

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS**

**ANTONIO CESAR PINHEIRO**

**A MODELAGEM COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO NAS AULAS DE  
MATEMÁTICA**

**MONOGRAFIA DE ESPECIALIZAÇÃO**

**MEDIANEIRA**

**2020**

ANTONIO CESAR PINHEIRO



**A MODELAGEM COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO NAS AULAS DE  
MATEMÁTICA**

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Especialista na Pós Graduação em Ensino de Ciências – Polo UAB do Município de Barueri/SP, Modalidade de Ensino a Distância, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Medianeira.

Orientador: Prof. Dr. Ismael Laurindo Costa Junior.

MEDIANEIRA

2020



---

## TERMO DE APROVAÇÃO

# A MODELAGEM COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Por

ANTONIO CESAR PINHEIRO

Esta monografia foi apresentada às 9h do dia 12 de setembro de 2020 como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista no Curso de Especialização em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino – Polo de Barueri, Modalidade de Ensino a Distância, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Câmpus Medianeira. O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho **APROVADO**.

---

Prof. Dr. Ismael Laurindo Costa Junior  
UTFPR – Câmpus Medianeira  
(orientador)

---

Prof. Me. Ricardo Sobjak  
UTFPR – Câmpus Medianeira

---

Prof.ª. Ma. Marilete Terezinha De Marco  
UTFPR – Câmpus Medianeira

“A ciência não é só compatível com a espiritualidade; é uma profunda fonte de espiritualidade” (Carl Sagan, O mundo assombrado pelos demônios)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus pelo dom da vida, pela fé e perseverança para vencer os obstáculos.

Aos meus pais, pela orientação, dedicação e incentivo nessa fase do curso de pós-graduação e durante toda minha vida.

Ao meu orientador professor Dr. Ismael Laurindo Costa Junior pelas orientações ao longo do desenvolvimento da pesquisa.

Agradeço aos professores do curso de Especialização em Ensino de Ciências, professores da UTFPR, Câmpus Medianeira.

Agradeço aos tutores presenciais do polo de Barueri/SP e a distância que nos auxiliaram no decorrer da pós-graduação.

Enfim, sou grato a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desta monografia.



## RESUMO

PINHEIRO, A. C. **A Modelagem como estratégia de ensino nas aulas de Matemática**. 32f. 2020. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2020.

Este trabalho teve como temática o aprofundamento da Modelagem Matemática e da experimentação investigativa como estratégia para o ensino e a aprendizagem de equação do 2º grau e recorrências lineares do 2º grau a partir de um relato de experiência em sala de aula sobre o número de ouro. Foram revisadas diferentes fontes bibliográficas além dos documentos legais como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC e o Currículo da Cidade de São Paulo – Matemática para embasar o significado da Modelagem Matemática e assim qualificar e melhorar a prática de ensino de Matemática. Foram discutidos durante o trabalho as diversas etapas da Modelagem Matemática e a conceituação de Modelo Matemático e a Modelação Matemática mais voltada para a prática docente na Educação Básica. A experimentação ou tarefa investigativa discutida no trabalho merece destaque por possibilitar, justamente com a Modelagem Matemática, o prazer do aluno aprender conceitos matemáticos.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Experimentação Investigativa. Modelação Matemática. Equação do 2º grau. Número de ouro.

## ABSTRACT

PINHEIRO, A. C. **Modeling as a teaching strategy in mathematics classes**. 2020. 32p. Monografia (Especialização em Ensino de Ciências). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Medianeira, 2020.

This work had as a thematic the deepening of Mathematical Modeling and investigative experimentation as a strategy for teaching and learning equation 2nd degree and linear recurrences of the 2nd degree from an experience report in the classroom about the gold number. For this work, several books and articles by national authors were analyzed in addition to legal documents such as the Common Basic Basic Curriculum - BNCC and the Curriculum of the City of São Paulo - Mathematics to support the meaning of Mathematical Modeling and thus qualify and improve the Mathematics teaching practice. They are discussed during the work as several stages of Mathematical Modeling and conception of Mathematical Model and Mathematical Modeling more focused on the teaching practice in Basic Education. An experience or investigative task discussed in the work deserves to be highlighted because it allows, only with Mathematical Modeling, or the student's pleasure to learn mathematical concepts.

Keywords: Mathematical Modeling. Investigative Experimentation. Mathematical Modeling. Equation 2nd degree. Gold number.



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA</b> .....	<b>12</b>
<b>3 EXPERIMENTAÇÃO INVESTIGATIVA</b> .....	<b>13</b>
<b>4 MODELAGEM MATEMÁTICA</b> .....	<b>16</b>
4.1 MODELO MATEMÁTICO .....	17
4.1.1 Fases, etapas e subetapas da modelagem matemática .....	18
4.1.2 Modelação matemática .....	19
4.2 EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU.....	22
4.3 RECORRÊNCIAS LINEARES DO SEGUNDO GRAU .....	23
4.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA .....	25
4.5 RELATO DE EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA.....	27
4.5.1 Número de ouro .....	27
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>31</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>32</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Há tempos que os índices de provas internas e externas de Matemática, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica – IDEB (Brasil, 2020) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – Pisa (Brasil, 2019, p. 107; OECD, 2019, p. 4), estão estagnados e não alcançam as metas, muito por conta do descompasso existente entre o ensino tradicional e bancário e a aprendizagem tecnológica e contextualizada da Matemática.

