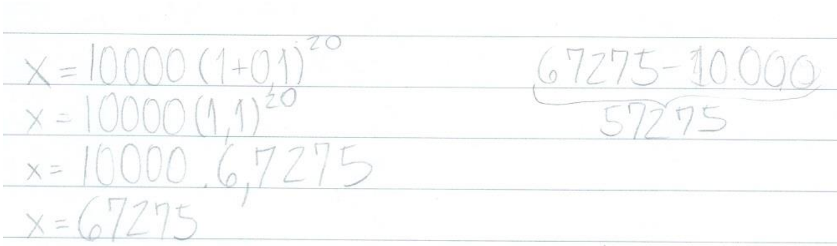


Figura 7 - Produção escrita do grupo G05
Fonte: autor.

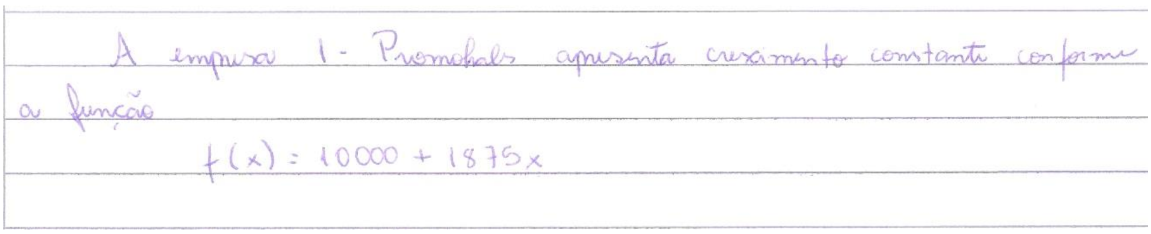


Figura 8 - Produção escrita do grupo G14
Fonte: autor.

No caso de G01 (Figuras 9 e 10), o grupo ilustrou e comparou os gráficos e representações para encontrar a empresa mais vantajosa, com a ferramenta do Excel. Nota-se que este grupo utilizou a ferramenta “gráfico” do *software*, mostrando e evidenciando uma representação gráfica simultânea das três empresas, podendo observar qual empresa será mais vantajosa em curto, médio e longo prazo, observando então o ponto que será o encontro “equilíbrio” das empresas.

Destacamos que esse tipo de representação pode gerar junto às equipes uma discussão de concavidades das curvas, conceito importante para o entendimento do comportamento de uma função e compreensão do conceito de derivada. Além disso, reconhece-se no uso da tecnologia feito por esse grupo elementos apontados por Borba, Silva e Gadanidis (2015), na medida em que esta contribuiu para a exploração diversificada das formas de resolução da tarefa e manipulação dinâmica dos objetos construídos.

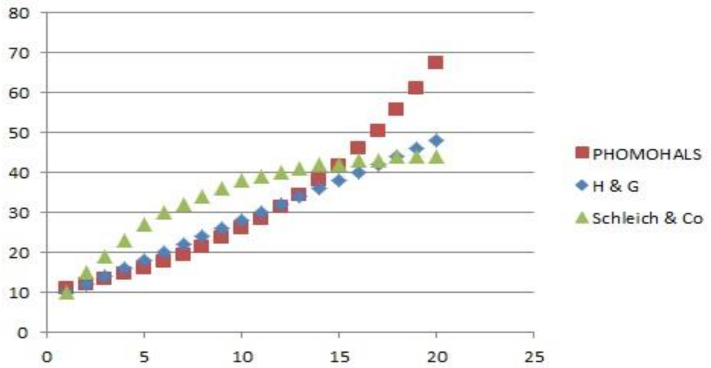


Figura 9 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor.

Nos primeiros 15 meses a agência mais vantajosa é a agêncis Schleich & Co.
A partir do 16º mês, a agência PHOMOHALS passa a ser a mais vantajosa para a empresa.

Figura 10 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor.

Em IC4 há oito resoluções nas quais os estudantes constroem seus argumentos a partir de ideias intuitivas do conceito de concavidade de uma curva. Isso fica evidenciado no uso de termos de curto, médio e longo prazo para identificar pontos nos quais, a taxa de crescimento de uma empresa supera a da outra (Figura 11).

3. A forma de crescimento evidencia que:
. a curto prazo a Schleich&Co. apresenta maior crescimento
. a médio prazo (10 meses): a Schleich&Co. ainda apresenta melhores resultados
. a longo prazo (20 meses): a H&G Adversiting apresenta crescimento consolidado e contínuo progressivo.

Figura 11 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

Por fim, em IC6 temos a utilização da comparação entre termos consecutivos, por meio da diferença entre os termos “atual” e “anterior” das sequências; quatro grupos utilizaram essa estratégia, como é o caso de G07, cuja análise para agência "*Promohals*" é mostrada na Figura 12.

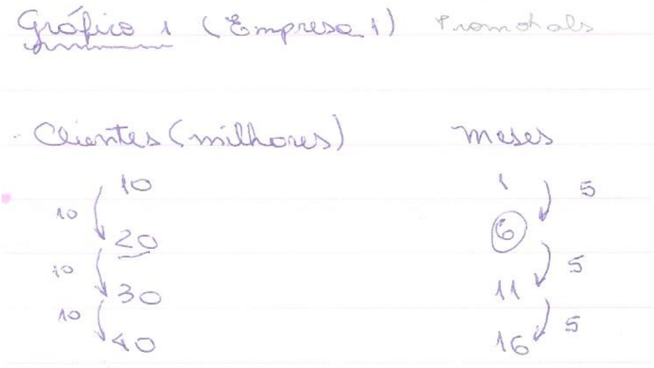


Figura 12 - Produção escrita do grupo G07
Fonte: autor.

Percebe-se que o grupo notou certa regularidade de crescimento, sendo de forma constante mês a mês, e que para facilitar a interpretação, o grupo tabelou os dados (pois estes estavam dispostos em um gráfico). O mesmo grupo utilizou estratégia similar para tentar encontrar alguma regularidade na agência "*Schleich & CO"* (Figura 13).

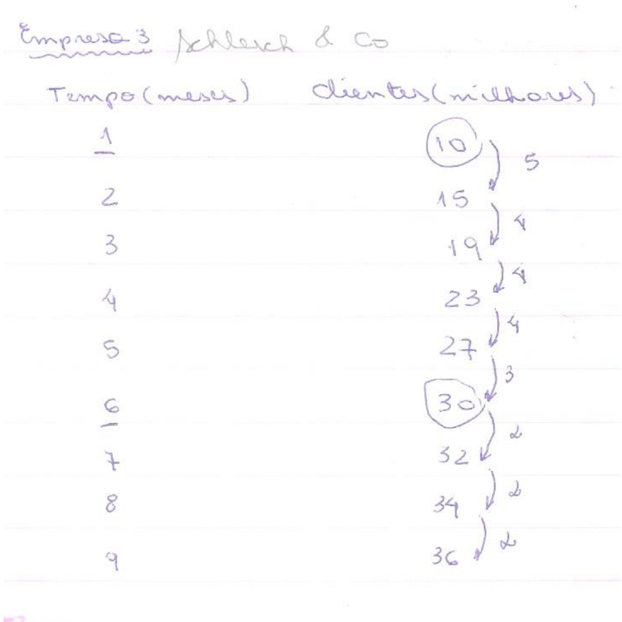
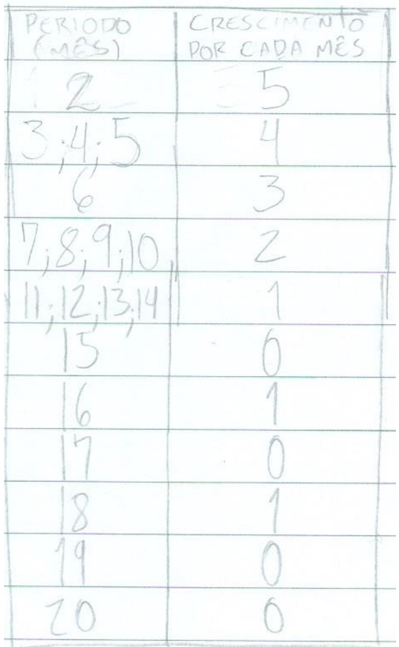


Figura 13 - Produção escrita do grupo G07
Fonte: autor.

Também o grupo G05 apresenta uma análise por meio da diferença entre os termos consecutivos, porém apenas para agência 3 (Figura 14).



PERIODO (MÊS)	CRESCIMENTO POR CADA MÊS
2	5
3;4;5	4
6	3
7;8;9;10	2
11;12;13;14	1
15	0
16	1
17	0
18	1
19	0
20	0

Figura 14 - Produção escrita do grupo G05
Fonte: autor.

Ambos os grupos destacam em sua análise que na empresa 3 o crescimento começa “alto” comparado com as demais agências, porém no 15º mês o crescimento começa estabilizar, não sendo vantajoso em longo prazo.

O uso de diferença entre termos consecutivos possibilitou, a partir da discussão gerada na apresentação da resolução dessas equipes, a sistematização do conceito de sequências de diferenças, tópico intimamente relacionado às ideias iniciais de taxa média de variação.

De forma geral, conforme apontado por Stein e Smith (2009, p.105), os dados coletados indicam que essa tarefa, pensada como “um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular” (no caso, o estudo de sequências numéricas), evidenciou, nos cinco agrupamentos analisados, compreensão acerca de uma das “grandes ideias” possíveis de serem exploradas e que, a partir da socialização feita pelas equipes, puderam ser sistematizadas nas aulas subsequentes.

A partir da primeira análise desse primeiro ciclo, observamos que os grupos lidaram com a tarefa com diversas estratégias, resoluções, procedimentos e representações conforme preconizado por Borba, Silva e Gadanidis (2015, p. 52) ao destacarem que as tarefas devem possibilitar a “criação de diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas”. De modo geral, souberam lidar com diferentes tipos de comportamentos de sequências apresentadas utilizando diferentes registros (tabela, gráfico e descrição verbal).

A resolução dessa tarefa não exigiu a manipulação de procedimentos considerados rotineiros e nem pressupôs que estudantes recorressem a uma estratégia “pronta e acabada”, podendo ser resolvida por diferentes estratégias e fazendo uso de diferentes procedimentos, mostrando assim estar alinhada aos pressupostos da RME. Ao invés de fornecer explicações ou apresentar definições, no momento da resolução da tarefa o papel do professor foi incentivar os grupos a apresentar e discutir suas ideias.

Por meio dessa categorização, foi possível identificar características que aproximam esse episódio como exitoso, o que nos permitiu concluir que a tarefa foi suficientemente clara para os objetivos que pretendia alcançar (não havendo, portanto, indicações da necessidade de reformulá-la).

4.2 TAREFA 1 - 2º CICLO

Para o segundo ciclo de aplicação, a tarefa foi considerada adequada e mantida para trabalharmos os conceitos iniciais de sequência e também introduzir e discutir o conceito de sequências de diferenças. As ideias e conceitos explorados pelos 9 grupos que trabalharam com a tarefa são mostrados no Quadro 5.

	Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados	**Grupos**
IC1	Sequências como funções particulares	G04, G07.
IC2	Crescimento/Decrescimento	G02, G03, G04, G07.
IC3	Funções como relação variacional	G01, G02, G03, G07, G08, G09.
IC4	Concavidade	G02, G03, G04, G07, G09.
IC5	Diferença entre termos consecutivos	G01, G05, G08.
IC6	Taxa de variação média	G06

Quadro 5 - Análise da tarefa 1 do 2º ciclo
Fonte: autor.

Durante o segundo ciclo observou-se que novamente os grupos mobilizaram diferentes ideias e conceitos, como reconhecer diferentes tipos de sequências, comportamento crescente, concavidade, elaboração e identificação de leis de formação como de juros compostos e função afim, diferença entre termos consecutivos e, em especial, a ideia de taxa de variação média (não explicitada no ciclo anterior). A título de exemplo, trazemos a seguir recortes de alguns encaminhamentos dados pelos grupos na resolução das tarefas, com o intuito de complementar a análise realizada no ciclo anterior.

Na IC1, identificamos resoluções em que os grupos relacionaram o comportamento das sequências das empresas em questão a sequências particulares. No caso de G07, evidenciamos a resposta classificando-a como uma progressão aritmética (Figura 15), ou seja, uma sequência como função particular.

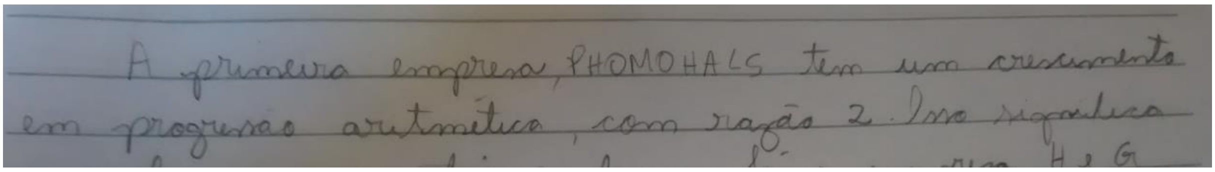


Figura 15 - Produção escrita do grupo G07
Fonte: autor.

Já na IC2, temos a identificação das sequências crescentes em períodos de tempo (no caso meses), em que uma empresa tem um crescimento melhor frente à outra (Figura 16).

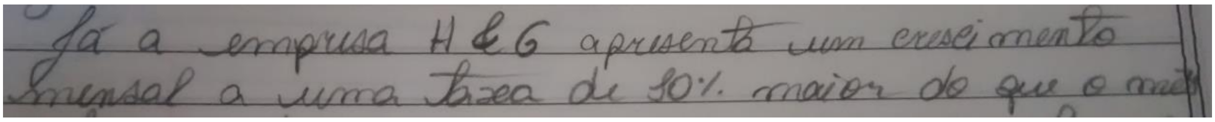


Figura 16 - Produção escrita do grupo G02
Fonte: autor.

A ideia de função como relação variacional (IC3) aparece, por exemplo, na produção de G01 e G02, que utilizaram, respectivamente, uma fórmula associada a progressões geométricas e a juros compostos para lidar informações da agência 2 (Figuras 17 e 18). Já G09 (Figura 19) utiliza o gráfico como recurso para observar as três empresas de forma simultânea, buscando assim a transição de dados tabelados, de expressões algébricas para forma gráfica comparativa, auxiliando assim observar os meses quando uma empresa será mais vantajosa que a outra.

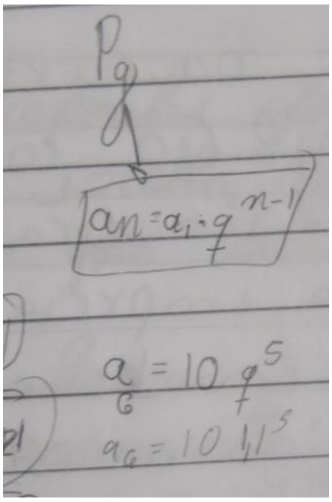


Figura 17 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor

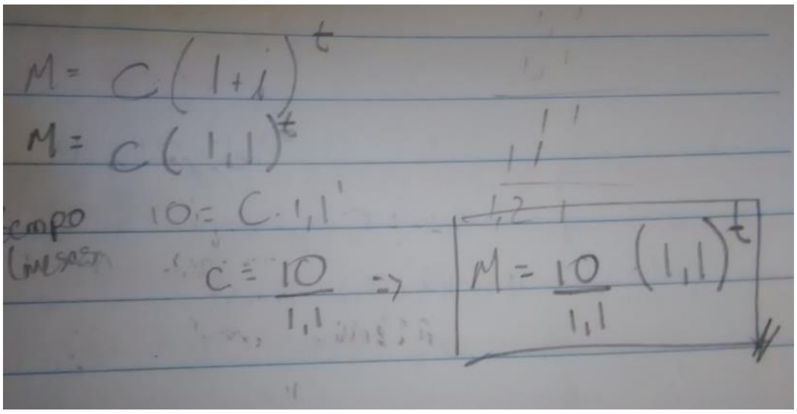


Figura 18 - Produção escrita do grupo G02
Fonte: autor.

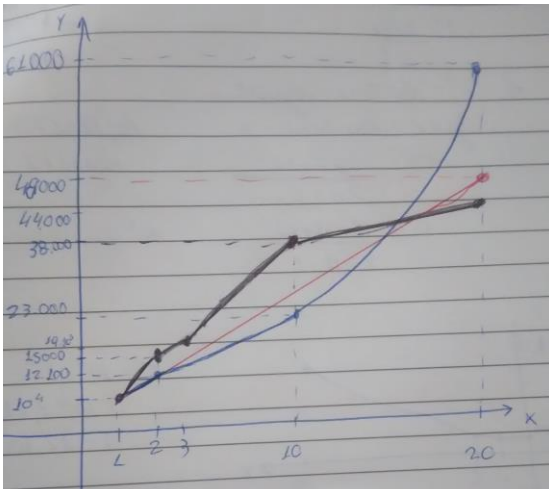


Figura 19 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

Na IC4, encontram-se com o uso de termos como curto, médio e longo prazo, que evidenciam uma compreensão sobre o modo como as funções estão crescendo (o que é pode ser associado a sua concavidade). A Figura 20 mostra a produção de um desses grupos.

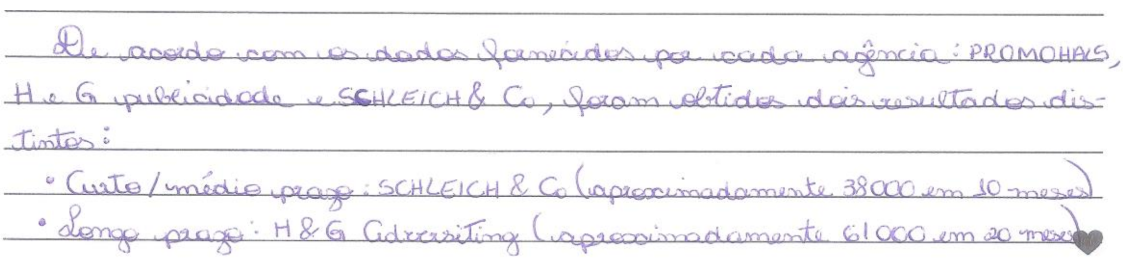


Figura 20 - Produção escrita do grupo G05
Fonte: autor.

Em IC5 temos grupos que recorreram à diferença entre termos consecutivos. No caso de G8 (Figura 21), o grupo concluiu, a partir dessa análise, que a agência 3 não é vantajosa pois seu crescimento estabiliza.

