

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

MARIANA COELHO PORTILHO BERNARDI

**ANÁLISE DE DEFLEXÕES DE VIGAS VIA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA
LINEAR E NÃO LINEAR**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CAMPO MOURÃO
2019

MARIANA COELHO PORTILHO BERNARDI

**ANÁLISE DE DEFLEXÕES DE VIGAS VIA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA
LINEAR E NÃO LINEAR**

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado à Disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso 2, do Curso Superior em Engenharia Civil do Departamento Acadêmico de Construção Civil - DACOC - da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, para obtenção do título de bacharel em engenharia civil.

Orientador: Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro.

CAMPO MOURÃO
2019



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Campo Mourão
Diretoria de Graduação e Educação Profissional
Departamento Acadêmico de Construção Civil
Coordenação de Engenharia Civil



TERMO DE APROVAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso

**ANÁLISE DE DEFLEXÕES DE VIGAS VIA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL ORDINÁRIA LINEAR E NÃO LINEAR**

por

Mariana Coelho Portilho Bernardi

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às 15h50min do dia 11 de dezembro de 2019 como requisito parcial para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL, pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Dr. Jorge Luís Nunes De Goes
(UTFPR)

Prof. Dr(a). Lilian Caroline Xavier Candido
(UTFPR)

Prof. Dr. Adilandri Mércio Lobeiro
(UTFPR)
Orientador

Responsável pelo TCC: **Prof. Me. Valdomiro Lubachevski Kurta**

Coordenador do Curso de Engenharia Civil:

Prof. Dr(a). Paula Cristina de Souza

A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

Ao Professor Dr. Adilandri Mércio Lobeiro, pela excelente orientação neste trabalho e pelos anos de projeto, que completaram minha vida acadêmica.

A todos os professores, a minha gratidão pelos conhecimentos passados.

A todos os amigos que conheci durante o curso, principalmente a minhas amigas Monique e Camila que estiveram comigo em todos os momentos.

Ao meu amigo Rogério pela paciência e dedicação na ajuda deste trabalho.

Ao meu amigo Rafael, pela calma em me auxiliar com o \LaTeX e a utilização deste *template*.

Ao Maiko, por toda disponibilidade e ajuda nos experimentos realizados no Laboratório.

A minha família, por me dar condições e suporte aos meus estudos e apoio incondicional.

A Universidade Tecnológica Federal do Paraná, por oferecer o curso e suporte acadêmico.

As “tias” da limpeza que sempre cuidaram com muito zelo do local de estudo e nos alegravam com sua simpatia.

E a todos que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e fizeram parte da minha formação.

Meu Muito Obrigada.

RESUMO

BERNARDI, Mariana C. P. **Análise de deflexões de vigas via Equação Diferencial Ordinária Linear e não Linear**. 2019. 46 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2019.

Vigas são elementos estruturais presentes em quase todas edificações, a função delas é basicamente vencer vãos e transmitir as ações nelas atuantes para os apoios, como por exemplo os pilares. Desse modo, em projetos, busca-se que as estruturas satisfaçam os parâmetros aceitáveis, como evitar deslocamentos excessivos. Embasando-se no estudo de deflexões de vigas, este trabalho apresenta a dedução matemática das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) não linear e linear que controlam esse fenômeno. Além disso, realizou-se dois estudos de casos, de uma viga em balanço e de uma viga biapoiada, onde, para as mesmas, foram encontradas as respectivas EDOs não linear e linear que regem suas deflexões. Foi feito dois ensaios experimentais de modo a comparar seus resultados com as respectivas soluções das EDOs, numérica com base no Método das Diferenças Finitas (MDF) para as não lineares e analítica via integração para as lineares, em que constatou-se a EDO mais adequada para cada um dos estudos de caso.

Palavras-chave: Vigas. EDO Não Linear. Método das Diferenças Finitas. Deflexão. Linha Elástica.

ABSTRACT

BERNARDI, Mariana C. P. **Analysis of beam deflections via Linear and Nonlinear Ordinary Differential Equation**. 2019. 46 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2019.

Beams are structural elements present in almost all buildings, their function is basically to overcome gaps and transmit the actions on them to the supports, such as the pillars. Thus, in projects, it is sought that the structures meet the acceptable parameters, such as avoiding excessive displacements. Based on the study of beam deflections, this paper presents the mathematical deduction of the nonlinear and linear ordinary differential equations (ODEs) that control this phenomenon. In addition, two case studies were performed, one balance beam and one two-beam, where, for them, were found the respective nonlinear and linear ODEs that govern their deflections. Two experimental tests were performed in order to compare their results with the respective ODE solutions, numerical based on the Finite Difference Method (MDF) for the nonlinear and analytical via integration for the linear ones, in which the most appropriate ODE was found. for each of the case studies.

Keywords: Beams. Nonlinear ODE. Finite Difference Method. Deflection. Elastic line.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Trecho da tabela de equações de deslocamento para vigas	16
2	Trecho da tabela a qual mostra as equações das respectivas vigas.	17
3	Barra simétrica a qual aplica-se os momentos.	19
4	Barra simétrica flexionada de maneira uniforme.	20
5	Comparação do segmento infinitesimal, antes e depois da flexão pura.	20
6	Diagrama de deformações.	22
7	Análise preliminar de tensões	23
8	Viga engastada a esquerda livre a direita, com carga concentrada	27
9	Viga em balanço, submetida a um carregamento pontual em sua extremidade	27
10	Viga em balanço de seção constante e carga q	28
11	Viga em balanço com um corte na seção transversal a uma distância x , em que $0 \leq x \leq l$	29
12	Janela para inserir os dados da viga em balanço.	32
13	Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído	33
14	Viga de acrílico biapoiada com carregamento uniformemente distribuído	34
15	Viga biapoiada com corte na seção transversal a uma distância x , em que $0 \leq x \leq l$	35
16	Janela para inserir a EDO não linear e o N	38
17	Janela para inserir as condições de contorno do PVC	38
18	Janela para inserir Número de interações e Tolerância	38
19	Janela para inserir os dados da viga biapoiada	40
20	Representação gráfica dos deslocamentos obtidos experimentalmente e via EDOs linear e não linear para a viga em balanço	42
21	Representação gráfica dos deslocamentos obtidos experimentalmente e via EDOs linear e não linear para a viga biapoiada	43

LISTA DE TABELAS

1	Características da viga em balanço	28
2	Características da viga biapoiada	34
3	Resultados obtidos para as EDOs linear, não linear e experimento da viga em balanço	41
4	Comparação dos erros percentuais para as flechas da viga em balanço	42
5	Resultados obtidos para as EDOs linear, não linear e experimento da viga biapoiada	43
6	Comparação dos erros percentuais para as flechas da viga biapoiada	44

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

EDO Equação Diferencial Ordinária

EDOs Equações Diferenciais Ordinárias

ELS Estado Limite de Serviço

ELU Estado Limite Último

MDF Método das Diferenças Finitas

PVC Problema de Valor de Contorno

PVI Problema de Valor Inicial

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Módulo de Elasticidade
I	Momento de Inércia
M	Momento Fletor
ρ	Raio de Curvatura
ε	Deformação
L	Deslocamento Inicial
L'	Deslocamento Final
ε_{max}	Deformação Máxima
σ_{max}	Tensão Máxima
σ	Tensão
F	Força
A	Área
σ_x	Tensão Normal
τ_{xy}	Tensão de Cisalhamento xy
τ_{xz}	Tensão de Cisalhamento xz
h	Altura
b	Largura
R_a	Reação de Apoio

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos	13
1.1.1	Objetivo Geral	13
1.1.2	Objetivos Específicos	13
1.2	Justificativa	13
1.3	Estrutura do Trabalho	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1	EDO de Segunda Ordem Não Linear que Controla Deflexão de Vigas	15
2.2	EDO Linear de Segunda Ordem que Controla Deflexão de Vigas	15
2.3	Alteração das Vinculações e Carregamentos nas Vigas	16
2.4	Problema de Valor Inicial (PVI) e Problema de Valor de Contorno (PVC)	17
2.5	Método das Diferenças Finitas	17
3	METODOLOGIA	19
3.1	Dedução da EDO de Segunda Ordem Não Linear	19
3.1.1	Deformações em uma Barra Simétrica na Flexão Pura	19
3.1.2	Análise Preliminar das Tensões na Flexão Pura	23
3.1.3	Curvatura de uma Curva Plana	25
3.2	Dedução da EDO de Segunda Ordem Linear	26
3.3	Estudo de Caso: Viga em Balanço	26
3.3.1	Características da Viga em Balanço Ensaída	27
3.3.2	Equação do Momento Fletor para a Viga em Balanço	28
3.3.3	EDO de Segunda Ordem Não Linear para a Viga em Balanço	29
3.3.4	Solução Numérica via MDF para a EDO Não Linear da Viga em Balanço	30
3.3.5	Solução do Sistema Não Linear gerado a partir da EDO Não Linear para a Viga em Balanço	31
3.3.6	EDO de Segunda Ordem Linear para a Viga em Balanço	31
3.3.7	Solução Analítica da EDO Linear para a Viga em Balanço	31
3.3.8	Solução da Função gerada a partir da EDO Linear para a Viga em Balanço	32
3.4	Estudo de Caso: Viga Biapoiada	33
3.4.1	Características da Viga Biapoiada Ensaída	33
3.4.2	Equação do Momento Fletor para a Viga Biapoiada	34
3.4.3	EDO de Segunda Ordem Não Linear para a Viga Biapoiada	35

3.4.4	Solução Numérica via MDF para a EDO Não Linear da Viga Biapoiada	36
3.4.5	EDO de Segunda Ordem Linear para a Viga Biapoiada	39
3.4.6	Solução Analítica da EDO Linear para a Viga Biapoiada	39
3.4.7	Solução da Função gerada a partir da EDO Linear para a Viga Biapoiada	40
4	RESULTADOS	41
4.1	Resultados Viga em Balanço	41
4.2	Resultados Viga Biapoiada	42
5	CONCLUSÃO	45
	Referências	46

1 INTRODUÇÃO

Pela definição da ABNT NBR:6118 (2014), as vigas são classificadas como barras e são normalmente retas na horizontal. Essas são destinadas a receber ações das lajes, de outras vigas, de paredes de alvenaria e eventualmente de pilares, etc. A função das vigas é basicamente vencer vãos e transmitir as ações nelas atuantes para os apoios, que geralmente são os pilares.