Este trabalho guia professores de Educação Básica inquietos com a forma que caminha o Ensino de Matemática, introduzindo ideias da Modelagem Matemática a partir de atividades experimentais. A Modelagem Matemática é uma das várias estratégias de ensino objetiva o letramento matemático que

[...] possibilita raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente e favorece o desenvolvimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em contextos variados, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. (São Paulo, 2019, p. 71)

A questão que nos guia neste trabalho é *Como a Modelagem Matemática pode contribuir para um melhor desempenho dos alunos na disciplina de Matemática despertando neles o prazer em querer aprender Matemática?*

Este trabalho tem por objetivo apresentar aos professores de Matemática e áreas afins o campo de pesquisa da Modelagem Matemática e o ensino de equação do segundo grau a partir da estratégia de ensino de Modelagem Matemática (São Paulo, 2019), do modelo matemático e da modelação matemática.

## **2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA**

A revisão teórica deste trabalho se encaixa na pesquisa exploratória prioritariamente sobre a Modelagem Matemática e em seguida, sobre a Experimentação Investigativa.

Para este fim, vários livros e artigos pesquisados com a intenção de aprofundar conhecimentos na linha de pesquisa Modelagem Matemática.

Inicialmente foi abordado o conceito de experimentação ou tarefa investigativa e os seus benefícios para o processo educativo. Em seguida discutidas algumas abordagens teóricas e conceitos sobre a Modelagem Matemática e suas etapas. E por fim os objetos de conhecimentos equação do segundo grau e recorrências lineares do segundo grau, que proporcionam suporte ao trabalho realizado em sala de aula, sobre o número de ouro.

### 3 EXPERIMENTAÇÃO INVESTIGATIVA

A experimentação investigativa para os pesquisadores Souza, Ramos e Rodrigues (2016) ou tarefas investigativas, de acordo com o Currículo da Cidade de São Paulo – Matemática (SME, 2019), objetiva desafiar estudantes a vivenciar experimentos que podem instigar certos conhecimentos matemáticos.

Os experimentos e tarefas investigativas “[...] relacionam-se a contextos intramatemáticos” (SME, 2019, p. 71), que se referem apenas aos objetos, símbolos ou estruturas da Matemática, diferentemente do contexto extramatemáticos no qual as “[...] tarefas podem ser encontradas no mundo real e que possuem um contexto autêntico para o uso da Matemática” (SME, 2019, p. 66) como ocorrem em atividades que partem das linhas de pesquisa da Modelagem Matemática e Etnomatemática. Vale destacar que nas discussões sobre experimentação ou tarefas investigativas, a Matemática não é “[...] uma ciência experimental, assume-se nesta investigação a experimentação como uma atividade investigativa” (SOUZA, RAMOS; RODRIGUES, 2016, p. 12).

Para Souza, Ramos e Rodrigues (2016) o uso da experimentação em sala de aula possui alguns pontos importantes que merecem destaque. O primeiro ponto corresponde à contribuição para a formação científica do estudante; o segundo ponto refere-se ao fato da experimentação investigativa ser um meio para motivar os discentes nas aulas, mas não deve ser utilizada somente para esta intenção e, por fim, o fato das atividades conseguirem relacionar os conteúdos abordados em sala de aula com as atividades do cotidiano. Fica evidente a importância da experimentação investigativa, segundo evidências dos autores:

[...] a experimentação favorece o diálogo e a explicitação dos conhecimentos já construídos pelos estudantes, tomando-os como ponto de partida no processo de ensino e aprendizagem e, conseqüentemente, aproximando e integrando teoria e realidade. (SOUZA; RAMOS; RODRIGUES, 2016, p. 588)

O Currículo da Cidade de São Paulo para Matemática (2019) apresenta quatro momentos ou princípios para as tarefas investigativas e discute uma importante distinção entre tarefas investigativas e a resolução de problemas. Os quatro momentos ou fases que o professor deve considerar no seu planejamento para as tarefas investigativas são: reconhecimento, formulação de conjecturas, realização de

testes e argumentação. A fase de conhecer e inteirar-se sobre o problema corresponde à primeira fase. A fase de formulação de conjecturas corresponde à construção de hipóteses. A fase da realização de testes “[...] corresponde a realização de testagens e o refinamento das hipóteses levantadas no momento anterior” (SME, 2019, p. 73). E, por fim, a fase da argumentação corresponde à publicidade das informações e à avaliação do trabalho realizado.

É importante destacar que as fases para tarefas investigativas não são lineares e podem ocorrer de duas delas acontecerem simultaneamente.

Uma tarefa investigativa diferencia-se de um problema por conta de o processo investigativo ser aberto e precisar de mais tempo para a conclusão. Estes pontos podem incomodar os professores, por conta da sensação de perda de controle da gestão da sala de aula e o planejamento dos conteúdos. Essa mudança de postura docente é muito difícil de ocorrer com alguns profissionais por conta de eles ainda apresentarem uma “[...] visão platônica da Matemática, aliado ao paradigma do ensino tradicional” (MALHEIROS, 2012, p. 3).

A visão platônica da Matemática compreende que os saberes e conteúdos matemáticos só podem ser descobertos e manipulados por pesquisadores e estudiosos da Matemática, e, posteriormente, consultados pelo público em geral. Já o paradigma do ensino tradicional entende o discente como um consumidor dos saberes acumulados pelo seu professor sendo impossibilitado ao mesmo discutir e criticar os métodos ou saberes (FREIRE, 1996).

