

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

FELIPE AUGUSTO STARK

**MODELAGEM BASEADA EM GRAFOS PARA SISTEMAS DE
CONTROLE DESCRITOS POR ESPAÇOS DE ESTADOS**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

TOLEDO
2021

FELIPE AUGUSTO STARK

**MODELAGEM BASEADA EM GRAFOS PARA SISTEMAS DE
CONTROLE DESCRITOS POR ESPAÇOS DE ESTADOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia de Computação da Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Campus Toledo, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cavalcanti Jeronymo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

TOLEDO
2021



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Toledo
Coordenação do Curso de Engenharia de Computação



TERMO DE APROVAÇÃO

Título do Trabalho de Conclusão de Curso Nº 09

**MODELAGEM BASEADA EM GRAFOS PARA SISTEMAS DE
CONTROLE DESCRITOS POR ESPAÇOS DE ESTADOS**

por

Felipe Augusto Stark

Esse Trabalho de Conclusão de Curso foi apresentado às **08h20 do dia 20 de agosto de 2021** como **requisito parcial** para a obtenção do título de **Bacharel em Engenharia de Computação**. Após deliberação da Banca Examinadora, composta pelos professores abaixo assinados, o trabalho foi considerado **APROVADO**.

Prof. Dr. Gustavo Henrique Paetzold
UTFPR

Prof. Dr. Maurício Zardo Oliveira
UTFPR

Prof. Dr. Ricardo Tavares de Oliveira
UTFPR

Prof. Dr. Daniel Cavalcanti Jeronymo
UTFPR

Prof. Dr. Elder Elisandro Schemberger
UTFPR

O termo de aprovação assinado encontra-se na coordenação do curso

Toledo, 20 de agosto de 2021

Dedico este trabalho a todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram a completar esta etapa de vida. Parafreando Stan Lee na persona de Tony Stark: "Parte da jornada é o fim".

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo imenso amor, agindo em minha vida através de seus anjos materializados nas pessoas que conheci e jamais saberei dimensionar a importância delas em meu caminho. Por todas as coisas, grandes, pequenas, e pelas bênçãos incontáveis.

Aos meus pais Idalina e Eloi, e meu irmão Fabio, pelo apoio incondicional e toda tranquilidade, união e conforto que me proporcionaram durante minha trajetória. A força e amor de vocês foi e é meu combustível para seguir em frente.

À minha companheira Nathalye, meu amor, por todo o companheirismo, apoio, dedicação e respeito, me provando que a reciprocidade acompanha transformações, concordâncias, diferenças e ao fim sempre soma e multiplica, jamais subtrai.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Cavalcanti Jeronimo, por ser uma inspiração enquanto pessoa e professor, por toda a paciência e dedicação, pelos ensinamentos técnicos e de vida, por todos os conselhos e compartilhamento de sabedoria, tempo e experiência, desenvolvendo além de pesquisas e trabalhos uma amizade que levarei por todo meu caminho.

A todos os meus amigos e colegas, próximos ou nem tanto, que de alguma forma me ensinaram e compartilharam comigo sentimentos e vivências. Em especial, menciono meus grandes amigos Ricardo Baldon, Fernando Cavalheiro e Denilson Bonifácio. Como também Lucas Costa, Lucas Wolff, Fernando Hartwig e Iago Gomes, famigerados vassouras do *Faca na Bota Infinity*.

Por fim, à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, por ser palco de uma das experiências mais desafiadoras que tive, por todo conhecimento e sobretudo autoconhecimento, me apresentando forças que não imaginaria que tenho. Todos os professores e colaboradores, que em conjunto tornaram essa experiência única. Uma menção especial ao professor Marcelo Fernandes, *in memoriam*, que em vida me orientou e me inspirou e hoje brilha tal qual os astros que tanto amava.

A todos e todas que aqui mencionei e também a quem não tive a oportunidade de mencionar, deixo a minha eterna gratidão.

É no conhecimento que existe a chance de libertação. Uma pessoa que decide não conhecer, aceita sua condição de escravo, aceita sua condição de submissão; conhecer é a condição pra eu me libertar de mim mesmo.
(KARNAL, Leandro.)

RESUMO

Neste trabalho é proposto um método baseado em grafos para representar sistemas de controle descritos por espaços de estados. Para tal finalidade, descreve-se o estudo de estruturas topológicas de grafos, que qualificam e quantificam as relações de diversos elementos de um conjunto, associando com a teoria de controle moderno, a qual modela sistemas no domínio do tempo com múltiplas variáveis através do método de espaço de estados, para enfim tratar através de uma proposta de modelagem digital a dificuldade de representação de sistemas controlados em termos de complexidade de implementação, adaptabilidade do sistema e também eventuais problemas construtivos dos equipamentos e protótipos utilizados. Os resultados apresentam a análise do estudo de caso de um processo de controle representado na forma de grafos, e os conceitos de controle moderno sobre a representação de grafos. São apresentados também resultados comparativos do controlador LQR, *Linear Quadratic Regulator*, e do controlador PI, Proporcional Integral, comparados com a proposta de controle na representação de grafo. As comparações utilizam métricas de avaliação de variação de controle, erros absolutos e quadráticos, e determinação de controlabilidade, observabilidade e estabilidade. Conclui-se que o método de análise e controle por meio de grafos é capaz de representar a dinâmica de um sistema descrito em espaço de estados, possibilitando aplicar os conceitos de controle moderno. Os resultados obtidos utilizando uma granularidade de 5 subespaços no espaço de fase evidenciaram melhora nas avaliações de energia de controle e piora na avaliação de seguimentos de referência.

Palavras-chave: Grafos. Espaço de estados. Controle digital.

ABSTRACT

In this work, a graph-based method is proposed to represent control systems described by state spaces. For this purpose, it is described the study of graph topological structures, which qualify and quantify the relations of several elements of a set, associating with the modern control theory, which models systems in the time domain with multiple variables through the state space method, to finally treat through a proposal for digital modeling the difficulty of representing controlled systems in terms of complexity of implementation, adaptability of the system and also possible constructive problems of equipment and prototypes used. The results present the case study analysis of a control process represented in graph form, and the concepts of modern control over graph representation. Also presented are comparative results of the LQR, *Linear Quadratic Regulator*, and PI, Proportional Integral controller, compared to the proposed control on the graph representation. The comparisons use metrics for evaluating control variance, absolute and quadratic errors, and determining controllability, observability, and stability. It is concluded that the graph analysis and control method is capable of representing the dynamics of a system described in state space, making it possible to apply modern control concepts. The results obtained using a granularity of 5 subspaces in the phase space showed improvement in the control energy evaluations and worsening in the evaluation of reference follow-ups.

Keywords: Graph. Space states. Digital control.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do grafo proposto por Euler.	5
Figura 2 – Grafo de vértices t, u, v, w, x, y , e z , cujas arestas são vw, uv, xw, xu, yz e xy	6
Figura 3 – Exemplo de um grafo ponderado.	7
Figura 4 – Diagrama de um sistema de controle.	9
Figura 5 – Retrato de fase de um sistema de pêndulo simples.	11
Figura 6 – Saída de um sistema estável.	11
Figura 7 – Saída de um sistema instável.	12
Figura 8 – Diagrama de blocos de um controlador PI.	14
Figura 9 – Exemplo de superfície de busca da otimização Basin-Hopping para uma função multimodal de Himmelblau.	16
Figura 10 – Diagrama de blocos do processo operacional.	17
Figura 11 – Espaço de busca de um processo com duas variáveis de estado.	18
Figura 12 – Diagrama de blocos da representação em grafos.	19
Figura 13 – Grafo associando entradas e estados de controle.	20
Figura 14 – Grafo de estados resultante do sistema linear.	25
Figura 15 – Resposta do controlador PI mapeado pelo método de grafos no processo linear.	26
Figura 16 – Resposta do controlador LQR mapeado pelo método de grafos no processo linear	27
Figura 17 – Saída de estado e entrada de controle do controlador PI para o sistema linear.	28
Figura 18 – Saída de estado e entrada de controle do controlador LQR para o sistema linear.	28
Figura 19 – Grafo de estados resultante do sistema não linear.	29
Figura 20 – Resposta do controlador PI mapeado pelo método de grafos no processo não linear.	30
Figura 21 – Resposta do controlador LQR mapeado pelo método de grafos no processo não linear.	31
Figura 22 – Saída de estado e entrada de controle do controlador PI para o sistema não linear.	32
Figura 23 – Saída de estado e entrada de controle do controlador LQR para o sistema não linear.	32
Figura 24 – Indicação dos estados no gráfico de saída de estado do sistema.	34
Figura 25 – Gráfico da comparação percentual grafo-controlador de variação dos parâmetros avaliados para o sistema linear.	34
Figura 26 – Gráfico da comparação percentual grafo-controlador de variação dos parâmetros avaliados para o sistema não linear.	36
Figura 27 – Representação de uma área de atuação não atingível e o comportamento de um controlador linear comparado com um controlador mapeado por grafos.	37

Figura 28 – Representação de estados discretos do processo de controle ótimo mapeado neste trabalho.	38
--	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Medidas avaliativas do sistema linear	29
Tabela 2 – Medidas avaliativas do sistema não linear	33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PLC	Do inglês, <i>Programmable Logic Controller</i>
PI	Controlador com ação Proporcional Integral
PID	Controlador com ação Proporcional Integral Derivativa
LQR	Do inglês, <i>Linear Quadratic Regulator</i>
SIMC	Do inglês, <i>Skogestad Internal Model Control</i>
FOPDT	Do inglês, <i>First Order Plus Dead Time</i>
MSE	Do inglês, <i>Mean Squared Error</i>
TVC	Do inglês, <i>Total Variation of Control</i>
ISE	Do inglês, <i>Integral of Squared Error</i>
IAE	Do inglês, <i>Integral of Absolute Error</i>
ISU	Do inglês, <i>Integral of Squared Control</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Unidade de tempo
k	Índice de acesso discreto
p	Quantidades de entradas no espaço de estados
q	Quantidades de saídas no espaço de estados
θ	Valor numérico de ângulo
x	Vetor de estado
\dot{x}	Primeira derivada de x em relação ao tempo
u	Vetor de entradas de controle
y	Vetor de saídas do sistema
S	Estado de controle
J	Momento de inércia de rotação
m	Medida de massa
l	Medida de comprimento
g	Constante gravitacional
∂	Derivada parcial

LISTA DE ALGORITMOS

Algoritmo 1 – Algoritmo de determinação de conectividade	22
Algoritmo 2 – Busca em largura	45
Algoritmo 3 – Dijkstra	46
Algoritmo 4 – Algoritmo do método de representação de processos de controle descritos por espaços de estados em grafo	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	2
2	OBJETIVOS	3
2.1	OBJETIVO GERAL	3
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	3
3	JUSTIFICATIVA	4
4	REFERENCIAL TEÓRICO	5
4.1	TEORIA DOS GRAFOS	5
4.1.1	Conceitos Básicos	6
4.1.2	Adjacência e Relações de Incidência	6
4.1.2.1	Matriz de adjacência	7
4.1.2.2	Caminhos e caminho mínimo	8
4.2	SISTEMAS DE CONTROLE REPRESENTADOS POR ESPAÇO DE ESTADOS	8
4.2.1	Conceitos Básicos	9
4.2.1.1	Representação do espaço de estados	9
4.2.1.2	Espaço de fase de um sistema	10
4.2.2	Estabilidade	11
4.2.2.1	Estabilidade em sistemas não lineares	12
4.2.3	Controlabilidade	12
4.2.4	Observabilidade	13
4.2.5	Controlador PI	13
4.2.6	Controlador LQR	14
4.2.7	Sintonia de Controladores	14
4.3	MÉTRICAS DE REFERÊNCIA	15
4.4	OTIMIZAÇÃO POR BASIN-HOPPING	15
5	MATERIAIS E MÉTODOS	17
5.1	DEFINIÇÃO DO ESPAÇO DE OPERAÇÃO DO SISTEMA	17
5.2	REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA EM TOPOLOGIA DE GRAFO	18
5.2.1	Associação de Entradas de Controle Arestas	19
5.2.2	Construção do Grafo com Base na Matriz de Adjacências	19
5.3	OPERAÇÃO NO SISTEMA	20
5.4	CONTROLABILIDADE, ESTABILIDADE E OBSERVABILIDADE	21
5.4.1	Controlabilidade	21

5.4.2	Observabilidade	22
5.4.3	Estabilidade	22
5.5	MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO	23
5.5.1	Total Variation of Control	23
5.5.2	Integral of Squared Error	23
5.5.3	Integral of Absolute Error	24
5.5.4	Integral of Squared Control	24
5.6	CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL	24
6	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	25
6.1	APLICAÇÃO EM SISTEMA LINEAR	25
6.1.1	Representação do Sistema em Grafo	25
6.1.2	Operação no Grafo	26
6.1.3	Controle PI e LQR	27
6.1.4	Medidas Avaliativas	28
6.2	APLICAÇÃO EM SISTEMA NÃO LINEAR	29
6.2.1	Representação do Sistema em Grafo	29
6.2.2	Operação no Grafo	30
6.2.3	Controle PI e LQR	31
6.2.4	Medidas Avaliativas	32
6.2.5	Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade	33
6.3	DISCUSSÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	33
6.3.1	Análise de Resultados do Sistema Linear	34
6.3.2	Análise de Resultados do Sistema Não Linear	35
6.3.3	Análise de Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade	37
7	CONCLUSÃO	39
7.1	TRABALHOS FUTUROS	39
7.2	CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
	Referências	41
	 Apêndices	 44
	APÊNDICE A Pseudocódigo do algoritmo de Busca em Largura	45
	APÊNDICE B Pseudocódigo do algoritmo de Dijkstra	46

Anexos	47
ANEXO A Pseudocódigo do método de representação proposto	48
ANEXO B Matriz de adjacências do grafo da Figura 14	49
ANEXO C Matriz de adjacências do grafo da Figura 19	50

1 INTRODUÇÃO

Um sistema de controle é definido como um conjunto de processos que têm como objetivo obter uma saída a partir do recebimento de uma entrada (NISE, 2011). O conceito de controle é muito antigo e pode ser observado desde os primórdios da humanidade, como na Grécia em 300 a.C, onde Ktesibios realizava o controle de nível de água em poços, como também dentro do corpo humano, onde os órgãos realizam o controle de níveis de hormônios e substâncias químicas, a fim de obter um equilíbrio (NISE, 2011). É deste conceito de equilíbrio que vem a etimologia da palavra controle, do francês *contrôler*, que significa manter o equilíbrio, fiscalizar, supervisionar (SILVEIRA; SANTOS, 1998). Ainda segundo Silveira e Santos (1998) foi na Inglaterra em meados do século XVIII, durante a Revolução Industrial que se originou a ideia de automação e controle moderno, onde foram introduzidas no processo produtivo máquinas que substituíam a força muscular humana e realizavam tarefas repetitivas.

Com o passar do tempo, o processo de controle se tornou mais sofisticado. O desenvolvimento de métodos como: resposta em frequência e lugar geométrico das raízes possibilitou que engenheiros projetassem sistemas de controle linear satisfazendo de forma razoável um determinado conjunto de desempenho, compondo a teoria clássica de controle. (OGATA, 2011).