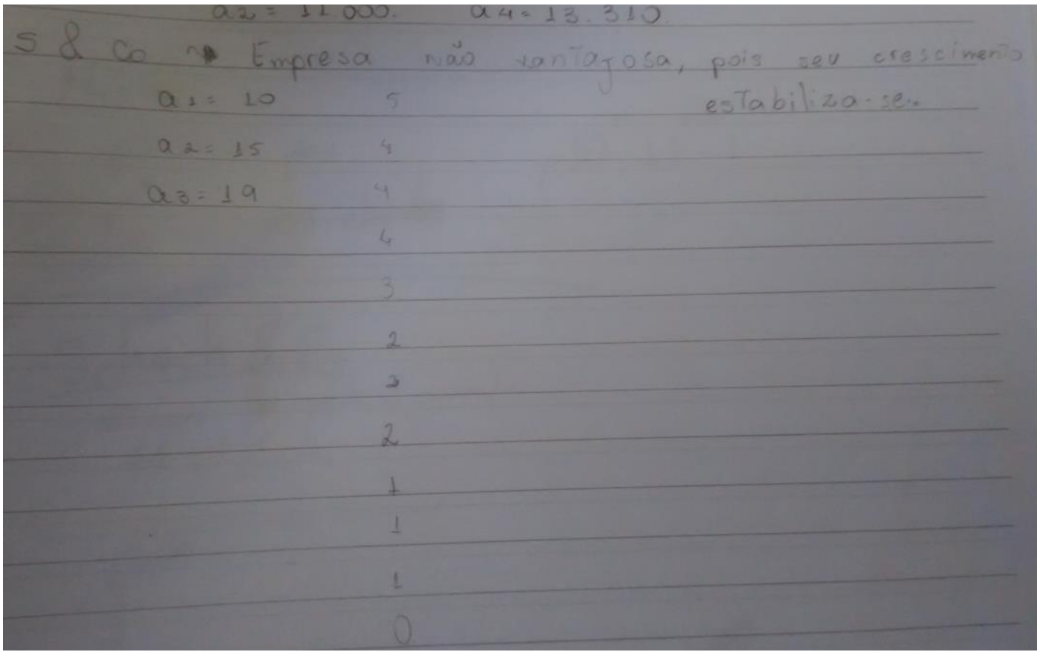
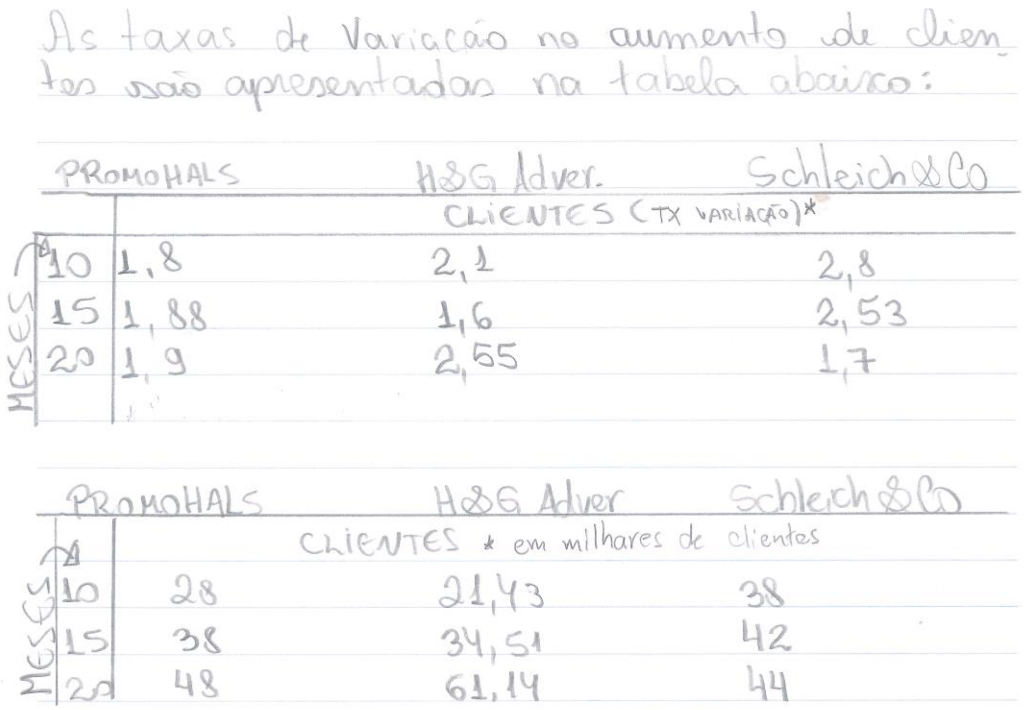


Figura 21 - Produção escrita do grupo G08
Fonte: autor.

Um aspecto interessante encontrado no segundo ciclo, na ideia e conceito IC6, foi do grupo G06, que adota o termo “taxa de variação” para resolver a tarefa; os estudantes deste grupo elencaram uma tabela com os valores encontrados nas taxas de variações entre o mês 10º, 15 º e 20 º, como mostrado na Figura 22.


As taxas de Variação no aumento de clientes são apresentadas na tabela abaixo:

MESES	PROMOHALS	H&G Adver.	Schleich&Co
Δ	CLIENTES (TX VARIAÇÃO)*		
10	1,8	2,1	2,8
15	1,88	1,6	2,53
20	1,9	2,55	1,7

MESES	PROMOHALS	H&G Adver	Schleich&Co
Δ	CLIENTES * em milhares de clientes		
10	28	21,43	38
15	38	34,51	42
20	48	61,14	44

Figura 22 - Produção escrita do grupo G06
Fonte: autor.

A partir da resolução do grupo G06, foi possível levantar, na socialização com a turma, indagações e questionamentos sobre o conceito de taxa de variação, além de introduzir os conceitos de sequências de diferenças como possibilidade para a resolução da tarefa.

A experiência com a aplicação no ciclo anterior permitiu, em termos da condução da tarefa na tarefa na turma, um refinamento em relação às intervenções realizadas. Passamos a acompanhar mais de perto o trabalho nos grupos (até por que estavam em quantidade menor), e de acordo com suas resoluções buscávamos questioná-los levando a mobilizar ideias e conceitos que planejávamos sistematizar em momento posterior, por meio de questões como “o que vocês concluem a partir da tabela?”, “a diferença do termo anterior é maior ou menor comparada com os demais termos? Quando isso acontece?”. Além disso, mais equipes foram convidadas a socializar suas resoluções, no intuito de contemplar as diferentes ideias que a tarefa potencializava.

De modo geral, a tarefa, de acordo com Stein e Smith (1998) promoveu indícios de ser de alta demanda cognitiva sendo de “procedimentos com conexão e com significado”, pois possibilitou aos estudantes utilizar “representação em múltiplos caminhos, com diagramas visuais, manipuladores, símbolos, e situações problemas, fazendo conexões entre múltiplas representações que ajudam a desenvolver os significados" (CYRINO; JESUS, 2014, adaptado de STEIN; SMITH, 1998). Além disso, exigiu um "esforço cognitivo" para a resolução, pois usualmente os grupos estão acostumados com respostas únicas de forma repetitiva, e a tarefa propôs uma reflexão sobre os resultados e não somente a busca a uma resposta correta.

4.3 TAREFA 2 - 1º CICLO

A tarefa 2 foi construída com base no conceito de sequência de diferenças apresentada por Weigand (2014). Para sua realização, enviamos aos alunos por *e-mail* o arquivo em Excel que a continha, para que fosse desenvolvida em horário extraclasse em grupos de no máximo três estudantes; a resolução foi retornada também por e-mail em data estabelecida pelo professor.

Esta tarefa (Quadro 6) tinha como objetivo principal explorar a ideia de diferença entre termos consecutivos, "termo atual menos o termo anterior". Uma definição inicial sobre sequências de diferenças havia sido feita em aula, a partir da discussão gerada da tarefa 1. O objetivo aqui foi ampliar o entendimento sobre a ideia de variação entre os termos de uma sequência.

Deseja-se investigar o comportamento térmico de um material submetido a determinado procedimento experimental. Para isso foram tomadas medidas de temperatura em ºC em intervalos de 1 em 1 hora, por um período de tempo de 12 horas. Os dados são mostrados na tabela.

Hora(s)	Temperatura
1	53,4
2	54,1
3	54,5
4	55,1
5	54,8
6	53,7
7	54,1
8	53,5
9	53,1
10	54,7
11	54,9
12	54,6

a) Construa um gráfico que ilustre os dados da tabela.
b) Estamos interessados em investigar como as temperaturas mudaram nesse período. Para isso considere a função diferença de temperatura dada por $\Delta T_n = T_{n+1} - T_n$. Construa uma tabela com os termos dessa sequência, e a represente graficamente.
c) Quanto à temperatura variou às 5 horas, se comparada à temperatura às 4 horas?
d) Em qual momento, durante o monitoramento, observou-se a maior variação de temperatura? E a menor? Justifique.

Quadro 6 - Tarefa 2: o caso da variação de temperatura
Fonte: autor, inspirado em Weigand (2014).

Nossa proposição dessa tarefa objetivou instigar os grupos a estabelecer algum tipo de relação com as discussões sobre sequências de diferenças, que havia sido iniciada em aula anterior (no caso a Tarefa 1). Em suas resoluções, porém, essa relação parece não ter ocorrido. Durante a análise da tarefa encontramos muitas resoluções “iguais” em diferentes grupos. Por se tratar de uma tarefa feita em casa, deveríamos ter previsto a “cola” entre os grupos.

Ao analisar criticamente a tarefa, observamos que ela apresentou traços de tarefa de baixa demanda cognitiva (STEIN; SMITH, 1998), sendo que os estudantes lançaram mãos de procedimentos sem conexão e com significado, focando na produção de respostas corretas ao invés do desenvolvimento da compreensão matemática. Ponte (2014), também afirma que as tarefas devem “valorizar a formulação e raciocínio matemático”, o que parece não ter ocorrido a partir da análise da tarefa. Tal fato deve-se ao modo como os questionamentos foram elaborados (fechados, não possibilitando a investigação).

Concluímos então que a tarefa foi considerada “mecânica”, por sua condução adotada (os itens a ser explorado) e precisaria ser reformulada. Uma possibilidade seria apresentá-la sem a disponibilização do Excel, e sem a subdivisão em vários itens; ao contrário, apenas um comando para que se investigasse a variação de temperaturas, como forma de motivar uma discussão sobre o papel da sequência de diferenças (variação entre termos consecutivos) na compreensão do comportamento da função (intervalos de crescimento/decrescimento e concavidade no gráfico).

Entretanto, em função da discussão do conceito central dessa tarefa (sequência de diferenças entre termos consecutivos) já ter sido desencadeada a partir da resolução dos grupos, optou-se por suprimir sua aplicação no 2º ciclo e retirá-la do produto educacional.

4.4 TAREFA 3 - 1º CICLO

A tarefa 3 do 1º ciclo é desenvolvida na segunda semana de aula do curso, sendo que trabalhamos com tarefas anteriores que envolveram a exploração de diferentes tipos de sequências. Também havia sido apresentado à turma o Geogebra, em especial a utilização de controles deslizantes e tabelas.

A tarefa era de caráter “aberto” na qual não indicamos como ela deveria ser respondida, apenas solicitou-se a análise dos parâmetros a e b no comportamento do gráfico e da sequência de diferenças, por meio do seguinte comando:

“Dadas as sequências definidas recursivamente por $a_{n+1} = an + b$ e $a_{n+1} = a_n.b$, analise, com auxílio do Geogebra, o papel dos parâmetros a e b no comportamento dessas sequências e de suas sequências de diferenças”.

Durante a execução da tarefa pode-se explorar os diversos recursos existentes no Geogebra, em especial o controle deslizante, o uso das Planilhas e da Lista de Pontos. Criados os controles deslizantes a e b, pode-se gerar os elementos da sequência com auxílio da Planilha (adotando aqui $a_1 = a$), juntamente com sua sequência de diferenças, construída na coluna ao lado. O recurso Lista de Pontos possibilita a representação gráfica de ambas.

Nas figuras 23 e 24 são mostradas as telas construídas juntamente com os estudantes para que realizem sua exploração, nas quais se pode visualizar simultaneamente, e por meio de duas formas de representação (gráfica e tabular) a sequência original e sua sequência de diferenças.

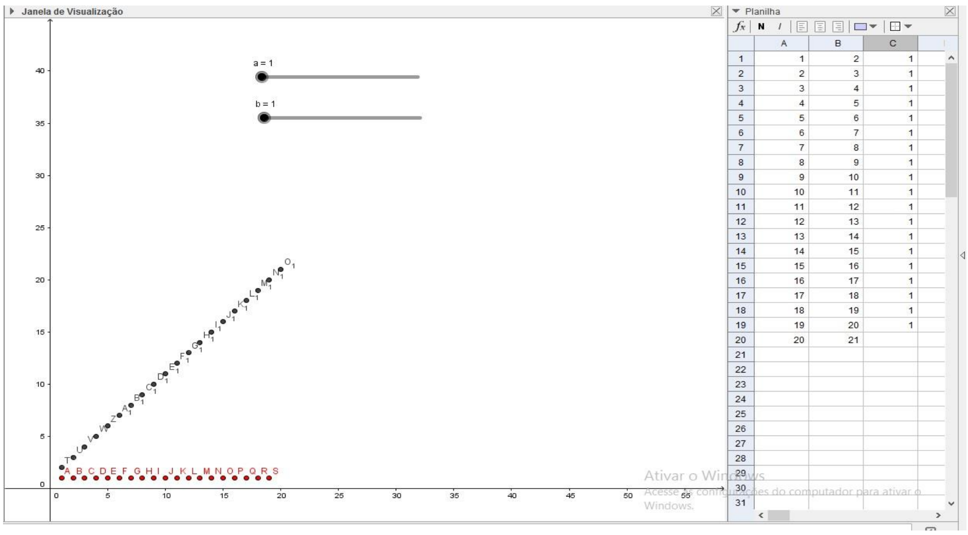


Figura 23 - Representação da sequência $a_{n+1} = an + b$ e a sequência de diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$
Fonte: autor.

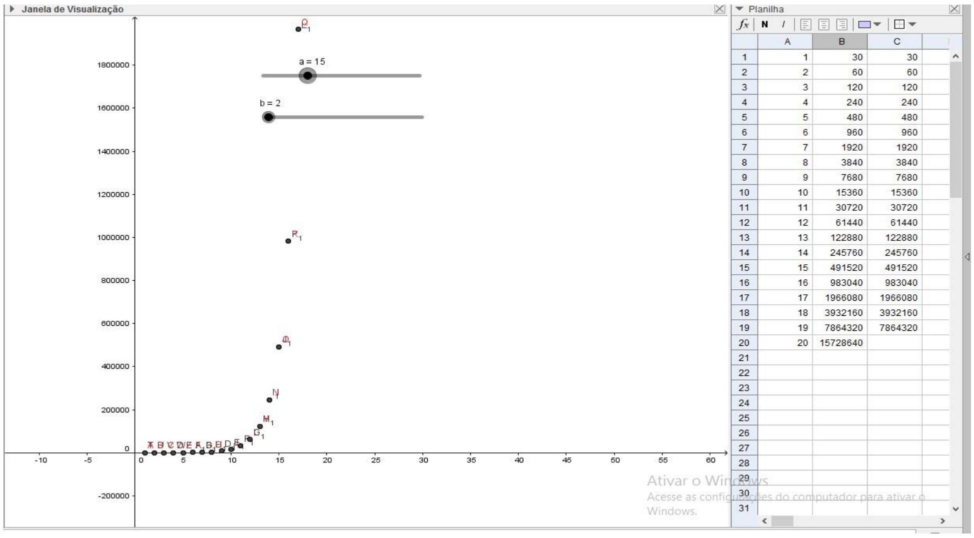


Figura 24 - Representação da sequência $a_{n+1} = a_n.b$ e a sequência de diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$
Fonte: autor.

As múltiplas representações, atreladas à dinamicidade possibilitada pelo movimento dos controles deslizantes, permitiriam investigar alguns elementos da sequência em tela em função de a *e* b: o comportamento crescente/decrescente, a relação do coeficiente a com o “modo” como a sequência (de)cresce, a (in)dependência de b na constituição da sequência de diferenças.

Para a sequência $a_{n+1} = a_n.b$, dita de comportamento exponencial, o elemento que destacamos central da investigação é a percepção dos diferentes comportamentos possíveis para sua sequência de diferenças, dependendo do valor escolhido para b. No caso em que $b \geq 2$, a sequência de diferenças, assim como a sequência original, terá também um comportamento exponencial crescente. Para $b = 1$, teremos uma sequência de diferenças nula; para $0 < b < 1$, $\{\Delta a_n\}$ é decrescente; se $b = 0$, a sequência de diferenças é nula a partir do segundo termo; para $b < 0$ temos $\{\Delta a_n\}$ alternada (convergente se $-1 < b < 0$; divergente caso contrário). Uma descrição preliminar que contém a proposição dessa tarefa foi apresentada em Fonseca e Trevisan (2016); apresentamos aqui uma versão mais detalhada, com as produções apresentadas pelos estudantes.

Para análise da tarefa, identificamos ideias e conceitos na resolução dessa tarefa, apresentados no Quadro 7.

	Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados	Grupos
IC1	Crescimento/Decrescimento	G01, G04, G05, G06, G08, G09, G13.
IC2	Funções como relação variacional	G01, G02, G06, G07, G08, G09, G10, G11, G12, G14.
IC3	Concavidade	G06, G08, G13.
IC4	Diferença entre termos consecutivos entre a sequência original e de diferenças	G04, G06, G07, G08, G12, G14.
IC5	Coeficiente angular da reta	G02, G04, G13.
IC6	Inclinação	G03, G12.

Quadro 7 - Análise da tarefa 3 do 1º ciclo
Fonte: autor.

Na análise de IC1, encontramos sete grupos que reconheceram de algum modo os papéis que a e b têm na sequência original, alterando seu comportamento em crescente ou decrescente, como encontrado nas resoluções dos grupos G06 e G08 (Figuras 25 e 26).

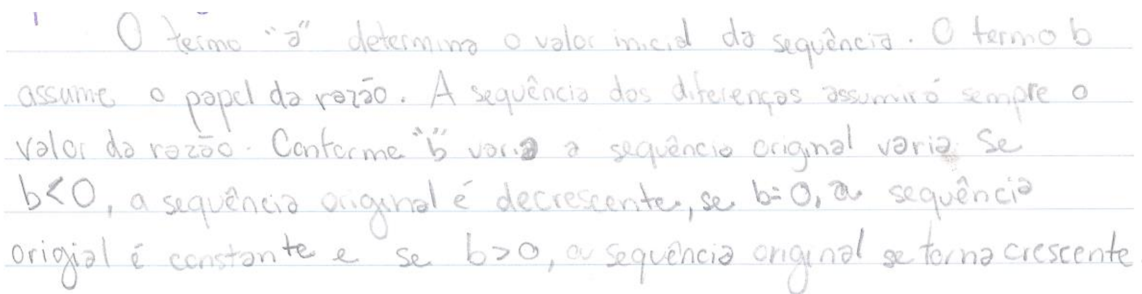

1 O termo "a" determina o valor inicial da sequência. O termo b assume o papel da razão. A sequência das diferenças assumirá sempre o valor da razão. Conforme "b" varia a sequência original varia. Se b<0, a sequência original é decrescente, se b=0, a sequência original é constante e se b>0, a sequência original se torna crescente.

Figura 25 - Produção escrita do grupo G08
Fonte: autor.

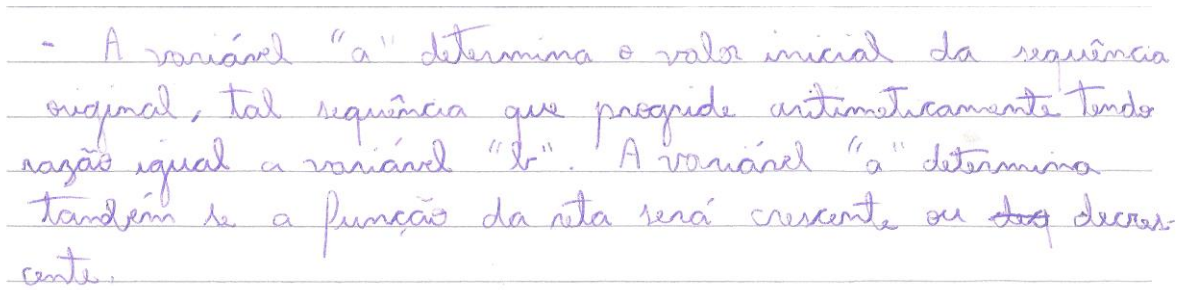

- A variável "a" determina o valor inicial da sequência original, tal sequência que progride aritmeticamente tendo razão igual a variável "b". A variável "a" determina também se a função da reta será crescente ou ~~dec~~ decrescente.

Figura 26 - Produção escrita do grupo G06
Fonte: autor.

Em IC2 esperávamos que os estudantes explicitassem, em suas explorações, em que medida os parâmetros a e b provocavam variações nas sequências originais e de diferenças. Encontramos dez grupos que explicitaram esse tipo de ideia, como mostrado nas Figuras 27 e 28. No caso de G01, o grupo adota um valor fixo para o parâmetro a e destaca diferentes papéis que o parâmetro b pode ter na sequência original $a_{n+1} = a_n.b$, com descrições observadas pelo uso do controle deslizante do software. Evidencia, assim, que o grupo lançou mão de potencialidades do Geogebra e soube utilizá-lo de forma criativa e organizado, contemplando em sua análise diferentes tipos de relações. Já G04, apresenta uma análise bastante limitada, associando, no caso sequência de comportamento exponencial, situações nos quais o parâmetro b é positivo ou negativo.

