UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIELA CAROLINA LUDVIG

O ENSINO DE PROBABILIDADE POR MEIO DO JOGO DOS DISCOS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2020

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIELA CAROLINA LUDVIG

O ENSINO DE PROBABILIDADE POR MEIO DO JOGO DOS DISCOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Toledo, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a): Daniela Trentin Nava

TOLEDO
2020

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

O Trabalho de Conclusão de Curso intitulado "O ensino de probabilidade por meio do jogo dos discos" foi considerado **APROVADO** de acordo com a ata nº __ de __/__/____

Fizeram parte da banca examinadora os professores:

Professor(a) Orientador(a) Daniela Trentin Nava

Professor(a) Araceli Ciotti de Marins

Professor(a) Regiane Slongo Fagundes

TOLEDO
2020

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma alternativa para o ensino de probabilidade para o Ensino Fundamental Anos Finais ou Ensino Médio por meio do jogo dos discos. O estudo está embasado nos pressupostos da Teoria dos Jogos, a qual, acredita-se que ofereça meios para o desenvolvimento do pensamento crítico matemático através da ação ativa do aluno que se torna o protagonista de seu próprio processo educacional, e o professor é tido como mediador deste processo. A probabilidade presente no jogo dos discos, pode ser desenvolvida como introdução de conteúdo, fixação ou avaliação. É apresentada a resolução do jogo utilizando outros parâmetros que permitem ao professor desenrolar e/ou resgatar conceitos de geometria e probabilidade.

Palavras-chave: Teoria dos jogos; Atividade lúdica; Probabilidade Geométrica; Experimentação.

ABSTRACT

This paper presents an alternative for the teaching of probability for the final years of the Elementary School or High School through the game of discs. The study is based on the assumptions of Game Theory, which is believed to offers means for the development of critical mathematical thinking through the active action of the student who becomes the protagonist of his own educational process, and the teacher is seen as the mediator of this process. The probability present in the game of discs, can be taught as introduction, fixation or even evaluation for the subjects. The game resolution is presented using other parameters that allows the teacher to teach and/or rescue concepts of geometry and probability.

Keywords: Game theory; Playful activity; Geometric Probability; Experimentation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os primeiros registros do uso de probabilidade estão atrelado aos jogos de azar, conforme pode ser averiguado em Rodriguez e Mendes (2018), Gadelha (2004), que dissertam sobre a história da probabilidade. Conta-se que Chevalier de Méré, um intelectual francês apaixonado por jogos de azar e com muitas perdas em suas apostas, questionou o matemático francês Pascal acerca das possíveis explicações do porquê de seus prejuízos nos jogos e quais as maneiras seguras em que poderia ganhar. Em 1654, Pascal procurou solucionar esses questionamentos, utilizando-se de correspondências à Pierre de Fermat, outro matemático francês. Este fato preconiza a "origem do desenvolvimento da teoria da probabilidade matemática" (GADELHA, 2004).

Não somente nos jogos de azar, a teoria de probabilidade pode ser observada em *board games*, jogos de aplicativo, jogos de baralho ou de computador. Assim como também em situações cotidianas, como meteorologia, chances de passar num concurso, de ganhar na loteria, entre tantas outras. Embora a probabilidade tenha tido início atrelado aos jogos, ela é amplamente divulgada e utilizada em importantes estudos relacionados à biologia, medicina, genética, física, engenharias, astrologia, entre outras áreas.

Dentre as situações e fenômenos probabilísticos, o que chama mais a atenção e fascina os estudantes são os jogos de azar, pois desde criança crescem rodeados de brincadeiras e atividades lúdicas que, de certa forma, os ajudaram no crescimento e desenvolvimento cognitivo. Por conta dessa relação desde a infância com o lúdico, nada mais efetivo do que a utilização de jogos como método de ensino em geral. Há porém, que se destacar a importância da contextualização do jogo com os conteúdos didáticos. Neste sentido, este trabalho versa sobre possíveis abordagens didáticas do Jogo dos Discos para alunos do Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio.

O jogo dos discos consiste em uma superfície plana quadriculada com medida do lado l $u.m.$, no qual um jogador lança aleatoriamente um disco de diâmetro d $u.m.$ (CAETANO; PATERLINI, 2013). Caso o disco pouse inteiramente dentro do quadrado, sem tangenciar nenhuma borda, o jogador ganha. Caso o disco cair fora do piso e tocar uma das bordas do quadrado, ele perde. Assim, o problema consiste em determinar o diâmetro do disco relacionando com o lado do piso quadriculado predeterminado, de modo que a probabilidade do jogador perder não seja muito alta, para que não o desestimule a continuar jogando e ainda para que não ganhe sempre, levando a casa de jogos a falência, ou seja, há que se definir um valor parcimonioso para ambas as partes. Usualmente, adota-se probabilidade entre 60% a 80% de o jogador perder.