As vigas, são elementos estruturais presentes em quase todas edificações. As ações destinadas a elas, se devem aos carregamentos, esses podem ser carregamentos externos ou carregamentos devido ao próprio peso, que geram as forças normalmente na direção y , ou seja, forças verticais com sentido para baixo, que atual em qualquer ponto no eixo da viga.

Sempre que uma força é aplicada a um corpo, este tende a mudar sua forma original. Essas forças quando aplicada nas vigas, causam deslocamento verticais, que são chamadas de deflexões. Em vista disso, utiliza-se o termo deflexão para se referir a configuração deformada do eixo longitudinal de uma viga causadas pelas ações físicas atuantes.

Esses deslocamentos podem ser altamente visíveis ou praticamente imperceptíveis se não forem utilizados equipamentos que façam medições precisas. Por exemplo, uma tira de borracha sofrerá uma grande deformação quando aplicada forças no sentido para baixo. Por outro lado, os elementos estruturais de um edifício sofrem apenas leves deslocamentos, quando há muitas pessoas andando dentro dele.

Diante do exposto, percebe-se que a análise dos deslocamentos deve fazer parte de um bom projeto estrutural. Saber identificar o quanto uma estruturas pode apresentar de flechas, é de suma importância. Flecha é o termo utilizado para se referir ao deslocamento máximo de uma viga.

Desse modo, em projetos para que haja o dimensionamento de um elemento estrutural, devem ser verificados, segundo Souza (2017), os Estado Limite de Serviço (ELS) e o Estado Limite Último (ELU).

De acordo com Andreotti (2018), os ELU estão relacionados com o colapso total ou parcial da estrutura, associados com a perda de estabilidade, resistência e equilíbrio, que podem comprometer a segurança dos usuários. Os ELS, por sua vez, relacionam-se com as deficiências no desempenho para as condições de utilização, como por exemplo, vibrações excessivas, que causam problemas a edificação e deslocamentos elevados que geram desconforto visual aos ocupantes.

Assim sendo, para a obtenção dos deslocamentos é necessário o cálculo de deflexão, que é definido por meio de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem não linear. A partir disso, nesse trabalho foi realizada a dedução matemática para a EDO não linear e a partir dela, realizou-se a dedução da EDO linear. Com a finalidade de analisar o uso das EDOs não linear e linear, realizou-se dois estudos de casos. Para os casos, foi feito um ensaio experimental para ser comparado com as soluções das EDOs não linear e linear respectivamente.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Analisar deflexões de vigas, via Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) linear e não linear, e comparar experimentalmente para os casos de uma viga em balanço e de uma biapoiada.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Deduzir as EDOs de segunda ordem não linear e linear que controlam deflexões de vigas;
- Obter as EDOs não linear e linear, que rege uma viga em balanço e realizar o ensaio experimental;
- Obter as EDOs não linear e linear, que rege uma viga biapoiada e realizar o ensaio experimental;
- Encontrar as soluções numéricas, via Método das Diferenças Finitas (MDF) para as EDOs não lineares;
- Encontrar as soluções analíticas, via integração para as EDOs lineares.

1.2 Justificativa

No passado, as estruturas projetadas eram, em sua maioria, menos sofisticadas, compostas por elementos estruturais com menor número de vãos e pavimentos. Atualmente, o cenário é outro, as estruturas são mais altas e esbeltas e a arquitetura mais arrojada, o que leva à necessidade de maiores vãos.

Todas essas mudanças tornaram as estruturas mais deformáveis, ou seja, mais suscetíveis à grandes deslocamentos, sendo ainda mais importante a obtenção dos

valores das flechas das vigas para realização de projetos estruturais. Dessa forma, faz-se necessário distinguir os usos das EDOs não linear e linear para o cálculo dos deslocamentos de vigas.

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em seis capítulos sendo que, no Capítulo 1 foi apresentado a Introdução do trabalho, a qual explica um pouco do tema estudo e alguns termos específicos sobre o assunto deflexão de vigas. Ainda no Capítulo 1 apresentou-se os objetivos, geral e específicos, que foram realizados ao longo do trabalho. Para explicar a importância do estudo das EDOs que controlam esse fenômeno, apresenta-se ainda, a justificativa. O Capítulo 2, a Revisão Bibliográfica, foi revisando alguns materiais pertinentes sobre o assunto e mostrou como os autores tratam e utilizam as EDOs não linear e linear.

A Metodologia foi apresentada no Capítulo 3, seguindo a ordem dos objetivos propostos, a primeira seção é a Dedução da EDO de segunda ordem não linear, em que mostrou-se, todas as passagens matemática para obtenção da EDO não linear, já a segunda seção, Dedução da EDO de segunda ordem linear, demonstra como a EDO linear é deduzida a partir da EDO não linear. Ainda no Capítulo 3 apresentou-se os casos estudados, divididos em duas seções, sendo essas, Estudo de caso: Viga em Balanço e Estudo de caso: viga Biapoiada, as duas estão distribuídas em subseções explicando os experimentos ensaiados e a obtenção das respectivas EDOs.

Os Resultados estão presente o Capítulo 4, a qual está subdivido nas seções, Resultados Viga em Balanço e Resultados Viga Biapoiada, esses apresentam tabelas e gráficos comparando a soluções das duas EDOs com os experimentos ensaiados. No Capítulo 5 consta a Conclusão, indicando em quais casos se deve utilizar cada uma das EDOs e por fim o Capítulo 6 consta-se as Referências Bibliográficas utilizadas ao longo do estudo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para contemplar os objetivos do trabalho, foi feita a pesquisa com alguns materiais pertinentes à revisão da literatura que será descrito e analisado nas seções que seguem.

2.1 EDO de Segunda Ordem Não Linear que Controla Deflexão de Vigas

De acordo com Beer, Jr e Dewolf (1996) e Hibbeler (2010), tem-se a EDO (2.1), na forma não linear, que vem do cálculo elementar da expressão que fornece a curvatura de uma curva plana,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}. \quad (2.1)$$

Essa é uma EDO não Linear de segunda ordem, cuja a solução é uma função que representa a forma de uma viga fletida, em que E é o módulo de elasticidade I o momento de inércia e M é o momento fletor.

A dedução da EDO (2.1), não realizada nas bibliografias utilizada para estudo de “Resistências dos Materiais”, devido a isso, o primeiro objetivo desse trabalho foi realizar a sua dedução com todas as análises e passagens matemáticas, que se encontra mais a frente na seção 3.1.

A solução da EDO (2.1) não é de fácil obtenção e pode ser alcançada por meio de métodos numéricos. Em vista disso, não é convencional o uso da EDO não linear, nas bibliografias, no entanto a utilização na sua forma linear é muito comum.

2.2 EDO Linear de Segunda Ordem que Controla Deflexão de Vigas

A partir do que se foi dito acima, nas bibliografias como Beer, Jr e Dewolf (1996), é comum a utilização da EDO linear (2.2). Tal EDO é obtida ao desprezar o termo da declividade dy/dx que é muito pequeno, de modo que seu quadrado $(dy/dx)^2$, torna-se ainda menor, assim, pode ser desprezado como faz Beer, Jr e Dewolf (1996), logo a EDO linear é dada por,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad (2.2)$$

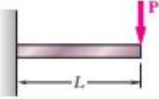
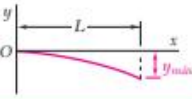
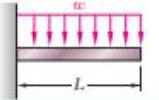
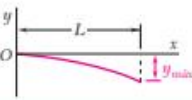
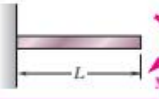

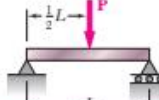
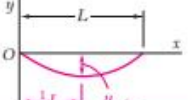
que representa uma EDO de segunda ordem na forma linear, passiva de ser resolvida analiticamente, a qual rege o comportamento da linha elástica.

2.3 Alteração das Vinculações e Carregamentos nas Vigas

Na Engenharia Civil é comum a utilização de tabelas, como a da Figura 1, retirada de Beer, Jr e Dewolf (1996). Apresentam diferentes vinculações e carregamentos para as vigas, e suas respectivas equações da linha elástica. Essas equações facilitam a extração de modo fácil e rápido do deslocamento máximo para uma viga, também chamada de flecha.

Figura 1 – Trecho da tabela de equações de deslocamento para vigas

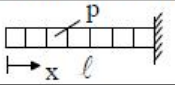
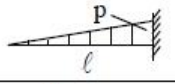
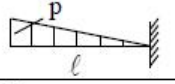

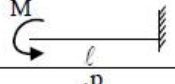
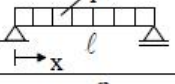
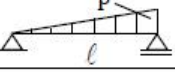
Apêndice D. Deflexões e inclinações de vigas

Viga e carregamento	Linha elástica	Deflexão máxima	Inclinação e extremidade	Equação da linha elástica
		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$+\frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \leq \frac{1}{2}L$: $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$

Fonte: Beer, Jr e Dewolf (1996)

A Figura 2, retirada de Pinheiro et al. (2010), apresenta a solução analítica de diversos casos de vigas, modificando as vinculações e alterando o carregamento.

Figura 2 – Trecho da tabela a qual mostra as equações das respectivas vigas.

