UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUCIANO TAVARES CAMARA

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SE TRABALHAR DE FORMA REMOTA

DISSERTAÇÃO

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

LUCIANO TAVARES CAMARA

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SE TRABALHAR DE FORMA REMOTA

Proofs in geometry in high school: a proposal for activities to work remotely

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).
Orientador: Anderson Paião dos Santos.

CORNÉLIO PROCÓPIO

2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Câmpus Cornélio Procópio

LUCIANO TAVARES CAMARA

DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SE TRABALHAR DE FORMA REMOTA

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Profissional Em Matemática Para A Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 04 de Fevereiro de 2021

Prof Anderson Paiao Dos Santos, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof Anderson Da Silva Vieira, Doutorado - Faculdade de Tecnologia de Carapicuiba (Fatec)

Prof.a Debora Aparecida Francisco Albanez, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dedico esse trabalho a minha filha Lavínia de Carvalho Tavares Camara.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida;

Ao meu orientador Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos, pela sabedoria com que me guiou nesta trajetória, pela compreensão em momentos de dificuldade e apoio na elaboração desse trabalho;

À minha família que sempre esteve ao meu lado me apoiando, em especial aos meus pais, Osmar Tavares Camara e Neuza Conceição Tavares Camara;

Às pessoas que me ajudaram quando solicitadas;

Aos meus amigos Paulo Cesar Zebediff de Almeida e Thiago Braga Ferreira que sempre estiveram ao meu lado nessa jornada;

À CAPES pelo apoio financeiro e pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior.

RESUMO

CAMARA. DEMONSTRAÇÕES EM GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SE TRABALHAR DE FORMA REMOTA. 97 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

As demonstrações em matemática desenvolvem no educando a capacidade de argumentar, questionar, levantar hipóteses e resolver problemas. Os benefícios alcançados ao se trabalhar com demonstrações vão muito além da aquisição de conhecimentos matemáticos. Essas habilidades, uma vez adquiridas, são levadas por toda a vida, propiciando a formação de um cidadão crítico que saiba se posicionar perante a sociedade. Diante disso, este trabalho tem como objetivo propor atividades que exercitem o senso dedutivo do aluno e desperte nele a curiosidade pelo saber matemático culminando em demonstrações de alguns teoremas importantes da geometria. Tais atividades foram pensadas para que o professor possa desenvolvê-las de forma remota com alunos do ensino médio.

Palavras-chave: Lógica. Demonstração. Geometria Plana. Ensino remoto.

ABSTRACT

CAMARA. PROOFS IN GEOMETRY IN HIGH SCHOOL: A PROPOSAL FOR ACTIVITIES TO WORK REMOTELY. 97 f. Dissertação – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

Mathematical proofs develop in students the ability to argue, question, raise hypotheses and solve problems. The benefits achieved when working with proofs go far beyond the acquisition of mathematical knowledge. These skills, once acquired, are carried throughout life, providing the formation of critical citizens who knows how to position themselves before society. Therefore, this work aims to propose activities that exercise the students deductive sense and arouse in them the curiosity for mathematical knowledge culminating in proofs of some important theorems of geometry. Such activities were designed the teacher can develop them remotely with high school students.

Keywords: Logic. Proof. Plane Geometry. Remote teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do raciocínio lógico contribui para a formação dos alunos, desenvolvendo nos mesmos a capacidade de investigar, argumentar, levantar hipóteses e resolver diversos problemas, não apenas matemáticos, mas de toda sua vida. A matemática proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico. Uma maneira de exercitar tal habilidade é o trabalho com demonstrações para desenvolver nos alunos os sensos dedutivo e argumentativo.

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1997, p. 26)

As demonstrações em matemática ajudam a formar um cidadão crítico. No entanto, a metodologia do uso das demonstrações no ensino médio é pouco explorada. Muitas vezes o professor apresenta fórmulas de maneira mecânica, não incentivando a utilização senso dedutivo. Isso faz com que o ensino da matemática se torne falho e os reflexos dessa metodologia estão nos resultados das diversas avaliações realizadas no Brasil, como por exemplo, ENEM e SARESP.

Segundo (JÚNIOR; NASSER, 2012, p. 15),

> [...] a grande maioria de nossos alunos não sabe justificar afirmações simples, o que pode refletir negativamente na construção de sua cidadania. A Escola não está formando cidadãos críticos, que saibam quando concordar ou discordar de situações, elaborar e expor argumentos e justificativas que validem seu ponto de vista. Acreditamos que a Matemática é a disciplina escolar que possibilita este trabalho de argumentação e justificação.

Observando o ensino da matemática no decorrer do tempo, notamos que a utilização de demonstrações matemáticas não é recorrente, e que a prática de ensino está voltada somente para a resolução de problemas, que não exigem um raciocínio mais elaborado.