Os métodos clássicos tornaram-se insuficientes à medida que os sistemas passaram a envolver múltiplas variáveis de entrada e saída, porém o desenvolvimento de computadores digitais tornou possível a análise de sistemas diretamente no domínio do tempo através de equações diferenciais, relacionando as múltiplas variáveis não representadas anteriormente, dando origem à teoria de controle moderno, amplamente utilizada no estado da arte da engenharia de sistemas dinâmicos (OGATA, 2011). A contribuição da computação digital ainda concebeu a representação de estruturas de dados computacionais, que são informações organizadas em dispositivos de memória de forma que podem ser processadas por outras unidades do computador (REIS, 2017). Uma dessas estruturas de dados são os grafos. Grafos são estruturas matemáticas de vértices e arestas que representam um conjunto de informações e dados, expressando como transcorre o relacionamento dos elementos de tal conjunto (RIBEIRO, 2012). Tais estruturas representam uma grande quantidade de relações no mundo real, como mapas entre cidades, conexões numa rede social, e na abordagem aqui levantada representam estados de um sistema de controle.

Neste trabalho, é realizada a modelagem em grafos de processos de controle descritos por espaços de estado. É realizada a representação do sistema em topologia geométrica de grafos com base na análise de seu retrato de fase e na definição do espaço de operação do processo, possibilitando a realização de buscas em grafos e manipulação das estruturas a fim de percorrer os estados de operação e realizar ações de controle.

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este documento é organizado da seguinte maneira: o Capítulo 2 apresenta os objetivos do trabalho justificados pelo Capítulo 3. Em seguida, no Capítulo 4 é feita uma revisão literária em relação aos temas necessários para entendimento deste trabalho, utilizados para sustentar a proposta abordada no Capítulo 5, o que gerou os resultados descritos e analisados no Capítulo 6 sob as conclusões apontadas no Capítulo 7.

2 OBJETIVOS

Para melhor entender as partes do estudo elaborado, este foi dividido em um objetivo geral e objetivos específicos.

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é modelar e controlar um sistema descrito por espaços de estados na forma de grafo combinando os conceitos de controle moderno com as propriedades topológicas do grafo.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Aplicar os conceitos de espaços de estados em uma representação de grafo;
- Aplicar algoritmos de busca em grafos para avaliar as mudanças no sistema de controle representado;
- Quantificar e avaliar o desempenho da modelagem proposta.

3 JUSTIFICATIVA

Nas últimas décadas a teoria moderna de controle evoluiu o suficiente para habilitar uma revolução nos processos industriais. O advento da computação digital tornou mais eficiente a busca por controladores cada vez mais precisos em comparação aos analógicos, aproximando os controladores digitais ao desempenho ideal de um sistema dinâmico (ASSUNÇÃO, 2013).

Gomes (2017) mostra que dispositivos do tipo PLC, *Programmable Logic Controller*, por exemplo, são utilizados na indústria para controle de sistemas que podem ser reajustados ou reprogramados, mostrando flexibilidade e confiabilidade. Além de maior confiabilidade, métodos digitais se mostram mais eficientes em relação ao tempo de processamento, controladores analógicos como o PID, Proporcional Integral Derivativo, exibem essa defasagem de tempo em problemas não lineares, ao exemplo de Kumar et al. (2019).

Essa defasagem temporal de controladores analógicos influencia para um desempenho pobre e exige a aplicação de técnicas complexas para atenuação do problema, como ajuste e sintonia, análise de estabilidade e até mesmo associação de controladores (SUNG; LEE, 1996). Estes processos requerem a interpretação de parâmetros por parte de uma pessoa especializada, tornando a tarefa de controle ainda mais limitada e específica.

Estas e outras dificuldades deste *modus operandi* têm origem na não linearidade do sistema, já que as análises em frequência utilizadas para o projeto de controladores analógicos (lugar das raízes, diagramas de Nyquist e Bode) não se aplicam a problemas não lineares, tornando necessária a linearização do sistema em torno de seus parâmetros, o que além de complexo, diminui a precisão do processo de controle (SILVA, 2006).

Com a finalidade de atenuar estas dificuldades, é introduzida uma proposta que traga palpabilidade para a ideia de modelar um sistema controlando-o através de um método digital utilizando grafos e representações em espaços de estados, visto que esta tornaria o sistema reconfigurável e flexível a modificações, diminuindo custos com troca de equipamentos, aumentando a precisão dos sinais, além de valer-se de métodos computacionais de paralelização e multiprocessamento, criando a possibilidade de controlar um ou mais sistemas simultaneamente.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria de grafos é um estudo importante de estruturas utilizadas para representar a existência de relações entre elementos de um conjunto. Neste capítulo, é feita uma introdução acerca da teoria de grafos com foco nos conceitos necessários para atingir os objetivos deste trabalho (vértices, arestas, subgrafo, adjacência, caminhos e caminho mínimo).

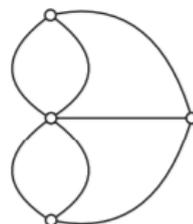
Além disso, são providas definições formais e explicações sobre a representação de sistemas de controle na forma de espaço de estados, conhecida também como representação no domínio do tempo.

4.1 TEORIA DOS GRAFOS

A teoria dos grafos é um ramo da matemática que aborda as relações entre os vários objetos de um conjunto em questão. Esta abordagem se utiliza de estruturas chamadas grafos para representar tais objetos e como estão interligados.

A ideia de grafo originou-se a partir do problema das sete pontes de Königsberg, resolvido inicialmente por Leonhard Euler (BIGGS; LLOYD; WILSON, 1986). A cidade de Königsberg era cortada pelo rio Pregel, o qual possuía duas ilhas. Essa geografia dificultava o transporte de pessoas e cargas por meio de embarcações. Para sanar este problema foram construídas pontes que auxiliavam o tráfego entre ilhas e margens. Em determinada ocasião indivíduos se questionaram sobre a possibilidade de atravessar cada ponte apenas uma vez, de forma a voltar para seu ponto de partida, Euler então montou um diagrama que representou o mapa da cidade, onde ilhas e margens eram representadas por vértices e as pontes definidas como arestas (HOLANDA, 2011).

Figura 1 – Representação do grafo proposto por Euler.



Fonte: Holanda (2011)

O modelo de Euler não era o que se conhece por grafo atualmente, porém foi a essência de conceitos e raciocínios que mais tarde evoluíram para o estado da arte da teoria de grafos.

4.1.1 Conceitos Básicos

Um grafo é uma estrutura constituída por ligações chamadas arestas, nas extremidades destas estão os pontos conhecidos como vértices (SAMPALIO, 2008). Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi (2011) definem um grafo G como um par (V, A) onde o conjunto V possui elementos denominados vértices, enquanto A tem elementos chamados de arestas.

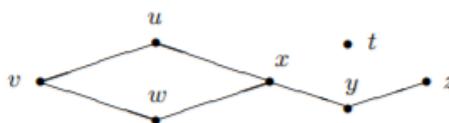
Para determinar as relações entre os vários vértices de V , diz-se que uma aresta v, w , ou ainda vw é uma ligação incidente em v e em w , onde estes são pontas da aresta, de forma que sejam adjacentes, ou seja, vizinhos. (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011).

Pode-se então definir um grafo como uma estrutura que contenha:

- Um conjunto V de vértices.
- Um conjunto A de arestas.
- Uma função $F : A \rightarrow P(V)$, que associa a cada aresta um subconjunto de um ou dois vértices de V , representando os pontos terminais da aresta.

O número de vértices vizinhos que possui um vértice é chamado de grau, suas incidências e ligações são contabilizadas em uma propriedade chamada tamanho (NETTO; JURKIEWICZ, 2017).

Figura 2 – Grafo de vértices t, u, v, w, x, y , e z , cujas arestas são vw, uv, xw, xu, yz e xy .



Fonte: Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi (2011)

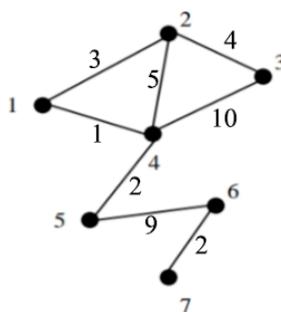
Dentro de um grafo, podem ainda existir subgrafos, diz-se que $g(v, e)$ é um subgrafo de $G(V, E)$ de forma que v é subconjunto de V , ou seja, as arestas do subgrafo fazem parte do conjunto de arestas do grafo (SZWARCFITE, 1986).

4.1.2 Adjacência e Relações de Incidência

Se existe uma aresta entre dois vértices de um grafo, estes são chamados de adjacentes, pois são incidentes a aresta, o conjunto de vizinhos de um vértice são todos os vértices adjacentes a ele (NETTO; JURKIEWICZ, 2017). Uma aresta pode ainda ter um valor numérico e uma direção associados a ela, o valor numérico tem a função de representar quantitativamente a ligação de um vértice a outro, se uma aresta possui um valor associado, o grafo é chamado de grafo ponderado, a direção mostra o sentido a ser percorrido na respectiva aresta, podendo ser de v para w , de w para v ou ambos (GOODRICH; TAMASSIA, 2001). A Figura 3 ilustra um grafo com arestas ponderadas.

É possível representar as adjacências de um grafo de duas maneiras, através de uma lista de adjacências ou de uma matriz de adjacências.

Figura 3 – Exemplo de um grafo ponderado.



Fonte: Adaptado de Netto e Jurkiewicz (2017)

4.1.2.1 Matriz de adjacência

Dado um grafo G com n vértices pode-se representa-lo em uma matriz $n \times n$ $A(G) = [a_{ij}]$, ou simplesmente A . Nesta representação os valores a_{ij} quantificam a relação entre os vértices v_i e v_j . Para representar um grafo não direcionado preenchesse o valor a_{ij} com 1 caso o vértice v_i esteja conectado ao vértice v_j , em caso de não haver conexão, o elemento a_{ij} é preenchido com 0 (CHARTRAND; LESNIAK; ZHANG, 2015).

A matriz da Equação 1 representa o grafo exemplificado na Figura 3.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Em caso da representação ter como objetivo um grafo ponderado, os valores de a_{ij} serão preenchidos com os valores numéricos associados à ligação entre os vértices (NETTO; JURKIEWICZ, 2017). Para o grafo ponderado na Figura 3 a matriz é representada na seguinte forma:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

4.1.2.2 Caminhos e caminho mínimo

De acordo com Feofiloff, Kohayakawa e Wakabayashi (2011), define-se formalmente como um caminho C um subgrafo de G onde os vértices de C são representados da forma $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n)$, logo um caminho C define-se como um conjunto de vértices que permite uma permutação $(v_1 v_2, v_1, v_2, \dots, v_n)$ tal que:

$$C(g) = v_1 v_2, \dots, v_{n-1} v_n, \quad (3)$$

ou ainda denotado por:

$$C(g) = v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n. \quad (4)$$

Os vértices v_1 e v_n são as pontas do caminho, o número de arestas em C é chamado de tamanho do caminho, de modo geral, um caminho de tamanho k tem $k + 1$ vértices, em caso deste possuir tamanho k e k vértices, a extremidade inicial é igual a extremidade final, formando um circuito (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011).

Através dos conceitos de adjacência e caminho é possível determinar a conectividade de um grafo. Em um grafo G , dois vértices estão conectados se existe um caminho possível entre esses dois vértices (DIESTEL, 2016).

Em aplicações de grafos é possível encontrar um caminho mínimo, que como descrito no parágrafo anterior, um caminho possui extremidades v_1 e v_n , porém existem representações onde há mais de um subgrafo que atenda as condições de caminho e possua os mesmos vértices de extremidade. Neste caso podemos determinar um percurso de menor custo, chamado de caminho mínimo que consiste no caminho C_{\min} que possua como extremidade os vértices v_1 e v_n com menor número de arestas possível, ou seja, o menor tamanho (NETTO; JURKIEWICZ, 2017).

4.2 SISTEMAS DE CONTROLE REPRESENTADOS POR ESPAÇO DE ESTADOS

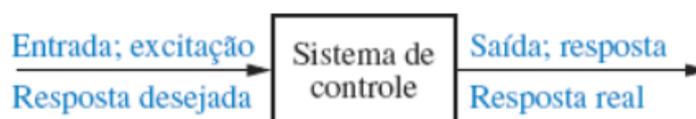
Na teoria de controle de sistemas pode-se representar um processo de controle de duas formas. A primeira é no domínio da frequência, onde utiliza-se técnicas matemáticas para apresentar o sistema na forma de uma equação de função de transferência que relacione as variáveis de entrada com as variáveis de saída. A segunda abordagem é uma representação no domínio do tempo conhecida como espaço de estados, o qual é um modelo matemático de um sistema físico que entrelaça variáveis de entrada e saída por meio de equações diferenciais (NISE, 2011).

Nesta seção, serão abordados conceitos e definições matemáticas formais da representação de sistemas de controle por meio de espaços de estados.

4.2.1 Conceitos Básicos

Um sistema de controle consiste em processos implementados com o fim de obter um desempenho desejado na produção da saída deste sistema em função de dados de entrada (NISE, 2011). A Figura 4 mostra a forma simplificada de representação de um sistema de controle.

Figura 4 – Diagrama de um sistema de controle.



Fonte: Nise (2011)

Esse sistema é representado matematicamente no domínio da frequência através de uma função de transferência, que é uma equação que relaciona a entrada e a saída do sistema, ou também no domínio do tempo através de uma representação no espaço de estados (NISE, 2011).

4.2.1.1 Representação do espaço de estados

Nos tempos atuais os sistemas dinâmicos tendem a aumentar sua complexidade, devido a necessidade de realização de tarefas complicadas. Corroborando com esta necessidade a teoria de controle moderno permite representar sistemas não lineares, com múltiplas entradas e saídas, além de ser variante no tempo. Essa teoria tem como base o modelo de espaço de estados (OGATA, 2011).

A noção de espaço de estados provém da premissa da mecânica Newtoniana de que o próximo estado de um sistema depende unicamente do seu estado atual, iniciando a ideia de uma representação por meio de equações diferenciais que possam relacionar variáveis a fim de descrever as características de um sistema no seu presente estado (FRIEDLAND, 1986).

Nise (2011) define os componentes desta representação como sendo os seguintes itens:

- *Variável do sistema.* Qualquer variável que represente uma saída do sistema naquele instante.
- *Variáveis de estado.* Menor conjunto de variáveis linearmente independentes do sistema.
- *Vetor de estados.* Estrutura onde os elementos são as variáveis do estado.
- *Espaço de estado.* Espaço multidimensional onde os eixos representam as variáveis de estado.
- *Equações de estado.* Conjunto de equações diferenciais que relacionam as variáveis de estado.
- *Equação de saída.* Equação representando, as saídas do sistema, variáveis de entrada e de estado.

Segundo Ogata (2011), estes elementos se relacionam pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t). \end{cases} \quad (5)$$

Onde:

- x é o vetor de estado.
- \dot{x} é a derivada do vetor x em relação ao tempo.
- y é o vetor de saídas do sistema.
- u é o vetor de entradas de controle.
- A é a matriz do sistema.
- B é a matriz de entrada.
- C é a matriz de saída.
- D é a matriz de transmissão direta.