CASO	VINCULAÇÃO E CARREGAMENTO	FLECHA		EQUAÇÃO DA ELÁSTICA
		w_{max}	x	
1		$\frac{1}{8} \frac{p l^4}{EI}$	0	$\frac{p l^4}{24EI} (\alpha^4 - 4\alpha + 3)$
2		$\frac{1}{30} \frac{p l^4}{EI}$	0	$\frac{p l^4}{120EI} (\alpha^5 - 5\alpha + 4)$
3		$\frac{11}{120} \frac{p l^4}{EI}$	0	$\frac{p l^4}{120EI} (-\alpha^5 + 5\alpha^4 - 15\alpha + 11)$
4		$\frac{1}{3} \frac{P l^3}{EI}$	0	$\frac{P l^3}{6EI} (\alpha^3 - 3\alpha + 2)$
5		$\frac{1}{2} \frac{M l^2}{EI}$	0	$\frac{M l^2}{2EI} (1 - \alpha)^2$
6		$\frac{5}{384} \frac{p l^4}{EI}$	0,5l	$\frac{p l^4 \alpha}{24EI} (\alpha^3 - 2\alpha^2 + 1)$
7		$\frac{3}{460} \frac{p l^4}{EI}$ (*)	0,519l	$\frac{p l^4 \alpha}{360EI} (3\alpha^4 - 10\alpha^2 + 7)$

Fonte: Pinheiro et al. (2010)

2.4 Problema de Valor Inicial (PVI) e Problema de Valor de Contorno (PVC)

Vigas são exemplos de PVI ou PVC, o que as determinam são suas vinculações. Cada vinculação, possui suas condições de contornos ou condições iniciais. Por exemplo uma viga em balanço é caracterizada pelas suas condições iniciais na vinculação engastada, logo é um PVI. Já uma viga biapoiada possui condições de contorno, nos dois apoios presentes nas extremidades, o que a caracteriza como um PVC. Tais vigas com seus respectivos problemas de valores inicial e de contorno, foram estudadas mais detalhadamente nas seções, 3.3 e 3.4 respectivamente.

Dessa forma, ao utilizar as EDOs não lineares tem-se os PVI e PVC também não lineares, o que se explica a razão de se introduzir métodos numéricos e obter soluções aproximadas, (GONÇALVES, 2005). No entanto, ao utilizar as EDOs lineares tem-se os PVI e PVC lineares a qual, estão suscetíveis a se realizar as soluções analíticas via integração.

2.5 Método das Diferenças Finitas

Visto que a Equação (2.1) não possui solução analítica, justifica-se a aplicação de um método numérico. O método a ser utilizado é o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Reescrevendo a Equação (2.1), tem-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \frac{M}{EI} = 0. \quad (2.3)$$

Ao considerar,

$$f(x, y, y') = - \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \frac{M}{EI}, \quad (2.4)$$

tem-se,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y, y') = 0. \quad (2.5)$$

O MDF consiste, basicamente, em transformar o domínio em um conjunto de pontos, por meio da discretização. A partir disso, por meio da expansão em série de Taylor, constrói-se as aproximações para as derivadas da EDO que transforma uma equação diferencial em uma equação de diferenças. De acordo com Burden e Faires (2008), a Equação (2.5), é transformada em,

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad (2.6)$$

ou ainda,

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad (2.7)$$

ou seja, as aproximações das derivadas foram substituídas na EDO (2.5), e formaram um sistema de equações não lineares. Dessa forma, para obter a solução aproximada da EDO não linear, basta obter a solução do sistema não linear, como faz Burden e Faires (2008).

3 METODOLOGIA

Para a metodologia realizou-se um estudo comparativo entre as EDOs não linear e linear que controlam a deflexão de vigas. A pesquisa foi dividida em quatro etapas, a primeira etapa foi a dedução de todas as passagens matemáticas para obtenção das duas EDOs na forma geral.

Já a segunda etapa, consistiu na elaboração dos experimentos para estudo, assim, escolheu-se dois tipos de vigas, a primeira delas uma viga em balanço e a segunda uma viga biapoiada. Para a terceira etapa, obteve-se as duas EDOs não linear e linear específicas para cada um dos dois casos, para isso foi substituído suas respectivas equações de momento nas EDOs iniciais.

Por último, a quarta etapa, encontrou-se a solução numérica via MDF para a EDO não linear e para a EDO linear obteve-se a solução analítica via integração. Os resultados das duas soluções foram comparados com os resultados experimentais para cada caso de viga, no capítulo 4.

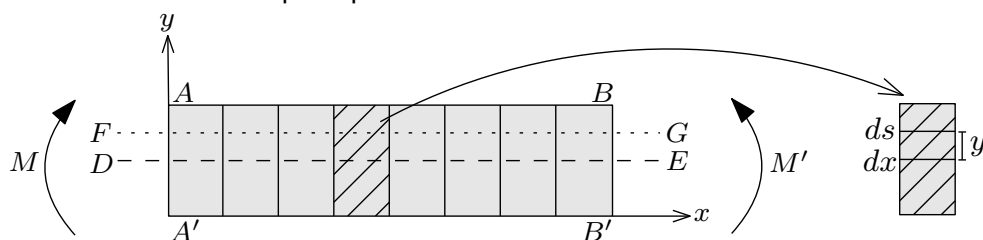
3.1 Dedução da EDO de Segunda Ordem Não Linear

3.1.1 Deformações em uma Barra Simétrica na Flexão Pura

Ao analisar uma barra simétrica sujeita a dois momentos iguais de sentidos opostos M e M' que atuam no mesmo plano longitudinal da viga (Figura 3) é dito que a mesma está sob flexão pura.

O momento M aplicado deve possuir um valor que garanta que as tensões normais se mantenham abaixo do valor de escoamento σ_e , ou seja, deve-se estar no regime elástico, onde ocorrem pequenas deformações para que essa análise seja garantida.

Figura 3 – Barra simétrica a qual aplica-se os momentos.



Fonte: Autoria própria (2019).

Pela Figura 3, AB é a linha que representa a extremidade superior da viga,

$A'B'$ é a linha que representa na extremidade inferior da viga, DE a linha neutra da viga e FG é uma linha que passa a cima da linha DE a uma distância y .

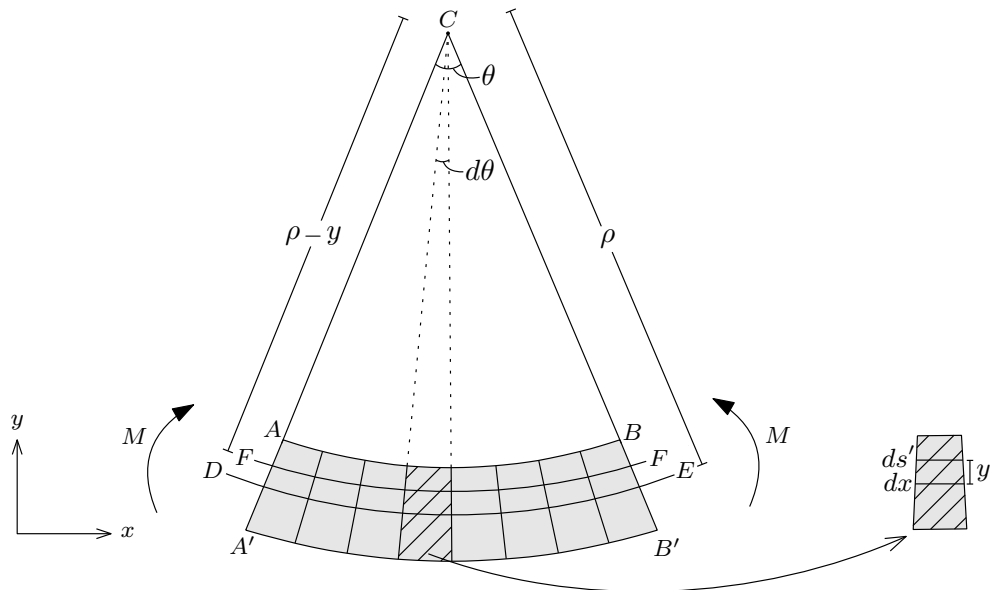
Ao considerar um segmento de comprimento infinitesimal, dx (Figura 3)

$$dx = ds. \quad (3.1)$$

sendo que a linha ds , está a uma distância y de dx .

Com a ação dos conjugados a barra se flexiona, mas permanece simétrica em relação ao plano, de acordo com Beer, Jr e Dewolf (1996). Além disso, como o momento fletor M é o mesmo em qualquer seção da viga, a barra se flexiona de maneira uniforme. Desse modo, todas as linhas determinadas antes da ação dos conjugados, tornam-se uma curvatura constante, em outras palavras as linhas que eram inicialmente um linha reta, se transformaram em um arco de circunferência de centro C (Figura 4).

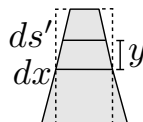
Figura 4 – Barra simétrica flexionada de maneira uniforme.



Fonte: Autoria própria (2019).

O momento M é positivo, logo pela Figura 4, nota-se que após a barra flexionar, AB está sofrendo compressão, ou seja, diminui seu comprimento inicial, $A'B'$ está sob tração, ou seja, aumenta de comprimento, DE se mantém do mesmo comprimento, pois é onde se encontra a linha neutra da seção, ou seja onde não ocorre deformações e FG está a uma distância y de DE , e está sendo comprimida.

Figura 5 – Comparação do segmento infinitesimal, antes e depois da flexão pura.



Fonte: Autoria própria (2019).

Pela Figura 5, é possível comparar os efeitos da flexão no segmento de comprimento infinitesimal, antes e depois da aplicação dos conjugados. Na representação da Figura 5 dx , ds' e as extremidades estão apresentadas como retas, no entanto, já foi dito que as mesmas são arcos de circunferências, mas por ser uma pequena deformação em um fragmento extremamente pequeno, pode-se assemelhar os mesmos à retas.

A partir da Figura 4 e pela fórmula de comprimento de arco, pode se escrever,

$$dx = \rho d\theta, \quad (3.2)$$

sendo ρ o raio de curvatura e $1/\rho$ a curvatura, chamada de linha elástica.