Diante dessas constatações, deduz-se que há a necessidade de uma adequação no ensino de matemática, de forma que ajude o aluno a aprender significativamente por meio de atividades dedutivas que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio lógico, despertando seu interesse pelas demonstrações, como sugere uma das competências da BNCC.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2017, p. 531)

Toda mudança de metodologia não é fácil e torna-se ainda mais difícil quando nos deparamos com algo que jamais poderíamos prever. O ano de 2020 foi totalmente atípico, devido à pandemia de COVID-19. De repente, todos o profissionais da educação se viram perdidos e com a imediata necessidade de se reinventar. Esse momento angustiante desencadeou uma série de fragilidades no nosso sistema de ensino, dentre as quais podemos citar a dificuldade em trabalhar matemática de forma remota.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo geral, trabalhar alguns resultados de geometria plana no ensino médio, propondo atividades dedutivas que desenvolvam o raciocínio lógico do aluno, despertando nele o interesse pelas demonstrações. As atividades, aqui sugeridas, foram elaboradas para a modalidade de ensino remoto e contextualizadas com o cotidiano da comunidade escolar. Além dos seguintes objetivos específicos:

- Refletir sobre a utilização das demonstrações como uma abordagem metodológica de ensino na matemática;
- Levar o aluno a compreender que a matemática não se resume à resolução de exercícios;
- Refletir sobre a importância do desenvolvimento do raciocínio lógico nos alunos;
- Sugerir atividades dedutivas que possam ser aplicadas de forma remota.

Para tal propósito, o presente trabalho está organizado conforme segue:

No Capítulo 2, faremos algumas considerações históricas da geometria, falando um pouco sobre a geometria no Egito e Mesopotâmia e posteriormente na Grécia, onde nasce a geometria dedutiva. Faremos também algumas considerações sobre história da lógica, falando sobre seu surgimento, Aristóteles e os três períodos em que está dividida.

No Capítulo 3, falaremos sobre a lógica das demonstrações e trabalharemos algumas técnicas, como demonstração direta, demonstração por contraposição e demonstração por contradição. Ainda neste capítulo abordaremos importantes conceitos de geometria plana, como congruência e semelhança de triângulos, relações métricas do triângulo retângulo, os Teoremas de Tales e Pitágoras, círculo e circunferência. Os conteúdos apresentados neste capítulo nortearão as atividades propostas neste trabalho.

No Capítulo 4, sugerimos algumas aplicações de atividades que incentivam a utilização dos sensos dedutivo e investigativo, envolvendo alguns teoremas importantes, como por exemplo, os Teoremas de Tales e Pitágoras.

Finalizamos com o Capítulo 5, onde fazemos as considerações finais relacionadas ao trabalho.

No Apêndice A, traremos algumas imagens de possíveis soluções para alguns problemas apresentados nas atividades.

2 CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS DA GEOMETRIA E DA LÓGICA

2.1 GEOMETRIA.

A palavra geometria tem origem do grego, onde *geo* significa terra e *metria* significa medida, então temos geometria como medida da terra.

No Egito, as margens do rio Nilo, haviam muitas propriedades e seus donos pagavam impostos sobre o que nelas produziam. No período de inundação do rio, a quantidade de terra para o plantio diminuía e se faziam necessárias novas medições para recalcular os impostos a serem cobrados. Foi a partir dessas necessidades, segundo o historiador matemático Heródoto (485 - 425 a. C.), que surgiu a geometria.

> Eles diziam que este rei [Sesóstris] dividia a terra entre os egípcios de modo a dar a cada um deles um lote quadrado de igual tamanho e impondo-lhes o pagamento de um tributo anual. Mas qualquer homem despojado pelo rio de uma parte de sua terra teria de ir a Sesótris e notificar-lhe o ocorrido. Ele então mandava homens seus observarem e medirem quanto a terra se tornava menor, para que o proprietário pudesse pagar sobre o que restara, proporcionalmente ao tributo total. (EVES, 1992, p. 3).

O advogado escocês Alexander Henry Rhind (1833 - 1863), em uma viagem ao Egito, adquiriu um papiro que, mais tarde, fora traduzido por Ahmes e ficou conhecido como Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes. O Papiro de Rhind é a maior evidência do surgimento da geometria no Egito. Nesse papiro há 84 problemas, dos quais, 20 são dedicados à geometria, mais especificamente, às medições, cálculos de áreas, volume e também cálculos voltados às construções das pirâmides.

Em outra nação muito antiga, a Mesopotâmia, a geometria era aplicada em situações práticas como medir terras e calcular áreas e volumes, por exemplo. O povo mesopotâmico também dominava conceitos relativos à circunferência, pois construíam rodas que usavam para o trabalho e ainda relacionaram o comprimento da circunferência com o seu diâmetro, o equivalente à razão π que usamos atualmente.

A história da geometria é antiga, ampla e diversificada, pois há mais ou menos três mil anos, desde as construções das pirâmides no Egito e templos na Mesopotâmia, foram utilizados noções e conhecimentos geométricos, e consequentemente foram surgindo os primeiros estudos da geometria. Porém, anteriormente, de acordo com (BOYER, 2009), os desenhos e figuras do homem neolítico também sugerem um interesse que abriu caminho para a geometria, pois nos trabalhos artísticos artesanais como na fabricação de potes, vasos, cestos, tecelagem e fabricação de metais seria possível reconhecer simetrias e congruências.

A geometria do Egito e da Mesopotâmia era apenas uma ferramenta para o trabalho. Não havia deduções, provas, nada que pudesse generalizar os conhecimentos praticados nas duas civilizações. Embora existam muitos registros desses conhecimentos geométricos, o que eles praticavam era muito diferente da matemática atual. A matemática de fato, surge na Grécia como uma ciência dedutiva onde todos conhecimentos são fundamentados e provados.