O quadro 01 a seguir aponta as diferenças entre tarefas investigativas e resolução de problemas (SME, 2019).

<b>Resolução de problemas</b>	<b>Tarefas investigações</b>
Compreender a formulação	Explorar preliminarmente a tarefa e formular questões problematizadoras
Definir uma estratégia	Formular hipóteses
Desenvolver uma estratégia para solucionar o problema	Testar e reformular as hipóteses
Avaliar os resultados e responder o problema	Validar as hipóteses, elaborar argumentos e relatar o processo

**Quadro 01:** Comparativo entre resolução de problemas e tarefas investigativas  
Fonte: SME(2019)

A experimentação ou tarefa investigativa como recurso para o ensino com abordagem em Ciência, Tecnologia e Sociedade (CTS) busca desenvolver nos

discentes a capacidade de tomada de decisão, a compreensão da ciência e o seu papel na sociedade favorecendo a construção do conhecimento (SOUZA, RAMOS e RODRIGUES, 2016). Cabe ao docente registrar no seu planejamento anual e plano de aula a atividade de experimentação ou tarefa investigativa e, se possível, pensar nos problemas, desafios e facilidades da sua realidade escolar e estar seguro e confiante destas novas práticas.

## 4 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática pode ser considerada como um novo método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino e aprendizagem para o ensino de Matemática que certamente discorda do ensino e aprendizagem da Matemática tradicional. Segundo Bassanezi (2016), a Modelagem Matemática tem a resolução de problemas como ponto de partida.

Almeida, Silva e Verturan (2016) salientam que o problema precisa ser interessante e motivacional e não necessariamente matemático. Já o procedimento de criação deve despertar interesse para o estudo de Matemática. Neste novo formato de ensino, o comportamento ativo orienta as relações entre professores e alunos na definição do problema e não somente na resolução do problema. Os problemas originam-se na Matemática Aplicada de uma situação inicial ou problemática que necessitam de procedimentos matemáticos para a resolução do problema e uma situação final ou solução do problema. Nos procedimentos, ocorre o levantamento de informações e uso de conceitos matemáticos e extramatemáticos.

A Modelagem Matemática tem por objetivo propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos e esses problemas são oriundos das buscas por respostas advindas da Matemática e da compreensão de fenômenos físico, social cultural que envolve o homem (CARAÇA, 1984). A Matemática é alicerce de quase todas as áreas dos conhecimentos e a escola é um ambiente indicado e perfeito para a criação e evolução de muitos modelos. Existe a necessidade de encontrar meios eficientes para que o ensino e a aprendizagem no âmbito escolar se tornem significativos. (BIEMBENGUT; HIEN, 2018).

Vários autores apresentam uma definição de Modelagem Matemática e suas etapas e subetapas para serem trabalhadas em qualquer nível de ensino. Neste trabalho foram estudadas e analisadas as ideias de Almeida, Silva e Verturan (2016), Bassanezi (2016) e Biembengut e Hien (2018), mediante a escolha ou a junção de várias destas que podem contribuir para um melhor desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, com a intenção de despertar o prazer em querer aprender seus conteúdos.

Antes de qualquer definição das etapas e subetapas da Modelagem Matemática, vale salientar que todos os autores e pesquisados consideram a

Modelagem Matemática como uma arte. Biembengut e Hien (2018, p. 11) afirmam que a “[...] modelagem suscita a ideia de um escultor e seu trabalho. O modelo representa algo. O modelo é uma imagem que se forma na mente do sujeito que representa de forma intuitiva o que o sujeito está pensando”. Já, para Bassanezi (2016, p. 16), a arte da Modelagem Matemática consiste em “[...] transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

#### 4.1 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático é um conceito importante que necessita ser discutido inicialmente sobre a Modelagem Matemática antes da apresentação das suas diferentes fases, etapas e subetapas.

De acordo com Almeida, Silva e Verturan (2016), é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daquele que investigam. O modelo representativo pode ser um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por uma linguagem ou estrutura matemática a partir de equações, tabelas, gráficos e imagens.

Para Biembengut e Hien (2018) um modelo matemático é a resolução de um problema composto por um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir de alguma forma essas relações matemáticas à situação real do problema e também discute que o modelo matemático pode ser representado a partir de várias representações como equações, tabelas, gráficos e imagens.

Segundo Bassanezi (2016) um modelo pode ser dividido em modelo objeto que faz alusão à um objeto ou a um fato concreto, e o modelo teórico que é vinculado à uma teoria geral. Entendemos que o modelo objeto corresponde à ideia de modelo matemático de Almeida, Silva e Verturan (2016) e Biembengut e Hien (2018). Todos os pesquisadores concordam que o modelo deve expressar as ideias de forma clara e sem ambiguidade.



#### 4.1.1 Fases, etapas e subetapas da modelagem matemática

Para Almeida, Silva e Verturan (2016) as fases de Modelagem Matemática são inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. Na fase de inteiração o sujeito inteira-se, informa-se e tem o primeiro contato com a situação problema. Essa etapa é caracterizada fortemente pela escolha do tema e busca de informações do problema. A fase da matematização é caracterizada pelo uso da linguagem matemática usual para dar significado ao problema da realidade. É nesta fase que ocorre a interpretação do problema na linguagem natural para a linguagem matemática. A fase da resolução é a construção do modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, viabilização da realização de previsões para o problema em estudo. Por fim, a fase da interpretação de resultados é a fase de validação e análise da resposta e comunicação de uma resposta do problema para todos. A comunicação e argumentação são algumas das habilidades cognitivas desenvolvidas com os alunos fora do conhecimento e desenvolvimento de conceitos matemáticos em atividades de modelagem matemática.