4.2.1.2 Espaço de fase de um sistema

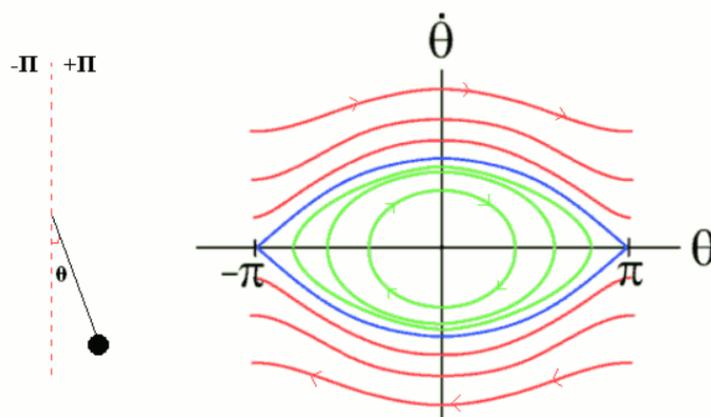
Além da representação por

Além da representação por meio de equações diferenciais, pensou-se em um meio de obter informações do comportamento global do sistema sem que seja necessário resolver explicitamente a equação. Para isso foi desenvolvido uma representação gráfica da evolução do sistema denominada espaço de fase (CFTC, 2019).

O matemático francês Henri Poincaré iniciou o conceito de espaço de fase através da abstração da ideia de que um sistema pode ser representado num plano multidimensional onde as coordenadas de um ponto são seu momento e posição, definindo um estado do sistema (CFTC, 2019). Ainda é dito pelo autor que de acordo com o decorrer do tempo a evolução do sistema é representada por outro ponto de forma sucessiva até percorrer toda sua vizinhança formando um vetor de pontos, que interpreta-se também como um vetor de estados. Como existe continuidade no tempo esses diversos pontos formam uma linha que é chamada de órbita, é visto então que, a equação diferencial que descreve o sistema dita a regra de construção das órbitas do espaço de fase.

O conjunto destas órbitas representa não somente um comportamento do sistema, mas sim todos os comportamentos possíveis. Na Figura 5 observa-se a órbita que representa o movimento de um pêndulo simples oscilando em ângulo θ de $-\pi$ a π , as linhas azuis mostram um pêndulo lançado com a velocidade necessária para atingir sua altura máxima, as linhas vermelhas representam um pêndulo com energia suficiente para girar em torno de seu eixo, ultrapassando sua altura máxima, já as linhas verdes denotam um movimento que oscila em uma altura menor que a máxima (CFTC, 2019).

Figura 5 – Retrato de fase de um sistema de pêndulo simples.



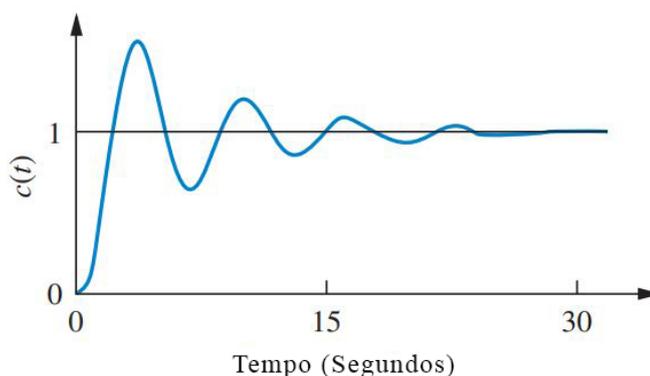
Fonte: CFTC (2019)

4.2.2 Estabilidade

A estabilidade é o aspecto mais importante de um sistema de controle. Se um sistema é instável, isso significa que sua resposta pode conter erros consideráveis de representação (NISE, 2011). Bazanella e Silva (2000) completam que uma das abordagens para definição de estabilidade é a de que um sistema pode ser visto como estável se para todo sinal de amplitude limitada aplicado em sua entrada, o sinal de saída também é limitado, em oposição, um sistema instável tem sua saída divergindo com o passar do tempo, com sua amplitude crescendo indefinidamente. Este conceito também corresponde a estabilidade BIBO, *Bounded-Input Bounded-Output*

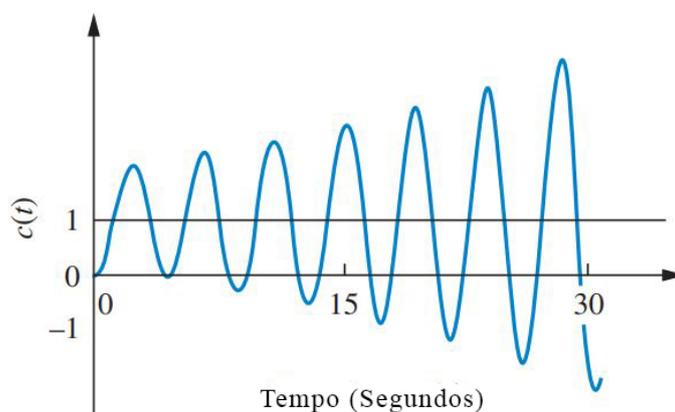
A Figura 6 mostra um gráfico de uma resposta estável, onde a saída tem amplitude controlada ao longo do processo, enquanto a Figura 7 ilustra uma resposta instável, com amplitude aumento ao decorrer do processo de controle.

Figura 6 – Saída de um sistema estável.



Fonte: Nise (2011) Adaptado.

Figura 7 – Saída de um sistema instável.



Fonte: Nise (2011) Adaptado.

4.2.2.1 Estabilidade em sistemas não lineares

Um sistema não linear pode ter sua estabilidade avaliada através do método de Lyapunov. A ideia de estabilidade de Lyapunov é mostrar que existe uma função positiva de estados (similar a uma função de energia) que decresce ao longo da trajetória do sistema, esta função pode ser chamada de funcional de Lyapunov, representada por $V(x)$ (GOODWIN; GRAEBE; SALGADO, 2000).

Goodwin, Graebe e Salgado (2000) demonstram que segundo a teoria de Lyapunov um sistema discreto na forma:

$$x[k + 1] = f(x[k]); \quad x[k_0] = x_0. \quad (6)$$

Pode ser dito estável se atender simultaneamente as duas propriedades a seguir:

- $V(x)$ é uma função positiva de x , ou seja, $V(x) > 0$ para todo $x \neq 0$
- V decresce ao longo do tempo, $\dot{V}(x) < 0$, para todo $x \neq 0$.

4.2.3 Controlabilidade

Palhares (2012) explica que considerando um sistema definido pela Equação 7:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(k_0) = x_0. \quad (7)$$

É possível definir o sistema como controlável se para qualquer estado x_0 e para qualquer estado final x_f existir uma ação de controle $u(t)$ que transfere o estado de x_0 para x_f em tempo finito (NISE, 2011).

Cabral (2016) complementa este conceito afirmando que controlabilidade associa-se à capacidade de influenciar todos os estados através das entradas do sistema.

4.2.4 Observabilidade

O conceito de observabilidade define que um sistema é observável se é possível determinar a qual estado x_k se o encontra o sistema, conhecendo apenas a sua saída $y(t)$ e a ação de controle $u(t)$ aplicada (FLEURY; DONHA, 2017).

Cabral (2016) explica que se a condição inicial do estado pode ser calculada, então pode-se reconstruir o vetor de estados $x(t)$ em qualquer instante de tempo.

4.2.5 Controlador PI

O Controlador do tipo PI, Proporcional-Integral, é um controlador que mistura duas ações de controle, a ação proporcional, cuja qual possui um sinal de saída que é proporcional a amplitude do erro, com isso, este controlador visa eliminar oscilações no sinal de saída com base numa constante de proporcionalidade K_p (DORF; BISHOP, 2001).

$$P_{\text{saída}} = K_p e(t). \quad (8)$$

A ação integral de controle produz um sinal de saída que leva em consideração a magnitude e a duração do erro, interpretando-se como um erro acumulado ao longo da ação de controle (DORF; BISHOP, 2001). O sinal de saída tem como componente uma constante de ganho integral K_i e pode ser descrita como:

$$I_{\text{saída}} = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Sendo assim, o controlador PI na estrutura paralela tem duas diferentes proporcionalidades em relação ao sinal, uma proporcional ao erro e outra proporcional a integral do erro (MADEIRA, 2016). É dito então que a ação de controle do controlador PI expressa-se da seguinte maneira:

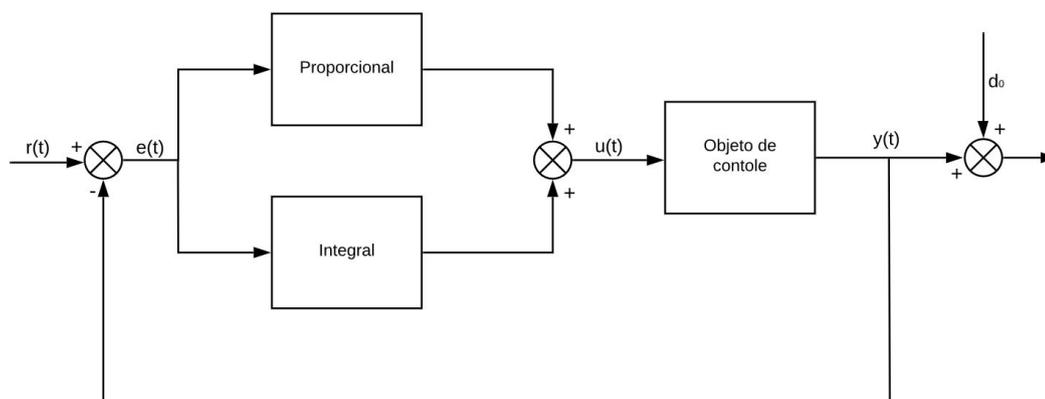
$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (10)$$

No caso discreto é dado por:

$$\Delta u[k] = K_p (e[k] - e[k - 1]) + K_i e[k] t_s. \quad (11)$$

A Figura 8 ilustra o diagrama de um controlador PI, onde $r(x)$ é um sinal de referência e d_o uma estimativa de um um sinal de perturbação de saída. O sinal de erro $e(x)$ é produzido como sendo a diferença entre a referência a ser seguida e a saída do processo. t_s indica o tempo que separa um ponto discreto de outro.

Figura 8 – Diagrama de blocos de um controlador PI.



Fonte: Nise (2011). Adaptado.

4.2.6 Controlador LQR

O controlador LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*, traduzido como Regulador Quadrático Linear introduz conceitos da teoria de controle ótimo, lidando com um sistema dinâmico que busca operar com um custo mínimo de energia (LUENBERGER, 1979). Neste tipo de controlador, a dinâmica do sistema é descrita por equações diferenciais que relacionam as matrizes de ponderação Q , dos estados x e R , das ações de controle u , com custo dado por uma função objetivo quadrática cuja minimização resulta em uma lei de controle por realimentação com um ganho K .

A constante de ganho é definida como:

$$K = \min_K \int_0^t (x^t Q x + u^t R u) dt. \quad (12)$$

Para este sistema a entrada de controle é definida em:

$$u = -Kx. \quad (13)$$

4.2.7 Sintonia de Controladores

Ao modo que é projetado ou implementado um sistema de controle, ainda podem se fazer necessários ajustes de parâmetros dos controladores, a fim de que estes atinjam um desempenho satisfatório no processo de controle. Este ajuste é chamado de sintonia (TANNURI, 2010).

Um dos métodos de sintonia existentes é o SIMC, *Skogestad Internal Model Control*, ou IMC de Skogestad. O autor afirma que um sistema de controle pode classificar-se entre agressivo ou suave, dependendo da característica de sua ação de controle (EUZÉBIO, 2015). Quando agressivo, o controlador reage rapidamente no processo em busca do retorno ao ponto de operação desejado, neste caso, a ação de controle é mais rápida, variando em dependência

da diferença entre a variável do processo e a entrada de referência. No entanto, para obter esta sintonia agressiva pode se fazer necessário projetar ganhos demasiadamente altos para o controlador, de tal modo que o sistema de controle fique menos robusto em comparação a um processo mais suave. Em contrapartida, o controle é suave quando o ganho do controlador tem menor magnitude e a ação de controle é mais lenta em comparação com uma sintonia agressiva (SKOGESTAD, 2006).

Skogestad (2006) propõe uma técnica de sintonia de um controlador PI, resultando em ações suaves de controle, calculando os ganhos proporcional e integral separadamente. A técnica baseia-se na estimativa de uma perturbação que entra no processo.

O método SIMC obtém os valores de ganho proporcional (k_p) e ganho integral (k_i), ao considerar o modelo FOPDT (*First Order Plus Dead Time*), com ganho k , constante de tempo τ e atraso de transporte θ .

$$k_p = \frac{1}{k} \frac{\tau}{\tau_c + \theta}, \quad (14)$$

$$k_i = \frac{k_p}{\min(\tau, 4(\tau_c + \theta))}. \quad (15)$$

A técnica de sintonia introduz o parâmetro τ_c , que determina o quão agressivo ou suave é o comportamento do controlador. Skogestad (2006) afirma que para um resultado de sintonia mais agressiva o valor de τ_c deve se aproximar do valor de atraso θ do processo.

4.3 MÉTRICAS DE REFERÊNCIA

Para analisar o desempenho de processos, se torna necessário estabelecer métricas e critérios de avaliação. Estes critérios podem medir a qualidade e inferir informações estatísticas sobre a análise (PRICE, 1993).

Postlethwaite (1993) e Price (1993) definem algumas métricas de avaliação, tais quais:

- IAE (*Integral Absolute Error*), corresponde a soma das áreas acima e abaixo do ponto de controle, penalizando os erros igualmente.

$$IAE = \int_0^t |e(t)| dt. \quad (16)$$

- ISE (*Integral of Squared Error*), corresponde a soma quadrática dos erros, penalizando erros de larga escala..

$$ISE = \int_0^t e^2(t) dt. \quad (17)$$

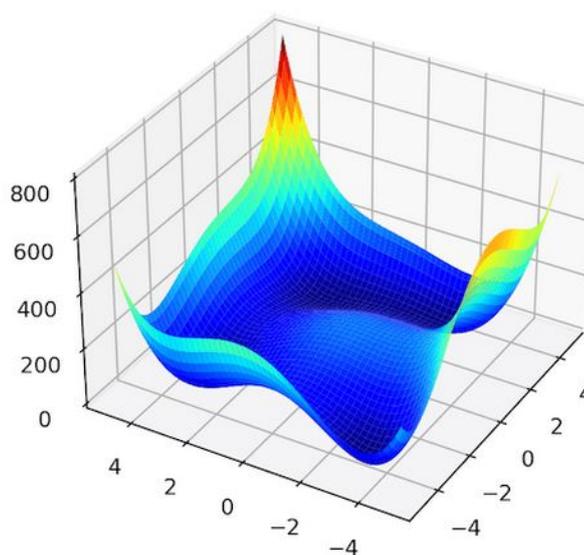
4.4 OTIMIZAÇÃO POR BASIN-HOPPING

A técnica de otimização por *Basin-Hopping* é uma técnica iterativa de otimização global. O método aplica múltiplas otimizações locais para uma função objetivo de modo que a resultante

da otimização global da função seja uma das múltiplas otimizações locais. O processo envolve dois passos, a aplicação de áreas de busca locais que sejam possíveis candidatas a uma área de otimização global, seguida de uma busca local das áreas selecionadas (BROWNLEE, 2021).