Segundo (EVES, 1992), as mudanças políticas e econômicas ocorridas nos últimos séculos do segundo milênio a.C. no antigo Egito, diminuíram o poder dessas nações, passando os desenvolvimentos posteriores da geometria para os gregos. Nessa transição, a geometria chega à Grécia com outro olhar e não apenas como ferramenta.

Na Grécia o primeiro grande nome da geometria foi Tales (640 - 545 a.C.) que viveu em Mileto. Tales teria ido até o Egito e levado a geometria para a Grécia. Segundo o filósofo Proclus (420 - 485) no livro "Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides", Tales seria o responsável pela criação da geometria demonstrativa.

> [...] a Matemática pôde alcançar gosto e interesse entre homens com imaginação e conhecimento científico, dentre eles, o destaque é para Tales, considerado um dos sete sábios da Grécia Arcaica, nascido em Mileto. (EVES, 2004, p. 94).

Muitas foram as contribuições de Tales à matemática, porém, a mais conhecida é o teorema que leva seu nome, o Teorema de Tales. Segundo (EVES, 2004), uma origem ou motivação para o Teorema de Tales foi o cálculo utilizado para a medição da altura da pirâmide de Quéops. Considerada a sétima maravilha do mundo, a pirâmide ainda se encontra em bom estado de conservação.

> A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, principalmente na arquitetura e agrimensura. Por isso, conjectura-se que a primeira sistematização da geometria pode ter sido em torno da questão da proporcionalidade de segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e outro de retas transversais. Essa questão durante muitos séculos foi denominada de Teorema dos segmentos proporcionais. No final do século XIX, na França, alguns autores denominaram esse resultado de Teorema de Tales, denominação que persiste até hoje. (BONGIOVANNI, 2007, p. 94 - 106)

Quando falamos em geometria, mais especificamente em triângulos retângulos o primeiro nome que nos vem à mente é o de Pitágoras, que foi um grande matemático e filósofo pré-socrático da Grécia Antiga. Estudou matemática, astronomia, música, literatura e filosofia.

Segundo (EVES, 2004) Pitágoras (572 - 496 a.C.) nasceu em Samos, viveu por um tempo no Egito e após ser perseguido por conta de suas ideias revolucionárias, mudou-se para Crotona, onde posteriormente fundou uma escola de caráter místico-filosófico conhecida como "Escola Pitagórica". A mais famosa contribuição de Pitágoras para a matemática foi a demonstração do teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo e que leva seu nome: O Teorema de Pitágoras.

Encerraremos esta seção falando um pouco sobre Euclides de Alexandria (323 - 283 a.C.). Euclides destacou-se como um importante geômetra e talvez tenha sido o mais importante matemático da Grécia Antiga. Escreveu a obra "Os elementos", divididos em 13 livros, nos quais os seis primeiros falam sobre geometria plana elementar, quatro são relacionados à aritmética e os três últimos tratam da geometria no espaço. No Brasil existe uma versão dessa importante obra de Euclides traduzida pelo professor Dr. Irineu Bicudo e publicada pela editora da Universidade Estadual Paulista - UNESP no ano de 2009.

> Os Elementos consistem de treze Livros, como são chamados, e a simples tradução do texto, sem comentários, formaria um grande volume impresso. Nestes treze livros, Euclides incorpora todo o conhecimento matemático acumulado em sua época, com algumas exceções notáveis, como as seções cônicas e a geometria esférica, e possivelmente algumas descobertas próprias. Seu grande feito é a apresentação do material sob uma bela forma sistemática e seu tratamento dele como de um todo orgânico. (AABOE, 1984, p. 52).

Em "Os elementos", Euclides primeiramente faz algumas definições, enuncia seus cinco postulados e descreve algumas noções comuns. Os postulados de Euclides tiveram grande importância para o desenvolvimento de sua obra.

São os famosos postulados de Euclides:

> 1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
> 2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
> 3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
> 4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
> 5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.
>
> (BICUDO, 2009, p. 98)

O quinto postulado de Euclides foi objeto de estudo de muitos matemáticos e a partir desse postulado surgiram outras geometrias conhecidas como geometrias não euclidianas.

Embasado em seus postulados, que mais tarde seriam conhecidos como axiomas, Euclides demonstrou inúmeros teoremas.

"Os elementos", de Euclides, adota uma linguagem muito rigorosa, semelhante à linguagem adotada na atualidade. Segundo (BICUDO, 2009) todos os teoremas demonstrados por Euclides são desenvolvidos em seis partes, são elas:

1. Enunciado;
2. Exposição (O que se sabe);
3. Distinção (Condições para a solução);
4. Construção (Descrever a construção);
5. Demonstração;
6. Conclusão.

Essa estrutura utilizada por Euclides nas demonstrações é muito semelhante a que utilizamos atualmente.

Para Euclides aplicar uma fórmula matemática não era suficiente, seria necessário verificar a validade da mesma, ou seja, teria que demonstrá-la. Podemos concluir que a história da geometria se divide em duas partes: antes e após Euclides. A geometria dedutiva de Euclides disseminou-se para outras áreas da matemática e seus axiomas (postulados) serviram de ponto de partida para outros grandes nomes da geometria e da matemática como um todo. Devido as suas grandes contribuições e a revolução que provocou na geometria, Euclides passou a ser considerado o pai da geometria.

2.2 LÓGICA

A lógica é a ciência do raciocínio dedutivo que estuda, entre outros temas, a razão e o raciocínio. Faremos nesta seção, um breve relato sobre a evolução histórica da lógica, dando ênfase à lógica clássica proposicional.