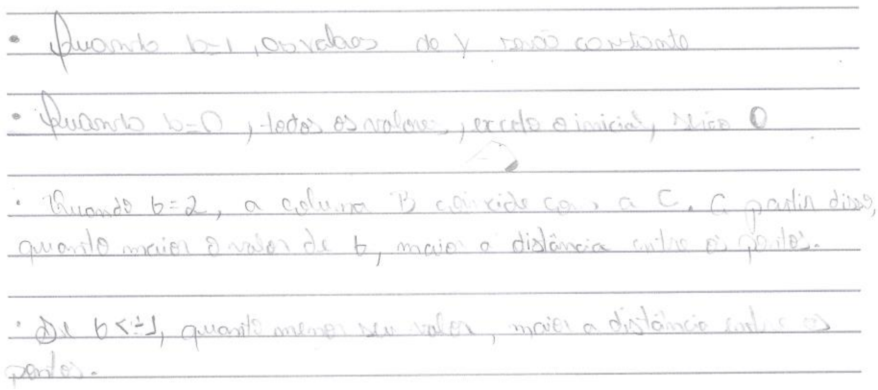

• Quando b=1, os valores de y serão constantes
• Quando b=0, todos os valores, exceto o inicial, serão 0
• Quando b=2, a coluna B coincide com a C. A partir disso, quanto maior o valor de b, maior a distância entre os pontos.
• Se b<-1, quanto menor seu valor, maior a distância entre os pontos.

Figura 27 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor.

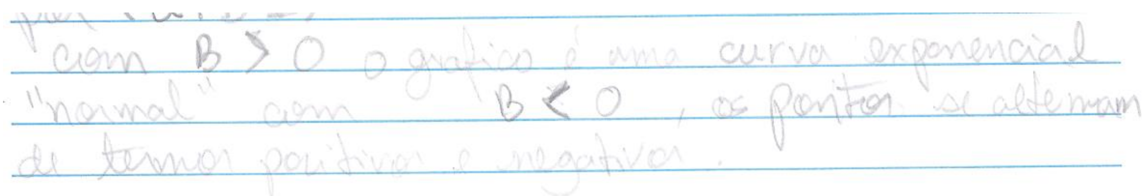

com B > 0 o gráfico é uma curva exponencial "normal" com B < 0, os pontos se alternam de termos positivos e negativos.

Figura 28 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

A ideia de concavidade aparece em algumas produções agrupadas em IC3, em que, de maneira intuitiva, os grupos reconhecem mudanças na curva em função da alteração dos parâmetros investigados, por meio do uso de expressões como “comportamento até certo ponto”, ou mudança na “curvatura” do gráfico.

No que diz respeito ao IC4, esperávamos que as equipes reconhecessem os papéis dos parâmetros a e b na variação entre os termos consecutivos, tanto nas sequências originais quanto nas sequências de diferenças. Muitos grupos acabaram por focar a atenção ao papel dos parâmetros apenas no comportamento da sequência original; apenas seis grupos exploraram os parâmetros olhando também a sequência de diferenças.

Nota-se que o grupo G12 (Figura 29), por exemplo, utilizou a expressão "aumento do intervalo entre os pontos", que remete a essa ideia, e explicitou que para a sequência de diferenças da sequência $a_{n+1} = an + b$, há um comportamento constante de valor 3.

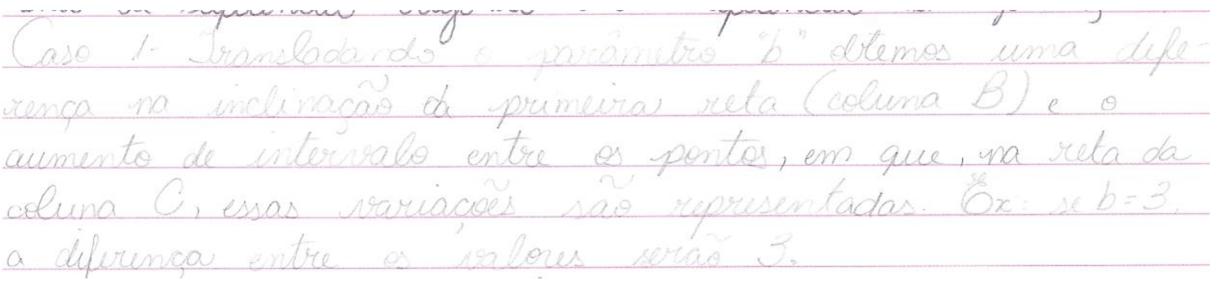

Caso 1: Transladando o parâmetro "b" obtemos uma diferença na inclinação da primeira reta (coluna B) e o aumento de intervalo entre os pontos, em que, na reta da coluna C, essas variações são representadas. Ex: se b=3, a diferença entre os valores serão 3.

Figura 29 - Produção escrita do grupo G12
Fonte: autor.

Na produção do grupo G14 (Figura 30), os estudantes exploraram os parâmetros, descrevendo mudanças na sequência original e na sequência de diferenças, evidenciando o papel de a e b nas duas situações.

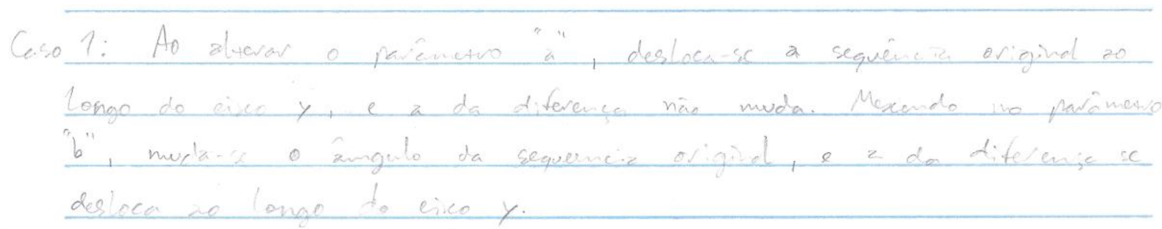

Caso 1: Ao alterar o parâmetro "a", desloca-se a sequência original ao longo do eixo y, e a da diferença não muda. Mexendo no parâmetro "b", muda-se o ângulo da sequência original, e a da diferença se desloca ao longo do eixo y.

Figura 30 - Produção escrita do grupo G14
Fonte: autor.

No caso de IC5, identificamos termos como "coeficiente angular", associado aos casos em que a curva era uma reta. Assim, o grupo G04 (Figura 31), evidenciou que a mudança no controle deslizante b, altera o coeficiente angular, além do controle a movimentar o termo independente.

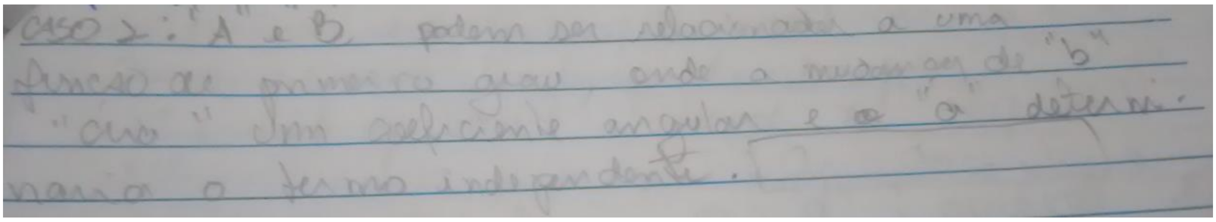


Figura 31 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

No grupo G13, há uma relação com o comportamento da função frente aos controles deslizantes, classificando o coeficiente angular da expressão do segundo gráfico como "sinuoso" (Figura 32).

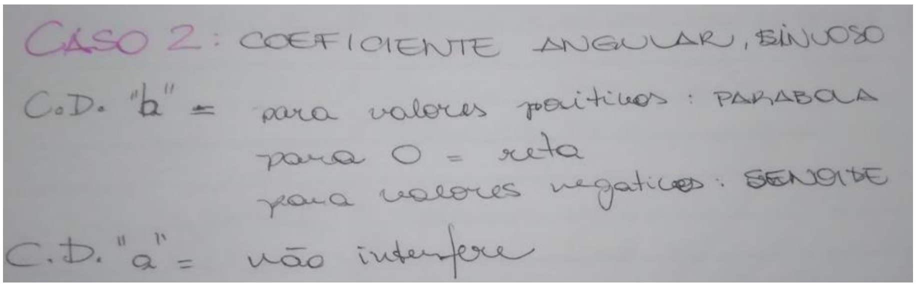


Figura 32 - Produção escrita do grupo G13
Fonte: autor.

Por fim, em IC6, incluímos a produção de G03 (Figura 33), na qual identificamos uma compreensão mais ampla do conceito de "inclinação", não restrita a gráficos de relações lineares (retas - no caso de IC5), mas aplicável a qualquer curva. O grupo relacionou essa "inclinação" da curva com o movimento dos controles deslizantes, ou seja, parâmetros a e b.

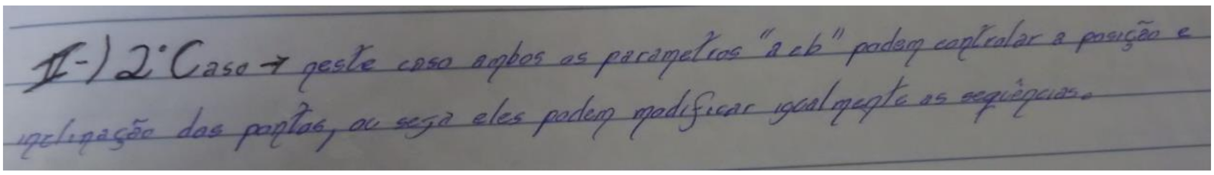


Figura 33 - Produção escrita do grupo G03
Fonte: autor.

4.5 TAREFA 2 - 2º CICLO

No segundo ciclo, essa tarefa foi ampliada em relação à proposição no ciclo anterior. No momento em que foi proposta, a ideia de sequência como função cujo domínio são os números inteiros positivos, ou seja, $f : IN \rightarrow \Re$, havia sido estendida para funções definidas em Z (inteiros), ou seja, $f : Z \rightarrow \Re$. Essas funções f com $y = f(z)$ funcionam como “sequências estendidas”, na proposta de Weigand (2014). Além disso, além dos casos linear e exponencial, presentes no ciclo anterior, também foi proposta a exploração de uma sequência descrita por uma expressão quadrática. Na Figura 34 representamos essa função, com expressão dada por $f(z) = az^2 + bz + c$, e a sequência de diferenças associada. Nessa nova formulação, as sequências que remetiam às funções linear e exponencial foram apresentadas a partir da fórmula do seu termo geral, e não mais por meio de definição recursiva. Desse modo, o enunciado proposto passou a ser o seguinte:

“Dadas às sequências definidas $f(z) = a(z-1) + b$, $f(z) = az^2 + bz + c$ e $f(z) = a.b^{z-1}$, analise, com auxílio do Geogebra, o papel dos parâmetros a e b no comportamento dessas sequências e de suas sequências de diferenças”.

O objetivo da tarefa permaneceu o mesmo: investigar o comportamento de cada sequência e da sequência de diferenças de diferenças associada, movimentando os controles deslizantes, buscando assim similaridades de comportamento, concavidade e inclinação (no gráfico da sequência original temos pontos de uma parábola e no da sequência de diferenças pontos de uma reta).

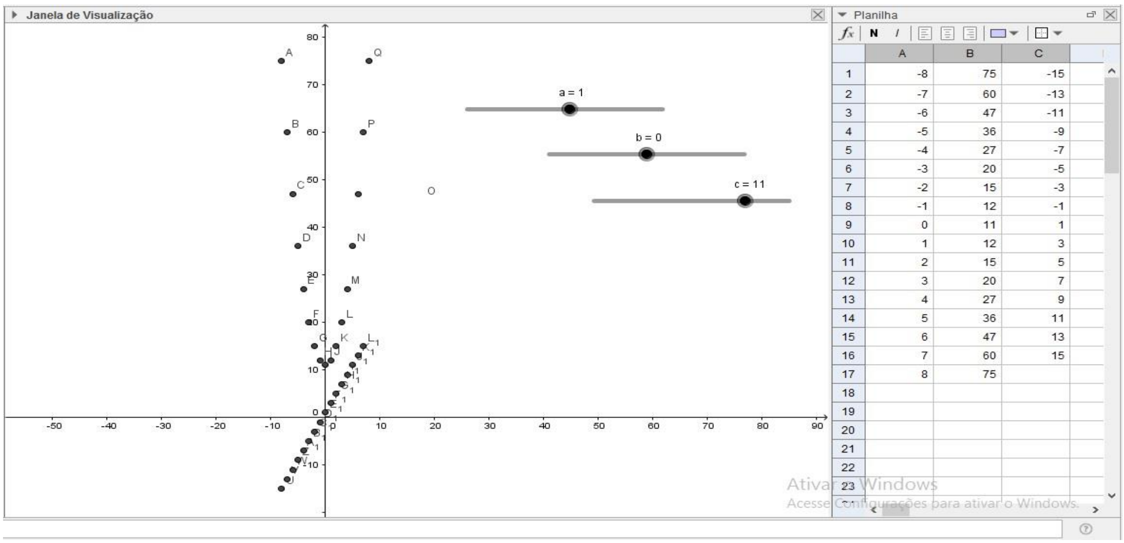


Figura 34 - Representação da função $f(z) = az^2 + bz + c$ e na função de diferença $\Delta f(z) = f(z+1) - f(z)$
Fonte: autor.

A introdução dessa sequência definida por expressão quadrática possibilitou no estabelecimento de relações mais significativas associadas às ideias de concavidade e inclinação, bem como relações explícitas entre crescimento/decrescimento da sequência e sinal dos termos da sequência de diferenças. O Quadro 8 sintetiza as ideias e conceitos mobilizados pelos grupos ao lidar com a sequência $f(z) = az^2 + bz + c$.

	Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados	**Grupos**
IC1	Crescimento/Decrescimento	G01, G02, G03, G04, G05, G06, G07, G08, G10, G11.
IC2	Concavidade	G01, G03, G05, G06, G07, G09, G11.
IC3	Diferença entre termos consecutivos	G01, G02, G03, G04, G05, G06, G07, G08, G09, G10, G11.
IC4	Coeficiente angular da reta tangente	G01.
IC5	Inclinação	G01.

Quadro 8 - Análise da tarefa 2 do 2º ciclo
Fonte: autor.

Em IC1, temos as ideias e conceitos sobre crescimento e decrescimento da sequência original e da sequência de diferença. Ao movimentar os controles deslizantes a, b e c, esses grupos estabeleceram alguma relação entre o seu sinal e o comportamento gráfico das sequências (se os controles faziam com que as sequências crescessem ou decrescessem).

Na Figura 35 apresentamos parte da produção do grupo G04, que explorou, com auxílio do Geogebra, intervalos em que a sequência de diferenças é positiva, negativa ou nula, e sistematizou os resultados lançando mão de notações como $\Delta f > 0, \Delta f < 0$ e $\Delta f = 0$.

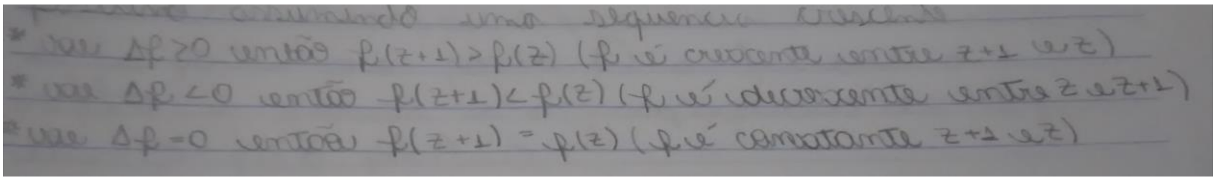


Figura 35 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

Em IC2, agrupamos produções nas quais os grupos, ao explorarem os parâmetros, estabelecem relações entre seu movimento e a variação na concavidade da curva. Nas Figuras 36 e 37, encontramos a resolução feita por grupos que relacionaram o comportamento crescente e descrente da sequência de diferenças com a concavidade da parábola (que representava a função original). Resoluções como essa, apresentadas por sete grupos, explicitam de forma bastante sistematizada, uma relação importante entre o sinal dos termos da sequência de diferenças e a concavidade do gráfico que representa a sequência original.

Evidenciam-se as potencialidades da tarefa, atrelada ao uso da tecnologia, em termos da criação e conexão entre múltiplos tipos de representações de objetos matemáticos que foram socializadas com a turma, e que não haviam sido explicitadas no 1º ciclo da tarefa, quando propusemos explorar apenas as funções linear e exponencial. Possivelmente, a percepção dessa relação direta entre o sinal da sequência de diferenças e a concavidade foi potencializada por conta da inserção da expressão quadrática, que remete ao uso do termo "concavidade", usualmente tratado no Ensino Médio.

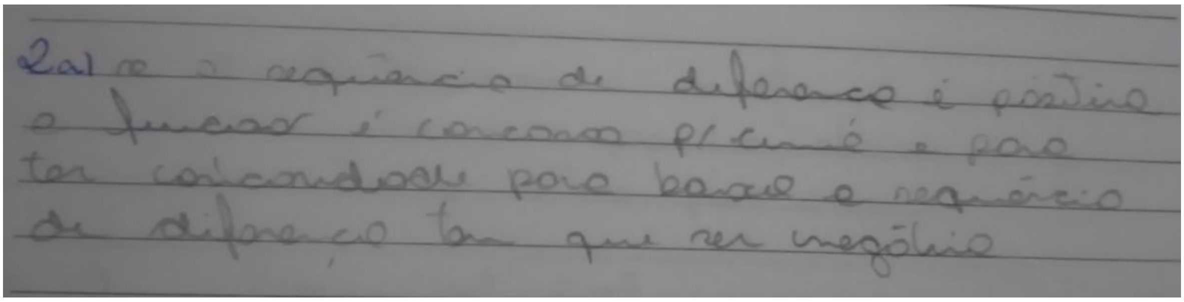

2a) se a sequência de diferença é positiva a função é concava p/ cima e para ter concavidade para baixo a sequência de diferença tem que ser negativa

Figura 36 - Produção escrita do grupo G05
Fonte: autor.

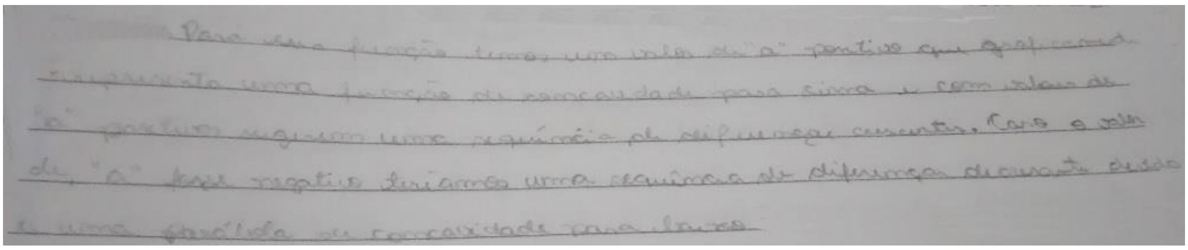

Para uma função temos um valor de "a" positivo que graficamente representa uma função de concavidade para cima e com valores de "a" positivo seguimos uma sequência de diferenças crescentes. Caso o valor de "a" fosse negativo teríamos uma sequência de diferenças decrescente dando a uma parábola de concavidade para baixo.

Figura 37 - Produção escrita do grupo G03
Fonte: autor.

O estabelecimento de alguma relação entre as sequências de diferenças e as ideias de coeficiente angular da reta/inclinação (IC4 e IC5) fica evidenciado apenas na produção no grupo G01. Das Figuras 38 e 39, destacamos ideias que o grupo desenvolveu a partir de uma escolha particular de valores dos parâmetros, no caso $f(z) = z^2 - 2z + 3$, e que puderam ser discutidas e sistematizadas na turma após a socialização dessa resolução: (i) a relação entre a concavidade da curva e a inclinação da reta que representa a sequência de diferenças; (ii) a existência de pontos de máximo/mínimo associadas ao sinal da sequência de diferenças; (iii) a relação entre a inclinação da reta e a tangente do ângulo que ela forma com o eixo *x*.

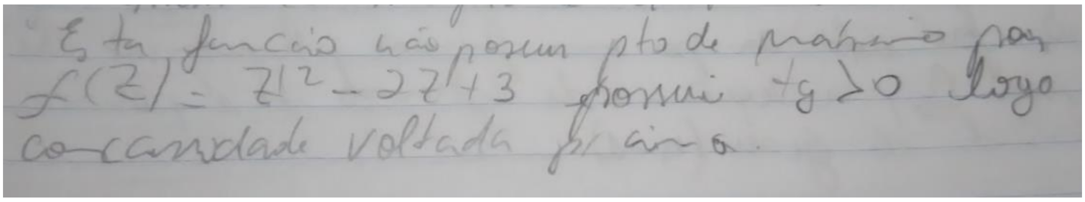


Figura 38 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor.