A seleção dessas áreas possibilita que o algoritmo trafegue entre elas, em busca de novas bases(*basins*) ótimas para a solução do problema. Novas bases são descartadas ou mantidas através de uma análise de distribuição probabilística, até que ao final das iterações, a base resultante seja a solução global ótima para o problema.

Figura 9 – Exemplo de superfície de busca da otimização Basin-Hopping para uma função multimodal de Himmelblau.



Fonte: Brownlee (2021)

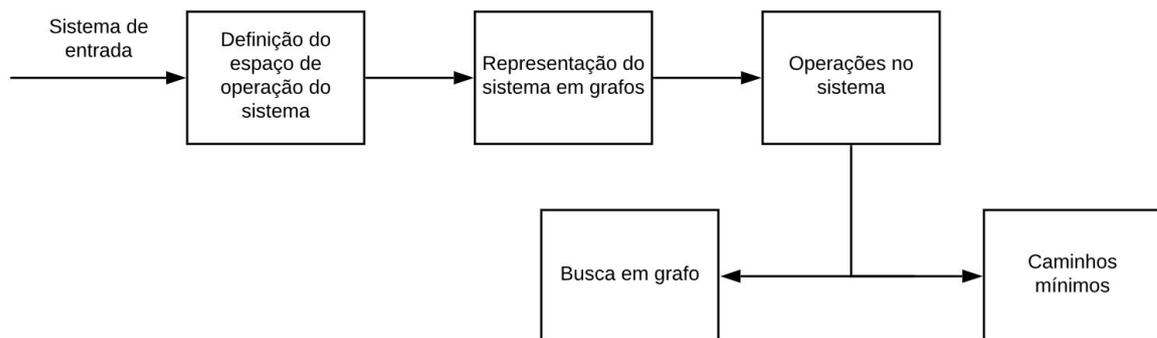
5 MATERIAIS E MÉTODOS

O método proposto neste trabalho consiste em relacionar a representação de um processo em espaço de estados e a teoria de grafos, deste modo, é proposto um método computacional de controle de sistemas.

Um processo descrito no espaço de estados associa p entradas com q saídas, de forma que o estado de controle do processo é representado por essas variáveis, ou seja, o espaço de estados é o espaço cujos eixos são as variáveis de estado (NISE, 2011). Associando essa definição a teoria de grafos, que permite representar estruturas interligadas e também percorrer essas estruturas através de uma função que relaciona seus vértices, é construído o modelo de um processo descrito por seus estados através de um grafo.

Com essa representação realizada é possível operar no grafo através de técnicas como buscas em grafo, a fim de percorrer estados de controle e traçar caminhos ótimos do atual ao estado objetivo.

Figura 10 – Diagrama de blocos do processo operacional.



Fonte: O autor (2021).

Para atingir este objetivo definem-se os estados objetivo e o espaço de operação do processo, que representa um subespaço do retrato de fase, em seguida, suas variáveis são representadas por meio de vértices e arestas formando uma estrutura topológica de grafos, para, por fim, através de operações nessa estrutura realizar o processamento de dados e as ações de controle no sistema.

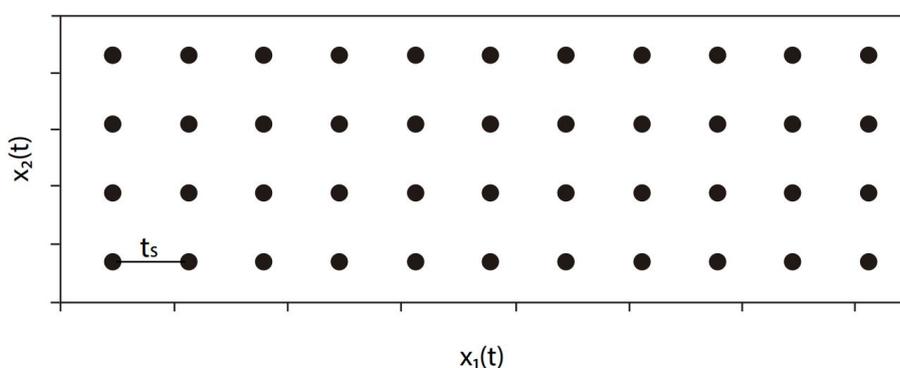
5.1 DEFINIÇÃO DO ESPAÇO DE OPERAÇÃO DO SISTEMA

Inicialmente, é necessário definir qual espaço de operação do processo irá ser modelado. Para isso define-se que o processo irá operar dentro de determinados limites. Assumindo que inicialmente tem-se um sistema descrito em tempo contínuo, o domínio desse sistema possui infinitos pontos de operação, ou seja, infinitos estados de controle. Para que seja possível

processar computacionalmente um sistema no modelo aqui proposto é necessário discretizar o espaço de operação, de modo que seja possível representar os estados de controle em estruturas finitas nos limites do sistema.

A discretização do sistema é realizada em função de seus estados, separando em subespaços. Uma vez que este processo é realizado resulta em finitos pontos de operação do processo, tal que, cada ponto de operação será posteriormente representado como sendo um vértice do grafo e as ações de controle que conectam os pontos de operação como arestas. A Figura 11 representa um exemplo de um espaço de operação de um sistema discretizado com dois estados.

Figura 11 – Espaço de busca de um processo com duas variáveis de estado.



Fonte: O autor (2021).

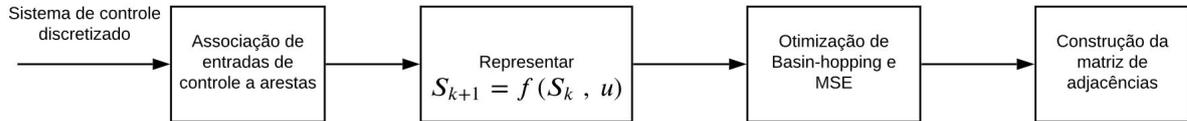
Para facilitar o entendimento, aplica-se os conceitos a um exemplo, que será desenvolvido ao longo deste capítulo, aplicando termos práticos ao conceito. Pode-se pensar no espaço de operação associando o eixo horizontal como valor de tensão aplicado a um atuador e o eixo vertical como temperatura que o atuador reproduz sob uma tensão. Interpreta-se então como qual o valor de tensão que pode aplicar uma temperatura no ambiente através do atuador.

5.2 REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA EM TOPOLOGIA DE GRAFO

Ao ponto que o processo foi discretizado em função dos estados, associa-se cada estado de operação a um vértice do grafo que representará o estado de operação. É realizado um processo de mapeamento das conexões entre os vértices de tal maneira que estas representam as ações de controle que conectam os diferentes pontos de operação do sistema. Para tal, é resolvido um problema de busca sobre as ações de controle entre todas as combinações possíveis de estados de operação discretizados. A transição entre os estados é dada pela dinâmica de um sistema representada pela função f , tendo como entradas o estado atual e uma ação de controle e produzindo em função destes um próximo estado. O problema de busca é formulado como sendo a minimização do erro quadrático entre o estado produzido e o estado desejado, de acordo com a ação de controle. Como conclusão desta etapa de representação é produzida a matriz de

adjacências que representa as conexões dos pontos de operação em função das ações de controle. Esta etapa de representação é apresentada na Figura 12.

Figura 12 – Diagrama de blocos da representação em grafos.



Fonte: O autor (2021).

5.2.1 Associação de Entradas de Controle Arestas

Para prosseguir com essa representação é necessário definir qual é a entrada de controle que aplicada no sistema no estado S_k muda o sistema para o estado S_{k+1} . Esta ação é calculada para todos os pares de estados do sistema, estes valores são atribuídos às arestas do grafo, que por sua vez conectam os vértices.

O processo de cálculo de um par $[S_k, S_{k+1}]$ consiste na relação descrita pela Equação 18:

$$S_{k+1} = f(S_k, u). \quad (18)$$

O valor final de u é obtido considerando a minimização da função geradora de S_{k+1} através do método de Basin-Hopping, aplicado ao erro médio quadrático entre todos os pares (i, j) de possíveis estados do processo discretizado.

$$\min_u (S_j - f(S_i, u))^2. \quad (19)$$

O valor de MSE, *Mean Squared Error*, indica a proximidade do estado resultante da função de transição da Equação 19 para com o estado objetivo, portanto, um MSE nulo indica que o estado calculado é de fato o estado objetivo.

Exemplificando, é realizado o mapeamento para todo par (tensão, temperatura). Minimizando a função geradora de temperatura, aplicado a questão: Qual o mínimo valor de tensão aplicado ao atuador, reproduz a temperatura correspondente ao estado.

5.2.2 Construção do Grafo com Base na Matriz de Adjacências

A matriz de adjacências é resultado das otimizações e cálculos das energias de controle descritos na Subseção 5.2.1. Com esses valores computados obtém-se uma matriz de adjacências

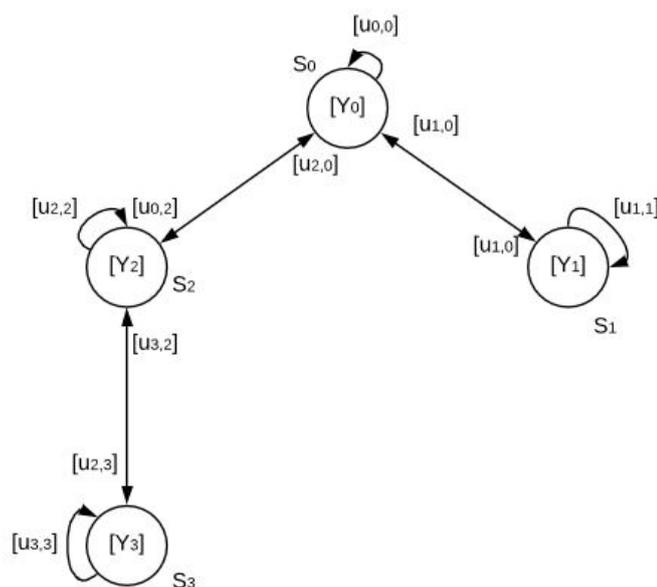
da seguinte forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \dots & u_{0,j} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \dots & u_{1,j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i,0} & u_{i,1} & \dots & u_{i,j} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Os elementos $u_{i,j}$ da matriz representam a entrada de controle responsável pela transição do estado i para o estado j . Ou seja, de acordo o exemplo desenvolvido, qual o valor de tensão que aplicado em i leva a uma mudança de temperatura atingindo j . Sendo a matriz de adjacência uma forma de representar grafos é possível construir a estrutura através de métodos computacionais. A fim de auxiliar na busca por estados próximos é criada uma estrutura auxiliar de árvore K-D. Esta árvore é construída a partir de todos os vértices do grafo. O propósito da árvore K-D é a busca por vizinhos mais próximos, *Nearest Neighbor Search*, de um ponto de operação durante um instante de controle visando encontrar o estado discreto de operação, um nó do grafo, para obter a lei de controle neste instante.

A Figura 13 representa ilustrativamente um grafo que pode ser construído com uma matriz análoga a representação da matriz dada pela Equação 20.

Figura 13 – Grafo associando entradas e estados de controle.



Fonte: O autor (2021).

5.3 OPERAÇÃO NO SISTEMA

Após construído o grafo que represente o processo de controle, operações comuns a estrutura de dados podem ser aplicadas, a fim de sustentar o processo de controle. Estas operações

tornam este processo mais sofisticado, permitindo gerar, por exemplo, subgrafos de estados representando subsistemas e encontrar caminhos mínimos para atingir os estados estacionários do sistema.

Os métodos que foram utilizados nesta pesquisa são buscas em grafos, especificamente o algoritmo de Dijkstra para a busca por caminho mínimo. Considerando-se os ponto de operação em algum instante de controle e o da referência faz-se necessário resolver um problema de controle global para se determinar quais pontos de operação do sistema devem ser atingidos. Esse processo é análogo ao conceito de janelas deslizantes dos controladores preditivos baseados em modelo (CAMACHO; BORDON, 2007). A busca por caminho mínimo considera em sua heurística as arestas como peso, que são as ações de controle.

As operações em grafos determinariam quais os incrementos de tensão que leve a alterações de tensão.

As subseções a seguir descrevem estes algoritmos utilizados para operar em grafos.

5.4 CONTROLABILIDADE, ESTABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Os conceitos de controlabilidade, estabilidade e observabilidade são conceitos fundamentais na teoria de controle moderno como propriedades importantes de um processo. Nesta seção é descrito como conceitos de controle moderno aplicam-se no método de representação de processos em grafos.

5.4.1 Controlabilidade

O conceito de controlabilidade denota em termos gerais que um processo representado em espaço de estados é dito controlável se a partir de um estado S_k existe um sinal de controle $u(k)$ que transfira-o para qualquer outro estado (NISE, 2011). Em termos práticos, existe um valor de tensão que altere a temperatura?

Aplicando esta definição à metodologia proposta, pode-se definir a controlabilidade como sendo a existência de um caminho que conecte um vértice V_0 a um vértice V_k . Para sustentar este argumento, aplica-se o que é definido na teoria de grafos como conectividade.

A conectividade determina se um grafo tem seus vértices interconectados. Um grafo conexo é uma estrutura que contém todos os seus vértices conectados por algum caminho, um grafo desconexo é uma estrutura que possui algum vértice inalcançável (BONDY; MURTY, 1976).

O processo representado em grafos pode ser dito controlável se tal grafo é avaliado como conexo, uma situação onde os estados (vértices) são alcançáveis a partir de um outro estado (outro vértice).

Uma maneira de determinar o número de componentes conexos de um grafo é descrita no pseudocódigo em sequência.

O pseudocódigo da busca em largura pode ser visto no Apêndice A.

Algoritmo 1: Algoritmo de determinação de conectividade

Entrada: v : vértice inicial arbitrário, $G(V, A)$: grafo, n : número de vértices do grafo

início

Realiza busca em largura

se número de nós alcançados for igual a n **então**

o grafo é conexo

fim

fim

5.4.2 Observabilidade

Na Seção 4.2.4 define-se observabilidade como uma medida de quão bem podem os estados de um sistema ser inferidos a partir do conhecimento de suas saídas externas. Em suma, um sistema é observável se responde positivamente ao seguinte questionamento: é possível determinar o estado interno de um sistema, conhecendo a saída externa e a entrada de controle aplicada?

Para determinar a observabilidade de um processo descrito em grafos utiliza-se parte da metodologia de controlabilidade, já que a observabilidade pode ser vista como um aspecto dual deste problema. Desta forma, a estrutura do vértice do grafo deve armazenar a informação das variáveis de saída do estado, para que seja palpável utilizar o conceito de busca, que é aplicado a controlabilidade. Então, se existir um único vértice alcançável no sistema em grafo que represente a saída em questão, o sistema é dito observável, caso não exista tal vértice, ou não seja alcançável, ou existam múltiplos vértices de modo que não seja possível determinar qual destes corresponde a saída, o sistema não é observável.