Com sua origem na antiguidade, o primeiro nome que relacionamos quando falamos de lógica é o de Aristóteles. Considerado o pai da lógica clássica, Aristóteles foi o primeiro filósofo que escreveu de forma sistemática sobre a lógica, que na época se chamava *Analytica*. Ele propôs uma sistematização para classificar as proposições como verdadeiro ou falso e argumentos como válido ou inválido.

> Para Aristóteles, a Lógica deveria fornecer os instrumentos mentais necessários para enfatizar qualquer tipo de investigação. Mais ainda, deveria explicar o método pelo qual, partindo de uma determinada conclusão, resolve-se precisamente nos elementos dos quais deriva, ou seja, nas premissas e nos elementos de que brota, e assim fica fundamentada e justificada. (CHAGAS, 2004, p. 116)

Para Aristóteles a lógica era considerada um método do discurso demonstrativo, norteada por três operações: o conceito, o juízo e o raciocínio. Sendo que, *conceito* seria a representação mental dos objetos. *Juízo*, o ato de afirmar ou negar uma ideia em relação a outra. *Raciocínio* seria o processo onde se articula vários juízos. Diante disso, Aristóteles criou a Teoria dos Silogismos, que em outras palavras significa, argumentação constituída por proposições das quais se extrai uma conclusão. Norteada por axiomas, a teoria dos silogismos é considerada um dos primeiros sistemas dedutivos propostos.

A história da lógica é dividida em três períodos, o Período Grego Aristotélico que acabamos ver acima, o Período Booleano e o Período contemporâneo.

O Período Booleano ocorreu de 1840 a 1910, no qual os estudos floresceram bastante com George Boole (1815-1864) e Augustus de Morgan (1806-1871), que desenvolveram um estudo chamado de Álgebra da lógica. Principal responsável por esse período, Boole foi o criador da Álgebra Booleana, fundamental para a evolução tecnológica e muito estudada nos cursos de computação.

O Período Contemporâneo, ocorre a partir de 1910 até os dias atuais. Nesse período a lógica passa para uma perspectiva linguístico-formal, como é a lógica estudada atualmente. E assim, desde o início, os estudos sobre a lógica tem evoluído muito e aumentado a sua área de aplicação, presente não só na matemática, mas em outras áreas como a Engenharia, Física e muitas outras.

Na matemática, o ato de demonstrar significa fazer uso de uma "sequência de argumentos lógicos que partem de fatos conhecidos e provam que outro fato é verdadeiro". (IMENES; LELLIS, 1988).

As demonstrações e provas matemáticas estão fundamentadas na lógica, por isso o desenvolvimento do raciocínio lógico torna-se uma importante metodologia para o processo de ensino-aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática.

Logo,

> “[...] a lógica é a disciplina que trata das formas de pensamento, da linguagem descritiva do pensamento, das leis de argumentação e raciocínios corretos, dos métodos e dos princípios que regem o pensamento humano”(KELLER; BASTOS, 2000, p. 15)

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA LÓGICA DAS DEMONSTRAÇÕES E GEOMETRIA

Neste capítulo iremos apresentar conceitos básicos de lógica que facilitarão o entendimento das demonstrações que faremos mais adiante, assim como os conceitos de geometria plana que também estão presentes no referido capítulo. Todos os conceitos aqui apresentados estão embasados nas seguintes referências: (HUNTER, 2011), (DOLCE; POMPEO, 1995), (BARBOSA, 1985) (NETO; CAMINHA, 2013).

Em todo este trabalho adotaremos as seguintes notações:

AB: segmento de reta determinados pelos pontos A e B;

$\overline{AB}$: comprimento do segmento AB;

$\overrightarrow{AB}$: semirreta de origem em A contendo B;

$\overleftrightarrow{AB}$: reta determinada pelos ponto A e B;

$\widehat{A}$: ângulo (medida do ângulo) de vértice A;

$A\widehat{B}C$: ângulo (medida do ângulo) determinado pelas semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$;

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$: comprimento do arco AB.

Na seção a seguir faremos uma introdução à lógica das demonstrações. As noções de lógica desenvolvem os sensos crítico e argumentativo fazendo com que a matemática seja cada vez mais significativa para os alunos. Trabalharemos com proposições nas quais aplicaremos técnicas de demonstrações propiciando ao aluno um aprendizado mais amplo e significativo. O conteúdo aqui apresentado tem como base (HUNTER, 2011).

3.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DA LÓGICA DAS DEMONSTRAÇÕES

Para iniciarmos essa seção, precisamos estar familiarizados com alguns conceitos que serão muito importantes para o desenvolvimento de nossos estudos sobre a lógica das demonstrações. Vejamos abaixo:

Axiomas: sentenças aceitas como verdadeiras que dispensam demonstrações.

Exemplo 3.1. *Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.*

Teoremas, proposições e lemas: sentenças que são demonstradas através de argumentações lógico-dedutivas embasadas nos axiomas e em outros teoremas demonstrados anteriormente.

Para que possamos realizar uma demonstração o primeiro passo é saber diferenciar a hipótese da tese.

Hipótese: é a informação aceita como verdade, dada pelo enunciado que será o ponto de partida da demonstração.

Tese: é o que queremos provar.