O objetivo principal deste trabalho foi desenvolver o jogo dos discos utilizando de diferentes parâmetros de modo a apresentar para o professor outras alternativas de se trabalhar com o jogo, abordando de modo prático e lúdico a geometria e a probabilidade, apresentando sua resolução por meio do experimento aleatório, em que foram realizados lançamentos de discos no piso, e pela teoria, descrevendo o cálculo da geometria e probabilidade geométrica.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

De acordo com Grando (2004), um jogo é mais do que algo concreto, é uma atividade lúdica, presente na história do homem, vinculado com sua cultura. A criação de jogos vem da necessidade que um indivíduo possui de desenvolver uma atividade que proporcione diversão, sendo que essa vontade em participar de atividades lúdicas acompanham o indivíduo no seu crescimento desde criança até a fase adulta.

Observando crianças de diversas idades, tanto em ambiente escolar como em seu ambiente familiar, percebe-se a presença de atividades lúdicas com noções matemáticas vivenciadas durante suas ações nessas brincadeiras, mas não percebida por elas no ato de brincar, pois estas jogam somente pelo prazer que o jogo lhes proporciona (GRANDO, 2004). Outro fator que impede a percepção da matemática nessas atividades lúdicas, se trata de ser um conteúdo matemático muito abstrato para a criança ou que precisa de conhecimento mais complexo. Um exemplo histórico sobre isso e que será abordado neste texto, é o jogo dos discos, inventado por crianças na França do século XVIII, período em que os pisos de castelos e jardins eram de ladrilho. Para se divertirem, as crianças lançavam moedas no piso e apostavam se a moeda iria parar inteiramente dentro do ladrilho ou se iria tocar uma das bordas (CAETANO; PATERLINI, 2013).

Segundo Rodriguez e Mendes (2018), os jogos tiveram um grande papel no desenvolvimento da matemática moderna e possibilitam uma abordagem mais natural na introdução de conceitos que possuem uma aplicabilidade na vida real. A facilidade que o jogo traz de introduzir, desenvolver ou avaliar um conteúdo ou conceito, se torna um poderoso aliado no processo de ensino e aprendizagem.

Podemos perceber a influência que os jogos têm no desenvolvimento do conhecimento, que além de seu propósito de divertir, possibilitam o crescimento pessoal e cognitivo do indivíduo que está jogando. As regras do jogo não são um obstáculo para a sua liberdade prática, pelo contrário, desse modo o indivíduo se impõem um desafio que irá tentar resolver, tornando a experiência mais prazerosa (SILVA; KODAMA, 2004). A criatividade que surge da liberdade prática do jogo é o “fazer matemático”, ou seja, o estudante irá interpretar o problema, procurar padrões e formular estratégias para resolver a situação problema (BRUNHEHILDE et al., 2018).

O desenvolvimento de jogos em sala de aula sem o devido embasamento nos conceitos e fundamentos matemáticos se torna uma atividade lúdica, apenas para despertar a curiosidade do aluno sem significativo desenvolvimento no conhecimento (BRUNHEHILDE et al., 2018). Segundo Moura e Kishimoto (2011), o papel do professor é de organizador dessas atividades lúdicas, criando situações de ensino que possibilitem ao aluno perceber o significado do conhecimento presente nos jogos.

Para poder desenvolver com os alunos o problema do jogo dos discos, se faz necessário o conhecimento de alguns conceitos probabilísticos, descritos na sequência.

Define-se probabilidade como o estudo da aleatoriedade e da incerteza e sua teoria possibilita quantificar por meio de cálculos, as chances de ocorrência dos resultados de um experimento. Um experimento aleatório é qualquer processo ou ação no qual seus resultados não são possíveis de prever, mesmo produzidos em condições idênticas. Ao conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório denomina-se espaço amostral, denotado por Ω. Por fim, eventos aleatórios são os possíveis subconjuntos do espaço amostral que podem ocorrer. Para maiores detalhes, ver Devore (2011).

Em um experimento aleatório, apesar de não sabermos qual evento irá ocorrer, se o realizarmos um número suficiente de vezes, alguns eventos ocorrerão com mais frequência do que outros, ao que denomina-se de frequência relativa. Assim, uma das maneiras mais usuais de definir probabilidade é

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis à } A}{\text{número total de resultados possíveis em } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}. \tag{2.1}$$

em que A é o evento aleatório associado ao espaço amostral Ω. Nota-se que, conforme a quantidade de repetições do experimento aumenta, a frequência relativa de um determinado evento se estabiliza devido à lei dos grandes números, ver Devore (2011).