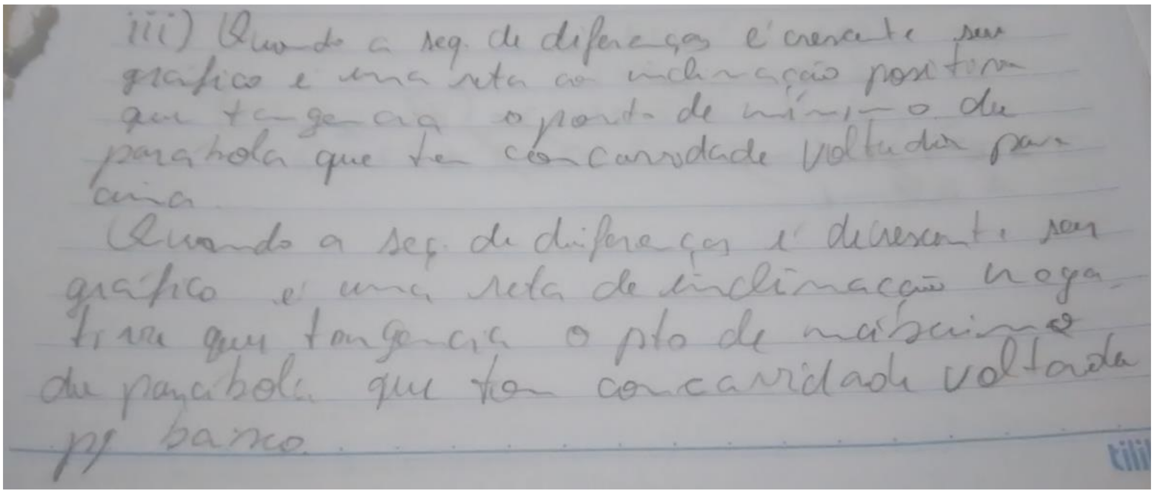


Figura 39 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor.

Apesar das contribuições visual e dinâmica que o software proporcionou, observamos que a falta de sistematicidade no movimento dos controles fazia com que os estudantes não levantassem muitas conjecturas ou observassem padrões no comportamento da sequência de diferenças. Mostrou-se necessário reformular essa tarefa para ser aplicada no segundo ciclo, com sugestões mais “direcionadas” de análise em casos, como $b < 0$ e $a < 0$, ou $b > 0$ e $a = 0$, etc.

4.6 TAREFA 4 - 1º CICLO

A realização dessa tarefa foi antecedida pelo estudo do conceito de convergência de uma sequência e introdução da noção de limite de uma sequência. Embora não seja um tema explícito na ementa de CDI 1 (sendo aprofundado, na verdade, em CDI 3), é explorado de forma intuitiva, no sentido de permitir sua utilização na sistematização do conceito de derivada a partir da ideia de limite de uma sequência de quocientes de diferenças. A tarefa 4 vem com o objetivo de possibilitar essa exploração. Parte dessa tarefa (item 1) é adaptada a partir da proposta de D'Avoglio (2002); já o item 2 foi construído baseando-se nas ideias de Weigand (2004, 2014).

A tarefa toma como ponto de partida conceitos da Física usualmente aprendida no Ensino Médio (velocidade média), e é proposta em dois itens: o primeiro visa problematizar o conceito de velocidade partindo do conceito de velocidade média $Vm = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (um quociente de diferenças), a partir dos dados dispostos em uma tabela, indagando-os se a velocidade média de 72 km/h ou 20m/s foi superada a algum momento durante o trajeto do carro na rodovia em um espaço de 720m, percorrendo esse trajeto em 40 segundos. Para tal, sugerimos a utilização de representações gráficas e numéricas no intuito de levar os grupos a concluírem que não é possível determinar o momento exato que a velocidade foi superada, apenas é possível determinar o intervalo de tempo que ela superou.

O segundo item visa propor "refinar" o conceito de velocidade média tomando intervalos de tempo cada vez menores; considera um intervalo inicial de tempo $1 \le t \le 2$ e, por meio de suas subdivisões, estimar a velocidade no instante $t = 1$ (por meio do conceito de limite de uma sequência de quocientes de diferenças). Procurou, forma intuitiva, explorar um conceito que no momento da socialização e sistematização do conceito de derivada no ponto (no caso, a derivada de $s(t) = t^2$ em $t = 1$). O enunciado da tarefa nessa primeira formulação foi o seguinte:

Um dos temas importantes do Cálculo é o estudo do movimento. Para descrever completamente o movimento de um objeto é necessário especificar sua velocidade, a direção e o sentido em que está se movendo. Neste curso, consideraremos apenas o movimento ao longo de uma reta (retilíneo). Alguns exemplos são um pistão movendo-se em um cilindro, um carro de corrida em uma pista reta, um objeto largado diretamente do alto para baixo, etc. Uma descrição gráfica do movimento retilíneo de uma partícula pode ser obtido com a posição s da partícula em função do tempo decorrido t desde o instante inicial $t = 0$.

1. A cada intervalo de 5 segundos observa-se a posição de um carro numa rodovia, com a finalidade de observar se em algum momento sua velocidade superou a máxima permitida de 72 km/h. Com os dados obtidos construiu-se a seguinte tabela:

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
s (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) De forma manuscrita, esboce o gráfico da posição x tempo.
b) Durante quanto tempo você acha que a velocidade foi inferior a 18 m/s?
c) Faça uma estimativa da velocidade do carro no momento em que o cronômetro indica 20 segundos.
d) Você acha que em algum momento a velocidade máxima permitida foi superada? Justifique.

2. Considere um objeto em movimento retilíneo cuja posição, em metros, é descrita em função do tempo (em segundos), por meio da equação $s(t) = t^2$. Estamos interessados em obter a velocidade da partícula no instante $t = 1$. Uma maneira é calcular velocidades médias para intervalos de tempo muito "pequenos" em torno de $t = 1$.

a) Faça esse cálculo para o intervalo de tempo $1 \leq t \leq 2$.
b) Refaça o item anterior, considerando, em cada caso o primeiro dos subintervalos obtidos da divisão de $1 \leq t \leq 2$ em:
i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) 5 partes
c) Generalize, por meio de uma fórmula, a ideia acima.
d) Os resultados obtidos anteriormente formam uma sequência. Utilize o Geogebra para investigar sua convergência. Explique o que o resultado observado significa, em termos do problema.

Para análise dos dados elencamos no Quadro 9 as principais ideias e conceitos envolvidos nessa tarefa 4. Não elencamos os grupos nas quais essas ideias e conceitos apareceram, pois, diferente das anteriores, esses foram explicitamente contemplados no enunciado na tarefa. Não emergiram da interação do grupo com a tarefa, como desejávamos.

	Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
IC1	Taxa de Variação Média
IC2	Taxa de Variação Instantânea
IC3	Convergência

Quadro 9 - Análise da tarefa 4 do 1º ciclo
Fonte: autor

No caso do item (a) da questão 1, foi solicitado aos grupos o esboço do gráfico posição x tempo. Nosso intuito, ao propor esse item, era que os grupos percebessem a não-linearidade do fenômeno investigado. Porém, várias equipes desconsideram a escala na representação, linearizando os dados, como mostrado na Figura 40. A partir da análise das resoluções e da experiência de aplicação da tarefa, inferimos que o objetivo com esse item não foi atingido.

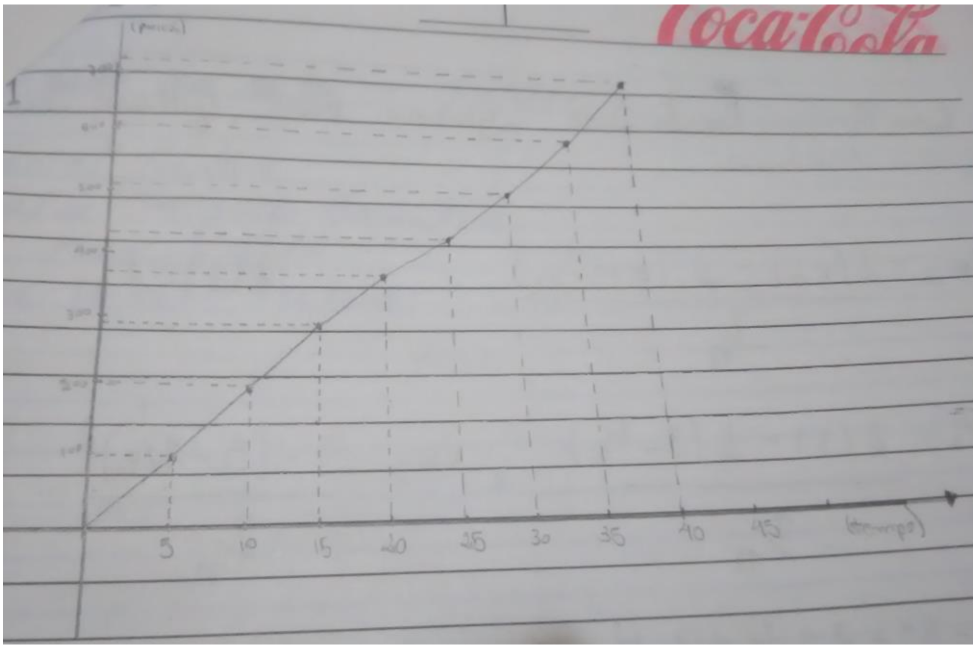


Figura 40 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

Apesar de muitas equipes apresentaram resoluções mecânicas dos itens seguintes, sem que os problematizassem (descaracterizando assim o processo de criação matemática almejado), destacamos em nossa análise algumas resoluções pontuais que apareceram nos grupos e serviram como ponto de partida para discussão na sala e sistematização de conceitos.

Por exemplo, no item (b) da primeira questão, em que os grupos deveriam investigar durante quanto a velocidade foi inferior a 18 m/s, vários realizaram o quociente entre o valor da posição e o instante em que aquela posição era ocupada, considerando-o como a velocidade no instante considerado. Trata-se de uma leitura equivocada do conceito de velocidade média (variação de posição dividida pela variação de tempo) que, quando “transladada” para o contexto do cálculo de velocidade instantânea, é tomada como a posição [absoluta] dividida pelo tempo. Tal fato chama bastante a atenção, uma vez que, adotando essa perspectiva, não fez qualquer sentido para esses estudantes uma discussão em que se buscava problematizar o cálculo da velocidade instantânea. Esse aspecto mostrou a necessidade de se realizar algum tipo de “resgate”/problematização do conceito de velocidade média antes da aplicação dessa tarefa em um próximo ciclo.

Nas Figuras 41 e 42 destacamos resoluções próximas às esperadas. Na primeira, o grupo reconhece que velocidade foi inferior a 18 m/s entre 15 e 30 segundos, e na segunda destaca que é impossível, com base nos dados fornecidos, determinar o(s) instante(s) exato(s) em que isso ocorre.

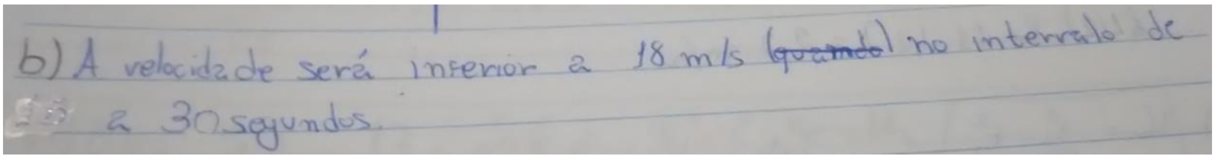

b) A velocidade será inferior a 18 m/s (~~quando~~) no intervalo de
a 30 segundos.

Figura 41 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

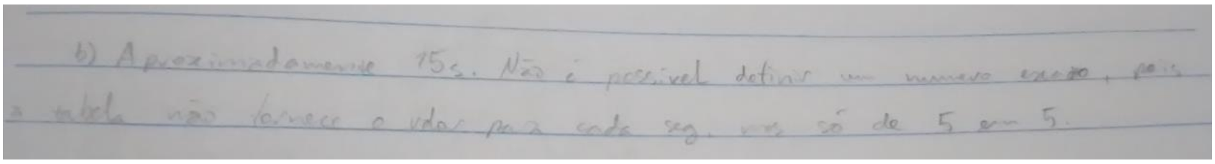

b) Aproximadamente 15s. Não é possível definir um número exato, pois
a tabela não fornece o valor para cada seg. mas só de 5 em 5.

Figura 42 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

No item (c), esperava-se que os grupos percebessem que somente o conceito de velocidade média não era suficiente para responder com exatidão a velocidade no instante de 20 segundos. Notamos estratégias utilizadas pelo grupo o cálculo da média da velocidade média antes e depois do intervalo de referência, ou a média entre os valores encontrados em intervalos em torno de 20 segundos (15-20s e 20-25s), como mostrado na Figura 43. Tal estratégia possibilitou, a partir da discussão realizada com a turma, que se problematizasse o cálculo de quocientes de diferença à direita e à esquerda de um ponto, bem como a média entre eles.

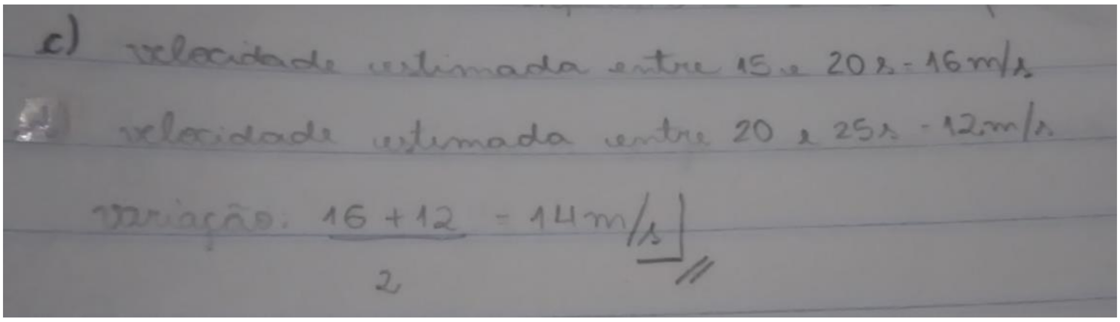

c) velocidade estimada entre 15 e 20s - 16 m/s
velocidade estimada entre 20 e 25s - 12 m/s
variação: $\frac{16+12}{2} = 14$ m/s

Figura 43 - Produção escrita do grupo G02
Fonte: autor.

Por fim, no último item da primeira questão da tarefa, os grupos deveriam investigar se em algum momento a velocidade máxima foi superada. Encontramos resoluções indicando que foi superada no intervalo de 35-40s (Figura 44), uma vez que, se nesse intervalo a velocidade média foi 22 m/s, em algum instante dele a velocidade máxima (20 m/s) foi superada. De modo geral, os grupos não identificaram que essa velocidade máxima também poderia ter sido superada também em outros intervalos, embora não tivéssemos, a partir dos dados conhecidos, garantia se isso ocorreu ou não. Nossa intenção era que problematizassem que somente o cálculo da velocidade média não era suficiente para a resolução desse item, uma vez que remetia à ideia de velocidade instantânea.

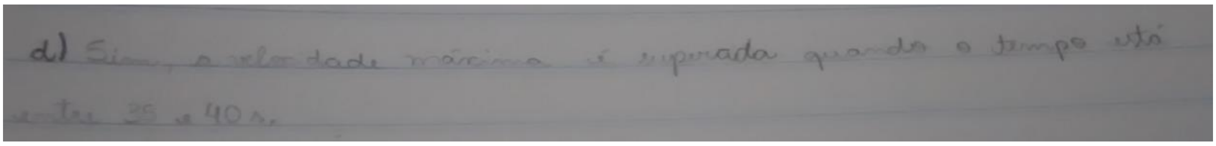


Figura 44 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

No segundo item da tarefa, procuramos instigar os grupos a tomar um intervalo de tempo e subdividi-lo em intervalos menores, para estimar a velocidade instantânea em um instante específico. Tomamos então o intervalo de tempo $1 \leq t \leq 2$, e estávamos interessados na velocidade em $t = 1$. Criamos então itens para contribuir e guiar os grupos na exploração do conceito de velocidade instantânea e sua generalização para assim definirmos o conceito de derivada em um ponto.

De modo geral, as equipes não mostraram dificuldades em encontrar a velocidade média no intervalo de $1 \leq t \leq 2$, encontrando 3 m/s (Figura 45), uma vez que já havia ocorrido uma discussão e sistematização desse conceito a partir das resoluções apresentadas no item 1.

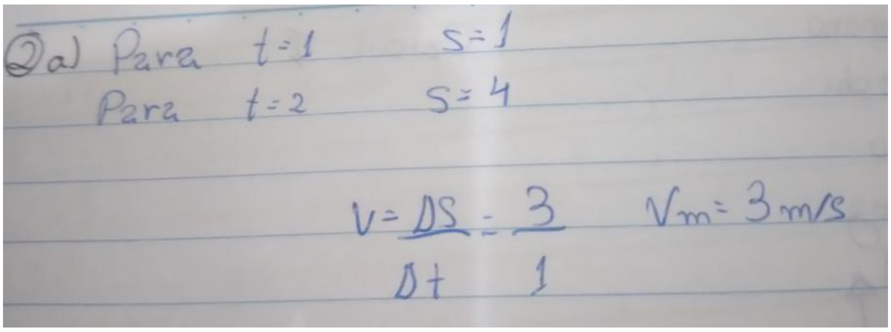


Figura 45 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

No item (b) da tarefa, vários grupos manifestaram dúvidas no entendimento do enunciado, quando se diz “subintervalos”; não sabiam como dividir o intervalo $1 \leq t \leq 2$ em partes menores, cabendo assim à intervenção por parte do professor para saná-la. Além disso, a parte do enunciado que dizia “Uma maneira é calcular velocidades médias para intervalos de tempo muito “pequenos” em torno de $t=1$” foi tomada por vários grupos como um comando, e não como antecipação de um procedimento que seria desenvolvido nos itens seguintes. A Figura 46 mostra uma resolução representativa das apresentadas pelos grupos.

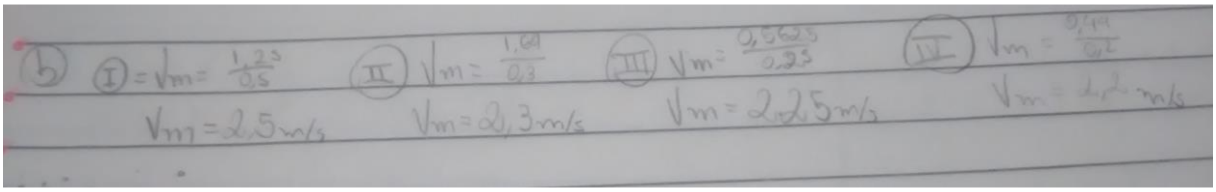


Figura 46 - Produção escrita do grupo G04
Fonte: autor.

Para fins de generalização, o item (c) foi proposto. Esperava-se que os grupos tomassem um subintervalo próximo de $t=1$, sendo $1 \leq t \leq n$. Muitos grupos não compreenderam o significa do comando “generalize”, e tiveram dificuldades em construir uma estratégia que o resolvesse. A partir das instruções do professor, alguns grupos encaminharam uma resolução, porém esse item constitui-se como uma tarefa mecânica, limitada à exploração algébrica e aplicação de técnicas. A Figura 47 ilustra uma resolução típica encontrada.

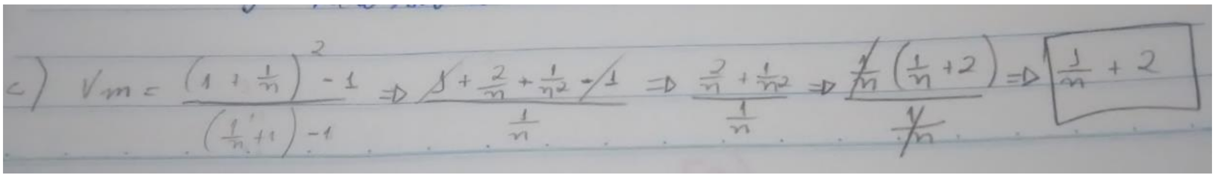


Figura 47 - Produção escrita do grupo G07
Fonte: autor.