5.4.3 Estabilidade

O critério para avaliação de estabilidade do sistema será o funcional de Lyapunov, abordado na Subseção 4.2.2. Para que seja possível validar os critérios de estabilidade de Lyapunov, define-se uma função custo J para a metodologia. Essa função custo é análoga a uma função de energia, habilitando-a como o funcional de Lyapunov.

O conceito de aplicação de um funcional de controle ótimo como uma função de Lyapunov já foi explorado na literatura (GOODWIN; GRAEBE; SALGADO, 2000). Este é um problema bem estabelecido na teoria de controle ótimo e controle preditivo baseado em modelo. Ao ser resolvido o problema de controle global na busca por caminho ótimo apresentada na Seção 5.3 é considerado o funcional:

$$J = \sum_{k=0}^k (S_f - S_k)^2 + \sum_{k=0}^k \Delta u^2. \quad (21)$$

Sendo k os índices dos estados no caminho ótimo de Dijkstra.

O funcional ao ser adotado como uma função de Lyapunov, por conter termos quadráticos satisfaz o primeiro critério $V(x) > 0$ e considerando que essa função custo é minimizada a cada instante de controle tem-se que $V(\dot{x}) > 0$. O desenvolvimento desse teorema pode ser encontrado em Goodwin, Graebe e Salgado (2000, pp. 728-729)

5.5 MÉTRICAS DE AVALIAÇÃO

Para quantificar o desempenho da representação de sistemas de controle representados em grafos e comparar com a tradicional representação em espaço de estados é necessário estabelecer quais critérios serão contabilizados na análise. Inicialmente foram definidas quatro métricas:

- TVC: *Total Variation of Control*;
- ISE: *Integral of Squared Error*;
- IAE: *Integral of Absolute Error*;
- ISU: *Integral of Squared Control*;

5.5.1 Total Variation of Control

O TVC, sigla em inglês para o termo variação total de controle, serve para análise quantitativa do módulo da energia total de controle que foi necessário aplicar em um sistema para que ele saia de seu estado inicial S_0 e siga para um estado objetivo S_k .

A equação utilizada para cálculo do TVC será:

$$TVC = \sum_{k=0}^k | \Delta u(k) | . \quad (22)$$

Onde $k = 0$ representa um estado inicial e k o estado objetivo. $|u(k)|$ é definido como o módulo da energia de controle necessária para a mudança de estado.

5.5.2 Integral of Squared Error

O ISE, integral do erro quadrático é uma medida matemática genérica utilizada na avaliação de desempenho, integrando o erro quadrático ao longo do tempo. Nesta aplicação o ISE será definido como o quadrado da subtração da resposta ideal com a resposta obtida, medindo o quão próximo o sistema está do estado objetivo.

A equação 23 relaciona $r(k)$ como a resposta ideal e $x(k)$ a resposta obtida, ambos para um estado k .

$$ISE = \sum_{k=0}^k (r(k) - x(k))^2. \quad (23)$$

Em termos de controle de sistemas, o ISE penaliza erros maiores em detrimento de erros menores. Processos que minimizam o ISE tendem a eliminar erros em larga escala, a medida que toleram pequenos módulos de erro ao longo do tempo.

5.5.3 Integral of Absolute Error

O IAE, integral do erro absoluto, entra como complemento de avaliação ao ISE, de forma que integra o erro absoluto ao longo do tempo, sem que adicione nenhum peso ao erro. Valores baixos de IAE tendem a indicar sistemas com uma oscilação baixa.

Aqui define-se a equação do IAE como:

$$IAE = \sum_{k=0}^k |r(k) - x(k)|. \quad (24)$$

5.5.4 Integral of Squared Control

A métrica ISU, sigla para *Integral of Squared Control* mede a somatória da variação quadrática das ações de controle ao longo do tempo. Analogamente ao ISE, esta métrica tende a penalizar altas variações de controle.

A equação a seguir representa o ISU:

$$ISU = \sum_{k=0}^k u^2(k). \quad (25)$$

5.6 CONFIGURAÇÃO EXPERIMENTAL

Para validar o cumprimento dos objetivos do trabalho, foi definida uma sequência de testes com base na metodologia proposta, considerando como parâmetros de avaliação as métricas descritas na Seção 5.5. Estas métricas são avaliadas com base na aplicação da representação proposta em dois processos genéricos de controle um linear e outro não linear.

O primeiro, um sistema linear é definido como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (26)$$

O segundo, um sistema não linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x^2(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u^3(t). \quad (27)$$

Além da representação em grafo, para validar os resultados é necessário comparar o resultante com abordagens tradicionais de controle, neste caso, para ambos os sistemas descritos acima, é feita uma avaliação de métricas utilizando um controlador do tipo PI, e um controlador do tipo LQR integral.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados da aplicação da metodologia proposta para representação de sistemas de controle são descritos em detalhes nas seções a seguir.

6.1 APLICAÇÃO EM SISTEMA LINEAR

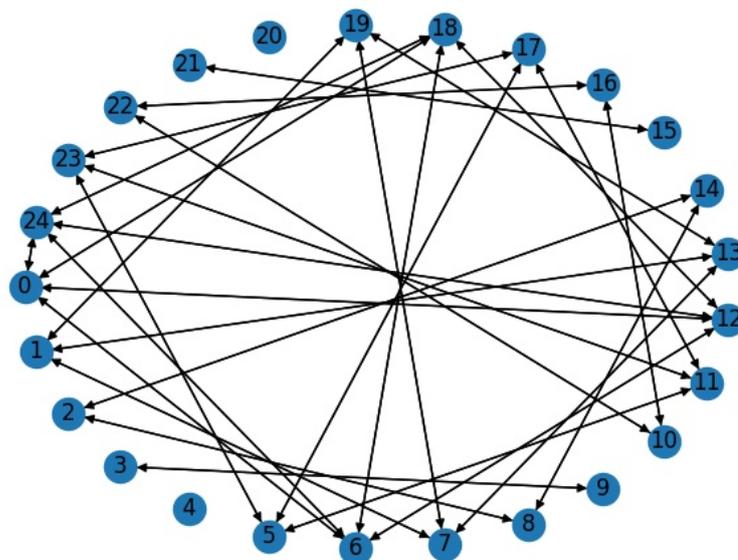
6.1.1 Representação do Sistema em Grafo

Considerando o sistema linear descrito na Seção 5.6 sob a Equação 26, primeiramente é definido o seu limite de operação na região do eixo x entre $[0, 1]$ e no eixo y também entre $[0, 1]$. Para fins de teste, considerou-se um *time step* de $0.1s$ e uma granularidade de 0.25 , com base nesses valores foi então gerado um total de 25 estados, resultantes da combinação dos pontos $x_1 = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$ e $y_2 = [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]$.

Feito isso, é calculado para cada par $[S_i, S_j]$ a energia de controle necessária para a transição de estados, os valores são obtidos a partir dos cálculos descritos na Seção 5.2. A matriz de adjacências do grafo que representa o sistema linear em questão pode ser visualizada no Anexo B.

A partir desta matriz, é montado o grafo que representa o sistema, a Figura 14 ilustra esse grafo.

Figura 14 – Grafo de estados resultante do sistema linear.



Fonte: O autor (2021).

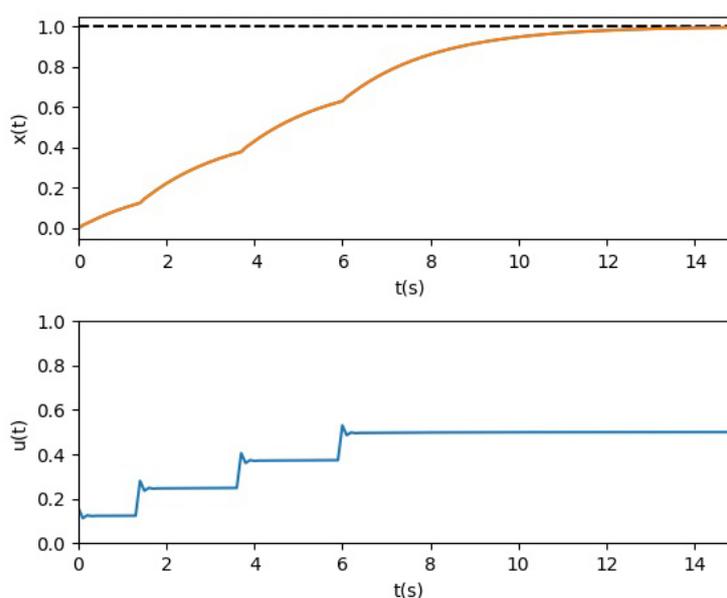
6.1.2 Operação no Grafo

A operação no grafo é realizada através da busca pelo caminho ótimo até um estado objetivo utilizando o algoritmo de Dijkstra. É considerado como estado objetivo do sistema o estado S_{24} , que corresponde ao ponto de operação $[1, 1]$ do sistema.

Realizando a busca em grafo partindo do estado S_0 até o estado objetivo, o algoritmo de Dijkstra retorna o caminho $[S_0, S_6, S_{12}, S_{18}, S_{24}]$ como solução do problema de controle global. A transição entre os estado do caminho são regidas pelas leis de controle do PI e do LQR respectivamente, em cada estudo de caso.

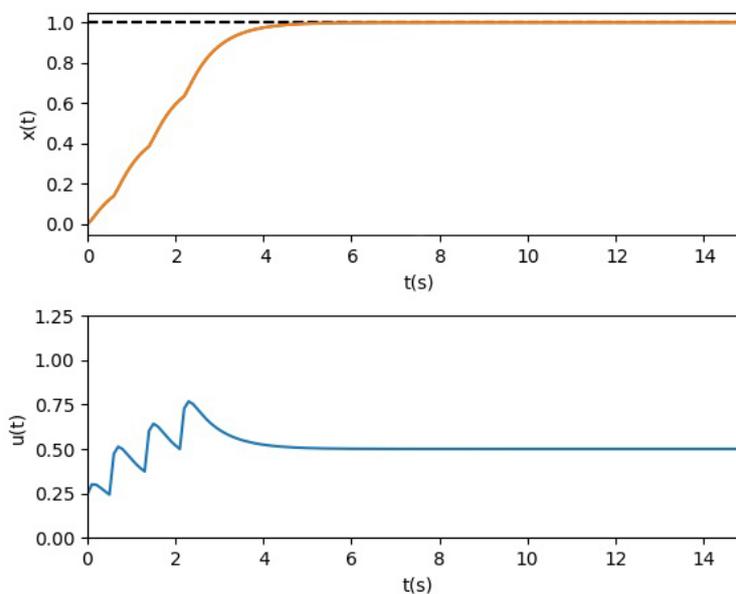
Na Figura 15 é apresentado o resultado de controle do sistema linear utilizando o método de controle baseado em grafos com as transições dos caminhos dadas por um controlador PI. Enquanto a Figura 16 exibe a resposta do processo de controle do sistema linear com os caminhos dados por um controlador LQR.

Figura 15 – Resposta do controlador PI mapeado pelo método de grafos no processo linear.



Fonte: O autor (2021).

Figura 16 – Resposta do controlador LQR mapeado pelo método de grafos no processo linear



Fonte: O autor (2021).

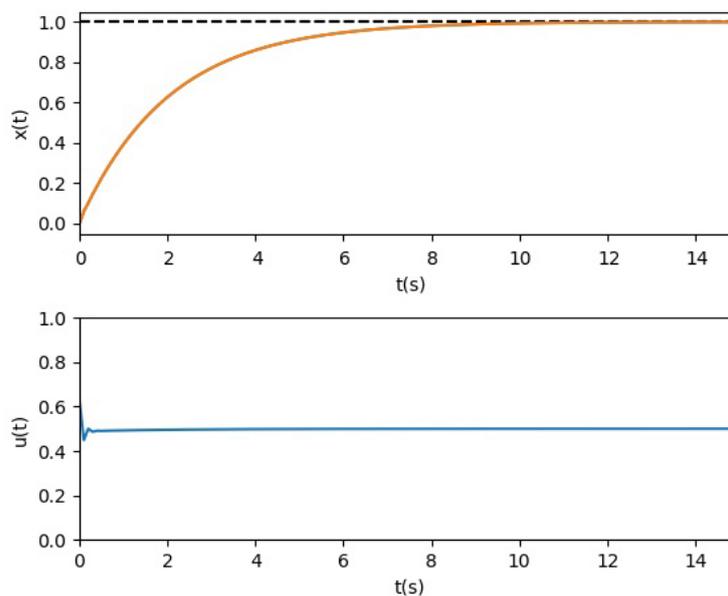
6.1.3 Controle PI e LQR

Como parâmetros comparativos, a mesma simulação é executada considerando estas ações de controle para os controladores PI e LQR descritos na Seção 5.6. Estas simulações são utilizadas na Subseção 6.1.4 com seus respectivos ISE, ISU, IAE e TVC.

O controlador do tipo PI com sintonia SIMC obteve a resposta dada pela Figura 17.

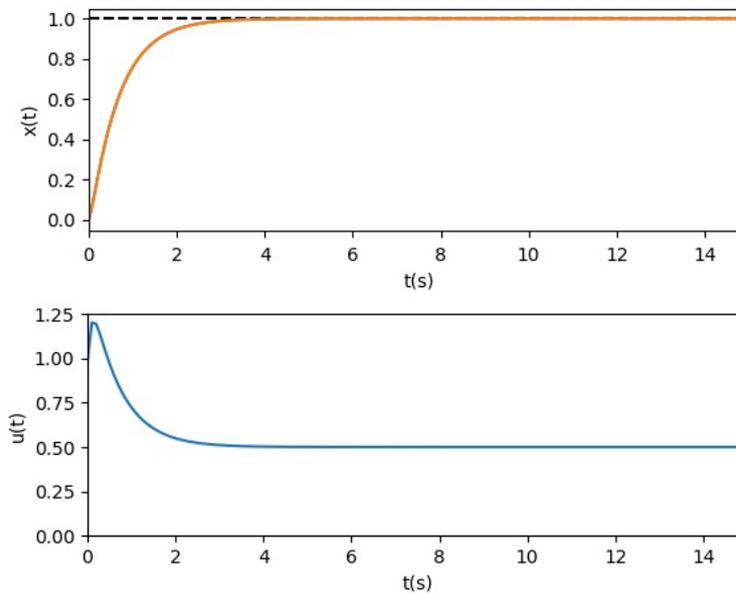
Enquanto a Figura 18 ilustra a mesma situação para o controlador LQR.

Figura 17 – Saída de estado e entrada de controle do controlador PI para o sistema linear.



Fonte: O autor (2021).

Figura 18 – Saída de estado e entrada de controle do controlador LQR para o sistema linear.



Fonte: O autor (2021).

6.1.4 Medidas Avaliativas

Tendo o resultado das simulações é possível utilizar as métricas descritas na Seção 5.5 e construir uma tabela comparativa a fim de avaliar os resultados.