Como $dx = ds$ na Equação (3.1) então,

$$ds = \rho d\theta, \quad (3.3)$$

o mesmo para ds' , pela fórmula de comprimento de arco,

$$ds' = (\rho - y)d\theta, \quad (3.4)$$

percebe-se que na barra fletida ocorreu deformações. A deformação é expressa por,

$$\varepsilon = \frac{L' - L}{L}, \quad (3.5)$$

sendo ε a deformação, L o deslocamento inicial e L' o deslocamento final.

Para o caso, no segmento em análise, o comprimento inicial é dado por ds e o comprimento final de ds' , chamaremos essa deformação do segmento de ε_x , assim,

$$\varepsilon_x = \frac{ds' - ds}{ds}, \quad (3.6)$$

substituindo as Equações (3.3) e (3.4), em (3.6), obtém-se

$$\varepsilon_x = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}, \quad (3.7)$$

reescrevendo a Equação (3.7), tem-se

$$\varepsilon_x = \frac{\rho d\theta - y d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta}, \quad (3.8)$$

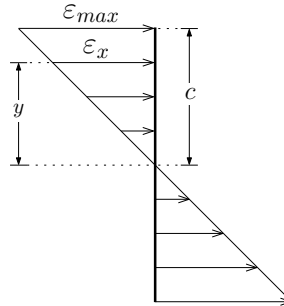
simplificando a Equação (3.8), encontra-se

$$\varepsilon_x = \frac{-y}{\rho}. \quad (3.9)$$

A Equação (3.9), representa a deformação do ponto no segmento infinitesimal. O sinal negativo, indica que a concavidade do eixo da viga está voltada para cima, pois o momento aplicado foi positivo, como já dito anteriormente.

Faz-se o diagrama de deformação (Figura 6) para obter uma relação com o a deformação máxima ε_{max} . Para a deformação máxima a distância da linha neutra é c .

Figura 6 – Diagrama de deformações.



Fonte: Autoria própria (2019).

Ao escrever a deformação máxima em (3.9), tem-se

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho}, \quad (3.10)$$

reorganizando a Equação (3.10),

$$\frac{\varepsilon_{max}}{c} = \frac{1}{\rho}, \quad (3.11)$$

em que $1/\rho$ caracteriza a curvatura.

Ao realizar semelhança de triângulos no diagrama de tensões,

$$\frac{\varepsilon_x}{y} = \frac{\varepsilon_{max}}{c}, \quad (3.12)$$

ao isolar ε_x em (3.12),

$$\varepsilon_x = \frac{y}{c} \varepsilon_{max}. \quad (3.13)$$

Como já dito, é necessário estar em um regime elástico, assim a Lei de *Hooke* é válida, na qual, é definida por,

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (3.14)$$

em que, σ é a tensão, E o módulo de elasticidade e ε a deformação. Ao multiplicar por E de ambos os membros em (3.13),

$$E\varepsilon_x = \frac{y}{c} \varepsilon_{max} E, \quad (3.15)$$

logo,

$$\sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_{max}, \quad (3.16)$$

ao isolar ε na Lei de *Hooke* (Equação 3.14), tem-se

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (3.17)$$

e ao substituir na Equação (3.11), obtém-se

$$\frac{\sigma_{max}}{Ec} = \frac{1}{\rho}, \quad (3.18)$$

reescrevendo, a Equação (3.18),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{Ec} \sigma_{max}. \quad (3.19)$$

em que σ_{max} é tensão máxima.

3.1.2 Análise Preliminar das Tensões na Flexão Pura

Por meio da estática, sabe-se que um conjugado M consiste realmente de duas forças iguais e de sentidos opostos (Figura 7) e que a soma das componentes dessas forças em qualquer direção é igual a zero, (BEER; JR; DEWOLF, 1996). Além disso, o momento do conjugado, em relação a qualquer eixo perpendicular a seu plano, é sempre zero.

A tensão pode ser escrita por,

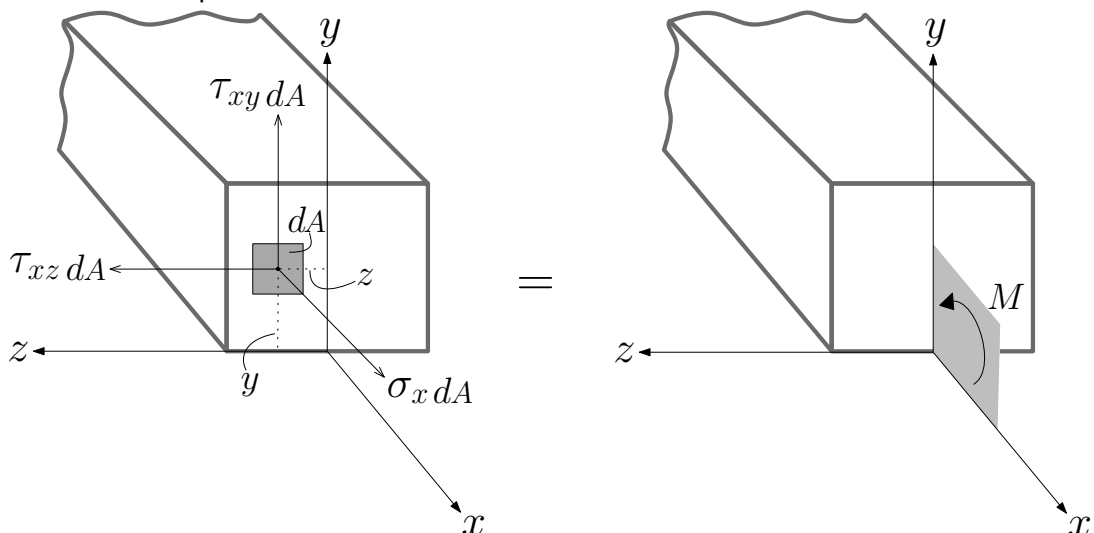
$$\sigma = \frac{F}{A}, \quad (3.20)$$

ao isolar a força F em (3.20),

$$F = \sigma A, \quad (3.21)$$

que foi a forma representada na Figura 7, sendo F força, σ tensão e A a área.

Figura 7 – Análise preliminar de tensões



Fonte: Autoria própria (2019).

Tem-se que σ_x é a tensão normal em um ponto da seção, τ_{xy} e τ_{xz} são as componentes da tensão de cisalhamento, ambas nulas nesse caso, e ainda, que o sistema de esforços internos que atuam na seção deve ser equivalente ao momento M , como representado na Figura 7.

Ao utilizar os métodos da estática para deduzir as relações que devem ser satisfeitas pelas tensões que atuam em uma seção transversal de uma peça em flexão pura, e assumir a distribuição de eixos indicada na Figura 7, pode-se expressar ao realizar o equilíbrio estático na seção,

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \int \sigma_x dA = 0 \quad (3.22)$$

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow \int (\sigma_x dA) y = M_z \quad (3.23)$$

$$\Sigma M_y = 0 \rightarrow \int (\sigma_x dA) z = 0 \quad (3.24)$$

Assim nota-se que a distribuição das tensões em uma seção transversal não pode ser determinada pela estática somente, pois é um problema estaticamente indeterminado. Dessa forma faz-se necessário a análise de deformações para estabelecer a distribuição de tensões.

Ao substituir a Equação (3.16) na Equação (3.23), obtém-se,

$$\int \left(\frac{y}{c} \sigma_{max} dA \right) y = M_z, \quad (3.25)$$

reescrevendo a Equação (3.25),

$$\frac{\sigma_{max}}{c} \int y^2 dA = M_z. \quad (3.26)$$

Sendo que,

$$\int y^2 dA, \quad (3.27)$$

representa o momento de segunda ordem, mais conhecido como momento de inércia I . Ao substituir em (3.26), tem-se,

$$\frac{\sigma_{max}}{c} I = M_z, \quad (3.28)$$

isolando σ_{max} e generalizando o momento M obtém-se,

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}, \quad (3.29)$$

substituindo a Equação (3.29) na Equação (3.19), encontra-se

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I}, \quad (3.30)$$

simplificando a Equação (3.30),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}. \quad (3.31)$$

A expressão define a curvatura da barra deformada submetida a flexão, (BEER; JR; DEWOLF, 1996).

3.1.3 Curvatura de uma Curva Plana

Dada uma curva regular $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $g(t) = (x(t), y(t))$, tal que $g'(t) \neq 0$ para todo t , tem-se por (RODRIGUES, 2001) que a curvatura de g em t é,

$$\frac{1}{\rho(t)} = \left| \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \right|. \quad (3.32)$$

Se considerarmos uma função diferencial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = f(x)$, que possui até a segunda derivada contínua como por exemplo, a função que rege a deflexão de vigas, tem-se

$$\begin{aligned} x = t, \quad x'(t) = 1 \quad \text{e} \quad x''(t) = 0. \\ y(x) = y(t), \quad y'(x) = y'(t) \quad \text{e} \quad y''(x) = y''(t). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ao substituir (3.33) em (3.32), obtém-se

$$\frac{1}{\rho(x)} = \left| \frac{0y'(x) - y''(x)1}{[1^2 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} \right|, \quad (3.34)$$

simplificando, a Equação (3.34), encontra-se

$$\frac{1}{\rho(x)} = \left| \frac{-y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} \right|, \quad (3.35)$$

reescrevendo a Equação (3.35), tem-se

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{\left| -\frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.36)$$

Ao substituir a Equação (3.31) na Equação (3.36), obtém-se,

$$\frac{M}{EI} = \frac{\left| -\frac{d^2y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.37)$$

ou ainda,

$$\frac{\pm \frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}. \quad (3.38)$$

No decorrer desse trabalho, foi aplicado somente carregamentos negativos, pelo fato de serem vigas, o que geram momentos positivos, pois tracionam as fibras inferiores, ou seja o primeiro membro da Equação (3.38), é sempre positivo. Portanto, pode-se escrever a Equação (3.38), da seguinte forma,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI}, \quad (3.39)$$

a qual representa a EDO na forma não linear que controla deflexões de vigas.