No último item, esperava-se que os grupos problematizassem que a velocidade, em intervalos de tempo $1 \leq t \leq n$ cada vez menores, converge para o número 2, ou seja, a velocidade instantânea neste instante é de 2 m/s. Equipes que desenvolveram o item anterior imediatamente constaram essa convergência, como mostrado na Figura 48. O uso do Geogebra mostrou-se desnecessário nessa resolução, uma vez que grupos utilizaram seu conhecimento prévio que $\frac{1}{n}$ converge para zero.

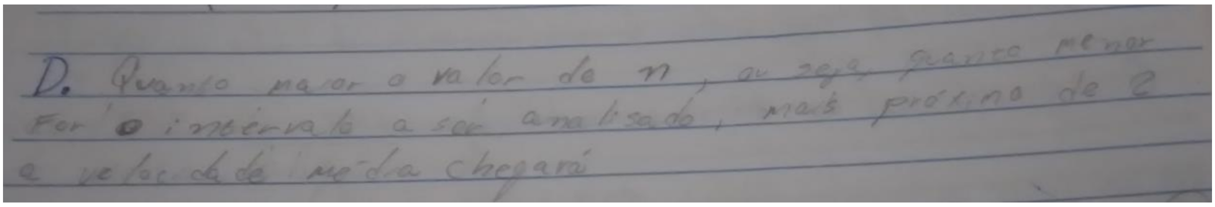


Figura 48 - Produção escrita do grupo G05
Fonte: autor.

Em geral, os grupos não tiveram dificuldades para aplicar novamente a fórmula da velocidade média; entretanto, esperávamos que os grupos notassem que quanto menor o subintervalo, a velocidade vai se aproximando de uma velocidade definida “instantânea”. Porém somente 2 grupos responderam à questão, pois o tempo da aula tinha acabado, sem que houvesse tempo para discussão e sistematização de conteúdo como havíamos planejado (no caso derivada em um ponto, e construção da regra de derivação de uma função polinomial). O objetivo era generalizar o que ocorre se tomarmos $s(t) = t^p$. Propusemos então uma tarefa adicional, a Tarefa 5 que será analisada a seguir, no intuito de retomar e continuar essa discussão em aula posterior.

De modo geral, esse segundo item constituiu-se como a realização de procedimentos sem conexão com alguns significados; tornaram-se algorítmicas, com o uso do procedimento especificamente pedido ou evidente a partir de uma instrução prévia, sem conexão com conceitos ou significados que estão por trás dos procedimentos usados.

4.7 TAREFA 5 - 1º CICLO

Trata-se da última tarefa do 1º ciclo, constituída para ser a continuação da Tarefa 4, uma vez que esse não foi finalizada em sala (faltou a parte de sistematização). Essa tarefa era proposta aos grupos à medida que finalizaram a tarefa anterior, sendo que poucos a exploraram de fato. Trazemos para análise recortes das produções de alguns poucos grupos que desenvolveram resoluções próximas do que esperado, e que serviram como apoio para discussão na turma. Porém, de modo geral consideramos a aplicação dessa tarefa pouco exitosa; uma análise da situação evidenciou uma formulação bastante abstrata, com muitos itens e foco no desenvolvimento de procedimentos algébricos, de modo que os significados subjacentes se perderem.

O enunciado proposto foi o seguinte:

Em nossa última aula, investigamos maneiras de obter a velocidade instantânea de um objeto que se encontra em movimento retilíneo. Para tal, podemos fazer uso de três **sequências de quocientes de diferença:**

$$Q_1(t)=\frac{s\left(t_0+\frac{1}{n}\right)-s(t_0)}{\frac{1}{n}} \qquad Q_2(t)=\frac{s(t_0)-s\left(t_0-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \qquad Q_3(t)=\frac{s\left(t_0+\frac{1}{n}\right)-s\left(t_0-\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$$

Para o exemplo investigado (função posição, em metros, descrita em função do tempo (em segundos), por meio da equação $s(t)=t^2$, observamos que, em $t_0=1$, elas convergiam para o valor 2.

a) Explique o significado desse valor.
b) Vamos investigar agora como se comportam essas sequências para outros valores de t. Considere ainda $s(t)=t^2$.

    i) Por meio de manipulações algébricas, escreva, da forma mais simplificada possível, fórmulas para o termo geral das sequências Q_1, Q_2 e Q_3 considerando $t_0=2$. Utilize o Geogebra para investigar a convergência dessas sequências.
    ii) Refaça a primeira parte do item anterior considerando um t_0 qualquer.

c) Refaça a questão anterior considerando $s(t)=t^3$.
d) Existe alguma regularidade entre o comportamento de $s(t)=t^2$ e $s(t)=t^3$ no Geogebra? Qual seria?
e) Determine quais seriam os limites para as três sequências de diferenças de tomarmos $s(t)=t^n$, considerando um t_0 qualquer.

Para análise dos dados elencamos no Quadro 10 as principais ideias e conceitos envolvidos nessa tarefa. Assim como na tarefa anterior, não elencamos os grupos nas quais essas ideias e conceitos apareceram, esses foram explicitamente contemplados no enunciado na tarefa. Não emergiram da interação do grupo com a tarefa, como desejávamos.

	Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
IC1	Taxa de Variação Média
IC2	Taxa de Variação Instantânea
IC3	Convergência

Quadro 10 - Análise da tarefa 5 do 1º ciclo
Fonte: o autor.

O item (a) busca resgatar o significado do valor “2” obtido na tarefa anterior. A Figura 49 mostra a resolução de uma das equipes.

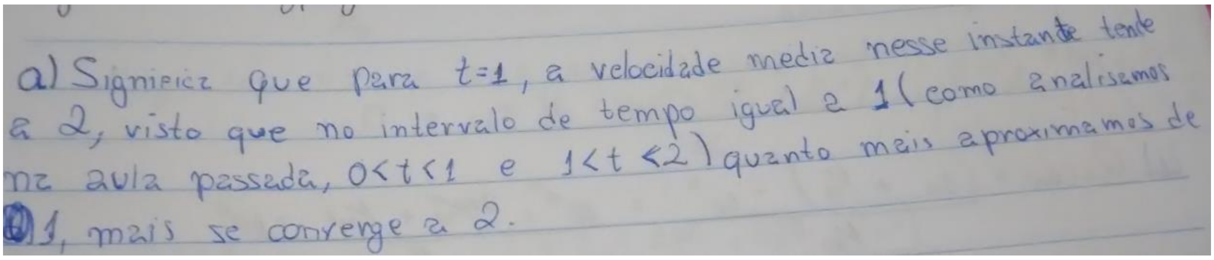
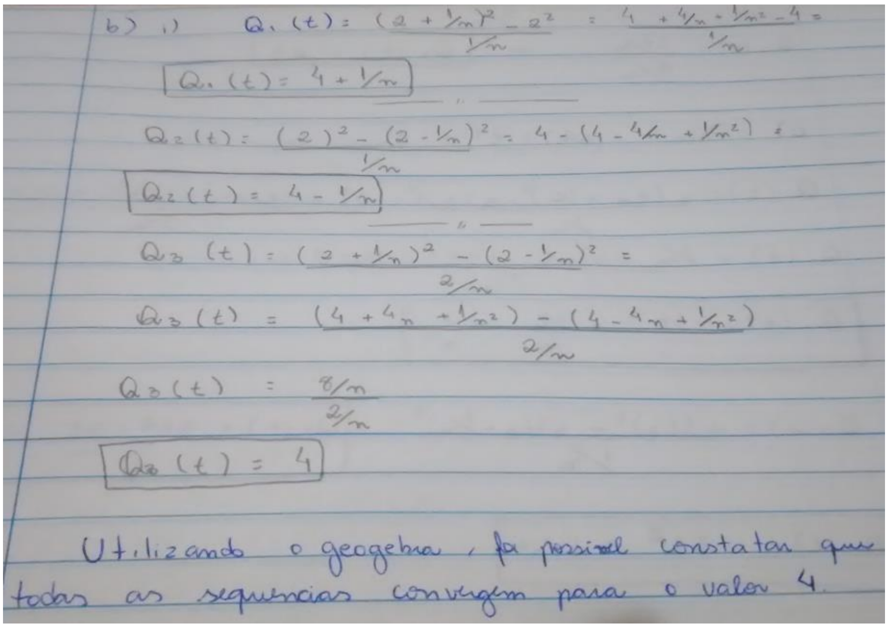

a) Significa que para $t=1$, a velocidade media nesse instante tende a 2, visto que no intervalo de tempo igual a 1 (como analisamos na aula passada, $0<t<1$ e $1<t<2$) quanto mais aproximamos de 1, mais se converge a 2.

Figura 49 - Produção escrita do grupo G03
Fonte: autor.

Para o item (b), apresentamos na Figura 50 a resolução de um grupo que desenvolveu corretamente os quocientes de diferenças, tomando $t_0 = 2$. No caso, G11 utilizou os procedimentos algébricos e também a exploração no Geogebra para constatar que os três quocientes de diferenças convergem para 4.


b) i) $Q_1(t) = \frac{(2+1/n)^2 - 2^2}{1/n} = \frac{4 + 4/n + 1/n^2 - 4}{1/n} =$

$\boxed{Q_1(t) = 4 + 1/n}$

$Q_2(t) = \frac{(2)^2 - (2-1/n)^2}{1/n} = 4 - (4 - 4/n + 1/n^2) =$

$\boxed{Q_2(t) = 4 - 1/n}$

$Q_3(t) = \frac{(2+1/n)^2 - (2-1/n)^2}{2/n} =$

$Q_3(t) = \frac{(4 + 4/n + 1/n^2) - (4 - 4/n + 1/n^2)}{2/n}$

$Q_3(t) = \frac{8/n}{2/n}$

$\boxed{Q_3(t) = 4}$

Utilizando o geogebra, foi possível constatar que todas as sequencias convergem para o valor 4.

Figura 50 - Produção escrita do grupo G11
Fonte: autor

Já na figura 51 o grupo G02 além de utilizar a representação algébrica e numérica, representou a tela do Geogebra dos três quocientes de diferenças, mostrando a convergência para um número (no caso 4, para $t_0 = 2$).

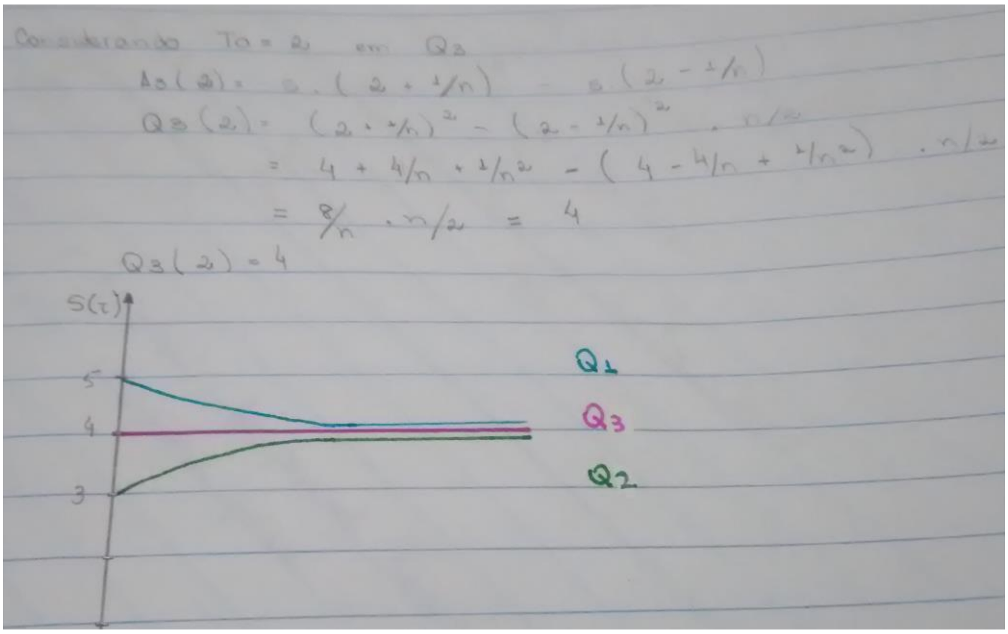


Figura 51 - Produção escrita do grupo G02
Fonte: autor.

As Figuras 52 e 53 mostram a resolução do grupo G09, do item (c) da tarefa, em que exploraram os quocientes de diferenças para a função $s(t) = t^3$. Por meio de manipulações algébricas, o grupo notou a regularidade que acontece entre o expoente e o termo que multiplica.

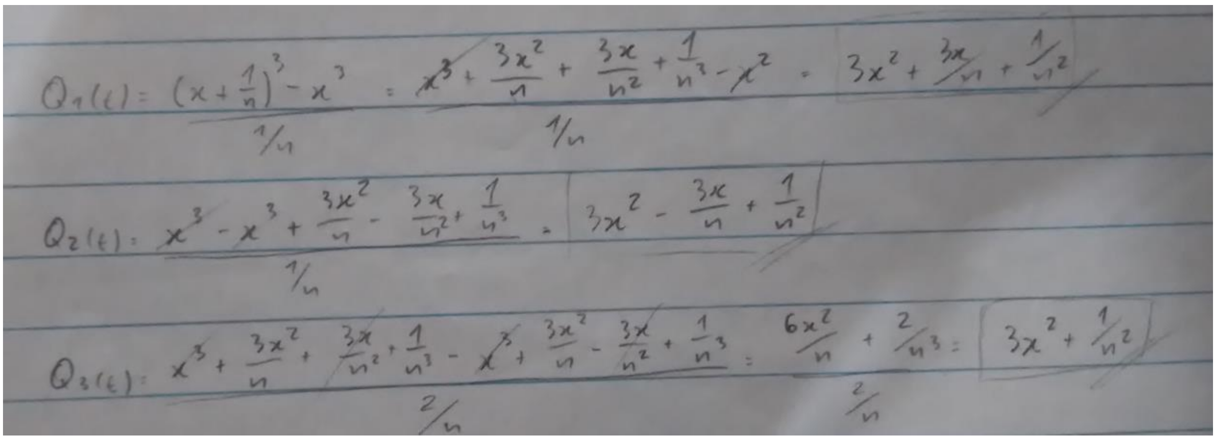


Figura 52 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

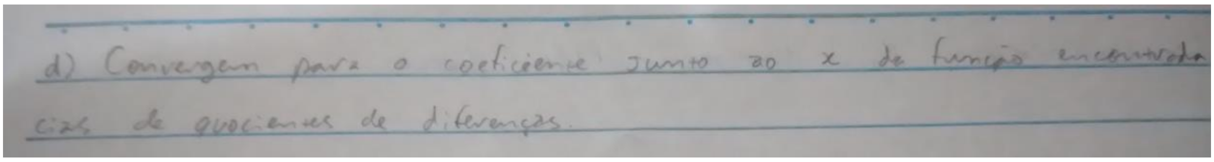


Figura 53 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

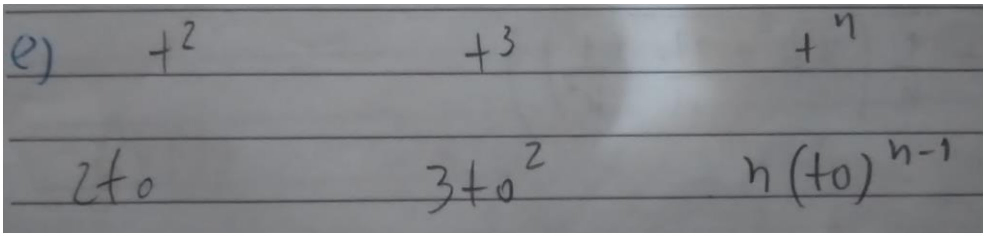


Figura 54 - Produção escrita do grupo G10
Fonte: autor.

Já na Figura 54, temos a resolução do grupo G10, evidenciou no item (e) uma regularidade de comportamento das equações $s(t) = t^2$, $s(t) = t^3$ e $s(t) = t^n$, na qual para a equação $s(t) = t^n$, encontraram que o expoente vira o coeficiente da equação e o expoente diminui uma unidade.

Essas duas últimas resoluções foram compartilhadas com a turma e serviram de base para encaminharmos a sistematização dos conceitos.

4.8 TAREFA 3 - 2º CICLO

Em função da experiência no ciclo anterior, adequamos as tarefas 4 e 5, tornando-as uma única, buscando propor menos itens e, quando possível, mais “abertos”. Além disso, optamos por prever um encaminhamento individualizado para exploração das equações $s(t) = t^3$ e $s(t) = t^n$, dependendo de como os grupos respondiam aos itens. Além disso, essa turma de 2º semestre de 2016 havia trabalhado com uma tarefa anterior, conduzida por uma aluna do curso de Especialização em Ensino e Tecnologia, da área de Física, que havia explorado conceitos fundamentais do movimento retilíneo uniforme e movimento retilíneo uniformemente variado, “recordando” conceitos e fórmulas e conceitos.

A tarefa reformulada é a seguinte:

1. A cada intervalo de 5 segundos observa-se a posição de um carro numa rodovia, com a finalidade de observar se em algum momento sua velocidade superou a máxima permitida de 72 km/h. Com os dados obtidos construiu-se a seguinte tabela:

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
s (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

Em algum momento a velocidade máxima permitida foi superada? Justifique.

2. Considere um objeto em movimento retilíneo cuja posição, em metros, é descrita em função do tempo (em segundos), por meio da equação $s(t)=t^2$. Estamos interessados em obter a velocidade da partícula no instante $t=1$.

   a) Calcule a velocidade média do objeto considerando $0 \le t \le 1$ e $1 \le t \le 2$.

   b) Calcule a velocidade média considerando o ***primeiro*** dos subintervalos obtidos da divisão de $1 \le t \le 2$ em:

   i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) n partes.

   c) Calcule a velocidade média considerando o ***último*** dos subintervalos obtidos da divisão de $0 \le t \le 1$ em:

   i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) n partes.

   d) Os resultados obtidos anteriormente formam sequências.

   i) O que elas representam?
   ii) Elas parecem convergir? Se sim, para qual valor?

Em função do tempo limitado, o item 1 foi proposto para ser realizado em casa e devolvida por 17 grupos. Apresentamos na Figura 55 uma resolução representativa em termos das respostas obtidas e que, ao serem socializadas na turma, serviram como ponto de apoio para problematizar a insuficiência dos dados para tabela no sentido de garantir instantes em que o carro tenha ultrapassado a velocidade máxima.

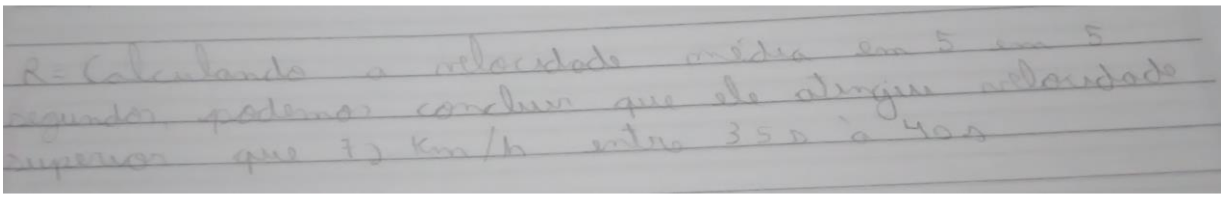

R= Calculando a velocidade média em 5 em 5 segundos, podemos concluir que ele atingiu velocidade superior que 72 Km/h entre 35 s à 40 s

Figura 55 - Produção escrita do grupo G01
Fonte: autor.

Percebemos, na primeira resolução, que o grupo identificou o intervalo de tempo em que velocidade média é superada (intervalo de 35-40s), na qual deixaram evidente somente o cálculo da velocidade média, não concluindo que em um intervalo de tempo não é possível informar com exatidão a velocidade num instante de tempo no intervalo.

Para o item 2 dessa tarefa, destacamos que adaptamos o texto, pois no 1º ciclo os grupos tiveram dificuldades para compreender as divisões dos subintervalos, acrescentando também uma análise entre os intervalos $1 \leq t \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$, entre as primeiras subdivisões no intervalo $1 \leq t \leq 2$ e as últimas subdivisões no intervalo $0 \leq t \leq 1$, deixando evidente que estávamos interessados na velocidade instantânea em torno de $t = 1$. A equação utilizada na tarefa se manteve $s(t) = t^2$. Neste ciclo, propusemos a exploração de diferentes equações de acordo o andamento da tarefa (propusemos em algumas equipes explorar expressões do tipo $s(t) = t^3$ e $s(t) = t^n$), sendo assim mais individualizados.