Conforme Biembengut e Hien (2018), as fases são definidas por etapas e subetapas que envolvem uma série de procedimentos que são:

a) Interação

- Reconhecimento da situação problema;
- Familiarização com o assunto a ser modelado;
- Referencial teórico;

b) Matematização

- Formulação do problema;
- Hipótese;
- Resolução do problema em termos do modelo;

c) Modelo matemático

- Interpretação da seleção;
- Validação do problema;
- Avaliação.

Na etapa de interação, a partir do problema posto, deve-se estudar o assunto em diversas fontes. Nas subetapas de reconhecimento da situação-problema e a familiarização a situação vai se tornando mais clara, a medida em que o sujeito

interage com o problema. O maior desafio da etapa da matematização será a formulação do problema e resolução. A intuição, criatividade e experiência acumulada são elementos importantes na etapa da matematização onde o computador pode ser um instrumento indispensável em alguns casos. O modelo matemático deve atender às necessidades que o geraram; caso contrário deve-se voltar à etapa da matematização.

Já em Bassanezi (2016), a sequência de etapas para a modelagem matemática corresponde à experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. A experimentação é uma etapa essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção de dados para a adoção de técnicas e dados estatísticos. Na etapa da abstração ocorre a seleção das variáveis, problematização ou formulação dos problemas teóricos numa linguagem própria da área de trabalho, a formulação de hipóteses e a simplificação do problema. A etapa da resolução necessita da linguagem matemática para explicar o modelo matemático onde em alguns casos precisa-se do uso de recursos computacionais. A etapa da validação ocorre o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Por fim, a etapa da modificação corresponde a refazer o modelo, pois mesmo sendo um modelo válido pode ocorrer que o mesmo não é aceito intuitivamente. Isso geralmente ocorre por um problema básico no momento da experimentação dos dados estatísticos.

#### 4.1.2 Modelação matemática

Bassanezi (2016) define a Modelação Matemática como a Modelagem em Educação. É neste ponto que o trabalho desta pesquisa converge, pois as fases, etapas e subetapas da Modelagem Matemática aplicam-se, com mais destaque em Bassanezi (2016), à Matemática Aplicada para a resolução de grandes problemas de otimização e ao corte de despesas para setores industriais, governamentais e de instituições financeiras.

Contribui com essa concepção Biembengut e Hien (2018) que indicam a necessidade de algumas modificações ao trabalhar com Modelagem Matemática por conta principalmente do grau de escolaridade dos alunos, do tempo disponível que terão para trabalho extraclasse, do programa a ser cumprido e do estágio em que o

professor se encontra em relação ao conhecimento que o professor possui sobre a Modelagem Matemática, e destacam que:

Modelação Matemática norteia-se para desenvolver um conteúdo programático do currículo a partir de um tema ou modelo matemático e orienta o aluno na realização de seu próprio modelo-modelagem. (Biembengut; Hien, 2018, p.12).

De acordo com os autores, a Modelação Matemática apresentam os seguintes objetivos gerais:

- Aproximar outra área do conhecimento da Matemática;
- Enfatizar a importância da Matemática para a vida do aluno;
- Despertar o interesse pela Matemática a partir da aplicação;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver a habilidade de resolver problemas; e
- Estimular a criatividade.

Várias questões pedagógicas de gestão de sala à mediação da aprendizagem, administrativas referentes ao currículo e sociais sobre as condições socioeconômicas dos discentes devem ser discutidas na Modelação Matemática, de acordo com Biembengut e Hien (2018). Na implementação da Modelação Matemática o professor precisa conhecer a realidade socioeconômico, o tempo disponível para a realização do trabalho extraclasse e o conhecimento matemático que possuem os discentes. O professor pode escolher o problema de estudo ou os alunos. A vantagem dos alunos escolherem o problema é que estes se sentirão participantes do processo e a desvantagem, é que o problema pode ser complexo e exigir do professor um tempo que não existe no planejamento.

No desenvolvimento do conteúdo programático o professor segue as mesmas etapas e subetapas do processo de Modelagem Matemática. Na tarefa matematização ocorrerá o desenvolvimento do conteúdo matemático necessário para a formulação e resolução do problema. O objetivo principal da Modelação Matemática é criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos aprimorando seus conhecimentos, cabendo ao professor promover essa autonomia. (BIEMBENGUT; HIEN, 2018)

A atuação do professor nas aulas com Modelagem Matemática deve ser muito diferente do que atualmente acontece. Para que ocorra o trabalho com a Modelagem Matemática inicialmente o professor precisa, em muitos casos, mudar a sua postura

em sala de aula passando de aulas expositivas para aulas onde o professor é o orientador do processo de ensino e de aprendizagem. As atividades de Modelagem Matemática são essencialmente cooperativas, logo necessitando serem desenvolvidas em grupos de alunos, que, orientados e estimulados pelo professor desenvolvem as atividades (ALMEIDA, SILVA; VERTURAN, 2016).