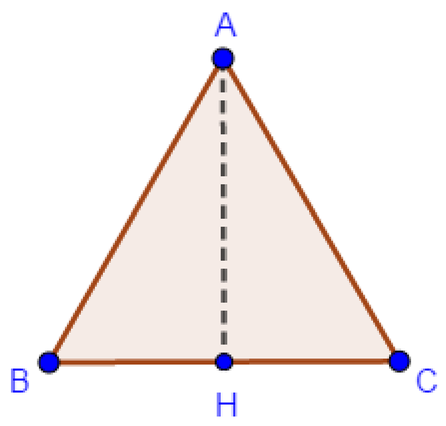
A demonstrações que estudaremos são representadas por

$$P \longrightarrow Q, \quad \text{(lê-se: } P \text{ implica } Q\text{)}$$

onde P é a hipótese e Q é a tese.

Exemplo 3.2. *Determine a hipótese e a tese do seguinte resultado: Prove que em um triângulo equilátero ABC a altura também é bissetriz.*

Figura 1: Altura AH**.**



Fonte: o autor.

Hipóteses (P): ABC é equilátero e AH é altura.

Tese (Q): AH é bissetriz.

Existem várias técnicas de demonstrações, a seguir veremos algumas delas.

3.1.1 DEMOSTRAÇÕES DIRETAS

Definição 3.3. *A demonstração realizada com sucessivas implicações e redigida em forma de parágrafo é chamada de demonstração direta.*

Para a apresentação do próximo exemplo, considere a situação descrita abaixo.

Suponhamos uma geometria "finita" determinada por apenas quatro pontos. Os pontos e retas dessa geometria satisfazem o sistema axiomático abaixo.

Sistema axiomático para uma geometria de quatro pontos:

1. Para todo par de pontos distintos X e Y, existe uma única reta l tal que X está em l e Y está em l.
2. Dados uma reta l e um ponto X que não está em l, existe uma única reta m tal que X está em m e nenhum ponto que está em l está também em m.
3. Existem exatamente quatro pontos.
4. É impossível que três pontos estejam na mesma reta.

Exemplo 3.4. *Demonstre que no sistema axiomático acima, existem pelo menos duas retas distintas.*

Demonstração. Pelo Axioma 3, existem pontos distintos X, Y e Z. Pelo Axioma 1 existem uma reta l_1 passando por X e Y e uma reta l_2 passando por Y e Z. Pelo Axioma 4, X, Y e Z não estão na mesma reta, portanto l_1 e l_2 devem ser retas distintas. □

3.1.2 DEMONSTRAÇÃO POR CONTRAPOSIÇÃO

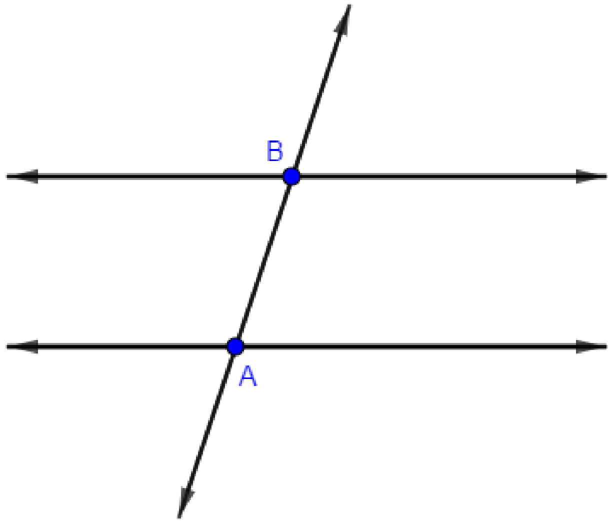
Em muitas situações encontramos dificuldades para realizarmos demonstrações de forma direta, então podemos recorrer a outro método muito prático que é a demonstração por contraposição. Esse método é válido, pois a contrapositiva de uma sentença é equivalente a ela mesma, ou seja, $P \longrightarrow Q \Longleftrightarrow \sim Q \longrightarrow \sim P$.

Definição 3.5. *Chamamos de demonstração por contraposição, o método que consiste em provar que a negação da tese implica na negação da hipótese ($\sim Q \longrightarrow \sim P$).*

Vejamos como exemplo a seguinte proposição:

Proposição 3.6. *Se duas retas são cortadas por uma transversal tal que um par de ângulos internos é suplementar, então as retas são paralelas.*

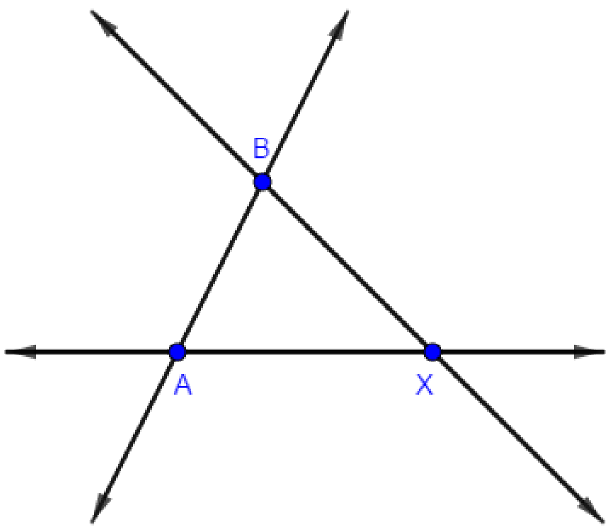
Figura 2: Retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: o autor.