No item (a) da segunda parte da tarefa, os grupos evidenciaram conhecimento sobre o conceito e a fórmula da velocidade média, sendo esta também utilizada na primeira parte da tarefa (feita em casa). A Figura 56 apresenta uma resolução típica.

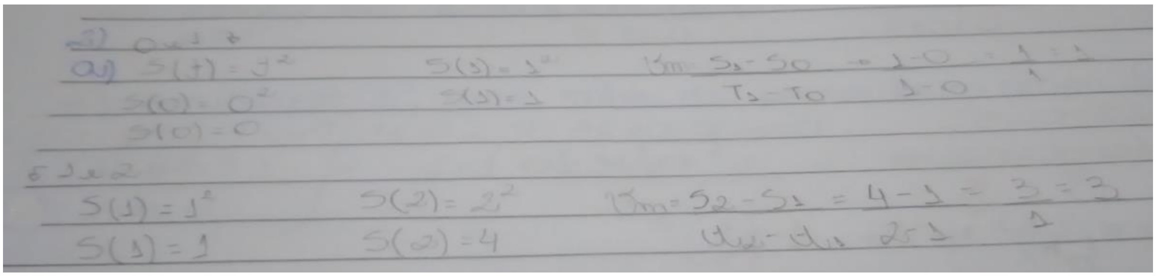


Figura 56 - Produção escrita do grupo G02
Fonte: autor.

Destacamos que os itens (b) e (c) tinham por intuito promover uma transição entre registros de representação, saindo de casos numéricos para uma expressão algébrica (para generalizar). No item (b), esperava-se que os grupos percebessem que quanto mais próximo de 1 tomarmos o final o subintervalo $1 \leq t \leq n$, mais a velocidade média "aproxima-se" de 2 m/s. No item (c) acontece o contrário, pois precisamos tornar mais próximo de 1 o final do subintervalo $n \leq t \leq 1$.

A Figura 57 mostra uma resolução típica dos subitens (i) a (iii) de (b) e (c) em que os grupos calcularam a velocidade média entre os subintervalos de $1 \leq t \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$. Em geral, os grupos não apresentaram dificuldades.

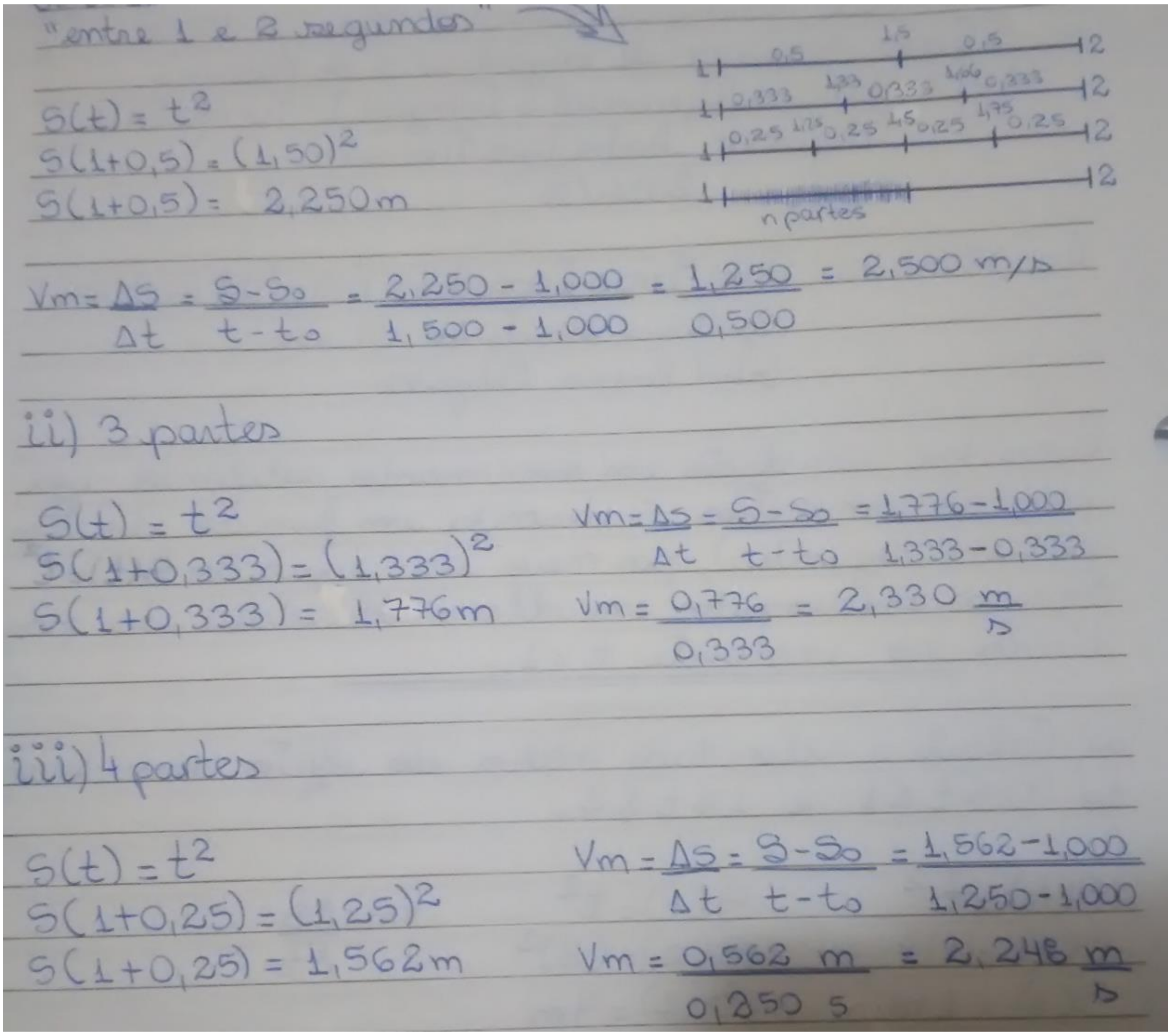


Figura 57 - Produção escrita do grupo G07
Fonte: autor

No caso do subitem (iv) propusemos nessa nova formulação uma subdivisão do intervalo em “n partes” (ao invés do termo “generalize”, utilizado no ciclo anterior), nosso intuito é que esse item “induzisse” os grupos a utilizar o processo algébrico para resolução e encontrar uma expressão na qual fosse possível investigar a convergência. A Figura 58 mostra uma resolução possível.

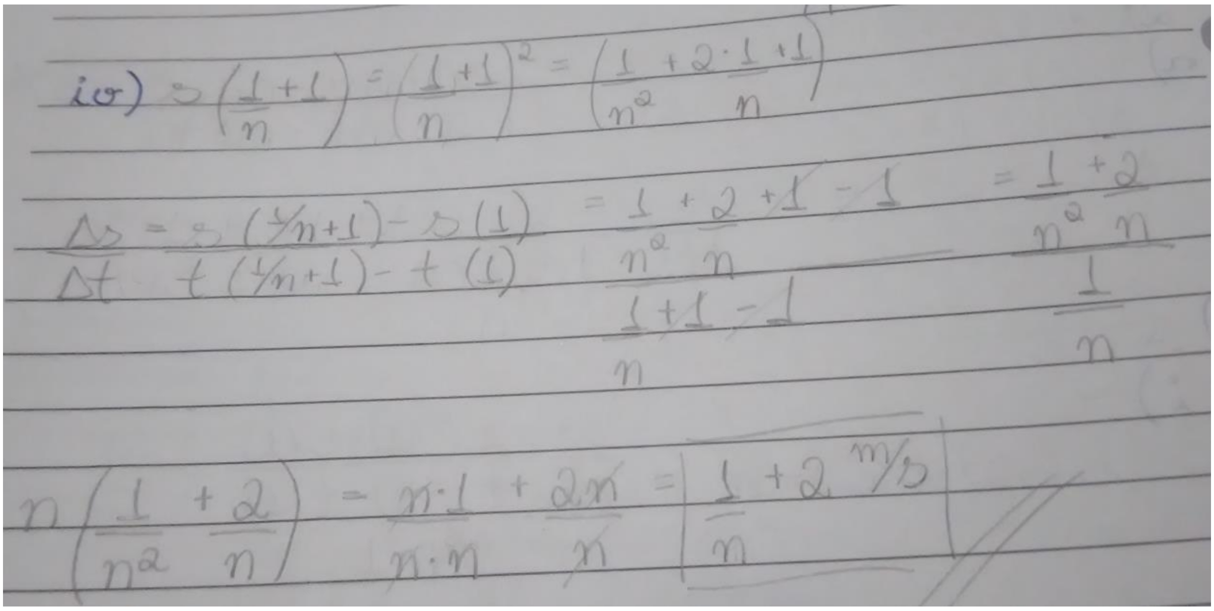


Figura 58 - Produção escrita do grupo G08
Fonte: autor.

Já no item (d) da tarefa, que solicitava uma análise frente aos itens anteriores, sobre sua representação e convergência, três grupos conseguiram concluir. Embora tenham obtido o valor para o qual as sequências convergem (no caso 2), no mostrado na Figura 59, os grupos não relacionaram os termos da sequência como aproximações para a velocidade instantânea. Tal relação foi estabelecida no coletivo da turma, a partir das indagações do professor, a partir da socialização e discussão das resoluções propostas pelos grupos.

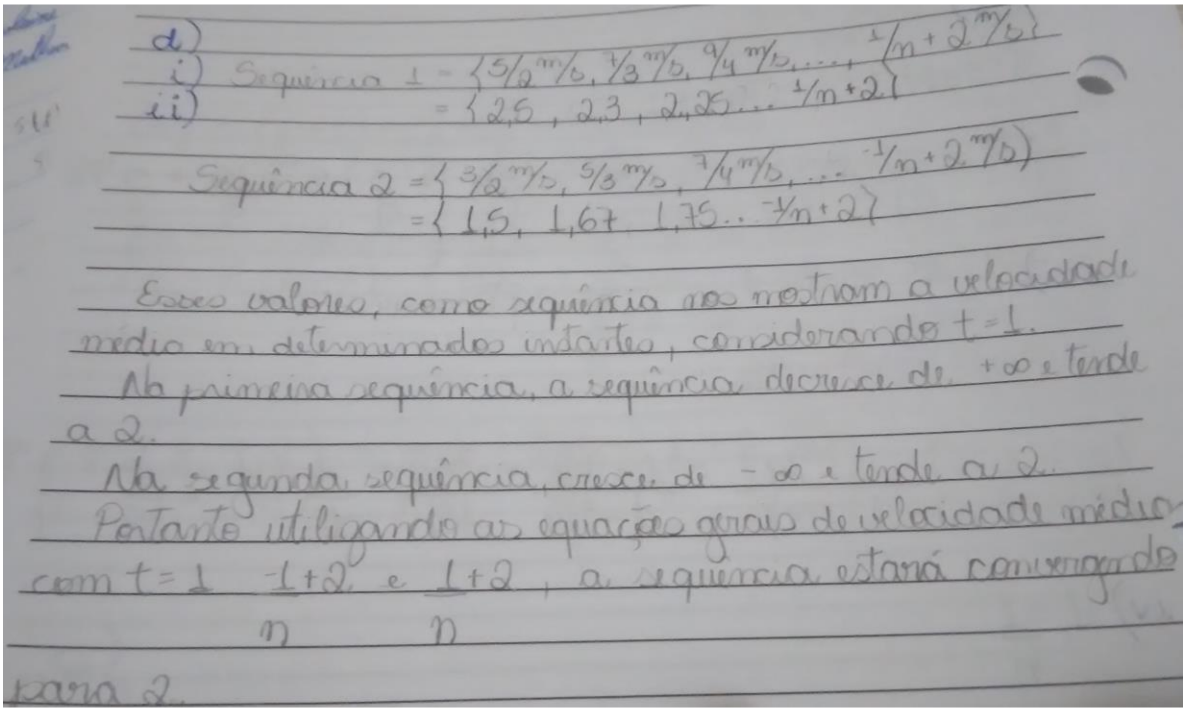


Figura 59 - Produção escrita do grupo G10
Fonte: autor.

Como neste ciclo aconteceram encaminhamentos individualizados, alguns grupos apresentaram a investigação quando a equação era $s(t) = t^3$, trazendo elementos importantes no momento de sistematização e formalização do conceito de velocidade instantânea e derivada em um ponto (além da técnica de derivação polinomial) quando a equação se torna $s(t) = t^n$. Na Figura 60, nota-se que o grupo utilizou a divisão em subintervalos em "n partes", em um pensamento algébrico, aplicando conceitos de convergência nos termos $\frac{1}{n^2}$ e $\frac{3}{n}$ que converge para zero, notando assim que a velocidade instantânea em $t = 1$ para a equação $s(t) = t^3$, converge para 3 m/s.

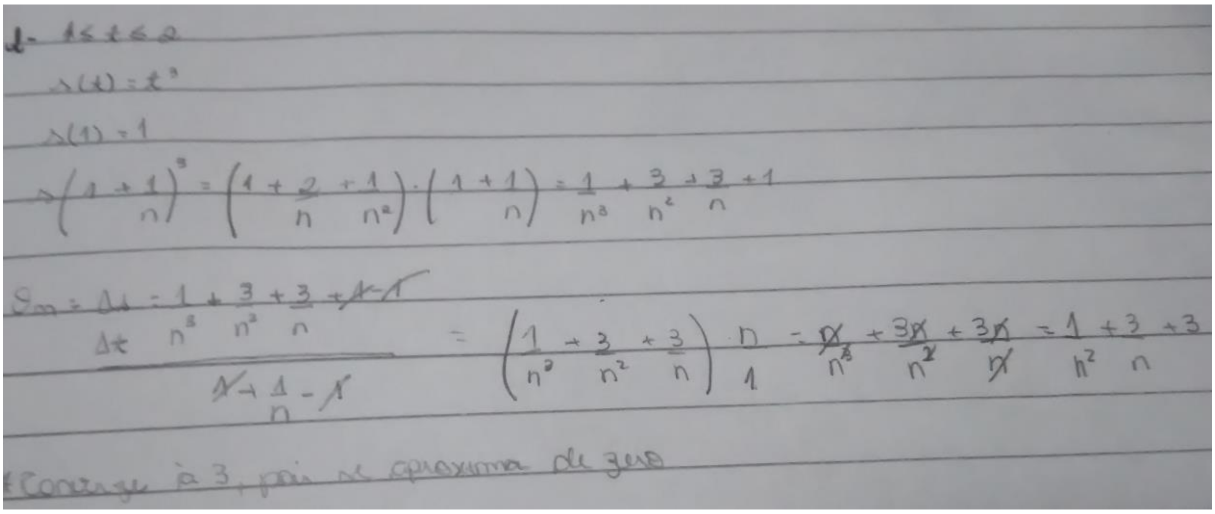


Figura 60 - Produção escrita do grupo G09
Fonte: autor.

Em nossa avaliação, baseada na análise da produção apresentada pelos grupos, essa tarefa ainda precisa ser reformulada, uma vez que não se caracterizou em nenhum dos ciclos como uma tarefa com procedimento com conexão com significados e nem um “fazer matemática” (STEIN; SMITH, 1998). Embora os grupos tenham se envolvido com o desenvolvimento algébrico das expressões, não pareceriam atribuir significado aos resultados obtidos. Inferimos daí a necessidade de se aprofundar os estudos sobre o modo como os grupos elaboram o conceito de velocidade instantânea, e em que medida esse contexto pode de fato tornar-se desencadeador de atividade matemática, quando inserido em uma tarefa no formato que estamos propondo. Trata-se, porém, de uma indicação para estudos futuros, tendo em vista a limitação temporal para a finalização dessa dissertação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, nós propusemos a organizar tarefas que integrem um ambiente educacional para uma disciplina de CDI, em especial tarefas a serem aplicadas em momentos que antecedem o estudo de derivadas, em sua abordagem mais formal. Para atingir o objetivo geral da pesquisa, foram estabelecidos alguns objetivos específicos. O primeiro deles foi realizar um estudo sobre tarefas e ambientes de aprendizagem em especial o *shift problem lessons* (episódios de resolução de tarefas) (PALHA, 2013). Durante o levantamento das bibliografias, elencamos conceitos sobre o tema, na qual adotamos tarefa como um “amplo espectro composto por “coisas a fazer”. (TREVISAN; BORSOI; ELIAS, 2015). Com tal definição de tarefa, elencamos uma proposta de sequência de tarefas pautadas em um ambiente de aprendizagem que contemplam os episódios de resolução de tarefas que se constitui em: propor uma sequência de tarefas, a qual o tema/conteúdo “central” da aula nem sempre é apresentado aos alunos previamente, sendo que este é sistematizado com o decorrer da tarefa; os alunos realizam a tarefa em pequenos grupos de modo que o professor se torna um mediador de tais estratégias de resolução.

Um segundo objetivo específico da pesquisa se consistiu em selecionar/criar/adaptar tarefas para aulas de CDI, na qual o foco se trata de episódios que antecedem o estudo de derivadas. A esse respeito, tomamos como base os trabalhos feitos por Weigand (2001, 2004 e 2014) e D’Avoglio (2002), para que no decorrer das análises pudéssemos notar elementos a reorganizar a proposta da tarefa dentro dos dois ciclos feitos, para assim “criar” o produto educacional da pesquisa.

Durante a aplicação das tarefas propostas, os temas não eram apresentados aos estudantes previamente. Buscamos relacionar aos princípios do ambiente de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas, na qual elencamos sequências de tarefas com elementos que estimulem sua reflexão e a elaboração de um raciocínio conceitual (PALHA, 2013).

As análises possibilitaram observar que, em alguns casos, parte dos grupos trabalhavam os “pré-requisitos” de algumas tarefas propostas de forma limitada (limitaram a procurar expressões matemáticas e se preocupavam em encontrar somente uma resposta correta). Com relação ao produto educacional (sequência de tarefas), elencamos durante as análises do primeiro ciclo três tarefas para anteceder o conceito de derivadas.

Por fim, o último objetivo específico foi de apresentar uma proposta de tarefas para anteceder o estudo de derivadas, a qual por meio das análises do segundo ciclo de aplicação propomos um arranjo de três episódios de tarefas para a criação do produto educacional (sequência de tarefas) de CDI, pautadas em condições reais de ensino.

Na tarefa 1 tínhamos como objetivo reconhecer os diferentes tipos de sequências e seus comportamentos. Por meio das análises dos dois ciclos os grupos reconheceram sequências particulares como Progressão Aritmética (P.A.) e as Progressões Geométricas (P.G.), além de identificarem os comportamentos, o qual por meio das análises e podemos definir as sequências como: “uma lista infinita de números $S_1, S_2, S_3,..., S_n,....$ Denominamos S_1 o primeiro termo, S_2 o segundo termo e S_n o termo geral”, sendo que: “As sequências numéricas são funções de domínio real e contradomínio um conjunto qualquer não vazio”. Como reconhecido pelos grupos P.A e P.G são um caso particular de sequência que possuem um valor constante de um número para outro, chamado razão, a partir do seu segundo termo. Em suma, a tarefa 1 oportunizou reconhecer as sequências como funções particulares, identificar padrões de crescimento e decrescimento, evidenciar funções como relação variacional, instigar a exploração de concavidade e diferença entre termos consecutivos. Portanto, permitiu concluir que a tarefa foi suficientemente clara para os objetivos que pretendia alcançar, na qual não houve indicações de necessidade de reformulação/adaptação.

Já na tarefa 2 tínhamos como objetivo identificar a diferença entre termos consecutivos entre a sequência original e a de diferenças, a qual por meio das análises notamos a limitação da exploração pelos grupos, sendo que não são habituados a tarefa de investigação. Porém notamos indícios sobre ideias e conceitos sobre crescimento e decrescimento, funções como relação variacional, concavidade, coeficiente angular e linear e inclinação. Como sugestão, elencamos uma adaptação da tarefa com sugestões mais “direcionadas” de análise dos controles deslizantes.