Para estes autores, a integração da Modelagem Matemática no contexto brasileiro depende muito da familiarização dos estudantes com as atividades de Modelagem Matemática, a qual deve ser de modo gradativo, em diferentes momentos, tais como:

1. Contato do aluno com a situação problema, colheita de dados e sua investigação com acompanhamento do professor;
2. Situação problema sugerida pelo professor e/ou alunos em grupos e mais investigação da situação;
3. Os alunos são responsáveis pela condução das atividades e em certo momento sucede-se a comunicação da produção do grupo para os outros alunos.

Para tornar a atividade de Modelagem Matemática viável em sala de aula, o professor deve possibilitar um ambiente de confiança, independência e autoridade aos alunos para delimitar uma situação problema.

Biembengut e Hien (2018) sugerem as seguintes etapas que podem ser seguidas para a realização do trabalho de Modelagem Matemática:

- a) Escolha do tema com trabalho em grupo;
- b) Interação com o tema;
- c) Planejamento do trabalho a ser desenvolvido pelos grupos;
- d) Conteúdo matemático;
- e) Validação e extensão dos trabalhos desenvolvidos.

Por fim, os autores aqui referenciados argumentam que é importante o professor da Educação Básica conhecer e reaplicar se achar a necessidade de trabalhos de Modelagem e Modelação Matemática. Existem diversos modelos clássicos que podem ser reutilizados e adaptados para qualquer ano escolar. Essa reutilização desenvolve no professor a segurança em trabalhar Modelagem e Modelação Matemática em sala de aula ao ponto do próprio professor criar os seus modelos matemáticos e despertar nos alunos o mesmo interesse, a partir de sua própria realidade.

## 4.2 EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

A equação de segundo grau (MUNIZ NETO, 2013) pode ser escrita da seguinte forma genérica:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde  $a$ ,  $b$ , e  $c$  são coeficientes reais dados, sendo  $a \neq 0$ . O primeiro membro da equação acima também é denominado por trinômio de segundo grau e será muito útil para a fatoração e determinação das raízes/soluções de equações deste tipo.

De posse de manipulação algébrica como produtos notáveis é possível determinar as raízes/soluções da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ &= a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Fazendo  $ax^2 + bx + c = 0$ , fica  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$ ,

onde resulta:

$$\left( x^2 + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \\ x^2 + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \Rightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

O número discriminante  $\Delta$  (leia-se: delta) é um número  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais dados, com  $a \neq 0$ , temos que a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  tem raízes/soluções reais se e só se  $\Delta > 0$ . Neste caso, suas raízes/soluções são dadas por  $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  e  $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Para  $\Delta = 0$ , sua raiz/solução será dupla da forma  $x = \frac{-b}{2a}$ . Enquanto que para  $\Delta < 0$ , não existem raízes/soluções reais da equação da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a \neq 0$ .

### 4.3 RECORRÊNCIAS LINEARES DO SEGUNDO GRAU

Uma relação de recorrência (BENEVIDES, 2019) de uma sequência é uma expressão que permite calcular um termo da sequência em função de seus anteriores. Temos como exemplos de relações de recorrência

1.  $T_{n+1} = 2T_n + 1$ ,
2.  $G_{n+1} = 3G_n$
3.  $S_{n+2} = 3S_{n+1} + S_n + 5$

Tomando como primeiro termo  $T_1 = 0$  da primeira relação de recorrência  $T_{n+1} = 2T_n + 1$  podemos determinar a sequência fazendo a iteração com o valor do índice e o seu valor correspondente, que fica:

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = 2T_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$T_3 = 2T_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$T_4 = 2T_3 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$T_5 = 2T_4 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

Desta forma a sequência  $T(n)$  correspondente da primeira relação de recorrência será  $T(n) = (0, 1, 3, 7, 15, \dots)$ . A fórmula fechada da relação de recorrência  $T_{n+1} = 2T_n + 1$  pode ser determinada por alguns passos simples que necessita depois ser demonstrado por indução finita. Por curiosidade a fórmula fechada é  $T(n) = 2^{n-1} - 1$ . Em ciências experimentais ou em uma atividade de Modelagem Matemática a relação de recorrência ou a sua fórmula fechada corresponde à etapa de matematização à caminho da etapa de validação.

Para resolver relações de recorrência de primeira ordem da forma  $T_{n+1} = cT_n + g(n)$  com condição inicial  $T_1$ , ou seja, determinar a sua fórmula fechada sugere-se seguir os seguintes passos (Gersting, 2017):

1. Coloque sua relação de recorrência na forma  $T_n = cT_{n-1} + g(n)$  para encontrar  $c$  e  $g(n)$ ;
2. Use  $c$ ,  $g(n)$  e  $T_1$  na fórmula  $T_n = c^{n-1}T_1 + \sum_{i=2}^n c^{n-i}g(i)$ ;
3. Calcule o somatório resultante para obter a expressão final.

Para resolver relações de recorrência de segunda ordem da forma  $T_{n+2} = c_1T_{n+1} + c_2T_n$  com condições iniciais  $T_1$  e  $T_2$ , ou seja, determinar a sua fórmula fechada e que será muito útil para os trabalhos de Modelagem Matemática sobre o número de ouro e torre de Hanói sugere-se seguir os seguintes passos (Gersting, 2017):

1. Resolva a equação característica  $t^2 - c_1t - c_2 = 0$ ;
2. Se a equação característica tiver raízes distintas  $r_1$  e  $r_2$ , a solução é  $T_n = pr_1^{n-1} + qr_2^{n-1}$ , em que  $p + q = T_1$  e  $pr_1 + qr_2 = T_2$
3. Se a equação característica tiver raiz repetida  $r$ , a solução é  $T_n = pr^{n-1} + q(n-1)r^{n-1}$ , em que  $p = T_1$  e  $pr + qr = T_2$ .