Demonstração. Suponhamos que nos são dadas duas retas cortadas por uma transversal, como mostrado anteriormente, e que as retas não sejam paralelas. Então, pela definição de retas paralelas, as retas se cruzam. Sem perda de generalidade, suponha que elas se cruzem do lado direito em um ponto X. (Se elas se cruzam do lado esquerdo, o mesmo argumento irá funcionar.)

Figura 3: Retas coincidentes.



Fonte: o autor

Como a soma dos ângulos internos de XAB é $180°$, uma vez que $\widehat{X}$ tem a medida maior que 0, a soma das medidas de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ deve ser menor que 180°, e assim $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ não poderiam ser suplementares, contrariando a hipótese da proposição. □

A contraposição não é uma nova técnica radical de demonstração; a demonstração de uma sentença por contraposição é apenas uma demonstração direta da contrapositiva da sentença.

3.1.3 DEMONSTRAÇÃO POR CONTRADIÇÃO

Os métodos de demonstrações direta e por contraposição são muito práticos e eficientes, porém, nem sempre são suficientes. Por isso, apresentamos ao leitor mais um método de demonstração, a demonstração por contradição.

Definição 3.7. *Chamamos de demonstração por contradição, o método que consiste na negação da tese e que após algumas argumentações, culmina em alguma sentença obviamente falsa.*

Exemplo 3.8. *Demonstre que um triângulo não pode ter mais que um ângulo obtuso.*

Demonstração. Suponhamos que num triângulo ABC, $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são ambos obtusos. Sabemos que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180°$. Como $\widehat{A}>90°$ e $\widehat{B}>90°$, logo $\widehat{C}<0$, o que é um contradição, pois a medida de um ângulo não pode assumir valor negativo. □

3.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS DE GEOMETRIA

Nesta seção, apresentaremos um breve estudo teórico de alguns tópicos da geometria plana, tais como congruência e semelhança de triângulos, paralelismo entre outros. Caso o leitor tenha o interesse em se aprofundar ou até mesmo ter contato com os conceitos básicos da geometria plana, sugerimos a consulta às referencias: (BARBOSA, 1985) e (NETO; CAMINHA, 2013), que serviram como base para a escrita desta seção.

Antes de iniciarmos a próxima subseção, falaremos um pouco sobre polígonos.

Definição 3.9. *Seja A_1, $A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de pontos distintos com $n \geq 3$, onde três pontos consecutivos desta sequência não sejam colineares, chamamos de **polígono** a reunião dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1.*

Consideremos então o polígono A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 onde:

- A_1, A_2, $\ldots$, A_n são os **vértices** do polígono;

- $A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1$ são os **lados**;
- $\widehat{A_1} = A_n\widehat{A_1}A_2,\ \widehat{A_2} = A_1\widehat{A_2}A_3,\ \ldots,\ \widehat{A_n} = A_{n-1}\widehat{A_n}A_1$ são os **ângulos internos** do polígono.

As nomenclaturas dos polígonos são definidas pelo número de lados. Dizemos que um polígono $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é um n-ágono quando possui n lados. Dessa maneira temos:

número de lados	nomenclatura do polígono
3	triângulo
5	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono

Um dos polígonos mais estudados no ensino básico é o triângulo. Os triângulos podem ser classificados segundo as medidas de seus lados, como segue a definição abaixo.

Definição 3.10. *Uma triângulo é denominado:*

a. ***isósceles*** *quando possuir dois lados congruentes. Estes lados recebem o nome de laterais e o terceiro lado recebe o nome de base.*

b. ***equilátero*** *quando possuir todos os lados congruentes.*

c. ***escaleno*** *quando possuir todos os lados com medidas distintas.*

3.2.1 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Definição 3.11. *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, dizemos que eles são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Desta maneira, caso a correspondência

$$A \longleftrightarrow A';\ \ B \longleftrightarrow B';\ \ C \longleftrightarrow C'$$

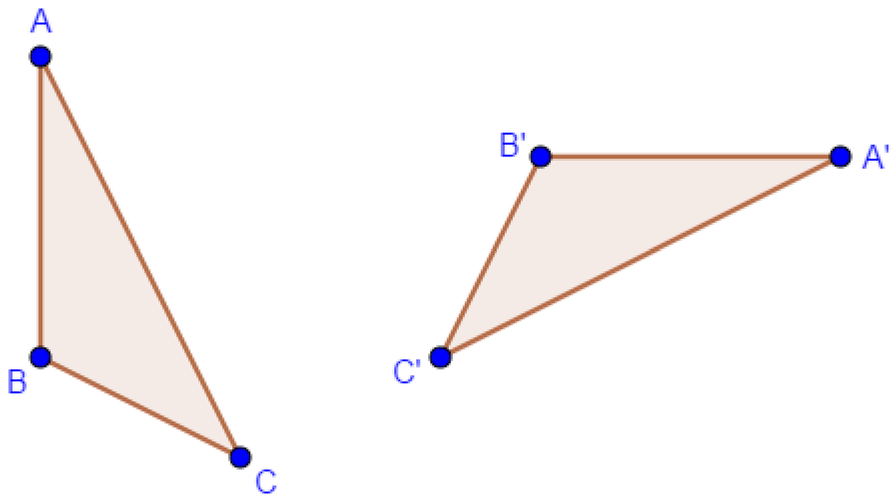
leve às igualdades

$$\widehat{A} = \widehat{A'},\ \widehat{B} = \widehat{B'},\ \widehat{C} = \widehat{C'} \text{ e}$$

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C',$$

escrevemos que $ABC \equiv A'B'C'$ para indicar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes.