Tabela 1 – Métricas avaliativas para o controlador PI, LQR e o sistema linear representado em grafo.

	TVC	ISU	IAE	ISE
PI - Grafo	0.725	0.082	96.914	62.799
PI - Puro	0.257	0.034	41.570	21.098
LQR - Grafo	1.468	0.177	36.234	24.251
LQR - Puro	0.920	0.080	8.519	8.519

Fonte: O autor (2021).

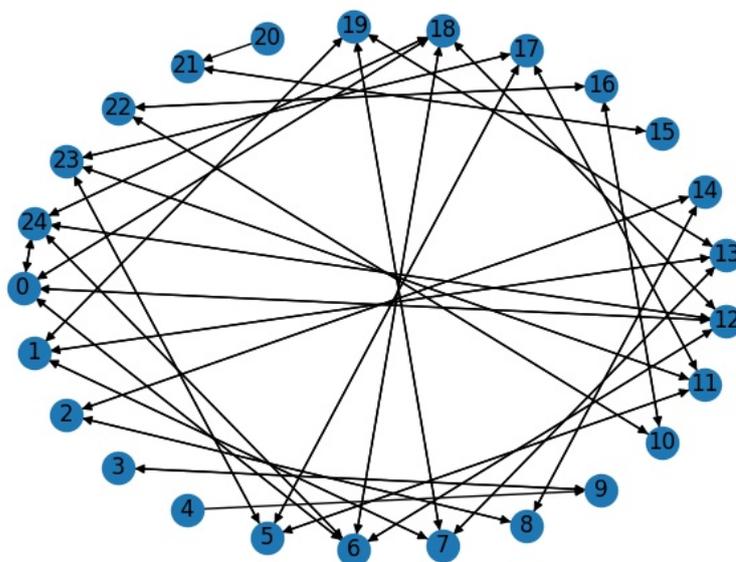
6.2 APLICAÇÃO EM SISTEMA NÃO LINEAR

6.2.1 Representação do Sistema em Grafo

Os parâmetros dos limites de operação, *time step* e granularidade do sistema não linear são os mesmos descritos para o sistema linear. Conseqüentemente, obtém-se os mesmos 25 estados de controle, variando apenas a forma como as entradas são multiplicadas na transição.

A partir do modelo em espaço de estados, novamente torna-se possível construir o grafo que represente o sistema, calculando as entradas necessárias para a transição dos pares $[S_i, S_j]$, gerando a matriz de adjacência deste sistema, disponível no Anexo C.

Figura 19 – Grafo de estados resultante do sistema não linear.



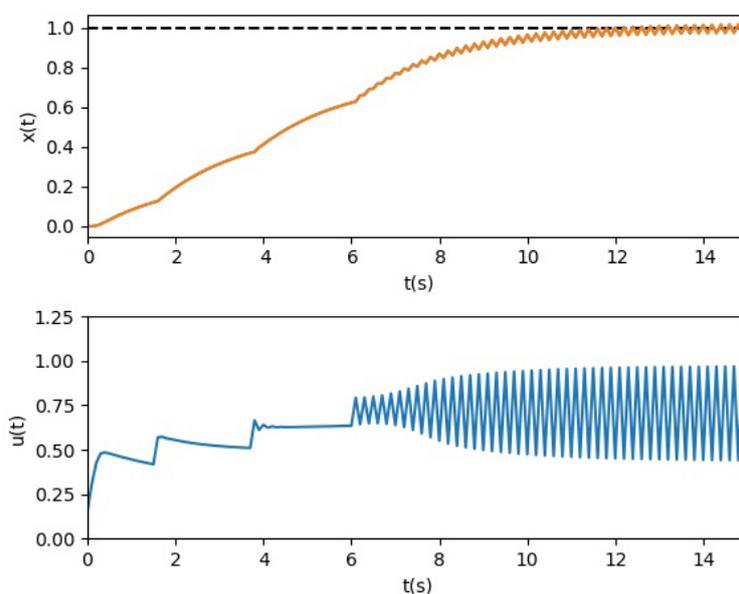
Fonte: O autor (2021).

6.2.2 Operação no Grafo

Para exemplificar a operação no sistema não linear e comparar a análise com o sistema linear, foi selecionado também o estado S_{24} como estado objetivo do processo, para que seja aplicado o algoritmo de Dijkstra neste modelo em busca do caminho ótimo para tal estado. Essa busca novamente retorna o caminho $[S_0, S_6, S_{12}, S_{18}, S_{24}]$.

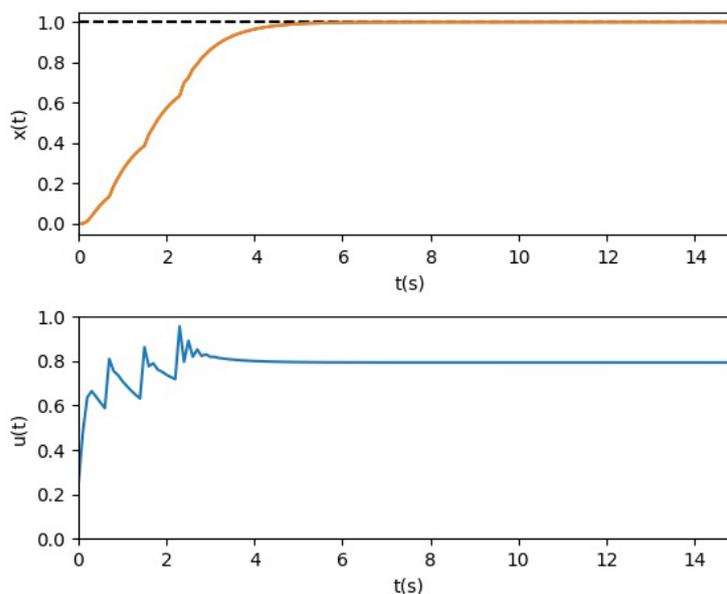
Na Figura 20 é apresentado o resultado de controle do sistema não linear utilizando o método de controle baseado em grafos com as transições dos caminhos dadas por um controlador PI. Enquanto a Figura 21 exibe a resposta do processo de controle não linear com os caminhos dados por um controlador LQR.

Figura 20 – Resposta do controlador PI mapeado pelo método de grafos no processo não linear.



Fonte: O autor (2021).

Figura 21 – Resposta do controlador LQR mapeado pelo método de grafos no processo não linear.



Fonte: O autor (2021).

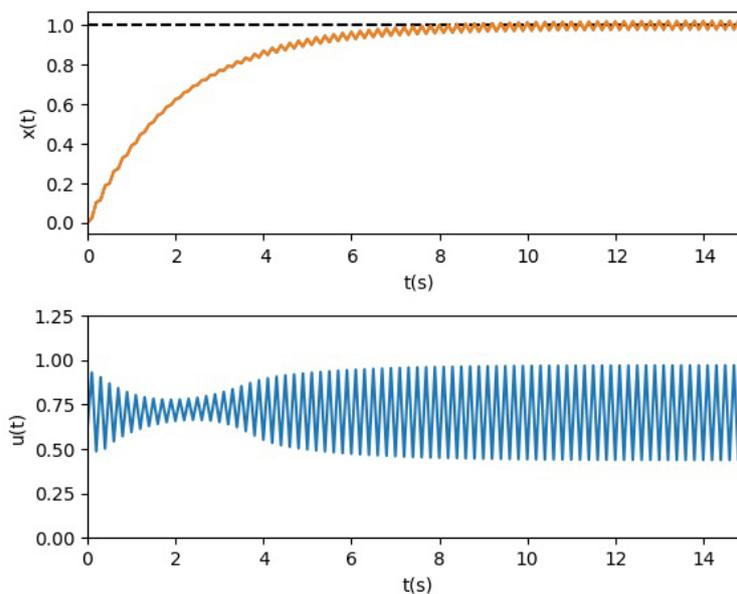
6.2.3 Controle PI e LQR

Além da geração do grafo, os mesmos controladores abordados na Seção 5.6 constroem um parâmetro de avaliação deste modelo. As métricas obtidas deste caso estão descritas na subseção em sequência.

O controlador PI obtém a resposta ilustrada na Figura 22

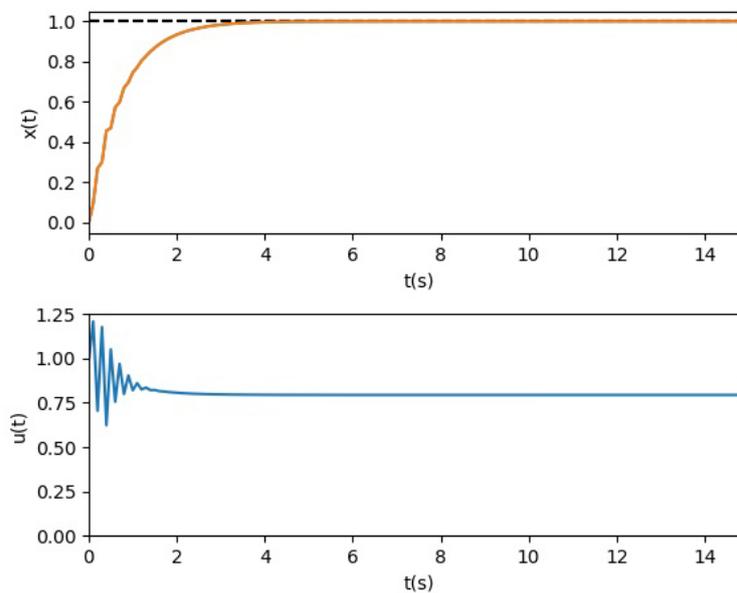
Enquanto o modelo LQR obtém o desempenho mostrado na Figura 23.

Figura 22 – Saída de estado e entrada de controle do controlador PI para o sistema não linear.



Fonte: O autor (2021).

Figura 23 – Saída de estado e entrada de controle do controlador LQR para o sistema não linear.



Fonte: O autor (2021).

6.2.4 Medidas Avaliativas

Apresenta-se as mesmas medidas avaliativas descritas para o sistema linear. A tabela a seguir demonstra essa comparação.

Tabela 2 – Métricas avaliativas para o controlador PI, LQR e o sistema não linear representado em grafo.

	TVC	ISU	IAE	ISE
PI - Grafo	39.053	17.693	100.162	66.055
PI - Puro	63.922	30.205	44.332	21.885
LQR - Grafo	1.969	0.297	38.331	26.226
LQR - Puro	3.178	1.200	15.832	8.489

Fonte: O autor (2021).

6.2.5 Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade

Controlabilidade, observabilidade e estabilidade são conceitos aplicados ao sistema projetado e não ao método de controle, isso implica que um sistema que é instável se controlado por um controlador PI também será instável se controlado por um controlador LQR e vice-versa.

Essas propriedades podem ser analisadas também pelo método de representação em grafos, através das ações descritas na Seção 5.4. Para ambos os sistemas analisados, linear e não linear, é evidente uma não controlabilidade associada ao sistema, visto que o grafo gerado para os sistemas nas figuras 14 e 19 possui dois vértices inatingíveis, correspondentes aos estados S_4 e S_{20} . Por inferência, como o vértice representa uma estrutura contendo as variáveis de saída do estado, o sistema também é não observável, já que não é possível determinar qual a saída externa do sistema neste ponto.

Analisando a estabilidade segundo a metodologia proposta por Lyapunov e aplicando o conceito discutido Subseção 21, afirma-se que o processo de controle representado em grafo é estável para os pontos de operação mapeados.

6.3 DISCUSSÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

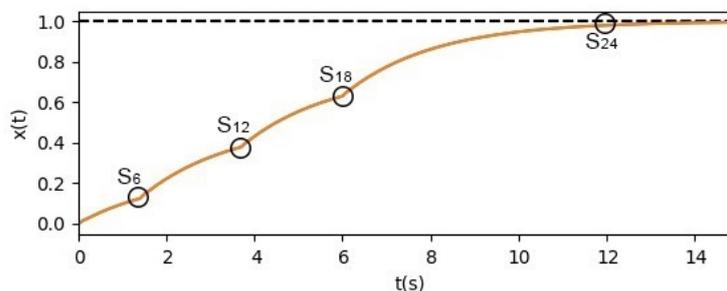
Nas seções anteriores deste mesmo capítulo, foi demonstrado e descrito como se procedeu a aplicação prática da representação em grafos de processos descritos em espaço de estados. Para tal, utilizou-se da aplicação em um sistema linear e um não linear.

Como primeira observação, afirma-se que modelo aqui proposto e descrito no Capítulo 5 foi capaz de representar em grafo um processo descrito por espaços de estados. Esta técnica possibilita a implementação digital de um processo controle, através de etapas subjetivamente menos complexas que as necessárias para a implementação analógica de um controlador semelhante.

A Figura 24 indica os estados de controle no gráfico de saída de estados.

Em termos de desempenho e robustez, se torna necessário analisar de forma independente o sistema linear e o não linear, tal análise é feita na subseção seguinte.

Figura 24 – Indicação dos estados no gráfico de saída de estado do sistema.



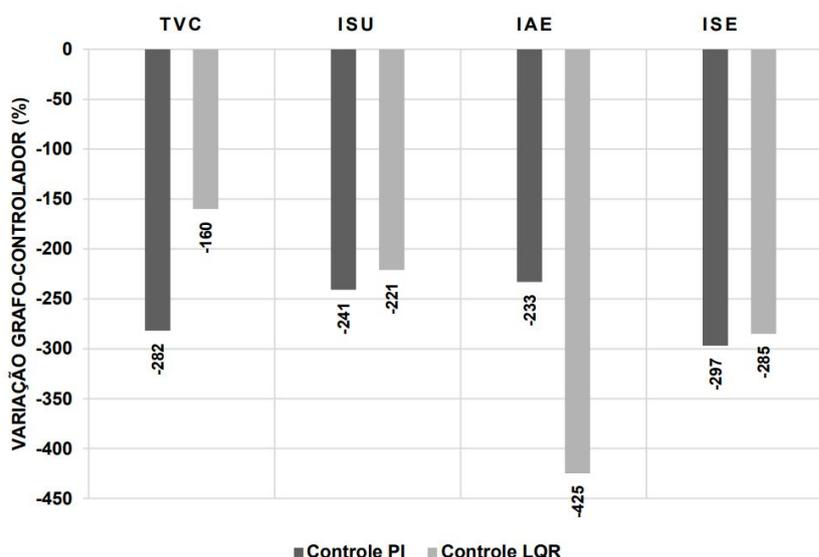
Fonte: O autor (2021).

6.3.1 Análise de Resultados do Sistema Linear

O sistema linear tem como característica uma operação mais simples que um sistema de ordem superior. Considerando este fato, é esperado que controladores analógicos representem este sistema de forma mais eficiente. Essa afirmação se sustenta com base nos parâmetros da Tabela 2.

A Figura 25 ilustra em gráfico a variação percentual dos controladores PI e LQR em relação a metodologia em grafo. Com uma piora relativa em todos os casos para a aplicação em um sistema linear.

Figura 25 – Gráfico da comparação percentual grafo-controlador de variação dos parâmetros avaliados para o sistema linear.



Fonte: O autor (2021).