Nas séries do ensino básico, usualmente, o ensino de probabilidades está limitado a casos finitos em que os problemas são do tipo números de chances favoráveis à ocorrência de um evento dividido pelo total de chances possíveis de Ω.

Apesar de ser pouco trabalhada no ensino médio, a probabilidade geométrica pode ser um método muito interessante, pois permite associar probabilidade e geometria (ALCÂNTARA, 2014). No plano, admite-se que a probabilidade de uma região B contida em uma região A, é dada pela área da região B dividida pela área da região A, independente da posição que B ocupa em A,

$$P(B) = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}. \tag{2.2}$$

Essa definição pode ser adaptada para qualquer espaço $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N} < \infty$. No entanto, as noções de geometria mais utilizadas para esse tipo de problema são noções de comprimento ($\mathbb{R}$), área ($\mathbb{R}^2$) e volume ($\mathbb{R}^3$). De maneira particular, para o jogo dos discos, se faz necessário o uso de áreas de figuras planas.

3 DESENVOLVIMENTO

O jogo dos discos pode ser aplicado em sala por meio de um problema proposto pelo professor, como uma feira da escola, um jogo para festa junina, arrecadação de dinheiro para formatura do terceiro ano, algo envolvendo o meio dos alunos, para ambientá-los com a situação problema e com as regras do jogo.

Desta forma, o jogo pode ser desenvolvido como uma atividade prática por meio de experimentação e/ou teórica no qual é utilizado de conceitos matemáticos aprendidos anteriormente. Em ambos os casos, o aprendizado do aluno será significativo, pois estará desenvolvendo a atividade na prática ou retomando conhecimentos anteriores, que possibilitam o aluno a ser o protagonista de seu conhecimento.

Assim, no caso do jogo dos discos, o professor pode aproveitar das conjecturas elaboradas pelos alunos e/ou apresentar outras novas que não foram pensadas por eles. A partir disto podem ser estudadas noções matemáticas como áreas do quadrado e do círculo, perímetro do quadrado, proporção e entre outras. Ao desenvolvê-las com os alunos, o professor tem a oportunidade de reforçar diversos conteúdos matemáticos, bem como salientar o motivo pelo qual algumas conjecturas levantadas não serem usadas na resolução deste problema em questão.

Esta atividade pode ser extrapolada para outros formatos de piso além do quadrado, como o quadrado com rejunte, hexagonal, triangular ou até mesmo piso em formato de circunferência. Cabe ao professor, portanto, encaminhar seus alunos para desenvolverem e consolidarem outros conceitos geométricos ludicamente.

A resolução deste problema pode ser obtida de duas formas distintas, que serão descritas a seguir, por meio da prática na qual foi realizado o experimento aleatório e pelo método teórico com o cálculo da probabilidade geométrica.

3.1 Resolução por meio da experimentação

O experimento é uma ação aleatória realizada diversas vezes que permite a obtenção da frequência dos resultados possíveis e com isso é possível descobrir qual evento tem mais chance de acontecer.

Para demonstrar a resolução do problema do jogo dos discos pelo método prático foram realizados lançamentos com discos confeccionados de MDF com 5, 10, 15 e 20 cm de diâmetro, em cima de um papel *kraft* com quadrados de 30 cm desenhados. Foram lançados 200 disco de cada diâmetro, em que considera-se como acerto quando o disco ficasse totalmente dentro do quadrado, e erro quando o disco transpassava ou tangenciava uma das bordas. Os resultados do experimento estão dispostos na Tabela

3.1. Note que, mantendo o lado do quadrado fixo, o aumento do diâmetro implica no aumento dos erros.

Tabela 3.1: Experimento de 200 lançamentos dos discos, considerando um piso quadriculado com quadrados de lado l=30 cm e diferentes diâmetros.

Diâmetro do disco (cm)	Acertos	Erros
5	107	93
10	85	115
15	58	142
20	25	175

Fonte: Autores (2020).

Se o experimento for realizado na escola, o cálculo da probabilidade do evento favorável à escola, ou seja dos erros, é realizado a partir da Equação 2.1. Assim, com os dados da Tabela 3.1, essas probabilidades foram obtidas e os resultados estão dispostos na Tabela 3.1.

Tabela 3.2: Probabilidades favoráveis à escola para cada diâmetro, considerando piso quadrado, l=30 cm e diferentes diâmetros.

Diâmetro do disco (cm)	Probabilidade
0	$00,0\%$
5	$46,5\%$
10	$57,5\%$
15	$71,0\%$
20	$87,5\%$
30	$100,0\%$

Fonte: Autores, (2020).