Figura 4: Triângulos congruentes.



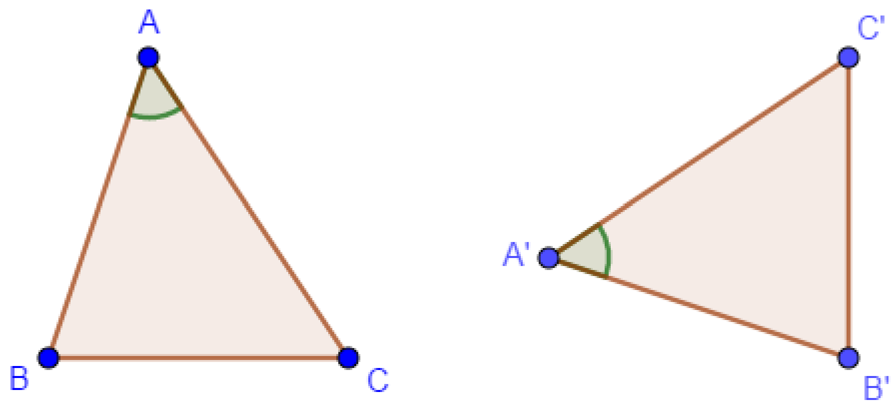
Fonte: o autor.

Existem critérios para concluir se dois triângulos dados são congruentes. Esses critérios são chamados de **casos de congruência de triângulos**.

O primeiro caso que apresentaremos na sequência é conhecido como LAL (lado-ângulo-lado), e será apresentado como axioma e os demais serão provados.

Axioma 3.12 (1º Caso de congruência)**.** *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$, então $ABC \equiv A'B'C'$.*

Figura 5: O caso de congruência LAL.



Fonte: o autor.

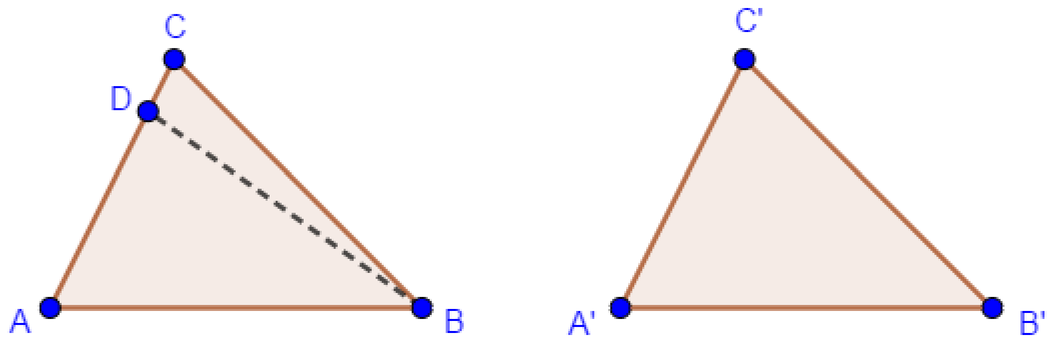
Consequentemente, pelo axioma anterior, teremos que: $BC = B'C'$, $A\widehat{B}C = A'\widehat{B'}C'$, $A\widehat{C}B = A'\widehat{C'}B'$.

O próximo caso de congruência que apresentaremos é conhecido por ALA (ângulo-lado-ângulo)

Proposição 3.13 (2º Caso de congruência)**.** *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$, então $ABC = A'B'C'$.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $AB = A'B'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Seja D um pondo da semirreta $\overrightarrow{AC}$ tal que $AD = A'C'$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que D esteja entre A e C.

Figura 6: 2º caso de congruência ALA.



Fonte: o autor.

Considere o triângulo ABD e o compare com o triângulo $A'B'C'$. Como $AD = A'C'$, $AB = A'B'$ e $\widehat{A} = \widehat{A'}$, concluímos pelo axioma anterior que $ABD \equiv A'B'C'$. Consequentemente, temos que $A\widehat{B}D = \widehat{B'}$. Mas, por hipótese, $\widehat{B'} = A\widehat{B}C$. Logo $A\widehat{B}D = A\widehat{B}C$. Assim, as semirretas

$\overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BC}$ coincidem. Mas então o ponto D coincide com o ponto C e portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como já provamos que $ABD \equiv A'B'C'$, então $ABC \equiv A'B'C'$. $\square$

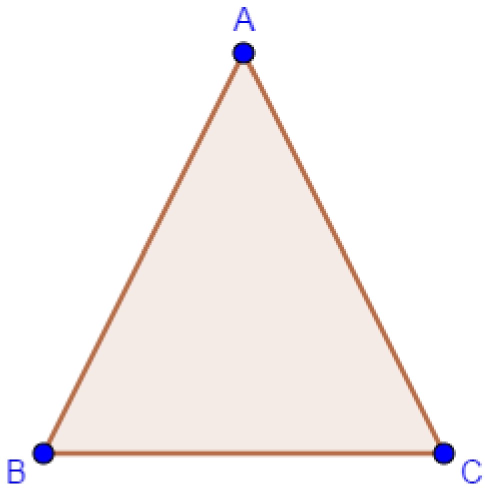
A seguir, veremos algumas aplicações importantes dos dois primeiros casos de congruência vistos anteriormente.