3.2 Dedução da EDO de Segunda Ordem Linear

A partir da dedução acima, pode-se obter a EDO linear (3.40), que procede da EDO não linear (3.39), ao excluir o termo (dy/dx) . A exclusão de tal termo é possível o considerar pequenos deslocamentos angulares, quando comparados com o comportamento da viga, ou seja, a declividade dy/dx é pequena, de modo que seu quadrado $(dy/dx)^2$, torna-se menor ainda, de forma que se aproxima de zero. Dessa forma, a EDO linear, é dada por,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}, \quad (3.40)$$

a mesma é suscetível de ser resolvida analiticamente, e assim como a EDO não linear, também controla a deflexão de vigas.

3.3 Estudo de Caso: Viga em Balanço

Foi escolhida um tipo de vinculação para as extremidades, no caso engastada à esquerda e livre à direita, o que determina uma viga em balanço. Foi escolhido também, o tipo de carregamento, para o caso uma carga concentrada na extremidade direita, como representado na Figura 8.

Figura 8 – Viga engastada a esquerda livre a direita, com carga concentrada



Fonte: Autoria própria (2019).

3.3.1 Características da Viga em Balanço Ensaçada

A partir da viga escolhida, optou-se por realizar o ensaio em uma viga de acrílico, tal viga trata-se de uma régua de 30 cm comumente encontrada em papelarias.

Condições do ensaio:

- A régua foi engastada com o auxílio de dois Grampos Sargentos, sendo a mesma originalmente de 30 cm, 5 cm foram engastados, restando em balanço 25 cm;
- As cargas foram aplicadas conforme Figura 9, com o auxílio de um linha, o que garantiu a aplicação no extremo da régua;
- As medições dos deslocamentos foram efetuadas por meio de uma trena com escala milimétrica, e com o auxílio de um *laser* de nivelamento, fez-se a marcação do extremo da viga fletida (Figura 9).

Figura 9 – Viga em balanço, submetida a um carregamento pontual em sua extremidade



Fonte: Autoria própria (2019).

No ensaio, foi conferido apenas, a medição da flecha, ou seja, onde correu o deslocamento máximo, devido à dificuldade de realizar a medição dos demais deslocamentos ao longo do vão da viga.

A Tabela 1 apresenta as propriedades do material acrílico, as dimensões da viga, o carregamento utilizado e a posição que ocorre a flecha.

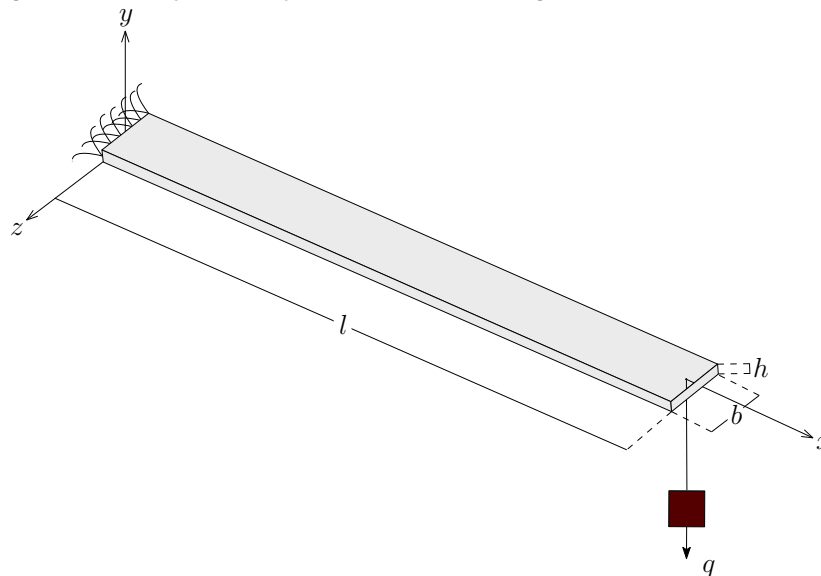
Tabela 1 – Características da viga em balanço

Vão (l)	250 mm
Largura da seção (b_w)	25 mm
Altura da seção (h)	1,2 mm
Momento de Inércia (I_z)	3,6 mm ⁴
Módulo de Elasticidade (E)	3240 MPa
Carga (q)	1,76374 N
Posição da flecha	250 mm

Fonte: Autoria Própria (2019).

A Figura 10 ilustra a viga carregada e a localização das dimensões da mesma, presentes na Tabela 1.

Figura 10 – Viga em balanço de seção constante e carga q



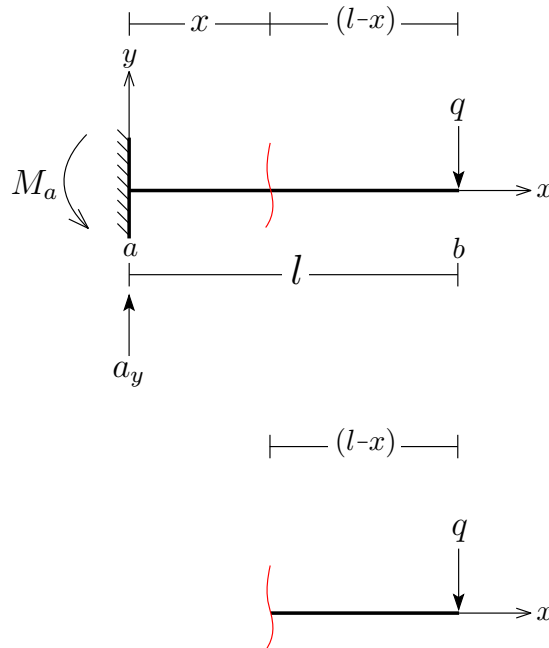
Fonte: Autoria própria (2019).

Sendo que, q representa a carga, l o vão da viga, h a altura da viga, e b a largura.

3.3.2 Equação do Momento Fletor para a Viga em Balanço

Para tal viga, é necessário obter a EDO não linear que a rege, assim, deve-se obter a equação do momento fletor, por meio de um corte na seção transversal da viga a uma distância x como representado na Figura 11.

Figura 11 – Viga em balanço com um corte na seção transversal a uma distância x , em que $0 \leq x \leq l$



Fonte: Autoria própria (2019).

Na Figura 11, a_y é a força de reação no engaste, M o momento e x uma distância qualquer.

A equação do momento fletor obtida, pelo somatório de momentos, é dada por,

$$\begin{aligned}
 M &= -q(l - x), \\
 &= -ql + qx, \\
 &= qx - ql.
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

3.3.3 EDO de Segunda Ordem Não Linear para a Viga em Balanço

Após a determinação da equação do momento fletor, (3.41), basta substituí-la na Equação (3.39), e obtém-se,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{qx - ql}{EI}.
 \tag{3.42}$$

Que representa a EDO não linear para a viga em balanço e juntamente com as condições iniciais, obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{qx - ql}{EI}, \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.43)$$

que se trata de um PVI não linear.

Ao substituir os dados da viga em questão, presentes na Tabela 1, na Equação (3.42), obtém-se,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1,76374 \cdot x - 1,76374 \cdot 250}{3240 \cdot 3,6}. \quad (3.44)$$

A Equação (3.44), é empregada de tal forma para a aplicação no método numérico a ser utilizado, juntamente com as condições iniciais apresentadas no PVI (3.43).

3.3.4 Solução Numérica via MDF para a EDO Não Linear da Viga em Balanço

Ao isolar d^2y/dx^2 da Equação (3.44) e adotar a variação i em x , tem-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1,76374 \cdot x_i - 1,76374 \cdot 250}{3240 \cdot 3,6} \cdot \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}. \quad (3.45)$$

Ao substituir a Equação (3.45) na Equação das Diferenças Centradas (2.7), de acordo com MDF e aplicar $0 \leq i \leq 10$, utilizar as condições iniciais do PVI, (3.43) e determinar um $N = 9$, obtém-se as 10 equações, que formam o sistema não linear, (3.46).

$$\left\{ \begin{array}{l} -2w_1 - 23,62691828 = 0 \\ -23,62691828 - w_2 - 21,26422647\left(1 + \frac{1}{2500}w_2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ 11,8134591 + 2w_2 - w_3 - 18,9015346\left(1 + \frac{1}{2500}(w_3 + 11,8134591)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_2 + 2w_3 - w_4 - 16,53884281\left(1 + \frac{1}{2500}(w_4 - w_2)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_3 + 2w_4 - w_5 - 14,17615098\left(1 + \frac{1}{2500}(w_5 - w_3)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_4 + 2w_5 - w_6 - 11,81345915\left(1 + \frac{1}{2500}(w_6 - w_4)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_5 + 2w_6 - w_7 - 9,450767319\left(1 + \frac{1}{2500}(w_7 - w_5)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_6 + 2w_7 - w_8 - 7,088075489\left(1 + \frac{1}{2500}(w_8 - w_6)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_7 + 2w_8 - w_9 - 4,725383658\left(1 + \frac{1}{2500}(w_9 - w_7)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \\ -w_8 + 2w_9 - w_{10} - 2,362691829\left(1 + \frac{1}{2500}(w_{10} - w_8)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Tal sistema não linear, (3.46), possui 10 equações e 10 incógnitas, as incógnitas são os deslocamentos em algumas posições da viga em balanço, incluindo a posição que gera a flecha.

3.3.5 Solução do Sistema Não Linear gerado a partir da EDO Não Linear para a Viga em Balanço

Foi utilizando o *software Matlab*, para resolver o sistema não linear (3.46) gerado pelo MDF. Para isso, foi adicionado as 10 equações no *software* e o mesmo retornou o valor das 10 incógnitas, a qual representam os deslocamentos ao longo do vão da viga. Dessa forma, chega-se na solução da EDO não linear, que encontra-se mais a frente, no capítulo 4.

3.3.6 EDO de Segunda Ordem Linear para a Viga em Balanço

Ao substituir a equação do momento fletor para a viga em balanço, (Equação 3.41), na EDO já linearizada, (Equação 3.40), obtém-se,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx - ql}{EI}. \quad (3.47)$$

Que representa a EDO linear para a viga em balanço e juntamente com as condições iniciais, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx - ql}{EI}, \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.48)$$

que se trata de um PVI linear.