A partir dos dados dispostos na Tabela 3.1 é possível plotar esses pares de dados num sistema cartesiano, como representado pela Figura 3.1, podendo utilizar de *softwares* de construção de gráfico como o R, Geogebra ou Excel. Sugere-se também que o professor aproveite essa oportunidade para trabalhar com sistema de equações lineares, e assim encontrar equações utilizando de pontos distintos, dessa forma é possível observar no gráfico, as equações das quais melhor se aproxima dos pontos, lembrando que é uma aproximação realizada manualmente a fim de obter um resultado aproximado.

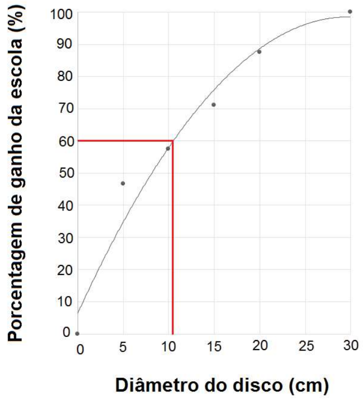


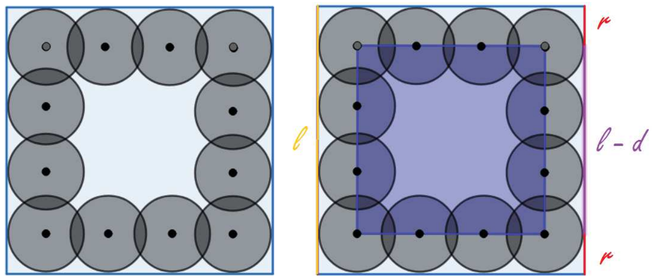
Figura 3.1: Estimação do diâmetro do disco que possibilita 60% de ganho para a escola. Fonte: Autores (2020).

Com a função obtida é possível realizar uma estimativa do diâmetro do disco de acordo com a porcentagem desejada de ganho para a escola. Como originalmente definiu-se 60% como sendo a porcentagem desejada de ganho para a escola, utilizando o gráfico da Figura 3.1, o diâmetro estimado do disco é de aproximadamente $d=$ 10,5 cm.

3.2 Resolução usando probabilidade geométrica

Outra possível solução para este problema considerando piso quadrado é feita utilizando-se de conceitos de probabilidade geométrica, e, embora este conteúdo não esteja presente no currículo escolar, ele pode ser desenvolvido de modo a aprofundar o conteúdo e apresentar outra visão sobre estratégias matemáticas de resoluções de problemas.

O método acumula definições de probabilidade e noções de geometria. Como já descrito, para o jogador ganhar, o disco deve estar inteiramente dentro do quadrado e não tangenciar as bordas. A Figura 3.2 demonstra os limites do quadrado com diversos discos de diâmetro igual, sem realmente tocar as bordas.



(a) (b)

Figura 3.2: (a) Disco lançado ao redor da borda; (b) Ligação dos centros dos discos e formação do quadrado menor.

Fonte: Autores (2020).

Note que acontece uma situação interessante na qual os discos formam uma região quadrangular no centro do quadrado, conforme observado na Figura 3.2(b). Tem-se um quadrado maior de l= 30 cm de lado e um quadrado menor que representa a região até onde o disco pode cair à favor do jogador, ou seja, a área de eventos possíveis. Sabendo que o quadrado maior tem lado l, desse modo o quadrado menor possui lado l - $(r+r)=l\text{-}d$, assim $l\text{-}d$.

Usando Equação 2.2 para determinar o tamanho do diâmetro do disco, e a probabilidade de lançamento do disco $P(d)$ favorável ao jogador, tem-se

$$P(d) = \frac{\text{área do quadrado menor}}{\text{área do piso}} = \frac{(l\text{-}d)^2}{l^2}, \tag{3.1}$$

desenvolvendo a expressão:

$$P(d) \quad = \quad 1 - \frac{2}{l}d + \frac{1}{l^2}d^2, \tag{3.2}$$

e tomando $l = 30$ cm e $P(d) = 40\%$ e substituindo na Equação (3.2), tem-se a equação quadrática $d^2 - 60d + 540 = 0$.

Que tem como raízes $d_1 \approx 11,02$ e $d_2 \approx 48,97$. Como o tamanho do disco deve estar no intervalo $0 < d < 30$, pois o lado do quadrado original utilizado foi de d=30 cm, para que seja possível ter 60% de probabilidade favorável à escola, o disco deve ter aproximadamente d=11 cm de diâmetro.