#### 4.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) para o Ensino Fundamental e o Currículo da Cidade de São Paulo (Matemática) trazem para a discussão a importância da linha de pesquisa Modelagem Matemática como a resolução de problemas, tarefas investigativas, desenvolvimento de projetos, história da Matemática, para o desenvolvimento de habilidades e competência que tem o compromisso com o letramento matemático.

A BNCC define letramento matemático como:

As competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL, 2018, p. 266).

Além de contribuir para o letramento matemático, a Modelagem Matemática é classificada, juntamente com outras linhas de pesquisa da Educação Matemática como processos matemáticos que apresentam um grande potencial para o desenvolvimento de competências fundamentais e fortalecer o próprio letramento matemático. A Modelagem Matemática possui formas privilegiadas de atividades matemáticas com inúmeras estratégias para a aprendizagem (BRASIL, 2018).

O Currículo da Cidade de São Paulo – Matemática aborda de forma mais profunda a importância da Modelagem Matemática como uma das diversas estratégias no ensino de Matemática juntamente com a resolução de problemas, as tarefas investigativas, o uso dos recursos tecnológicos, a etnomatemática e os jogos. O documento afirma que:

A modelagem pode ser entendida como uma oportunidade de os estudantes identificarem questões ou problemas oriundos de uma problemática do cotidiano relativa a um contexto real e que possam ser resolvidos por meio da Matemática, sem a fixação de procedimentos prévios para a sua resolução (São Paulo, 2019, p. 75)



De acordo com o Currículo da Cidade (São Paulo, 2019), a Modelagem Matemática proporciona um ambiente de aprendizagem problematizador que se distancia muito do ensino tradicional. Neste ambiente problematizador o professor é o mediador do conhecimento e no ensino tradicional o professor é o detentor de todo o conhecimento. É importante destacar a diferença entre Modelagem Matemática, tarefas investigativas e resolução de problemas para o Currículo da Cidade.

#### Na Modelagem Matemática

as perguntas e os procedimentos para encontrar a solução dos problemas serão feitos pelos estudantes, que podem pensar em estratégias nem sempre indicadas ou sugeridas pelo professor, mas mediadas por ele. Nesse sentido, a modelagem se diferencia das tarefas investigativas, pois estas se relacionam a contextos intramatemáticos e a modelagem se refere a contextos extramatemáticos. Ela também se difere da resolução de problemas, pois na modelagem os temas e as questões, no geral, são feitos pelos estudantes, o que não acontece com os problemas (São Paulo, 2019, p. 75).

A Modelagem Matemática possibilita criar relações com outras áreas do conhecimento, potencializa o trabalho com a pedagogia dos projetos e necessita da mudança de postura do professor, pois o docente levará em conta os interesses dos estudantes. O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática pode assumir três configurações referentes à relação entre professor e alunos, que se segue:

Primeira, o professor descreve a situação com o problema formulado, cabendo aos estudantes o processo de resolução. Na segunda, o professor traz o problema de outra área de conhecimento para que os estudantes colham os dados e, a partir deles, busquem procedimentos para a resolução. Na terceira, os temas são extramatemáticos, e os estudantes formulam o problema, levantam dados, organizam e encontram o caminho para a solução, atribuindo um tratamento matemático para o problema. Nos três casos, o professor participa do processo numa relação dialógica com os procedimentos escolhidos pelos estudantes, ajudando-os a verificar se o caminho escolhido contribui ou não para a solução do problema (São Paulo, 2019, p. 75).

Na pesquisa realizada por Bisognin e Bisognin (2012) sobre as percepções sobre o uso da Modelagem Matemática em sala de aula com professores recém-formados de um curso de mestrado as autoras apontam três eixos inter-relacionados, que são:

- a) possibilidade de mudança na prática docente;
- b) dificuldades no exercício da docência com Modelagem Matemática; e
- c) repercussões na aprendizagem docente e discente. (p. 1056 e 1057, 201)

## 4.5 RELATO DE EXPERIÊNCIA COM MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Nesta seção seguem duas atividades de Modelação Matemática desenvolvidos em uma escola da Zona Sul da Cidade de São Paulo no ano de 2019. A atividade discute a presença do número de ouro.

### 4.5.1 Número de ouro

**Conteúdo:** Equação do 2º grau

**Público alvo:** 9º ano do Ensino Fundamental ou 1º ano do Ensino Médio

**Tempo:** duas aulas

#### 1ª etapa – Interação com o assunto

Os alunos fizeram uma pesquisa sobre o número de ouro/razão áurea. O número de ouro é um número irracional, constante e real, que representa matematicamente a perfeição na natureza. O número de ouro é representado pela letra grega **phi**, iniciais de Fídias, escultor e arquiteto encarregado pela construção de Pártenon, em Atenas. O número phi também é representado pelo símbolo  $\varphi$ . A aproximação de  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033988749895$ . O número de ouro pode surgir em qualquer sequência numérica, que será abordada em breve, mas foi na sequência de Fibonacci descoberta pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) a partir do crescimento fictício de uma população de coelhos que introduziu, nos estudos de matemáticos europeus, a proporção áurea ou número de ouro.