Quantificando os valores percentuais de variação tem-se uma piora de 282%, 241%, 233% e 297% de TVC, ISU, IAE e ISE respectivamente para o controle PI e de 160%, 221%, 425% e 285% para os mesmos parâmetro do controle LQR. Um dos fatores que justifica essa

piora é a de que este é o mapeamento de um sistema subatuado, onde as variáveis de controle devem ser simétricas, já que o controle de uma variável depende diretamente do controle de outra variável, essa característica exige que os valores dos pontos de operação sejam equivalentes, o que é respeitado pela sequência de estados obtida.

6.3.2 Análise de Resultados do Sistema Não Linear

Efetuada ações de controle no processo não linear representado em grafos observa-se inicialmente um valor menor de TVC em comparação com os controladores PI e LQR, fato que impacta positivamente na evolução do processo, este parâmetro indicou uma melhora de 61% no controle PI e de 62% no controle LQR. Esta melhora é consequência de uma menor energia de controle aplicada ao sistema quando transiente para o estado objetivo. O fato de haver uma menor energia aplicada é resultado do processo de operação em grafos descrito na Seção 5.3, mais especificamente da ação de busca por caminhos mínimos de Dijkstra.

É verificada uma oscilação no gráfico de saída de estados no controlador PI da Figura 22, essa oscilação tem como centro o estado objetivo do processo, já que observando a entrada de controle aplicada e representada na mesma figura, esta tem uma variação periódica de aproximadamente $0.5u(t)$ quando o processo atinge seu objetivo de controle, isso significa que mesmo atingindo o estado esperado a não linearidade do sistema pode induzir a variações que por consequência geram erros, como evidenciado nos valores de IAE e ISE do controlador. A magnitude do valor de IAE indica que houveram oscilações consideráveis no processo, em complemento o ISE indica que houveram oscilações de magnitude intermediária. Além disso, o módulo de ISU sustenta que as variações que ocorreram nas ações de entrada do controlador são de magnitude considerável.

Apesar de haver uma piora numérica no valores de IAE e ISE de aproximadamente 227% e 300% para o controle PI mapeado em grafo e de aproximadamente 253% e 325% para o controle LQR, esta variação pode ser analisada como algo esperado e que não indica necessariamente um desempenho inferior, já que esse comportamento pode ser justificado pela existência de mais estados intermediários entre o início e o objetivo, ou seja, não há uma mudança direta do estado inicial para o objetivo como ocorre no controle tradicional, o que há é uma minimização em termos de custo da ação de controle, mesmo que isso implique em um trânsito por mais estados. O mesmo raciocínio é válido para a interpretação do ISE.

Uma observação que sustenta o desenvolvimento anterior é que ao visualizar o grafo que ilustra o sistema não linear na Figura 19 verifica-se a existência de uma aresta direta entre S_0 e S_{24} , indicando uma entrada de controle que realiza esta transição diretamente, porém em termos de energia de controle essa entrada é mais custosa em comparação ao caminho que o processo mapeado realiza, confirmando o sucesso da aplicação do caminho ótimo de controle.

No que diz respeito ao controlador LQR observa-se na Figura 23 que o mesmo possui uma resposta com menos oscilações e atinge de forma mais rápida seu estado objetivo. Em relação a ação de controle na entrada é possível observar uma variação significativa no início do

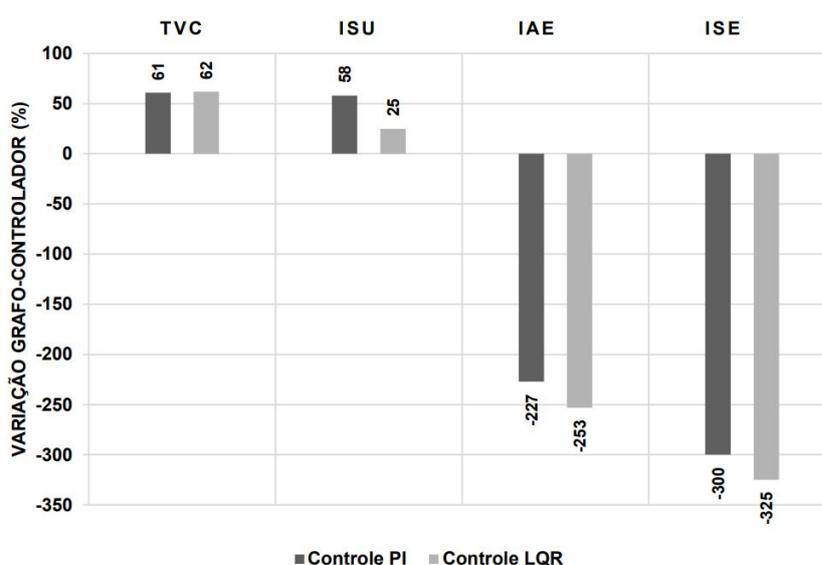
processo, que no seu decorrer é controlada. O controlador LQR mapeado por grafos exibe uma taxa de oscilação menor, visto que essa é diluída entre as mudanças gradativas de estado até o estado objetivo.

Quando compara-se estes dois métodos com a representação por meio de grafos é importante ressaltar alguns pontos. Primeiramente tem-se uma visível diminuição das oscilações das entradas de controle, uma vez que ao representar digitalmente por grafos o processo, a estrutura possui informações de todo o processo de controle para os limites de operação definidos, objetivamente, tem-se um ISU 58% melhor em comparação ao controlador PI e aproximadamente 25% melhor em relação ao LQR. A medida de variação quadrática de controle (ISU) pode ser analisada analogamente ao TVC, já que indica dimensões das entradas de controle aplicadas para que o sistema altere seu estado.

Observando o gráfico de saída do método de grafos com ações do na Figura 21 não são exibidas oscilações no processo de saída, quando atingido o estado objetivo, tem-se uma saída constante sem variações em torno de um ponto. Concomitantemente, as ações de controle na entrada também não apresentam oscilações de grande magnitude, fato confirmado pelo valor de ISU do modelo. Ainda que baixa, infere-se a partir disso que o sistema em grafo pode se comportar de forma estável mesmo sob a presença de oscilações na entrada, caracterizando uma baixa sensibilidade a variações.

A Figura 26 compara o percentual de variação de cada parâmetro do processo representado em grafo frente o processo aplicado em controladores. Valores positivos de porcentagem indicam uma melhora, enquanto negativos uma possível piora.

Figura 26 – Gráfico da comparação percentual grafo-controlador de variação dos parâmetros avaliados para o sistema não linear.

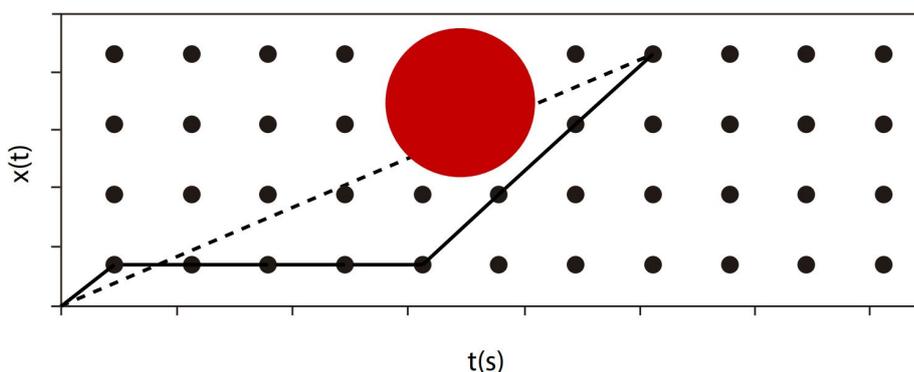


Fonte: O autor (2021).

6.3.3 Análise de Controlabilidade, Observabilidade e Estabilidade

Na Subseção 6.2.5 ambos os sistemas são apresentados como não controláveis, não observáveis e estáveis no seu processo de operação. A não controlabilidade do sistema não implica que o processo de controle por mapeamento ótimo de estados falhe, mas sim, que existem estados que não podem ser atingidos, porém nos estados onde o método pode atingir, o controle é efetivo, o que não pode ser garantido em um controlador linear.

Figura 27 – Representação de uma área de atuação não atingível e o comportamento de um controlador linear comparado com um controlador mapeado por grafos.

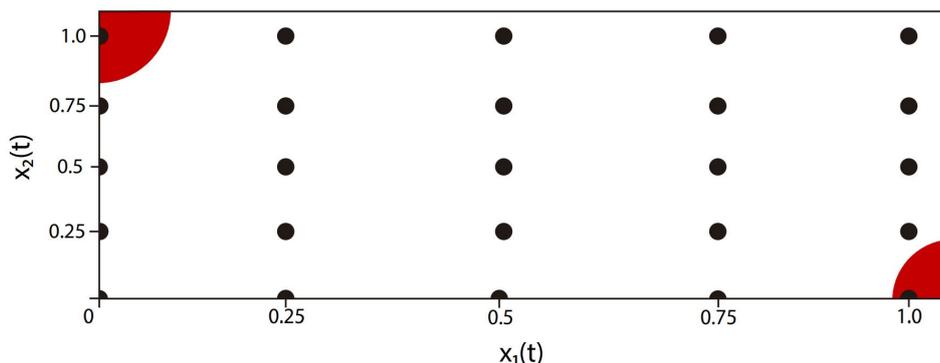


Fonte: O autor (2021).

A Figura 27 ilustra o comportamento esperado por um controlador linear, dado pela linha tracejada, em um processo de controle frente a um controlador mapeado por grafo, linha contínua. No processo tradicional o controlador linear teria seu trajeto interrompido por uma área não atingível de estados de controle, representada pelo círculo vermelho, tornando todo o processo não controlável. Enquanto uma trajetória mapeada por grafos tem a capacidade de circundar esta área, visto que percorre seu trajeto vértice a vértice, controlando um processo com áreas inatingíveis.

Os estados inalcançáveis do processo em grafo correspondem ao ponto de operação $S_4 = [1, 0]$ e $S_{20} = [0, 1]$. Estes pontos específicos do processo não podem ser atingidos. A Figura 28 ilustra o mapeamento do processo dentro de seus limites de operação, essa figura é equivalente ao grafo obtido na Figura 14 e na Figura 19.

Figura 28 – Representação de estados discretos do processo de controle ótimo mapeado neste trabalho.



Fonte: O autor (2021).

A Figura 28 evidencia os dois estados não atingíveis S_4 e S_{20} , que correspondem aos pontos de operação $[0, 1]$ e $[1, 0]$ respectivamente. Considerando os conceitos de controlabilidade, estes pontos tornam o processo não controlável, mas em todos os outros estados de controle é possível obter entradas que alcancem tais vértices. A discussão de controlabilidade pode ser ampliada devido a este processo tratar de um sistema subatuado, onde o controle de uma variável depende do controle de outra variável, especificamente para o caso linear as variáveis x_1 e x_2 são iguais, o que implica em uma não operação do processo em pontos onde os valores dessas variáveis sejam assimétricos. Tal fato explica os pontos inalcançáveis do processo mapeado em grafo, estes são locais onde as variáveis não são iguais, dessa forma não existe estado de origem que alcance estes pontos.

Observando o caminho $[S_0, S_6, S_{12}, S_{18}, S_{24}]$ que o processo realiza é evidente que as transições nos estados respeitam a característica de subatuação do processo, já que estes estados correspondem aos pontos $[(0, 0), (0.25, 0.25), (0.5, 0.5), (0.75, 0.75), (1, 1)]$ respectivamente.

Para o caso não linear também há uma estabilização parcial do sinal de saída de estado do controle PI quando representado em grafo, a Figura 22 mostra uma entrada oscilante desde o início do processo, tal oscilação é reproduzida na saída de estados do processo, enquanto na Figura 20 observa-se uma oscilação em uma parte específica do processo, delimitada pelo momento onde inicia-se a transição de vértices partindo do estado S_{18} atingindo o estado objetivo S_{24} .

7 CONCLUSÃO

Parafraseando o teorema fundamental do cálculo, pelo conceito de derivada, em uma escala suficientemente pequena, toda dinâmica pode ser interpretada como linear.

(...) os teoremas elementares do Cálculo, que, no entanto, são apresentados de uma forma que provavelmente será nova para a maioria dos estudantes. Essa apresentação, que segue rigorosamente a nossa perspectiva geral "geométrica" sobre análise, visa manter-se o mais próximo possível da ideia fundamental do Cálculo, nomeadamente a aproximação "local" das funções por funções lineares. No ensino clássico de Cálculo, a ideia é imediatamente obscurecida pelo facto acidental de que, num espaço vectorial unidimensional, existe uma correspondência de um para um entre formas e números lineares, e por isso a derivada num ponto é definida como um número em vez de uma forma linear. (DIEUDONNE, 2006) (Traduzido)

Os controladores lineares apresentam bom desempenho no ponto de operação para o qual foram projetados. Porém, sofrem deterioração de desempenho conforme se afastam desse ponto em função das mudanças de dinâmicas do processo. Quanto maior a não linearidade, maior a degradação de desempenho. Tradicionalmente esse problema é tratado pela abordagem de escalonamento de ganhos (*gain scheduling*) em que n controladores são parametrizados para n pontos de operação do processo. Embora essa abordagem seja satisfatória, depende da transição entre pontos de operação e não considera que é possível escolher os caminhos de transição.

Na abordagem de controle mapeado ótimo são resolvidos dois problemas de controle, um global e um local, em combinação. Isso é possível pela representação do processo na forma de um grafo que representa a dinâmica de forma discreta, os vértices são pontos de operação e as arestas as ações de controle que conectam todos os pontos.

O primeiro problema a ser resolvido é o de controle global. Para atingir um ponto de operação objetivo a partir de uma origem, quais são os pontos de operação que devem ser visitados considerando-se uma função custo. Esse problema é resolvido por métodos de caminho ótimo em grafos, como o algoritmo de Dijkstra.

Com a lista de nós a serem visitados surge o problema de controle local, como transitar de um ponto de operação ao próximo vizinho. Esse problema pode ser resolvido por controladores lineares, sintonizados individualmente a cada ponto de operação.

Além do problema de controle, essa abordagem responde também características que são difíceis de serem generalizadas para problemas não lineares, como controlabilidade, observabilidade, estabilidade e robustez.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho consiste em uma proposta de modelagem de sistemas de controle, portanto, vários pontos necessitam ser considerados em sua análise, assim como outros quesitos podem também surgir ao longo de sua continuidade.

Como sugestões de parâmetros para a continuidade pós trabalho de conclusão de curso tem-se:

- Análise de complexidade, a fim de determinar o custo operacional do algoritmo.
- Especificação de um novo conceito de controlabilidade que aborde a topologia do grafo, definição do espaço de operação e o conceito de controlabilidade.
- Estudar informações implícitas das matrizes de adjacência
- Estudo e definição de critérios de robustez pela dinâmica da região de atração dos pontos de operação
- Pesquisar leis de controle linear utilizando os valores de ação de controle dispostos na matriz de adjacência

7.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por fim, pode-se concluir que os objetivos propostos foram atingidos, uma vez que um sistema de controle descrito em espaço de estados foi representado em grafo, com melhoria considerável no processo de controle não linear, o qual foi o propósito inicial da pesquisa. Além disso, foram aplicadas metodologias de operação em grafo para observar as mudanças no sistema, como também foram extraídas métricas para avaliação de desempenho e análise de controlabilidade, observabilidade e estabilidade.