3.3 Extrapolando conhecimentos

Este mesmo problema pode ser resolvido considerando outras formas geométricas, como por exemplo, considerando um piso quadrado porém deslocado horizontalmente, levando-se em consideração o rejunte do piso, ou ainda com outras formas geométricas que não o quadrado. Listaremos na sequência algumas sugestões possíveis.

3.3.1 Piso quadrado com deslocamento lateral

Considere a Figura 3.3 em que se tem um piso quadrado com deslocamento horizontal, para tal situação, a análise matemática será realizada individualmente.

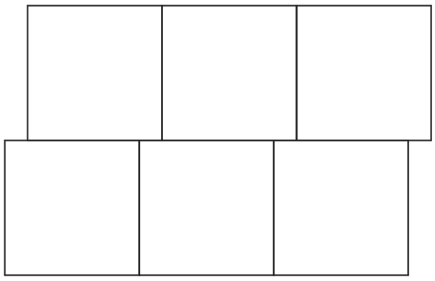


Figura 3.3: Piso quadrado com deslocamento horizontal.
Fonte: Autores (2020).

Ao lançar o disco, ele irá "escolher" um quadrado, no qual irá cair fora e tocar a borda ou cair inteiramente dentro, assim a análise do problema será realizada de acordo com o quadrado em que o disco caiu. Se forem lançados discos de mesmo diâmetro ao redor da borda do quadrado "escolhido" é formado uma região menor, a área de eventos favoráveis ao jogador, assim como é observado na Figura 3.2.

Sabendo que o piso mede l, tem-se que a medida do quadrado menor é l - $2r$ = l - d, sendo r o raio dos discos lançados que não pertence a região menor. Com isso, é possível calcular a área do piso e a área de eventos favoráveis, e utilizando a equação 2.2 de cálculo da probabilidade geométrica, tem-se

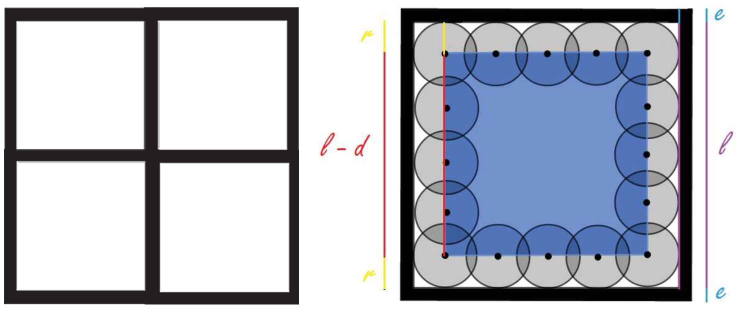
$$P(d) = \frac{(l-d)^2}{l^2}. \tag{3.3}$$

Nota-se que a resolução do piso quadrado com deslocamento é igual ao piso sem deslocamento descrita na seção anterior, veja mais detalhes em Caetano e Paterlini (2013).

3.3.2 Piso com rejunte

Se, por exemplo, o piso da escola for parecido com o da Figura 3.4, o professor pode aproveitar essa situação para desafiar os alunos ainda mais. O que acontece com o rejunte? Tem que ser considerado no cálculo ou não?

O rejunte no piso é uma área vazia, porém que pode alterar o resultados dos lançamentos com relação ao piso sem rejunte. Veja Figura 3.4 em que e é a medida do rejunte.



(a) (b)

Figura 3.4: (a) Piso quadrado com rejunte; (b) Características piso com rejunte.
Fonte: Autores (2020).

O rejunte, independente de sua medida, é uma variável a se considerar no cálculo para determinar o tamanho do disco. Neste caso o jogo possui dois eventos, o evento favorável para o jogador e o favorável para a escola, se o disco ocupar o espaço do rejunte, o jogador perde, pois toca a borda do quadrado. Assim, essa área é contabiliza com os eventos favoráveis para a escola.

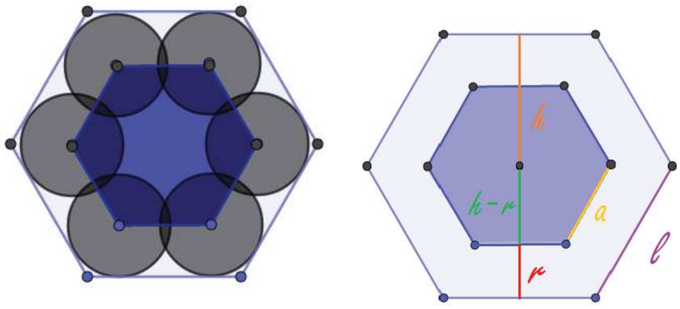
Assim como no piso quadrado sem rejunte, tem-se duas regiões, o quadrado menor que pondera os eventos favoráveis para o jogador e o quadrado maior que abrange todos os eventos possíveis. Logo, a fórmula da probabilidade de eventos favoráveis $P(d)$, é calculada:

$$P(d) = \frac{(l\text{-}d)^2}{(l+2e)^2}. \tag{3.4}$$

Observa-se que a Equação 3.4 em relação à Equação 3.2, possui somente o acréscimo do rejunte em sua fórmula, ou seja conforme maior for o rejunte, aumenta também a região de eventos possíveis, diminuindo a probabilidade de acerto.