3.3.7 Solução Analítica da EDO Linear para a Viga em Balanço

Ao aplicar a integral em relação x de ambos os lados da Equação (3.47), obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx^2}{2EI} - \frac{qlx}{EI} + c_1, \quad (3.49)$$

em que c_1 é constante. Ao aplicar a integral na equação (3.49), encontra-se

$$y = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qlx^2}{2EI} + c_1x + c_2. \quad (3.50)$$

Para encontrar os valores de c_1 e c_2 , basta utilizar as condições iniciais

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx}(0) = 0. \quad (3.51)$$

Ao utilizar $y(0) = 0$ na Equação (3.50), define-se c_2 ,

$$c_2 = 0. \quad (3.52)$$

Ao substituir $dy/dx(0) = 0$ na Equação (3.49) obtém-se,

$$c_1 = 0. \quad (3.53)$$

Logo, a função dada por, (3.54) é a EDO linear, que controla a deflexão para a viga em balanço.

$$y = \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qlx^2}{2EI}. \quad (3.54)$$

Para tal função, (3.54), deve-se substituir os dados da viga, presentes na Tabela 1, e substituir os valores de x , que são as posições ao longo do vão da viga, em que deseja-se encontrar os deslocamentos, incluindo a posição da flecha.

3.3.8 Solução da Função gerada a partir da EDO Linear para a Viga em Balanço

Foi criado um código utilizando o *software Matlab*, para resolver a função gerada, (3.54), no *software*, o usuário entra apenas com os dados da viga em questão, sendo esses, q , l , E , I e x , como mostra a Figura, 12. Tais dados, estão presentes na Tabela 1.

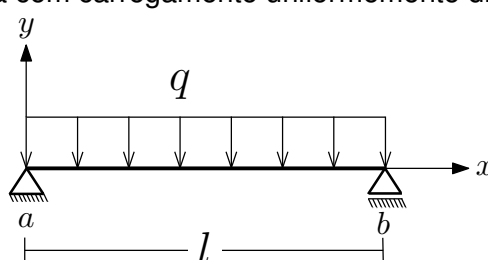
Figura 12 – Janela para inserir os dados da viga em balanço.

Assim obtém-se a solução da EDO linear para a viga em balanço, presente no capítulo 4.

3.4 Estudo de Caso: Viga Biapoiada

Foi escolhida um tipo de vinculação para as extremidades, no caso apoiada à esquerda e à direita, o que caracteriza uma viga biapoiada. Foi determinado também um tipo de carregamento, para o caso uma carga uniformemente distribuída por toda a viga, como mostra a Figura 13.

Figura 13 – Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído



Fonte: Autoria própria (2019).

Na Figura 13, q é a intensidade da carga uniformemente distribuída e l é o vão.

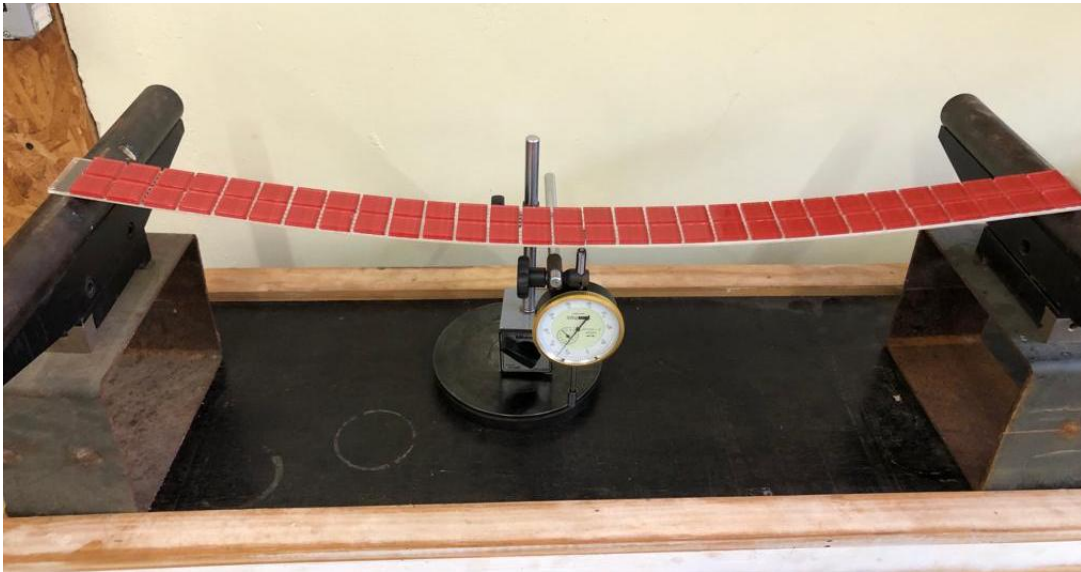
3.4.1 Características da Viga Biapoiada Ensaada

A partir da viga escolhida, optou-se por realizar o ensaio de uma viga de acrílico.

Condições do ensaio:

- A viga de acrílico foi apoiada em dois apoios, em que a área de contato entre viga e apoio fosse a menor possível, como mostra a Figura 14;
- O carregamento uniformemente distribuído foi feito com pedaços de uma placa de pastilhas de vidro, pois assim, o carregamento acompanha a forma com que ocorre o deslocamento na viga;
- Utilizou-se um deflectômetro, “relógio comparador”, calibrado em décimos de milímetros posicionado ao centro da viga, para medir apenas a flecha, ou seja, o deslocamento máximo, devido à dificuldade de realizar a medição dos demais deslocamentos ao longo da viga, (Figura 14).

Figura 14 – Viga de acrílico biapoiada com carregamento uniformemente distribuído



Fonte: Autoria própria (2019).

A Tabela 2 apresenta as propriedades do material acrílico, as dimensões da viga, o carregamento utilizado, e a posição que ocorre a flecha.

Tabela 2 – Características da viga biapoiada

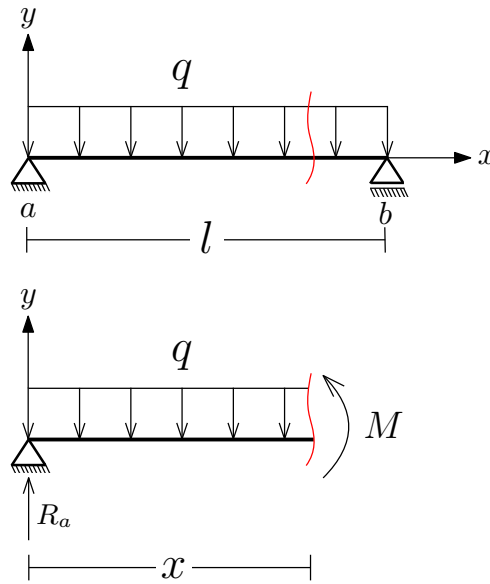
Vão (l)	748 mm
Largura da seção (b_w)	46 mm
Altura da seção (h)	3 mm
Momento de Inércia (I_z)	103,5 mm ⁴
Módulo de Elasticidade (E)	3940 MPa
Carga (q)	0,00410446 N/mm
Posição da flecha	374 mm

Fonte: Autoria Própria (2019).

3.4.2 Equação do Momento Fletor para a Viga Biapoiada

Para tal viga, é necessário obter a EDO não linear que rege a mesma, assim, deve-se adquirir a equação do momento fletor, por meio de um corte na seção transversal da viga a uma distância x como representado na Figura 15.

Figura 15 – Viga biapoiada com corte na seção transversal a uma distância x , em que $0 \leq x \leq l$



Fonte: Autoria própria (2019).

Na Figura 15, R_a a reação de apoio, M o momento e x uma distância qualquer.

A equação do momento fletor obtida, pelo somatório de momentos, é dada por,

$$M + \frac{qx^2}{2} - xR_a = 0, \quad (3.55)$$

A reação de apoio, R_a , pode ser determinada ao fazer o equilíbrio de forças na direção y , conforme,

$$R_a = \frac{ql}{2}. \quad (3.56)$$

Ao substituir a Equação (3.56) na Equação (3.55) e ao isolar M , obtém-se,

$$M = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}. \quad (3.57)$$

3.4.3 EDO de Segunda Ordem Não Linear para a Viga Biapoiada

Após a determinação da equação do momento fletor, (3.57), basta substituí-la na Equação (3.39), e obtém-se,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{qlx - qx^2}{2EI}. \quad (3.58)$$

Que representa a EDO não linear para a viga biapoiada e juntamente com as condições de contorno, obtém-se

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{qlx - qx^2}{2EI} \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(l) = 0, \end{array} \right. \quad (3.59)$$

que se trata de um PVC não linear.

Ao substituir os dados da viga em questão, presentes na Tabela 2, na Equação (3.58), obtém-se,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{0,00410446 \cdot x \cdot 374 - 0,00410446 \cdot 374^2}{2 \cdot 3940 \cdot 103,5}. \quad (3.60)$$

A Equação (3.60), é empregada de tal forma para a aplicação no método numérico a ser utilizado, juntamente com as condições de contorno apresentadas no PVC, (3.59).

3.4.4 Solução Numérica via MDF para a EDO Não Linear da Viga Biapoiada

Distintamente da viga em balanço, em que obteve-se primeiramente as equações pelo MDF de forma manual, justificando assim, a escolha de um $N = 9$, que gerou o sistema não linear, a qual foi resolvido pelo *software Matlab*, para a viga biapoiada, criou-se um algoritmo mais complexo, em que o mesmo já gera as equações pelo MDF e já resolve o sistema não linear, para isso basta entrar com a EDO não linear. Dessa forma, a obtenção da solução da EDO não linear para a viga biapoiada foi mais fácil.