*“Nesta tarefa, vamos investigar a chamada **sequência de diferenças**. Trata-se do tipo mais simples de variação de uma sequência (a_n), a **variação simples (ou absoluta)** que indicaremos por*

$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Inicialmente, vamos explorar duas sequências em especial, de comportamento linear, exponencial e quadrática. O objetivo é notar a importância dos valores nos controles deslizantes e sua relação com a sequência de diferença. Dadas as sequências definidas por $a_n = a + (n-1) \cdot b$, $a_n = a.b^{n-1}$ e $a_n = a.n^2 + b.n + c$, analise, com auxílio do Geogebra, o papel dos parâmetros a e b no comportamento dessas sequências e de suas sequências de diferenças. Para facilitar, estude uma sequência por vez, anote tudo que achar pertinente e interessante durante a exploração.

a) Movimente o controle deslizante para $a = 0$ e $b > 0$, o que é possível notar?
b) Movimente o controle deslizante para $a > 0$ e $b = 0$, o que é possível notar?
c) Agora explore as seguintes situações:
i) $a > 0$ *e* $b > 0$
ii) $a < 0$ *e* $b > 0$
iii) $a < 0$ *e* $b < 0$
iv) $a > 0$ *e* $b < 0$
v) $a = 0$ *e* $b = 0$*"*

Nesta tarefa ainda é possível definir que sequências definidas recursivamente relacionam-se com o *n-ésimo* termo aos termos anteriores e todos os termos iniciais que forem necessários para se iniciar a sequência e assim aprofundar o conceito sobre sequências de diferenças.

A tarefa 3 se trata do estudo de velocidades médias e instantâneas. Durante as análises das produções feitas durante os dois ciclos, notamos que o conceito de velocidade instantânea ainda não se mostra "eficaz" para o conceito de derivada em um ponto, na qual ainda precisa ser reformulada, uma vez que não se caracterizou em nenhum dos ciclos como uma tarefa com procedimento com conexão com significados e nem a características de "fazer matemática" (STEIN; SMITH, 1998), tratando assim uma indicação para pesquisas futuras.

A disciplina de CDI é tratada por muitos docentes de modo muito próximo à "Análise", em função do tratamento formal dado aos conceitos. Além disso, é usual que, no planejamento de suas aulas, sigam a ordem de conteúdos como apresentado no índice dos livros: funções; limite; derivada e por fim integrais. Nossa proposta nessa pesquisa foi apresentar uma alternativa a essa abordagem e sugerir um repensar dessa estrutura, propondo a ordem: estudo de funções particulares (sequências); sequência de diferenças; conceito de convergência; função de domínio real; taxa de variação média e instantânea; variação acumulada; limite e técnicas de derivação e integração. Esse repensar pauta-se na proposta de Weigand (2004, 2014), que defende a revitalização da disciplina de CDI, iniciando-se com o estudo de sequências e por meio delas explorar de forma intuitiva/conceitos inerentes ao estudo de função, limite, derivada e integral.

As tarefas elencavam características de tarefas “aberto-controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015). Nos itens de exploração da tarefa, os grupos tinham a oportunidade de investigar o comportamento das funções e taxas, porém notamos que os alunos não estão habituados com tarefas de cunho investigativo, mas estão acostumados com as que envolvam a utilização de algoritmos que levam a uma única resposta.

Durante as análises das tarefas, pode-se notar indícios de aprendizagem do conceito de derivadas, uma vez que os alunos manipularam e exploraram itens necessários para a compreensão desse conceito, como: sequência de diferenças e quociente de diferenças (taxa de variação média e instantânea), na qual de forma intuitiva estabeleceram o conceito de derivada em um ponto (explorado na Tarefa 3).

Por fim, o produto educacional (caderno de tarefas), é proposto para professores da disciplina de CDI enquanto uma sugestão de encaminhamento de tarefas para anteceder o conceito inicial de derivadas, contribuindo assim para um ambiente de aprendizagem pautado em episódios de resolução de tarefas.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS *et al.*, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007

BORBA, M. C.; SILVA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Porque a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática?. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato grosso do Sul**, v. 8, p. 527-546, 2015.

BRAGANÇA, B.; FERREIRA, L. A. G.; PONTELO, I. Práticas Educativas e Ambientes de Aprendizagem Escolar: Relato de Três Experiências. In: IV Seminário Nacional de Educação Profissional e Tecnológica, 2014, CEFET - MG. **Anais...** IV SENEPT. Belo Horizonte: CEFET, v. único, n. 17, p. 1-12, 2014.

CYRINO, M.C.C.T.; JESUS, C.C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência e Educação**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, 2014.

D'AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto:** Uma forma significativa de introduzir o conceito. 2002. 63 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

DALTO, J. O.; BURIASCO, R. L. C. Problema proposto ou problema resolvido: qual a diferença?. São Paulo, **Educação e Pesquisa**, v. 35, n. 3, p. 449-461, 2009.

EERDE, D. van. **Design Research:** Looking Into the Heart of Mathematics Education. 1st SEA-DR Proceeding. Proceeding The First South East Asia Design/Development Research (SEA-DR) International Conference, Sriwijaya University, Palembang, p. 1-11, 2013.

FERREIRA, P. E. A.; BURIASCO. R. L. C. Enunciados de Tarefas de Matemática Baseados na Perspectiva da Educação Matemática Realística. Rio Claro, **Bolema**, v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

FISCHER, B. T. D. **Docência no Ensino Superior:** questões e alternativas. Educação, Porto Alegre, v. 32, n. 3, p. 311-315, 2009.

FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Análise de uma tarefa envolvendo o uso de um aplicativo do Geogebra Tube no ensino de função exponencial. In: I Congresso Brasileiro do Geogebra, 2016, Natal - RN. **Anais...** Congresso Brasileiro do Geogebra, I. Mossoró: Edufersa, 2016. v. 1. p. 136-141.

GAFANHOTO, A. P.; CANAVARRO, A. P. A adaptação das tarefas matemáticas: como promover o uso de múltiplas representações. **Práticas de Ensino da Matemática**, p. 121-134, 2012.

GRAVEMEIJER, K. How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. **Mathematical Thinking and Learning**. n.1, v.1, p.155-177, 1999.

HUGHES-HALLETT, D. et al. **Cálculo de uma variável**, 3.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino de cálculo e um estudo sobre os números reais. In: **Educação Matemática no Ensino Superior**: pesquisas e debates. FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org.). Recife: SBEM, 2009, p. 11-26.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**, vol.1, 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, G. L. Contextualizando momentos da trajetória de ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 125-149, 2014.

LIMA, S. A. et al. O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral em um Curso de Administração: Principais Dificuldades de Aprendizagem dos Alunos. IV Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa - PR, 2014. **Anais...** IV SINECT: UTFPR, 2014. p. 1-11.

LITHNER. J. Mathematical Reasoning in Task Solving. **Educational Studies in Mathematics**, v. 41, p. 165-190, 2000.

MOREIRA, A. F. **Ambientes de Aprendizagem no Ensino de Ciência e Tecnologia**. Belo Horizonte: CEFET-MG, 2007.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

PONTE, J. P. da. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. PONTE, J. P. da (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p.13-27.

RAMOS, N. S.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Ambiente de aprendizagem de cálculo diferencial e integral pautado em episódios de resolução de tarefas. V

Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa - PR, 2016. **Anais...** V SINECT: UTFPR, 2016. p. 1-12.

RASMUSSEN, C; MARRONGELE, K.; BORBA, M. C. **Research on calculus:** what do we know and where do we need to go? ZDM, v. 46, p. 507-515, 2014.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, Santos. **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, II, Santos: SBEM, 2003, p. 1-20.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática:** de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. 157p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

STEIN, M.H.; SMITH, M.S. Selecting and Creating Matemathical Tasks: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, vol 3, n.05, 1998, p. 344-350.

STEIN, M.H.; SMITH, M.S. Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. **Educação e Matemática**, n.105, 2009, p. 22-28.

STEWART, J. **Cálculo**, vol. 1, 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A.H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirinópolis/GO, 2015. **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6, Brasília: SBEM, 2015. v. único. p. 1-12.

TREVISAN, A. L. BURIASCO, R. L. C. Educação Matemática Realística: uma abordagem para o ensino e a avaliação em Matemática. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.** , v. 10, n. 2, p. 167-184, 2015

WATSON, A.et al. Task Design in Mathematics Education. MARGOLINAS, C et al. (Eds.). **Proceedings of the ICMI Study 22**, Oxford, UK, Oxford: ICMI, 2013, p. 9-16.

WEIGAND, H.-G.. Tabellenkalkulation - ein schrittweise erweiterbares didaktisches Werkzeug. **Der Mathematikunterricht**, v. 47, n. 3, p. 16-27, 2001.

WEIGAND, H.-G. (2004). Sequences—basic elements for discrete mathematics. ZDM - **Zentralblatt fu¨r Didaktik der Mathematik**, 36(3), p. 91-97, 2004.

WEIGAND, Hans-Georg. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM Mathematics Education**, 46, p. 603-619, 2014.

APÊNDICE A - Produto Educacional

APÊNDICE A - CADERNO DE TAREFAS: PROPOSTA DE TAREFAS PARA UM ESTUDO INICIAL DE DERIVADAS

1 INTRODUÇÃO

Conforme Lima (2014, p.3), o ensino de cálculo diferencial e integral (CDI), durante muito tempo, teve como foco a apresentação formal e rigorosa do conteúdo matemático, em uma abordagem centrada nela mesma, vinculada a uma estratégia tradicional de ensino, pautada no tripé definição-exemplo-exercício.

Outro ponto destacado por Lima (2014) é a questão da transição dos estudantes ao deixarem a Educação Básica. Ao ingressarem no Ensino Superior, muitos não estão acostumados a formular hipóteses, discutir estratégias, elaborar questões, interpretar os resultados obtidos nas tarefas matemáticas. Embora essas sejam ações importantes em qualquer nível de ensino, em âmbito do Ensino Superior são fundamentais para o desenvolvimento de habilidades inerentes às diferentes atividades profissionais.

Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) destacam que as últimas décadas de pesquisa em CDI têm contribuído para uma melhor compreensão do modo como se organiza o pensamento matemático e a aprendizagem de conceitos como limite, derivada e integral. Tais resultados trazem elementos na direção de compreender as dificuldades e obstáculos apresentados pelos alunos na aprendizagem da disciplina e de como os alunos aprendem. Tais pesquisas têm demonstrado, no entanto, pouco impacto em sala de aula.

Palha (2013, p. 143, tradução nossa) aponta que “um tipo de ensino que envolva os estudantes como aprendizes ativos não são fáceis de ser implementado em salas de aulas regulares”.

Torna-se imprescindível pensar propostas que vão de encontro àquilo que usualmente se observa nas salas de aula de CDI (aulas expositivas, seguidas da proposição de “listas de exercícios”, elaboradas quase que exclusivamente a partir da réplica de modelos apresentados previamente ou exemplificados no livro didático). Palha (2013), Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker, Gravemeijer (2015), à luz de pressupostos da RME, defendem a organização de cenários de aprendizagem pautados em episódios de resolução de tarefas (tradução que estamos adotando para *shift problem lessons*).

Tais episódios não substituem outros presentes no contexto de uma sala de aula regular, como aqueles envolvendo a exposição de conceitos pelo professor ou o trabalho com resolução de tarefas rotineiras. Entretanto, diferem significativamente de uma aula expositiva "usual", tendo como pressupostos:

- O fato de que um novo conteúdo nem sempre precisa ser apresentado aos estudantes previamente. Ao invés disso, são propostas, aos estudantes, sequências de tarefas com elementos que estimulem sua reflexão e a elaboração de um raciocínio conceitual.
- O papel ativo do aluno, a partir da resolução da tarefa em pequenos grupos de forma colaborativa.
- O papel docente que, ao invés de fornecer explicações, torna-se um mediador das apresentações e explicações dos alunos na resolução.

O desenvolvimento do produto educacional (sequências de tarefas) se desenvolveu em um processo cíclico que adota pressupostos da pesquisa de desenvolvimento (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015), expressão utilizada como tradução para a língua portuguesa de *design research*. De modo geral, uma pesquisa desse tipo envolve o "delineamento, desenvolvimento e avaliação de artefatos para serem utilizados na abordagem de um determinado problema, à medida que se busca compreender/explicar suas características, usos e/ou repercussões" (BARBOSA, OLIVEIRA, 2015, p. 527).

Após a aplicação das tarefas e em função dos limites temporais para realização do produto educacional, foi possível a realização de dois ciclos (1º e 2º semestres de 2016), na qual delineamos três tarefas para compor este trabalho, baseado nas análises feitas das tarefas.

2 OBJETIVO GERAL

Esta sequência de tarefas se destina a alunos do ensino superior em especial aos cursos de Engenharia. O objetivo da sequência de tarefas é que essas oportunizem aos estudantes explorar "ideias básicas" necessárias à compreensão do conceito de derivadas, com os seguintes propósitos:

- Analisar e compreender o estudo de funções particulares (sequências);
- Reconhecer o uso de sequências de diferenças em diferentes situações;
- Aplicar o conhecimento de taxa de variação média e instantânea;
- Identificar a derivada em um ponto.

3 SEQUÊNCIA DE TAREFAS

Em nossa proposta, selecionamos e adaptamos/reformulamos 3 tarefas que foram aplicadas em 2 ciclos. Na Figura 1 apresentamos ideias que circunscrevem o conceito de derivadas elencadas que compõem a sequências de tarefas, e que podem ser explorados intuitivamente antes de uma apresentação formal e construção de técnicas.

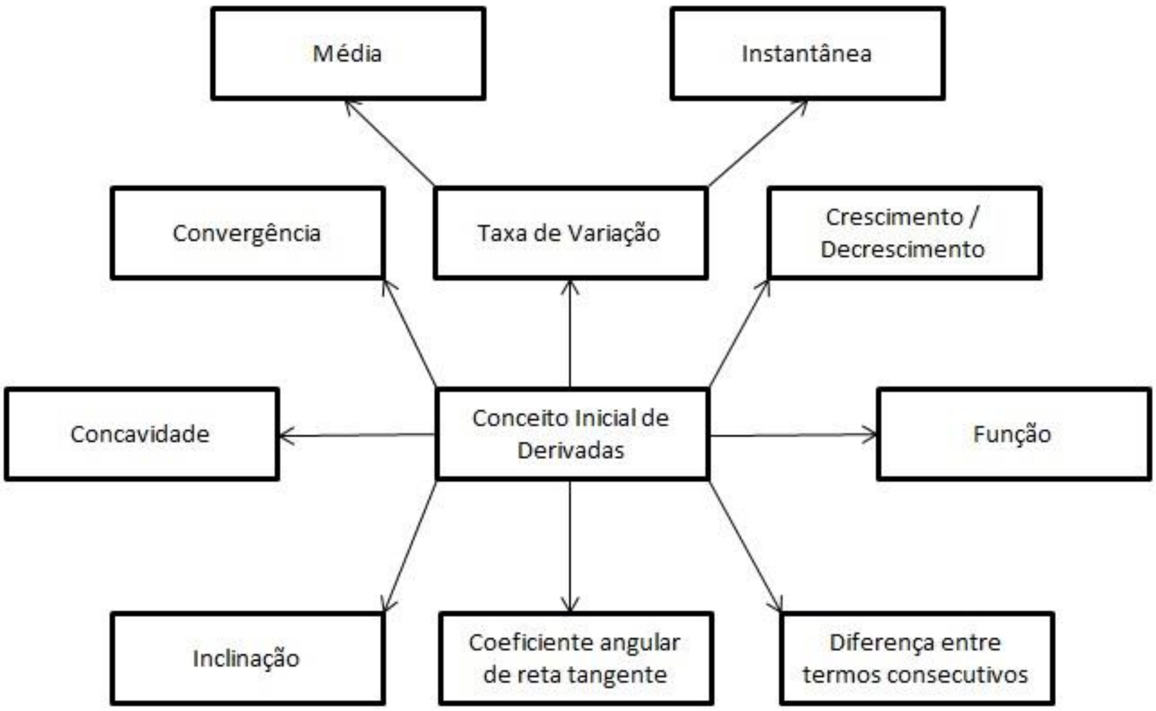


Figura 1 - Ideias que circunscrevem o conceito de derivada.
Fonte: autores.

A primeira tarefa (estabelecer comparação entre diferentes tipos de sequências) é baseada em Weigand (2001), e considera que há inúmeras situações práticas que podem ser descritas por funções ou sequências discretas, que, por serem bastante acessíveis, possibilitam que os grupos detectem “padrões” em fenômenos e em situações.

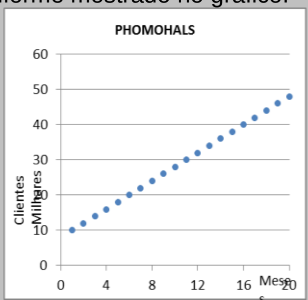
No estudo de sequências de diferença, o mesmo autor cita que, com o auxílio de tal técnica, é possível analisar a modificação geral do comportamento das sequências, sendo uma ferramenta importante para entender as taxas de variação, fato esse levado em conta na proposição da segunda tarefa da sequência.

No estudo de taxa de variação, Weigand (2001), enuncia que a taxa de variação, em especial a taxa de variação média pode ser utilizada para descrever e explicar muitas situações, nas quais as variáveis são interdependentes. Em especial, destacamos aqui o estudo da velocidade média e instantânea, tema explorado na terceira tarefa.

TAREFA 1 - ROTEIRO

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela PROMOHALS promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting
A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Quadro 1 - Tarefa 1: o caso Compunet
Fonte: Adaptado de Weigand (2014).

Tempo previsto: 3 aulas.

Conteúdo da aula: conceito sobre sequências e sequências particulares

Objetivo específico: Reconhecer os diferentes tipos de sequências e seus comportamentos.

Metodologia e Estratégia: Para exploração dos conceitos envolvidos da tarefa, é necessário inicialmente disponibilizar o arquivo em formato do software Excel, pois é um programa que os grupos sejam familiarizados, com algumas ferramentas e objetos de manipulação (construção de gráficos, criação de lei de formação, etc.).

Nesta tarefa ideias e conceitos podem surgir ou serem planejados, conforme o Quadro 3.

Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
Sequências como funções particulares
Crescimento/Decrescimento
Funções como relação variacional
Concavidade
Diferença entre termos consecutivos

Quadro 2 - Ideias e Conceitos da Tarefa 1
Fonte: autor.

Após, o professor pode lançar questões para que os alunos/grupos possam explorar itens da tarefa, como:

- Qual empresa é mais vantajosa?
- Em que períodos a empresa se torna mais vantajosa?
- Qual empresa é melhor em curto, médio e longo prazo?
- Em algum momento a empresa Promohals é vantajosa? Em quais períodos?

Neste momento o professor deve passar pelos grupos acompanhando as resoluções e explorações da tarefa nos grupos, indicando novos pontos a ser explorado e guiados caso os grupos “fujam” do que é esperado.

As sistematizações de conteúdos podem ser feitas durante e no final da aula, nesta tarefa apresenta-se definições de:

<u>Sequências</u>: Uma sequência é uma lista infinita de números S1, S2, S3,..., Sn,.... Denominamos S1 o primeiro termo, S2 o segundo termo e Sn o termo geral.

<u>Sequências numéricas</u>: são funções de domínio real e contradomínio um conjunto qualquer não vazio.

Progressões aritméticas: é um caso particular de sequência que possuem um valor constante de um número para outro, chamado razão, a partir do seu segundo termo.

Sequências Recursivas: podem ser definidas *recursivamente,* ou seja, relacionando o *n-ésimo* termo aos termos anteriores e a todos os termos iniciais que forem necessários para se iniciar a sequência.

Sequências como casos particulares de funções: Uma sequência é uma função cujo domínio são os números inteiros positivos, ou seja, o conjunto N (naturais), ou seja, $f: N \to R$. Pode-se, assim, entender uma sequência numérica como uma "seleção" de pontos de uma função de variável real.