3.3.3 Piso Hexagonal

Uma forma de evidenciar outros conceitos geométricos é alterando o formato do piso para outra figura plana, por exemplo, considerando o formato hexagonal. Assim como para o quadrado, utilizam-se noções de geometria e probabilidade. A Figura 3.5(a) demonstra os limites do hexágono com diversos discos de igual diâmetro, sem tocar as bordas.



(a) (b)

Figura 3.5: (a) Discos lançados ao redor da borda e ligação dos centros; (b) Características da região maior e menor.

Fonte: Autores (2020).

Analogamente ao quadrado, as condições favoráveis ao jogador no piso hexagonal também é um hexágono, veja Figura 3.5(b). A região do hexágono maior pode ser calculada pela fórmula de área do hexágono

$$A_H = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}, \tag{3.5}$$

em que l é o lado do hexágono. No entanto, para a região do hexágono menor, como não se sabe suas medidas, deve-se usar a relação com o hexágono maior e a apótema, h. Assim, a apótema do hexágono menor mede h-r, sendo r o raio do disco lançado, observe Figura 3.5(b).

Para calcular a área do hexágono menor é preciso da medida do lado, nomeada a, assim na Equação 3.5 substitui-se a medida l por $a = \frac{2(h\text{-}r)}{\sqrt{3}}$, que é a medida do lado do hexágono menor em função da apótema, obtendo:

$$A_{Hm} = \frac{3\left(\frac{2(h\text{-}r)}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{2}. \tag{3.6}$$

Desenvolvendo a Equação 3.6 e fazendo $2r = d$, tem-se

$$\begin{aligned} A_{Hm} &= \frac{3\left(\frac{(2h\text{-}d)^2}{3}\right)\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{(2h\text{-}d)^2\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para que o cálculo de $P(d)$ possua menos incógnitas, em 3.5 substitui-se l por

$l = \frac{2h}{\sqrt{3}}$, para que a expressão esteja em função da apótema ao invés da medida do lado,

$$A_H = \frac{3\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{2} = 2h^2\sqrt{3}. \tag{3.8}$$

A partir dos resultados 3.7 e 3.8 é possível determinar o diâmetro do disco de acordo com a probabilidade de lançamento do disco favorável ao jogador *P(d)*, a saber

$$P(d) = \frac{\text{área do hexágono menor}}{\text{área do hexágono maior}} = \frac{\frac{(2h\text{-}d)^2\sqrt{3}}{2}}{2h^2\sqrt{3}},$$

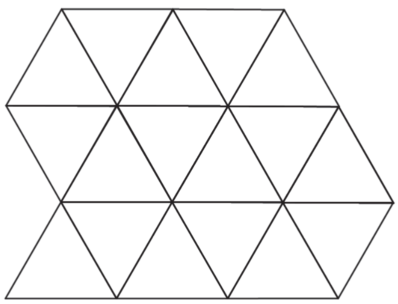
que após simplificações resulta em

$$P(d) = 1 - \frac{d}{h} + \frac{d^2}{4h^2}. \tag{3.9}$$

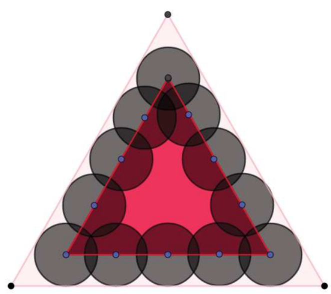
Com o resultado obtido em 3.9, é possível determinar para qualquer medida do piso, a medida do diâmetro do disco para *P(d)* predeterminados pelo aluno.

3.3.4 Piso triangular

Se considerar formato de pisos triangulares, como na Figura 3.6(a), são necessários noções geométricas como apótema, eixo de simetria, ponto de simetria, ortocentro e entre outras características do triângulo equilátero (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012).



(a)



(b)

Figura 3.6: (a) Piso com padrão triangular; (b) Discos lançados ao redor da borda e formação do triângulo equilátero menor.

Fonte: Autores (2020).