A partir disso, para a obtenção da solução numérica da EDO não linear do exemplo da viga biapoiada, baseada na teoria exposta em Burden e Faires (2008), tem-se, um problema de contorno não linear geral, dado por

$$\left| \begin{array}{l} y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha \quad \text{e} \quad y(b) = \beta. \end{array} \right. \quad (3.61)$$

Como no caso da equação linear, o MDF é empregado quando se eliminam os termos do erro nas fórmulas de diferenças centradas e as condições de contorno são

utilizadas, logo

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta, \quad (3.62)$$

e

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad (3.63)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, N$.

Multiplicando a Equação (3.63) por h^2 e reorganizando-a, obtém-se

$$-w_{i-1} + 2w_i - w_{i+1} + h^2 f\left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) = 0. \quad (3.64)$$

Ao fazer $i = 1, 2, \dots, N$, obtém-se o sistema não linear de N equações por N incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} 2w_1 - w_2 + h^2 f\left(x_1, w_1, \frac{w_2 - \alpha}{2h}\right) = \alpha \\ -w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) = 0 \\ -w_2 + 2w_3 - w_4 + h^2 f\left(x_3, w_3, \frac{w_4 - w_2}{2h}\right) = 0 \\ \vdots \\ -w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\ -w_{N-1} + 2w_N + h^2 f\left(x_N, w_N, \frac{\beta - w_{N-1}}{2h}\right) = \beta, \end{array} \right. \quad (3.65)$$

que tem uma única solução sempre que $h < 2/L$, como demonstrado em Isaacson e Keller (2012).

Considere o problema da determinação de raízes de equações não lineares simultâneas da forma de (3.66)

$$\left\{ F(w) = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(w) = 0 \\ f_2(w) = 0 \\ f_3(w) = 0 \\ \vdots \\ f_{N-1}(w) = 0 \\ f_N(w) = 0, \end{array} \right. \right. \quad (3.66)$$

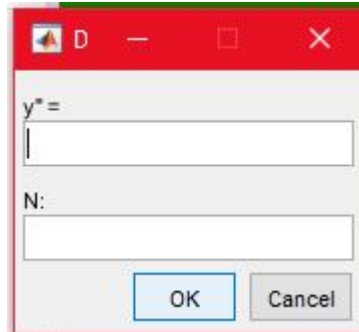
onde $w = (w_1, \dots, w_N)^t$, $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(w) = (f_1(w), f_2(w), \dots, f_N(w))^t$ e $f_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1 \dots N$.

Aplica-se o Método de Newton para obter uma aproximação para a solução do sistema não linear (3.66), de acordo com Burden e Faires (2008).

De acordo com a teoria explicada acima e do Algoritmo 11.4 de Burden e Faires (2008), para PVCs não lineares, criou-se um código em *Matlab* para o caso da viga biapoada, como a mesma também é caracterizada como um PVC.

No código criado o usuário entra primeiramente com a EDO não linear e o número N que deseja atribuir, (Figura 16).

Figura 16 – Janela para inserir a EDO não linear e o N

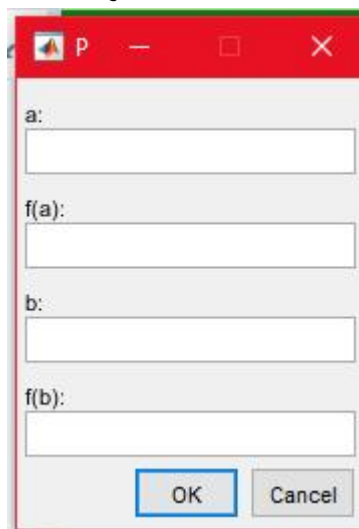


A screenshot of a Windows-style dialog box with a red title bar. The title bar contains a small icon, the letter 'D', and standard window control buttons (minimize, maximize, close). The dialog box has a light gray background. It contains two text input fields. The first field is labeled 'y* =' and is empty. The second field is labeled 'N:' and is also empty. At the bottom of the dialog box, there are two buttons: 'OK' and 'Cancel'.

Fonte: Autoria própria (2019).

A Figura 17, mostra a interface para inserir as condições de contorno, ou seja, os valores de a , b , $y(a)$ e $y(b)$.

Figura 17 – Janela para inserir as condições de contorno do PVC

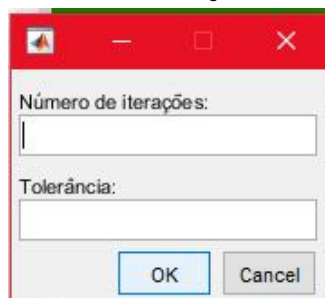


A screenshot of a Windows-style dialog box with a red title bar. The title bar contains a small icon, the letter 'P', and standard window control buttons (minimize, maximize, close). The dialog box has a light gray background. It contains four text input fields. The first field is labeled 'a:', the second 'f(a):', the third 'b:', and the fourth 'f(b):'. All fields are empty. At the bottom of the dialog box, there are two buttons: 'OK' and 'Cancel'.

Fonte: Autoria própria (2019).

Em seguida, deve-se inserir a tolerância e número de iterações, (Figura 18).

Figura 18 – Janela para inserir Número de iterações e Tolerância



A screenshot of a Windows-style dialog box with a red title bar. The title bar contains a small icon and standard window control buttons (minimize, maximize, close). The dialog box has a light gray background. It contains two text input fields. The first field is labeled 'Número de iterações:' and is empty. The second field is labeled 'Tolerância:' and is also empty. At the bottom of the dialog box, there are two buttons: 'OK' and 'Cancel'.

Fonte: Autoria própria (2019).

Ao clicar em “OK”, resolve-se numericamente o PVC, a qual fornece os deslocamentos para as respectivas posições da viga, ou seja, obtém-se a solução para a EDO não linear da viga biapoiada, que encontra-se mais a frente no capítulo 4.

3.4.5 EDO de Segunda Ordem Linear para a Viga Biapoiada

Ao substituir a equação do momento fletor para a viga biapoiada, (3.57), na EDO já linearizada, Equação (3.40), obtém-se,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qlx - qx^2}{2EI}. \quad (3.67)$$

Que representa a EDO linear para a viga biapoiada e juntamente com as condições de contorno, tem-se

$$\left| \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qlx - qx^2}{2EI}, \\ y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(l) = 0, \end{array} \right. \quad (3.68)$$

que se trata de um PVC linear.

3.4.6 Solução Analítica da EDO Linear para a Viga Biapoiada

Ao aplicar a integral em relação x de ambos os lados da Equação (3.68), obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + c_1, \quad (3.69)$$

em que c_1 é constante. Ao aplicar a integral na equação (3.69), encontra-se

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1x + c_2. \quad (3.70)$$

Para encontrar os valores de c_1 e c_2 , basta utilizar as condições de contorno,

$$y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y(l) = 0. \quad (3.71)$$

Ao utilizar $y(0) = 0$ na Equação (3.70), define-se c_2 ,

$$c_2 = 0, \quad (3.72)$$

logo,

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1x. \quad (3.73)$$

Ao substituir $y(l) = 0$ na Equação (3.73) encontra-se,

$$c_1 = -\frac{ql^3}{24EI}. \quad (3.74)$$

Logo, a equação da linha elástica para caso, é uma função dada por,

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) - \frac{ql^3x}{24EI}, \quad (3.75)$$

reorganizando,

$$y = \frac{qx}{24EI} (2lx^2 - x^3 - l^3). \quad (3.76)$$

Para tal função, (3.76), deve-se substituir os dados da viga, presentes na Tabela 2, e substituir os valores de x , que são as posições ao longo da viga, em que deseja-se encontrar os deslocamentos, incluindo a posição da flecha.

3.4.7 Solução da Função gerada a partir da EDO Linear para a Viga Biapoiada

Foi criado um código utilizando o *software Matlab*, para resolver a função gerada, (3.76), para isso o usuário entra apenas com os dados da viga em questão, sendo esses, q , l , E , I e x , como mostra a Figura 19. Tais dados, estão presentes na Tabela 2.

Figura 19 – Janela para inserir os dados da viga biapoiada

Fonte: Autoria própria (2019).

Assim obtém-se a solução da EDO linear para a viga biapoiada, presente no capítulo 4.

4 RESULTADOS

4.1 Resultados Viga em Balanço

A Tabela 3 apresenta os deslocamentos obtidos por meio da solução das EDOs linear e não linear ao longo do vão da viga em balanço. Para o experimento, foi retirado apenas o deslocamento máximo, a flecha, devido a dificuldade de leitura para as demais posições.

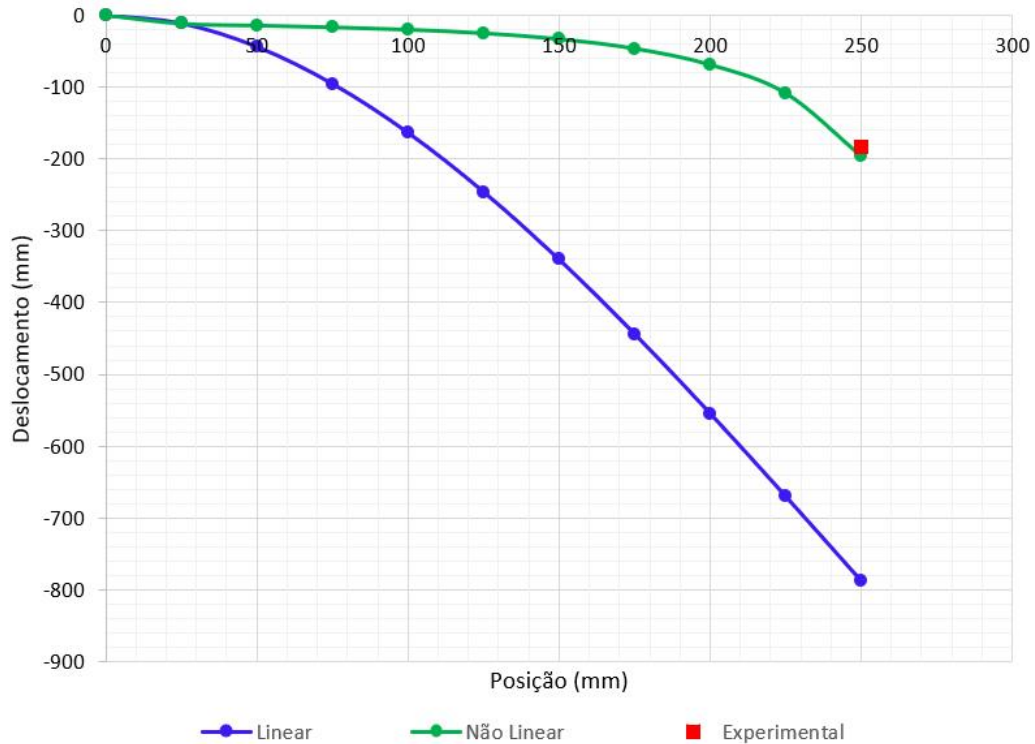
Tabela 3 – Resultados obtidos para as EDOs linear, não linear e experimento da viga em balanço

Viga em Balanço			
Posição (mm)	Linear (mm)	Não Linear (mm)	Experimental (mm)
0	0	0	-
25	-11,4196	-11,8135	-
50	-44,1035	-14,3218	-
75	-95,689	-16,7707	-
100	-163,8133	-20,0782	-
125	-246,1137	-25,0771	-
150	-340,2276	-33,1356	-
175	-443,7922	-46,4459	-
200	-554,445	-68,8617	-
225	-669,8231	-108,5832	-
250	-787,5639	-195,9604	-183

Fonte: Autoria Própria (2019).