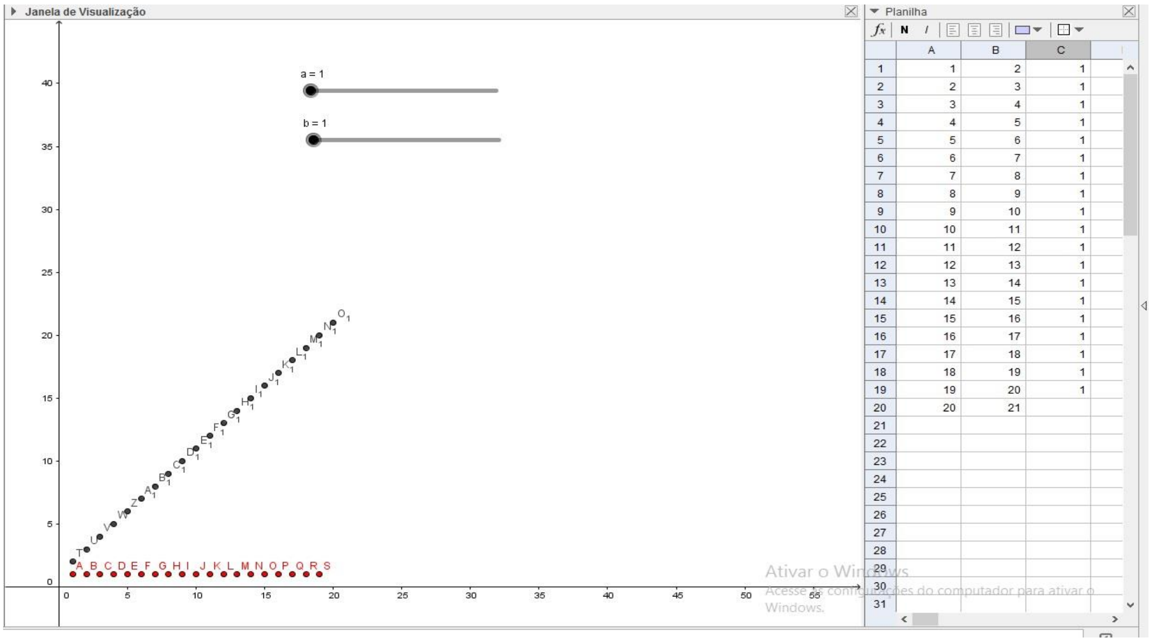
Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Excel.

TAREFA 2 - ROTEIRO

"Nesta tarefa, vamos investigar a chamada ***sequência de diferenças****. Trata-se do tipo mais simples de variação de uma sequência (a_n), a* ***variação simples (ou absoluta)*** *que indicaremos por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Inicialmente, vamos explorar duas sequências em especial, de comportamento linear, exponencial e quadrática. O objetivo é notar a importância dos valores nos controles deslizantes e sua relação com a sequência de diferença. Dadas as sequências definidas por $a_n = a + (n-1) \cdot b$, $a_n = a.b^{n-1}$ e $a_n = a.n^2 - b.n + c$, analise, com auxílio do Geogebra, o papel dos parâmetros a e b no comportamento dessas sequências e de suas sequências de diferenças. Para facilitar, estude uma sequência por vez, anote tudo que achar pertinente e interessante durante a exploração.*

a) *Movimente o controle deslizante para $a = 0$ e $b > 0$, o que é possível notar?*
b) *Movimente o controle deslizante para $a > 0$ e $b = 0$, o que é possível notar?*
c) *Agora explore as seguintes situações:*
   i) $a > 0$ e $b > 0$
   ii) $a < 0$ e $b > 0$
   iii) $a < 0$ e $b < 0$
   iv) $a > 0$ e $b < 0$
   v) $a = 0$ e $b = 0$"

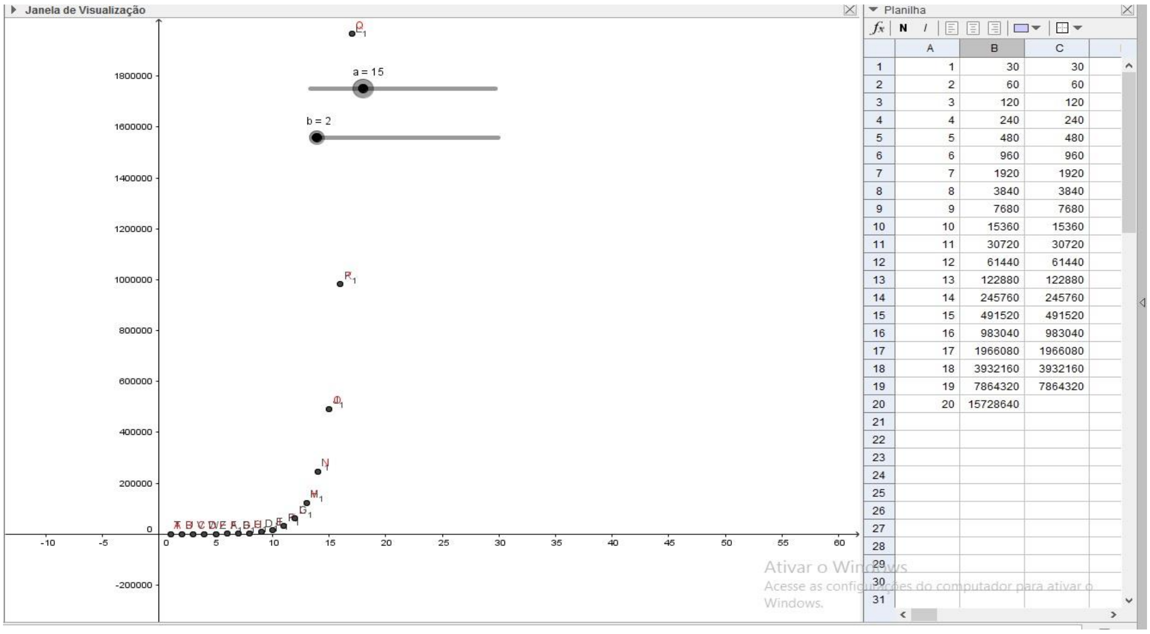
Abaixo, evidenciamos modelos de construção das sequências originais e sequências de diferenças. Na coluna "A" da tabela consta o valor de "n" nas sequências originais, na coluna "B" está à sequência original e na coluna "C" a sequência de diferenças.



	A	B	C
1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	5	1
5	5	6	1
6	6	7	1
7	7	8	1
8	8	9	1
9	9	10	1
10	10	11	1
11	11	12	1
12	12	13	1
13	13	14	1
14	14	15	1
15	15	16	1
16	16	17	1
17	17	18	1
18	18	19	1
19	19	20	1
20	20	21	

Figura 2 - Representação da sequência $a_n = a + (n-1) \cdot b$ e a sequência de diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Fonte: autor.



	A	B	C
1	1	30	30
2	2	60	60
3	3	120	120
4	4	240	240
5	5	480	480
6	6	960	960
7	7	1920	1920
8	8	3840	3840
9	9	7680	7680
10	10	15360	15360
11	11	30720	30720
12	12	61440	61440
13	13	122880	122880
14	14	245760	245760
15	15	491520	491520
16	16	983040	983040
17	17	1966080	1966080
18	18	3932160	3932160
19	19	7864320	7864320
20	20	15728640	

Figura 3 - Representação da sequência $a_n = a.b^{n-1}$ e a sequência de diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$

Fonte: autor.

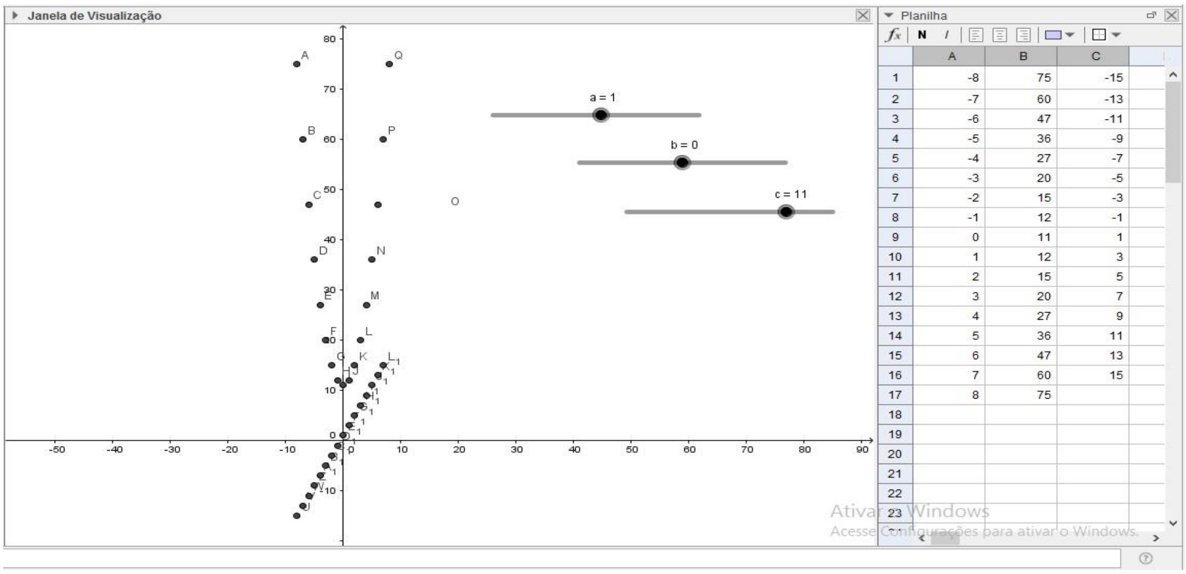


Figura 4 - Representação da função $a_n = a.n^2 - b.n + c$ e na função de diferença $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$
Fonte: autor.

Tempo previsto: 3 aulas.

Conteúdo da aula: sequências e sequências de diferenças.

Objetivo específico: Identificar o comportamento das sequências de diferenças comparando com a sequência original.

Metodologia e Estratégia: Essa tarefa exige o uso do *software* Geogebra, pois na execução da tarefa pode-se explorar os diversos recursos desse *software*, em especial o controle deslizante, o uso das Planilhas e da Lista de Pontos. Quando se vincula os controles deslizantes a e b, pode-se gerar os elementos da sequência com auxílio da Planilha ($a_1 = a$), juntamente com sua sequência de diferenças, construída na coluna ao lado. O recurso Lista de Pontos possibilita a representação gráfica de ambas (sequência original e de diferenças).

Na sequência linear $a_n = a + (n-1) \cdot b$, espera-se que os alunos/grupos explorem o comportamento crescente/decrescente, a relação do coeficiente a com o “modo” como a sequência (de)cresce, a (in)dependência de b na constituição da sequência de diferenças (pois a sequência de diferenças será sempre uma sequência constante).

Para a sequência $a_{n+1} = a_n.b^n$, dita de comportamento exponencial, o elemento central da investigação é a percepção dos diferentes comportamentos possíveis para sua sequência de diferenças, dependendo do valor escolhido para b.

No caso em que $b \geq 2$, a sequência de diferenças, assim como a sequência original, terá também um comportamento exponencial crescente. Para $b = 1$, teremos uma sequência de diferenças nula; para $0 < b < 1$, $\{\Delta a_n\}$ é decrescente; se $b = 0$, a sequência de diferenças é nula a partir do segundo termo; para $b < 0$ temos $\{\Delta a_n\}$ alternada (convergente se $-1 < b < 0$; divergente caso contrário).

Já na sequência dita quadrática, é possível explorar os intervalos em que a sequência de diferenças é crescente, decrescente ou nula, quando $\Delta a_n > 0, \Delta a_n < 0$ e $\Delta a_n = 0$, na qual a sequência de diferenças quando existente será uma sequência linear.

Nesta tarefa ideias e conceitos podem surgir ou serem planejados, conforme o Quadro 4.

Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
Crescimento/Decrescimento
Funções como relação variacional
Concavidade
Diferença entre termos consecutivos entre a sequência original e de diferenças
Coeficiente angular da reta
Inclinação

Quadro 3 - Ideias e Conceitos da Tarefa 2
Fonte: autor.

Durante a condução da tarefa em sala, o professor pode questionar os alunos/grupos, em questões para reforçar a exploração da sequência original em relação com a sequência de diferenças, através dos controles deslizantes, como:

- O que é possível notar com o movimento do controle deslizante a na sequência original e de diferenças? Existe alguma relação?
- E com o controle deslizante b na sequência original e de diferenças? O quê acontece?
- Qual o comportamento que podemos notar na sequência original movimentando o controle deslizante? E na sequência de diferenças?
- Em quais intervalos as sequências se tornam crescentes? E decrescentes?

Como os alunos não estão habituados com o *software* Geogebra, cabe o professor acompanhar na construção e resolução da tarefa, para que não haja equívocos eventuais nas elaborações das respostas.

O conceito principal da atividade a ser sistematizado é de sequências de diferenças, que vem evidenciado no início da atividade, o professor deve retomar o conceito quando for conveniente, sendo:

Sequência de diferenças: Quando temos um termo a_n de uma sequência dependendo quantitativamente de n podemos, muitas vezes, construir o modelo matemático ou analisar esta dependência através das características variacionais destas variáveis, ou seja, o modelo é formulado através das variações destas grandezas. Entretanto, o termo variação pode ter diferentes formulações em matemática e para cada situação podemos escolher o tipo mais apropriado para o modelo. Nos exemplos acima, trabalhamos com o tipo mais simples de variação de uma sequência a_n, a variação simples (ou absoluta), que indicaremos por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. Esses valores formam uma nova sequência ou função, que indicaremos por Δa_n e denominaremos sequência de diferenças.

Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

TAREFA 3 - ROTEIRO

Um dos temas importantes do Cálculo é o estudo do movimento. Para descrever completamente o movimento de um objeto é necessário especificar sua velocidade, a direção e o sentido em que está se movendo. Neste curso, consideraremos apenas o movimento ao longo de uma reta (retilíneo). Alguns exemplos são um pistão movendo-se em um cilindro, um carro de corrida em uma pista reta, um objeto largado diretamente do alto para baixo, etc. Uma descrição gráfica do movimento retilíneo de uma partícula pode ser obtido com a posição s da partícula em função do tempo decorrido t desde o instante inicial $t = 0$.

1. A cada intervalo de 5 segundos observa-se a posição de um carro numa rodovia, com a finalidade de observar se em algum momento sua velocidade superou a máxima permitida de 72 km/h. Com os dados obtidos construiu-se a seguinte tabela:

t (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
s (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

Em algum momento a velocidade máxima permitida foi superada? Justifique.

2. Considere um objeto em movimento retilíneo cuja posição, em metros, é descrita em função do tempo (em segundos), por meio da equação $s(t) = t^2$. Estamos interessados em obter a velocidade da partícula no instante $t = 1$.

a) Calcule a velocidade média do objeto considerando $0 \leq t \leq 1$ e $1 \leq t \leq 2$.

b) Calcule a velocidade média considerando o ***primeiro*** dos subintervalos obtidos da divisão de $1 \leq t \leq 2$ em:

i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) n partes.

c) Calcule a velocidade média considerando o ***último*** dos subintervalos obtidos da divisão de $0 \leq t \leq 1$ em:

i) 2 partes ii) 3 partes iii) 4 partes iv) n partes.

d) Os resultados obtidos anteriormente formam sequências.

i) O que elas representam?
ii) Elas parecem convergir? Se sim, para qual valor?

Tempo previsto: 3 aulas.

Conteúdo da aula: taxa de variação média e instantânea.

Objetivo específico: Refinar o conceito de taxa de variação média para instantânea.

Metodologia e Estratégia: Nesta tarefa o item 1 é adaptada a partir da proposta de D'Avoglio (2002); já o item 2 foi construído baseando-se nas ideias de Weigand (2004, 2014).

Para realizar essa tarefa é necessário anteceder o estudo do conceito de convergência de uma sequência e introdução da noção de limite de uma sequência.

No item 1 da tarefa toma-se como ponto de partida um conceito da Física (velocidade média), na qual visa problematizar o conceito de velocidade partindo do conceito de velocidade média $Vm = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (um quociente de diferenças). Um recurso possível a ser utilizado neste item é a de representações gráficas e numéricas no intuito de levar os alunos/grupos a concluírem que não é possível determinar o momento exato que a velocidade foi superada, apenas é possível determinar o intervalo de tempo que ela superou.

Já segundo item da tarefa, a proposta é de "refinar" o conceito de velocidade média tomando intervalos de tempo cada vez menores; considera-se dois intervalos iniciais de tempo $1 \leq t \leq 2$ e $0 \leq t \leq 1$, na qual por meio de suas subdivisões é possível estimar a velocidade no instante $t=1$ (por meio do conceito de limite de uma sequência de quocientes de diferenças).

Neste ultimo item é possível explorar e sistematizar o conceito de derivada no ponto (a derivada de $s(t)=t^2$ em $t=1$). Nesta tarefa ideias e conceitos podem surgir ou serem planejados, conforme o Quadro 5.

Ideias e Conceitos possíveis de serem explorados
Taxa de Variação Média
Taxa de Variação Instantânea
Convergência

Quadro 4 - Ideias e Conceitos da Tarefa 3
Fonte: autor.

Alguns encaminhamentos e questionamentos podem ser tomados durante a execução da tarefa, tais como:

- E se passássemos a equação para $s(t)=t^3$ em um intervalo de $t=1$? Qual será a velocidade instantânea?
- E se agora a equação for $s(t)=t^n$ no intervalo $n \leq t \leq 1$? Qual será a sua velocidade instantânea?
- Qual regularidade é possível notar?
- Como podemos generalizar essa resposta de regularidade para um n qualquer?

Um recurso possível no item 2 da tarefa, é a criação da lista de pontos no Geogebra, evidenciando para qual valor as equações iram convergir (no caso quando é a equação $s(t)=t^2$ em $t=1$, terá a convergência em $2m/s$.

Dentro da sistematização da tarefa, é possível discutir e elencar as seguintes definições:

<u>Quociente de diferenças</u>: Para cada valor de n, obtemos uma estimativa da velocidade média para um intervalo de tempo $\frac{1}{n}$. Temos então duas sequências que recebem o nome de sequência de quocientes de diferenças, pois são originadas a

partir da divisão entre a diferença de posição do objeto pela diferença de tempo entre cada posição.

Velocidade média: é a razão entre o deslocamento de uma partícula e o intervalo de tempo para que o deslocamento aconteça. A velocidade média mede a variação da posição do móvel no tempo, e nos fornece um valor que expressa o quanto o móvel está rápido ou devagar ao realizar um percurso.

Velocidade instantânea: A velocidade instantânea é a velocidade medida em um determinado momento. Diferente da velocidade média, que mede a velocidade média durante um percurso em uma variação de tempo, a velocidade instantânea mede a velocidade em um instante específico. Dizemos que a função velocidade é a derivada de $S(t)$, em relação a variável t.

Recursos Didáticos: quadro-negro, giz, projetor multimídia, *notebook* com software Geogebra.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa sequência de tarefas apresenta subsídios para a compreensão do conceito inicial sobre derivadas. O papel ativo do aluno nas resoluções e o papel de mediação do professor durante a execução da tarefa contribuem para o processo de ensino, na qual a compreensão de derivadas não é previamente apresentado para os alunos/grupos, mas sim sistematizado durante a aula.

Por fim, vale salientar que essa proposta de tarefas é uma sugestão para o professor, na qual este tem autonomia para analisar, selecionar e adequar as tarefas conforme suas reais situações de sala de aula. Espera-se que esta sequência de tarefas contribua com o trabalho docente e na construção de conceitos inicias sobre o tema derivadas no ensino de CDI.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Porque a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática?. **Revista do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato grosso do Sul**, v. 8, p. 527-546, 2015.

D’AVOGLIO, A. R. **Derivada de uma função num ponto:** Uma forma significativa de introduzir o conceito. 2002. 63 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

LIMA, G. L. Contextualizando momentos da trajetória de ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 125-149, 2014.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, v. 32, p. 142-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.: GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

RASMUSSEN, C; MARRONGELE, K.; BORBA, M. C. **Research on calculus:** what do we know and where do we need to go? ZDM, v. 46, p. 507-515, 2014.

WEIGAND, H.-G.. Tabellenkalkulation - ein schrittweise erweiterbares didaktisches Werkzeug. **Der Mathematikunterricht**, v. 47, n. 3, p. 16-27, 2001.

WEIGAND, H.-G. (2004). Sequences—basic elements for discrete mathematics. ZDM - **Zentralblatt fu¨r Didaktik der Mathematik**, 36(3), p. 91-97, 2004.

WEIGAND, Hans-Georg. A discrete approach to the concept of derivative. **ZDM Mathematics Education**, 46, p. 603-619, 2014.