#### 2ª etapa – Matematização

Após a pesquisa foi feita uma atividade investigativa que consiste em fazer um experimento sobre o número de ouro ou phi. O número de ouro ou razão áurea é o número irracional positivo da raiz da equação  $x^2 - x - 1 = 0$  e simboliza a beleza e perfeição na natureza. Na atividade investigativa os alunos deveriam colocar em ordem crescente a sua data de nascimento com dia e mês. Em seguida o aluno soma estes dois números e depois faz algumas iterações somando o resultado da soma

com o número anterior. Surge uma nova sequência de números em ordem crescente. Por fim basta dividir, começando pelo segundo número da fila pelo seu anterior e por toda a lista. As divisões tendem ao número de ouro 1,618.

Exemplo:

Data de nascimento: 14/07

Primeira iteração: 7 - 14 - 21 - 35 - 56 - 91 - 147 - 238 - 385 - 623.

Segunda iteração:

$$14:7 = 2$$

$$21:14 = 1,5$$

$$35:21 = 1,66666$$

$$56:35 = 1,6$$

$$91:56 = 1,625$$

$$147:91 = 1,61538$$

$$238:147 = 1,61904$$

$$385:238 = 1,61764$$

$$623:385 = 1,61818$$

A relação deste experimento com o conhecimento equação do segundo grau ocorre por conta de uma das raízes ser o número de ouro. A atividade descrita acima aborda a ideia de modelagem matemática que geralmente é estudada no Ensino Superior e que de pouco em pouco está adentrando nos níveis mais básicos. A modelagem matemática possibilita o estudo de conceitos a partir de problemas reais que tem por característica ser discutido em grupo e todos colaborarem e aprenderem.

### 3ª etapa – Modelo Matemático

Denotando por  $f_n$  a soma da  $n$ ésima iteração do dia com o mês de nascimento, por  $f_{n-1}$  a primeira parcela, por exemplo, o dia de nascimento e por  $f_{n-2}$  a segunda parcela, por exemplo, o mês de nascimento. Temos que a equação  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  representa o problema proposto. A equação  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  é uma relação de recorrência, cuja resolução é a mesma que de uma equação diferencial ordinária. A equação  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  possui como equação característica a equação da forma  $a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0$  cuja solução é  $c_1t^n + c_2nt^n$ , com  $c_1 = \frac{2tu_1 - u_2}{t^2}$  e  $c_2 = \frac{u_2 - tu_1}{t^2}$ . Os valores de  $u_1$  e  $u_2$  são os dois primeiros elementos da sequência. No

exemplo  $u_1$  é o dia e  $u_2$  o mês de nascimento. Fazendo as substituições, encontra-se como solução  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ .

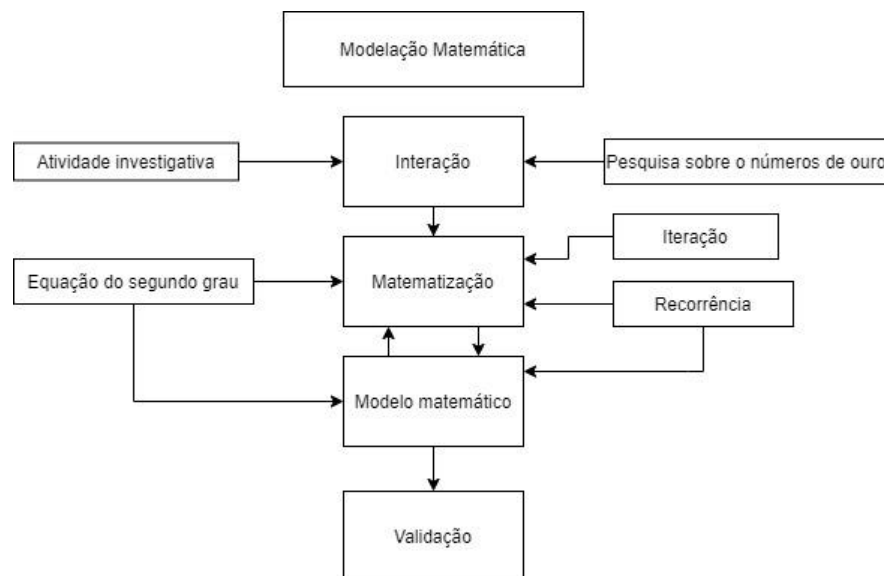
### **Reflexões da atividade investigativa em sala de aula**

Este experimento matemático é extremamente prazeroso desenvolver com os alunos logo após o ensino da resolução de equação do 2º grau e gera muita discussão e curiosidade. Observo que os alunos ficam esperando um pouco mais de descobertas, daí afirmo que as novas descobertas estão a partir daquele momento com eles, pois a atividade investigativa é muito simples e qualquer um pode descobrir padrões interessantes.

Como já exposto acima, o número de ouro ou razão áurea é um número irracional positivo da raiz da equação  $x^2 - x - 1 = 0$  e simboliza a beleza e perfeição na natureza. Na atividade os alunos seguem os passos e todos desenvolvem a atividade.

Como avaliação, é solicitado que os alunos registrem todos os processos no caderno e que expliquem com suas próprias palavras o que acabaram de fazer. Considero esta etapa de escrita matemática como uma das mais importantes das aulas, pois mostra o que realmente o aluno compreendeu dos conceitos matemáticos trabalhados. É neste momento que ocorre *feedback* da atividade.