Na Figura 20 são representados graficamente os deslocamentos ao longo do vão da viga, presentes na Tabela 3.

Figura 20 – Representação gráfica dos deslocamentos obtidos experimentalmente e via EDOs linear e não linear para a viga em balanço



Fonte: Autoria própria (2019).

Para um melhor efeito de comparação, a Tabela 4 traz o erro percentual para os valores da flecha entre as EDOs Linear e Não Linear com o ensaio para a viga em balanço.

Tabela 4 – Comparação dos erros percentuais para as flechas da viga em balanço

	Experimental e Não Linear	Experimental e Linear
Erro percentual (%)	7,0821	330,3627

Fonte: Autoria Própria (2019).

Após apresentar os resultados para a viga em balanço, percebe-se ao comparar a representação gráfica (Figura 20) e os valores presentes na tabela 3, que a EDO linear se distancia do valor experimental ao longo do vão, o que explica o alto erro percentual da mesma com o experimento ao ser equiparado com a EDO não linear para os valores da flecha, como mostra a Tabela 4.

4.2 Resultados Viga Biapoiada

A Tabela 5 apresenta os deslocamentos obtidos por meio da solução das EDOs linear e não linear ao longo do vão da viga biapoiada. Para o experimento, foi retirado

apenas o deslocamento máximo, a flecha, devido a dificuldade de leitura para as demais posições.

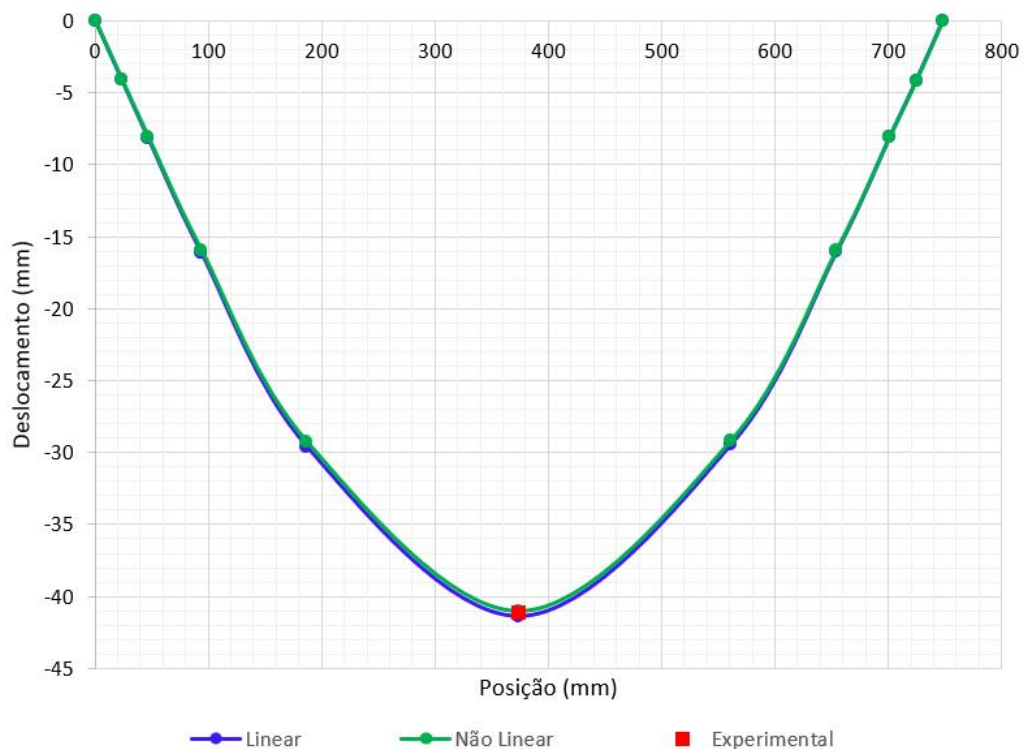
Tabela 5 – Resultados obtidos para as EDOs linear, não linear e experimento da viga biapoiada

Viga Biapoiada			
Posição (mm)	Linear (mm)	Não Linear (mm)	Experimental (mm)
0	0	0	-
23,375	-4,1135	-4,054	-
46,75	-8,1799	-8,0631	-
93,5	-16,1194	-15,8998	-
187	-29,6192	-29,2763	-
374	-41,3816	-41,0265	-41,12
561	-29,4628	-29,1863	-
654,5	-16,0201	-15,8998	-
701,25	-8,0635	-8,0631	-
724,625	-4,1211	-4,1843	-
748	0	0	-

Fonte: Autoria Própria (2019).

Na Figura 21 são representados graficamente os deslocamentos ao longo do vão da viga, presentes na Tabela 5.

Figura 21 – Representação gráfica dos deslocamentos obtidos experimentalmente e via EDOs linear e não linear para a viga biapoiada



Fonte: Autoria própria (2019).

Para um melhor efeito de comparação, a Tabela 6 traz o erro percentual para os valores da flecha entre as EDOs linear e não linear com o ensaio para a viga.

Tabela 6 – Comparação dos erros percentuais para as flechas da viga biapoiada

	Experimental e numérica	Experimental e analítica
Erro percentual (%)	0,2273	0,6359

Fonte: Autoria Própria (2019).

Após apresentar os resultados para a viga biapoiada, percebe-se ao comparar a representação gráfica (Figura 21) e os valores presentes na tabela 5, que as EDOs não linear e linear apresentaram resultados muito próximos ao valor experimental, o que explica o baixo erro percentual das mesmas com o experimento ensaiado, conforme mostra a Tabela 6.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, para um melhor entendimento, foram realizados estudos, a partir das revisões bibliográficas, correlacionados ao tema deflexões de vigas. Percebeu-se que o uso da EDO não linear não é convencional. Então, com o intuito de comprovar que a utilização da EDO não linear também se faz necessária, buscou-se maneiras para justificar o seu uso.

Para isso, foram realizados dois ensaios, por meio desses notou-se que para casos em que ocorrem deflexões consideradas grandes, como no caso do ensaio da viga de acrílico em balanço, o uso da EDO linear, não apresenta resultados satisfatórios, a qual a flecha obtida pela sua solução resulta em um valor discrepante em relação ao experimento, o que gerou um erro percentual elevado. Dessa forma, o termo da declividade dy/dx presente na EDO não linear não deve-se ser desprezado para casos com elevada deflexão, ou seja deve-se utilizar a EDO não linear.

No entanto, com o outro ensaio da viga de acrílico biapoiada, a qual tem uma deflexão menor quando comparada com o caso anterior. Observa-se que o uso da declividade dy/dx não se faz totalmente necessário, visto que ao comparar os resultados experimentais, as soluções numérica para a EDO não linear e analítica pra a linear foram muito próximas, tendo erros percentuais relativamente baixos. Imediatamente a isso, constata-se que, para casos em que haja pequenas deformações o uso da EDO linear faz-se apropriado, visto que é de mais simples utilização.

Para finalizar, explica-se porque as bibliografias não utilizam a EDO não linear, pois o uso da mesma é necessário apenas em casos, em que o deslocamento é muito elevado, sendo que os mesmos, não são aceitáveis em materiais convencionais utilizados em edificações. Logo, na construção civil, emprega-se a EDO linear, pois se utiliza materiais que possuem alta rigidez, não admitindo grandes deslocamentos.

REFERÊNCIAS

ANDREOTTI, R. A. **Aplicação do método das diferenças finitas para a obtenção da deflexão de placas delgadas ortotrópicas bi-apoiadas**. Campo Mourão: Trabalho de Conclusão de Curso, 2018.

BEER, F. P.; JR, E. R. J.; DEWOLF, J. **Resistência dos materiais. 3ª edição**. São Paulo: Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1996.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. [S.l.]: Cengage Learning, 2008.

GONÇALVES, I. **Análise de Deformações em Vigas com Comportamento Geometricamente Não-Linear, Itajubá, 171p**. Tese (Doutorado) — Instituto de Engenharia, 2005.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. São Paulo: Pearson Educación, 2010.

ISAACSON, E.; KELLER, H. B. **Analysis of numerical methods**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

NBR:6118. **Associação Brasileira de Normas Técnicas ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto-procedimento**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2014.

PINHEIRO, L. M. et al. Tabelas de vigas: Deslocamentos e momentos de engastamento perfeito. **Universidade de São Paulo—Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas. São Carlos—SP**, 2010.

RODRIGUES, P. R. **Introdução às curvas e superfícies**. [S.l.]: EdUFF, 2001.

SOUZA, A. C. d. **Dimensionamento de elementos e ligações em estruturas em aço**. [S.l.: s.n.], 2017.