Analogamente aos casos anteriores, a região de eventos favoráveis do jogador possui forma semelhante do piso, veja a Figura 3.6(b). A região maior, de eventos possíveis, pode ser calculada pela fórmula de área de triângulo equilátero, $A_T = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

De modo a reduzir variáveis, faz-se a expressão em função da altura h, $l= \frac{2h}{\sqrt{3}}$, assim:

$$
\begin{aligned}
A_T &= \frac{\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{h^2\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Para desenvolver a fórmula da área do triângulo menor A_{Tm} é preciso saber que o ponto de interseção dos eixos de simetria, ponto O, até o vértice do triângulo mede $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo (DOLCE; POMPEO, 1993). Ou seja, a apótema do triângulo mede $\frac{1}{3}$ da altura (DANTE, 2013).

O triângulo equilátero menor que representa a área de eventos favoráveis possui a mesma característica, pois o triângulo menor é semelhante ao maior e compartilham dos eixos de simetria.

Sabendo a medida da apótema do triângulo maior, tem-se que a apótema do triângulo menor, nomeada b, pode ser descrita como $b= \frac{1}{3}h$ - r, pois o espaço da medida do raio dos discos não pertence a região menor, como mostrado na Figura 3.6(b).

Do ponto dos eixos de simetria até o vértice no triângulo menor, nomeada S, tem-se que $S= 2b$, ou seja, $S= \frac{2}{3}h-2r$. Somando a medida da apótema b com S, obtêm-se assim a altura da região menor, nomeada a, $a= h-3r$. Com isso pode-se calcular a área do triângulo equilátero menor substituindo $h-3r$ em 3.10:

$$A_t = \frac{(h-3r)^2\sqrt{3}}{3}. \tag{3.11}$$

Utilizando das equações 3.10 e 3.11, obtêm-se a probabilidade de eventos favoráveis em relação ao raio do disco *P(r)*

$$P(r) = \frac{(h-3r)^2}{h^2} \tag{3.12}$$

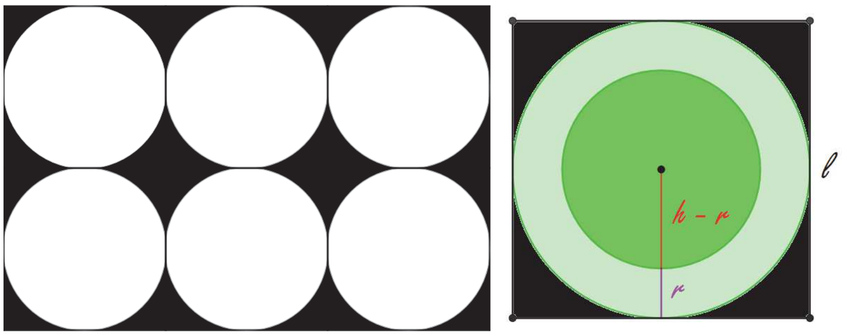
desenvolvendo a expressão:

$$P(r) = 1 - \frac{6}{h}r + \frac{9}{h^2}r^2. \tag{3.13}$$

Desse modo pode-se determinar o raio do disco de acordo com a probabilidade escolhida a favor do jogador e a medida da altura do triângulo equilátero do piso.

3.3.5 Piso circular

Apesar de aparentar ser mais complicado de resolver, o piso com padrão em círculo, Figura 3.7, utiliza somente de área do círculo, área do quadrado e probabilidade geométrica como conhecimentos necessários.



(a) (b)

Figura 3.7: (a) Piso com padrão circular; (b) Característica piso com padrão circular.
Fonte: Autores (2020).

Assim como os outros formatos de piso, a região menor formada após o lançamento de diversos discos é semelhante da região maior, veja Figura 3.7(b). Denota-se por h o raio do círculo maior e h-r o raio do círculo menor. Dessa forma, a área da região menor pode ser calculada como

$$A_{Cm} = \pi(h\text{-}r)^2. \tag{3.14}$$

A região maior que compreende os resultados possíveis, abrange o círculo maior e o espaço em preto, que seria o rejunte do piso. Assim, para determinar a área da região maior é calculada a área do quadrado circunscrito. O lado do quadrado l pode ser descrito também como o diâmetro do círculo maior, ou seja, $l= 2h$. Desse modo, a probabilidade de eventos favoráveis em relação ao raio do disco $P(r)$:

$$P(r) = \frac{\pi(h\text{-}r)^2}{2h^2} \tag{3.15}$$

desenvolvendo a equação 3.15:

$$P(r) = \frac{\pi(h^2 - 2rh + r^2)}{2h^2}. \tag{3.16}$$

A partir da Equação 3.16 é possível determinar o raio do disco, sabendo a probabilidade a favor do jogador e a medida do quadrado ou diâmetro do piso.