Referências

- ASSUNÇÃO, E. **Controle digital**. 2013. <<https://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariaeletrica/lpc1672/control-e-digital.pdf>>. Online. Acesso em: 02 dez. 2019. Citado na página 4.
- BAZANELLA, A. S.; SILVA, J. M. G. da. **Curso de Extensão em Ajuste de Controladores PID**. 2000. <<http://www.ece.ufrgs.br/~jmgomes/pid/Apostila/apostila/node11.html/>>. Online. Acesso em: 01 ago. 2021. Citado na página 11.
- BIGGS, N.; LLOYD, E.; WILSON, R. **Graph Theory, 1736-1936**. Clarendon Press, 1986. ISBN 9780198539162. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XqYTk0sXmpoC>>. Citado na página 5.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory With Applications**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 1976. Acesso em: 10 ago. 2021. Citado na página 21.
- BROWNLEE, J. **Basin Hopping Optimization in Python**. 2021. <<https://machinelearningmastery.com/basin-hopping-optimization-in-python/>>. Online. Acesso em: 09 ago. 2021. Citado na página 16.
- CABRAL, E. L. **Notas de aula de Controlabilidade e Observabilidade**. 2016. <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr2400/>>. Online. Acesso em: 05 jul. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.
- CAMACHO, E. F.; BORDON, C. A. **Model Predictive Control**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2007. Acesso em: 10 ago. 2021. Citado na página 21.
- CFTC, C. de Física Teórica e Computacional da Universidade de L. **Retratos de fase**. 2019. <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo2/topico1.php>>. Online. Acesso em: 10 nov. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- CHARTRAND, G.; LESNIAK, L.; ZHANG, P. **Graphs Digraphs**. 6. ed. Rio de Janeiro: Chapman and Hall/CRC, 2015. ISBN 9781498735766. Citado na página 7.
- DIESTEL, R. **Graph Theory**. 5. ed. [S.l.: s.n.], 2016. Acesso em: 15 nov. 2020. Citado na página 8.
- DIEUDONNE, J. **Foundations of Modern Analysis**. Read Books, 2006. (Pure and applied mathematics, v. 1). ISBN 9781406727913. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=hE0mueNxcCYC>>. Citado na página 39.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**. 1. ed. Rio de Janeiro, Brasil: [s.n.], 2001. Acesso em: 15 nov. 2020. Citado na página 13.
- EUZÉBIO, T. A. M. **Sintonia Ótima de Controlador PID Descentralizado para Processos MIMO**. 2015. <<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/xmlui/bitstream/handle/riufcg/3725/THIAGO%20ANTONIO%20MELO%20EUZ%20C9BIO%20-%20TESE%20PPGEE%202015.pdf?sequence=3>>. Online. Acesso em: 09 ago. 2021. Citado na página 14.
- FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos**. [s.n.], 2011. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/>>. Acesso em: 10 out. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 8.

- FLEURY, A. de T.; DONHA, D. C. **Notas de aula de Controle e Aplicações**. 2017. <<http://sites.poli.usp.br/d/PME2472/controlabilidade.pdf>>. Online. Acesso em: 05 jul. 2021. Citado na página 13.
- FRIEDLAND, B. **Control System Design - An introduction to space state method**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1986. 14,15 p. ISBN 0-486-44278-0. Citado na página 9.
- GOMES, H. **PLC – saiba o que é e como utilizá-lo nas indústrias**. 2017. <<https://engprocess.com.br/plc/>>. Online. Acesso em: 26 nov. 2019. Citado na página 4.
- GOODRICH, M. T.; TAMASSIA, R. **Estruturas de Dados e Algoritmos em Java**. 2. ed. Bookman, 2001. ISBN 85-363-0043-4. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XqYTk0sXmpoC>>. Citado na página 6.
- GOODWIN, G. C.; GRAEBE, S. F.; SALGADO, M. E. **Control System Design**. 1. ed. Valparaíso, Chile: [s.n.], 2000. Acesso em: 15 nov. 2020. Citado 3 vezes nas páginas 12, 22 e 23.
- HOLANDA, B. Teoria dos grafos. 2011. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/Nivel_1grafos_bruno.pdf>. Acesso em: 9 out. 2019. Citado na página 5.
- KUMAR, M. et al. Temperature control of fermentation bioreactor for ethanol production using imc-pid controller. **Biotechnology Reports**, v. 22, p. e00319, 2019. ISSN 2215-017X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2215017X19300463>>. Citado na página 4.
- LUENBERGER, D. G. **Introduction to dynamic systems : theory, models, and applications**. 1. ed. Nova Iorque, EUA: [s.n.], 1979. Acesso em: 15 nov. 2020. Citado na página 14.
- MADEIRA, D. **Controlador PI estabilizando sistemas de primeira ordem**. 2016. <<https://www.embarcados.com.br/controlador-pi-primeira-ordem/>>. Online. Acesso em: 26 jul. 2021. Citado na página 13.
- NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. **Grafos: introdução e prática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 8.
- NISE, N. S. **Control Systems Engineering**. 7. ed. California State Polytechnic University, Pomona, Califórnia. EUA: Wiley, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 1, 8, 9, 11, 12, 14, 17 e 21.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 2. ed. Cidade: Pearson, 2011. 1,2,5 p. Citado 3 vezes nas páginas 1, 9 e 10.
- PALHARES, R. M. **Notas de aula de Teoria de Sistemas Lineares**. 2012. <http://www.cpdee.ufmg.br/~palhares/aula15_tsl.pdf>. Online. Acesso em: 05 jul. 2021. Citado na página 12.
- POSTLETHWAITE, B. **Measures of controlled system performance**. 1993. <http://www.online-courses.vissim.us/Strathclyde/measures_of_controlled_system_pe.htm>. Online. Acesso em: 09 ago. 2021. Citado na página 15.
- PRICE, R. M. **Controller Tuning**. 1993. <<http://facstaff.cbu.edu/rprice/lectures/tuning.html>>. Online. Acesso em: 09 ago. 2021. Citado na página 15.
- REIS, F. dos. **O que são Estruturas de Dados**. 2017. <<http://www.bosontreinamentos.com.br/estruturas-de-dados/estruturas-de-dados/>>. Online. Acesso em: 25 nov. 2019. Citado na página 1.

- RIBEIRO, P. **Grafo**. 2012. <<https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Grafo>>. Online. Acesso em: 25 nov. 2019. Citado na página 1.
- SAMPAIO, J. C. V. **Uma introdução a topologia geométrica**. [S.l.]: EdUFSCar, 2008. Citado na página 6.
- SILVA, G. V. M. da. **Controlo não linear**. 1. ed. Lisboa, Portugal: [s.n.], 2006. Acesso em: 01 dez. 2019. Citado na página 4.
- SILVEIRA, P. R. da; SANTOS, W. E. dos. **Automação e controle discreto**. 1. ed. São Paulo: Érica, 1998. 1 p. ISBN 87-7194-591-8. Acesso em: 25 nov. 2019. Citado na página 1.
- SKOGESTAD, S. **Graph Theory**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2006. Acesso em: 10 ago. 2021. Citado na página 15.
- SUNG, S. W.; LEE, I.-B. Limitations and countermeasures of pid controllers. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 35, n. 8, p. 2596–2610, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1021/ie960090+>>. Citado na página 4.
- SZWARCFITE, J. L. **Grafos e algoritmos computacionais**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1986. Citado na página 6.
- TANNURI, E. A. **Apostila sobre PID e Métodos de Sintonia**. 1. ed. São Paulo, Brasil: [s.n.], 2010. Acesso em: 15 nov. 2020. Citado na página 14.

Apêndices

APÊNDICE A – Pseudocódigo do algoritmo de Busca em Largura

Algoritmo 2: Busca em largura

Entrada: vértice v objetivo, grafo original $G(V, A)$ **Saída:** vazio $tamanho\ da\ fila \leftarrow grau$ **repita**| retira v da fila| **para** $w \in adjacentes(v)$ **faça**| | **se** w não está numerado **então**| | | numere w | | | coloque w na fila| | **fim**| **fim****até** $tamanho\ da\ fila > 0$;

APÊNDICE B – Pseudocódigo do algoritmo de Dijkstra

Algoritmo 3: Dijkstra

Entrada: vértice w objetivo, grafo original $G(V, A)$, vértice raiz

Saída: menor caminho a w

para cada vértice v em G **faça**

| distancia da raiz = infinito anterior[v] = não definido

fim

distancia[w] = 0 Q = todos os vértices de G

repita

| u = nó em Q com menor distância da raiz remove u de Q

| **para** cada v em u **faça**

| alt = distancia[u] + distância(u, v)

| **se** alt < distancia[v] **então**

| distancia[v] = alt anterior[v] = u

| **fim**

| **fim**

até Q não está vazio;

retorna anterior[v]

Anexos

ANEXO A – Pseudocódigo do método de representação proposto

Algoritmo 4: Algoritmo do método de representação de processos de controle descritos por espaços de estados em grafo

Entrada: p : Processo de controle em espaço de estados, $gran$: Granularidade do espaço de operação, e : Limites do espaço de operação

Saída: Processo representado em grafo

início

Discretiza o processo p .

Inicializa matriz de adjacência M

Calcula a quantidade n de estados e suas referências no espaço e de acordo com a granularidade $gran$.

para cada par $(S_i, S_j) \in n$ **faça**

$u \leftarrow \min_u (S_j - f(S_i, u))^2$

$a_{i,j} \in M \leftarrow u$

fim

Cria um grafo G a partir da matriz de adjacência M

$S_{obj} \leftarrow$ estado objetivo.

Encontra o caminho ótimo de que minimiza J usando Dijkstra.

fim

ANEXO B – Matriz de adjacências do grafo da Figura 14

0	0	0	0	0	0	6.56	0	0	0	0	0	26.27	0	0	0	0	0	59.12	0	0	0	0	0	105.10
0	0.003	0	0	0	0	0	6.89	0	0	0	0	0	26.92	0	0	0	0	0	60.08	0	0	0	0	0
0	0	0.015	0	0	0	0	0	7.22	0	0	0	0	0	27.57	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.035	0	0	0	0	0	7.56	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.062	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.003	0	0	0	0	0	6.89	0	0	0	0	0	26.92	0	0	0	0	0	60.08	0
5.94	0	0	0	0	0	0.015	0	0	0	0	0	7.22	0	0	0	0	0	27.57	0	0	0	0	0	61.05
0	5.64	0	0	0	0	0	0.035	0	0	0	0	0	7.56	0	0	0	0	0	28.23	0	0	0	0	0
0	0	5.35	0	0	0	0	0	0.062	0	0	0	0	0	7.91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	5.06	0	0	0	0	0	0.097	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.015	0	0	0	0	0	7.22	0	0	0	0	0	27.57	0	0
0	0	0	0	0	5.64	0	0	0	0	0	0.035	0	0	0	0	0	7.56	0	0	0	0	0	28.23	0
23.77	0	0	0	0	0	5.35	0	0	0	0	0	0.062	0	0	0	0	0	7.91	0	0	0	0	0	28.90
0	23.17	0	0	0	0	0	5.06	0	0	0	0	0	0.097	0	0	0	0	0	8.26	0	0	0	0	0
0	0	22.57	0	0	0	0	0	4.78	0	0	0	0	0	0.140	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.035	0	0	0	0	0	7.56	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.35	0	0	0	0	0	0.062	0	0	0	0	0	7.91	0	0
0	0	0	0	0	23.17	0	0	0	0	0	5.06	0	0	0	0	0	0.097	0	0	0	0	0	8.26	0
53.49	0	0	0	0	0	22.57	0	0	0	0	0	4.78	0	0	0	0	0	0.140	0	0	0	0	0	8.63
0	52.58	0	0	0	0	0	21.98	0	0	0	0	0	4.51	0	0	0	0	0	0.191	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.062	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5.06	0	0	0	0	0	0.097	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22.57	0	0	0	0	0	4.78	0	0	0	0	0	0.140	0	0
0	0	0	0	0	52.58	0	0	0	0	0	21.98	0	0	0	0	0	4.51	0	0	0	0	0	0.191	0
95.10	0	0	0	0	0	51.68	0	0	0	0	0	21.40	0	0	0	0	0	4.25	0	0	0	0	0	0.249

ANEXO C – Matriz de adjacências do grafo da Figura 19

0	0	0	0	0	0	1.8475	0	0	0	0	0	2.940	0	0	0	0	0	3.863	0	0	0	0	0	4.693
0	0.062	0	0	0	0	0	1.862	0	0	0	0	0	2.958	0	0	0	0	0	3.884	0	0	0	0	0
0	0	0.154	0	0	0	0	0	1.891	0	0	0	0	0	2.987	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.263	0	0	0	0	0	1.935	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.383	0	0	0	0	1.340	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.062	0	0	0	0	0	1.862	0	0	0	0	0	2.958	0	0	0	0	0	3.884	0
1.836	0	0	0	0	0	0.099	0	0	0	0	0	1.877	0	0	0	0	0	2.976	0	0	0	0	0	3.906
0	1.821	0	0	0	0	0	0.181	0	0	0	0	0	1.907	0	0	0	0	0	3.006	0	0	0	0	0
0	0	1.791	0	0	0	0	0	0.286	0	0	0	0	0	1.951	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1.747	0	0	0	0	0	0.404	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.154	0	0	0	0	0	1.891	0	0	0	0	0	2.987	0	0
0	0	0	0	0	1.821	0	0	0	0	0	0.181	0	0	0	0	0	1.907	0	0	0	0	0	3.006	0
2.907	0	0	0	0	0	1.806	0	0	0	0	0	0.250	0	0	0	0	0	1.938	0	0	0	0	0	3.037
0	2.889	0	0	0	0	0	1.775	0	0	0	0	0	0.344	0	0	0	0	0	1.982	0	0	0	0	0
0	0	2.860	0	0	0	0	0	1.730	0	0	0	0	0	0.456	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.263	0	0	0	0	0	1.935	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.791	0	0	0	0	0	0.286	0	0	0	0	0	1.951	0	0
0	0	0	0	0	2.889	0	0	0	0	0	1.775	0	0	0	0	0	0.344	0	0	0	0	0	1.982	0
3.799	0	0	0	0	0	2.871	0	0	0	0	0	1.743	0	0	0	0	0	0.429	0	0	0	0	0	2.0275
0	3.778	0	0	0	0	0	2.841	0	0	0	0	0	1.696	0	0	0	0	0	0.533	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.383	1.340	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.747	0	0	0	0	0	0.404	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.860	0	0	0	0	0	1.730	0	0	0	0	0	0.456	0	0
0	0	0	0	0	3.778	0	0	0	0	0	2.841	0	0	0	0	0	1.696	0	0	0	0	0	0.533	0
4.590	0	0	0	0	0	3.757	0	0	0	0	0	2.810	0	0	0	0	0	1.648	0	0	0	0	0	0.629