A representação esquemática da atividade de Modelação Matemática:



**Figura 1:** Representação esquemática da atividade de Modelação Matemática  
Fonte: Autor (2020)

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho contribuiu muito para a minha formação docente e ensino de Matemática no Ensino Básico por conta de fundamentar teoricamente algumas práticas e ações que aprendi, por mais dez anos, com colegas, em cursos e na prática com os alunos. Algumas das minhas práticas foram repensadas a partir deste estudo.

Acreditamos que independente da linha de pesquisa, metodologia ou campo conceitual utilizado para ensinar Matemática, fica claro que o ensino desta nobre área de conhecimento não está satisfatório e precisa ser mudado.

Somos bombardeados diariamente por noticiários com vários dados do PISA ou índices do IDEB mostrando que os estudantes não estão aprendendo de forma conceitos básicos. (Brasil, 2019, p. 107; OECD, 2019, p. 4; Brasil, 2020)

Como alternativa para mudar este cenário pessimista do ensino de Matemática, o campo de pesquisa da Modelagem Matemática possibilita e potencializa a participação do estudante para tornar a aprendizagem mais significativa. Nesse contexto, o aluno se torna o sujeito no processo de ensino e de aprendizagem e o professor, o mediador do conhecimento.

A partir da Modelação Matemática na sala de aula é possível criar modelos matemáticos e transformar um problema matemático em interdisciplinar envolvendo vários sujeitos, sem perder o aprofundamento de conceitos e saberes.

Cabe aos professores de Matemática dos diversos níveis de escolaridade se aprofundarem nestes campos de pesquisa, além da Modelagem Matemática, a Experimentação Investigativa, Etnomatemática, Resolução de Problemas, História da Matemática, entre outras, e discutir o que é significativo para o processo de aprendizagem dos discentes. Além de melhorar o desempenho de seus estudantes, é papel do professor mostrar ao aluno o quanto é bela e interessante a Matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, LOURDES WERLE; SILVA, KARINA PESSÔA; VERTUAN, RODOLFO EDUARDO. **Modelagem Matemática na educação básica**. 1. Ed., 2ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2016.

BASSANEZI, RODNEY CARLOS. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4. Ed., 1ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2016.

BENEVIDES, FABRÍCIO SIQUEIRA. **Recorrências - Parte 1**. Portal da Matemática: OBMEP. Rio de Janeiro: 2019.

BENEVIDES, FABRÍCIO SIQUEIRA. **Recorrências - Parte 2**. Portal da Matemática: OBMEP. Rio de Janeiro: 2019.

BIEMBENGUT, MARIA SALETT; HEIN, NELSON. **Modelagem matemática no ensino**. 5. Ed., 5ª reimpressão. São Paulo: Contexto, 2018.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. **Percepções de Professores sobre o Uso da Modelagem Matemática em Sala de Aula**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 1049-1079, ago. 2012

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_-versaofinal\\_sit\\_e.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_-versaofinal_sit_e.pdf)

BRASIL. **Relatório Brasil no PISA 2018 – Versão preliminar**. Brasília: INEP/MEC, 2019. Disponível em [http://download.inep.gov.br/acoes\\_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio\\_PISA\\_2018\\_preliminar.pdf](http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf)

BRASIL. **IDEB – Resultados e metas**. Brasília: INEP/MEC, 2020. Disponível em <http://ideb.inep.gov.br/resultado/>

FREIRE, PAULO. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GERSTING, JUDITH L. **Fundamentos Matemáticos para ciência da computação: matemática discreta e suas aplicações**. 7. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

MALHEIROS, ANA PAULA DOS SANTOS. **Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 861-882, ago. 2012

MUNIZ NETO, ANTONIO CAMINHA. **Tópicos de Matemática Elementar: números reais**. Volume 1. 2. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PEREIRA, MARCUS VINICIUS. **Recorrência – Problemas e Aplicações**. Dissertação (mestrado) – Universidade de Brasília, Instituto de Ciências exatas. Departamento de Matemática. Brasília, 2014.

OECD. **Programme for International Student Assessment (PISA) – Results from PISA**. vol. I-III. 2018. OECD: 2019. Disponível em [https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018\\_CN\\_BRA.pdf](https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_BRA.pdf)

SANTOS, JOSÉ PLÍNIO O., MELLO, MARGARIDA P. MURATI, IDANI T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

SÃO PAULO. Secretaria Municipal de Educação (SME). Coordenadoria Pedagógica. **Currículo da cidade: Ensino Fundamental: componente curricular : Matemática**. – 2.ed. – São Paulo : SME / COPED, 2019.

SOUZA, VANESSA; RODRIGUES, SUÉLEN S.; RAMOS, MAURIVAN. **A experimentação em sala de aula: concepções de professores de Ciências e Matemática**. Indagatio Didactica, vol. 8(1), julho 2016. Disponível em [https://www.researchgate.net/publication/305308922\\_A\\_experimentacao\\_em\\_sala\\_de\\_e\\_aula\\_concepcoes\\_de\\_professores\\_de\\_Ciencias\\_e\\_Matematica](https://www.researchgate.net/publication/305308922_A_experimentacao_em_sala_de_e_aula_concepcoes_de_professores_de_Ciencias_e_Matematica).