3.3.6 Recapitulando

Neste artigo foi apresentado a resolução do jogo dos discos no piso quadrado com dois métodos, o prático no qual é realizado o experimento aleatório e o teórico com o cálculo da probabilidade geométrica. Foi descrito também o cálculo da probabilidade geométrica do jogo dos discos utilizando de outros parâmetros no formato do piso em que é possível determinar o tamanho do disco de acordo com o formato e a medida do piso e da probabilidade favorável ao jogador predeterminada.

Piso quadrado

$$P(d) \quad = \quad 1 - \frac{2}{l}d + \frac{1}{l^2}d^2$$

No piso quadrado, o cálculo da probabilidade geométrica possibilita determinar o diâmetro do disco d de acordo com a probabilidade favorável ao jogador $P(d)$ predeterminada e a medida do lado l do piso. O piso quadrado com deslocamento possui a mesma resolução que o formato de piso quadrado sem deslocamento.

Piso quadrado com rejunte

$$P(d) = \frac{(l\text{-}d)^2}{(l+2e)^2}$$

O cálculo da probabilidade geométrica do piso quadrado com rejunte permite determinar o diâmetro do disco d de acordo com a probabilidade favorável ao jogador $P(d)$ predeterminada, a medida do lado l do piso e a medida do rejunte e.

Piso hexagonal

$$P(d) = 1 - \frac{d}{h} + \frac{d^2}{4h^2}$$

No piso hexagonal é possível determinar o diâmetro do disco d de acordo com a probabilidade favorável ao jogador $P(d)$ predeterminada e a medida da apótema h do piso.

Piso triangular

$$P(r) = 1 - \frac{6}{h}r + \frac{9}{h^2}r^2$$

Com o piso triangular hexagonal é possível determinar o raio do disco r de acordo com a probabilidade favorável ao jogador $P(r)$ predeterminada e a medida da altura h do piso.

Piso circular

$$P(r) = \frac{\pi(h^2 - 2rh + r^2)}{2h^2}$$

O cálculo da probabilidade geométrica no piso circular possibilita determinar o raio do disco r de acordo com a probabilidade favorável ao jogador $P(r)$ predeterminada e a medida do raio h do piso.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Atividades como as apresentadas ajudam a desenvolver o raciocínio matemático crítico, pois os alunos precisam mesclar vários conhecimentos prévios, elaborar estratégias de solução, e superar outras dificuldades que possam aparecer a fim de solucionar as situações problemas apresentadas. O jogo permite que os alunos assimilem o conteúdo de forma lúdica, sendo eles próprios os protagonistas da aquisição de seu conhecimento. Nestas atividades, o papel do professor é ser mediador e orientador da atividade.

O fato de ser um desafio para os alunos, torna a atividade mais instigante e significante, este fato contribui diretamente para que a compreensão e apreensão dos diversos conteúdos matemáticos se deem sem que o aluno possa estar percebendo que está ocorrendo.

O jogo dos discos mostra-se importante não somente pela sua ludicidade, mas também por ser uma atividade em que podem ser desenvolvidas estratégias de resolução que abordam diversos conteúdos matemáticos, como probabilidade, tratamento de informação, tabelas de frequências, equações lineares, gráficos, função quadrática e noções de geometria. Representando então, uma ferramenta de ensino para o professor e uma oportunidade de resgate de conteúdos e desenvolvimento de pensamento crítico matemático para os estudantes.

REFERÊNCIAS

ALCÂNTARA, R. *Probabilidade geométrica em lançamentos aleatórios*. Teresina: [s.n.], 2014.

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. *Praticando matemática*: 8. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BRUNHEHILDE, C.; CORDEIRO, N.; OLIVEIRA, F. R. *Jogando com probabilidade e estatística*. Rio de Janeiro, 2018.

CAETANO, P. A. S.; PATERLINI, R. R. *Jogo dos discos: módulo I*. Cuiabá: Central de Texto, 2013.

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DEVORE, J. L. *Probabilidade e estatística: para engenharia e ciencias*. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. vol. 9. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

GADELHA, A. *Uma pequena história da probabilidade*. [s.n.], 2004. Disponível em: ⟨http://www.mat.ufrgs.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/hist_prob_Gadelha.pdf⟩. Acesso em: 31 maio 2020.

GRANDO, R. C. *O jogo e a matemática no contexto da sala de aula*. São Paulo: Paulus, 2004.

MOURA; KISHIMOTO, T. M. O. *Jogo, brincadeira e a educação*. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

RODRIGUEZ, A.; MENDES, B. *Probability, decisions and games*: A gentle introduction using r. USA: John Willey & Sons, Inc, 2018.

SILVA, A. F. d.; KODAMA, H. M. Y. *Jogos no Ensino da Matemática*. São José do Rio Preto, SP: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBa, 2004.