Proposição 3.14. *Em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $AB = AC$. Vamos provar que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Para isso compare o triângulo ABC com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$A \longleftrightarrow A, \;\; B \longleftrightarrow C \;\text{ e }\; C \longleftrightarrow B.$$

Figura 7: Triângulo *ABC* isósceles.



Fonte: o autor.

Por hipótese, $AB = AC$ e $AC = AB$. Como $\widehat{A} = \widehat{A}$, segue do Axioma 3.12, que esta correspondência garante que $ABC \equiv ACB$. Como consequência temos que $\widehat{B} = \widehat{C}$. $\square$

Corolário 3.15. *Em um triângulo equilátero todos os ângulos (internos) são congruentes.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo equilátero e suponhamos que $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ sejam ângulos da base, ou seja, $\widehat{B} = \widehat{C}$. A proposição 3.14 garante que $ABC \equiv ACB$. Agora vamos supor que $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ seja os ângulos da base, ou seja, $\widehat{A} = \widehat{C}$. Também pela mesma proposição temos que $BAC \equiv ACB$. Como $ABC \equiv ACB$ e $BAC \equiv ACB$, logo, $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$. $\square$

A seguir, apresentamos a recíproca da Proposição 3.14.

Proposição 3.16. *Se em um triângulo dois de seus ângulos são congruentes, então ele é isósceles.*

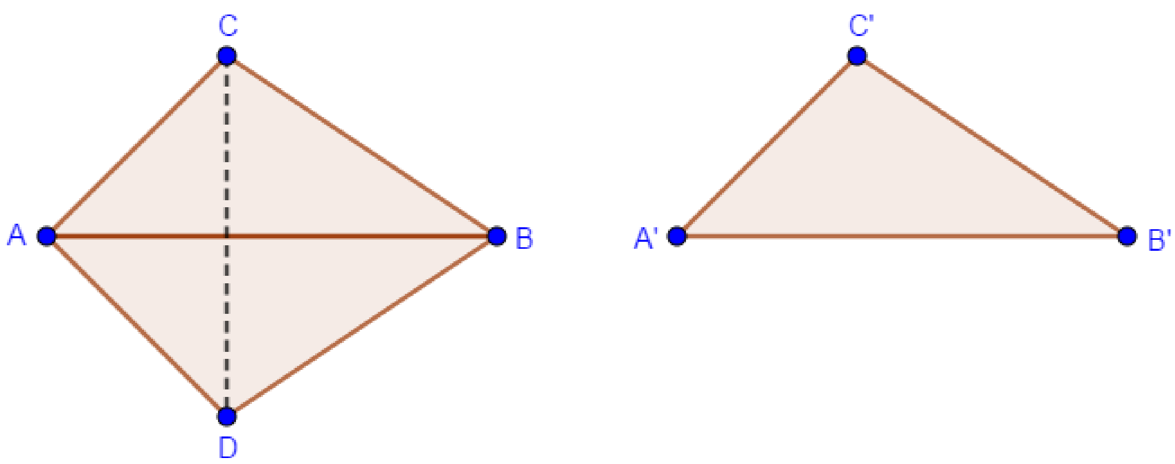
Demonstração. Seja ABC um triângulo em que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Vamos mostrar que $AB = AC$. Camparando o triângulo ABC com ele próprio, fazendo com que o vértices correspondam, isto é: $A \longleftrightarrow A,\ B \longleftrightarrow C$ e $C \longleftrightarrow B$. Como $\widehat{B} = \widehat{C}$ e $\widehat{C} = \widehat{B}$, logo a Proposição 3.13 garante que $ABC \equiv ACB$. Consequentemente, $AB = AC$. □

O próximo caso de congruência é conhecido como LLL (lado-lado-lado).

Proposição 3.17 (3º Caso de congruência)**.** *Dados dois triângulos* ABC *e* $A'B'C'$ *tais que* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ *e* $BC = B'C'$, *então* $ABC \equiv A'B'C'$.

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $BC = B'C'$. Vamos provar que tais triângulos são congruentes.

Figura 8: 3º caso de congruência LLL.



Fonte: o autor.

Para isto, construa a partir da semirreta $\overrightarrow{AB}$ e no semiplano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo congruente ao ângulo $\widehat{A'}$ com vértice no ponto A . No lado deste ângulo que não contém o ponto B, marque um ponto D tal que $AD = A'C'$ e ligue D a B. Como $AB = A'B'$ (por hipótese), $AD = A'C'$ (por construção) e $D\widehat{A}B = \widehat{A'}$ (por construção), então $ABD \equiv A'B'C'$. Vamos agora mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isso trace CD. Como $AD = A'C' = AC$ e $DB = B'C' = BC$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Pela Proposição 3.14, temos que $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}B = D\widehat{C}B$ e assim

$$A\widehat{D}B = A\widehat{D}C + C\widehat{D}B = A\widehat{C}D + D\widehat{C}B = A\widehat{C}B.$$

Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABD \equiv ABC$. Como já tínhamos provado que $ABD \equiv A'B'C'$, concluímos que $ABC \equiv A'B'C'$.

□

Agora veremos um importante teorema muito abordado no ensino básico, porém, raramente é demonstrado, sendo apresentado apenas com uma razão entre segmentos.

3.2.2 TEOREMA DE TALES

Antes de iniciarmos veremos as definições abaixo.

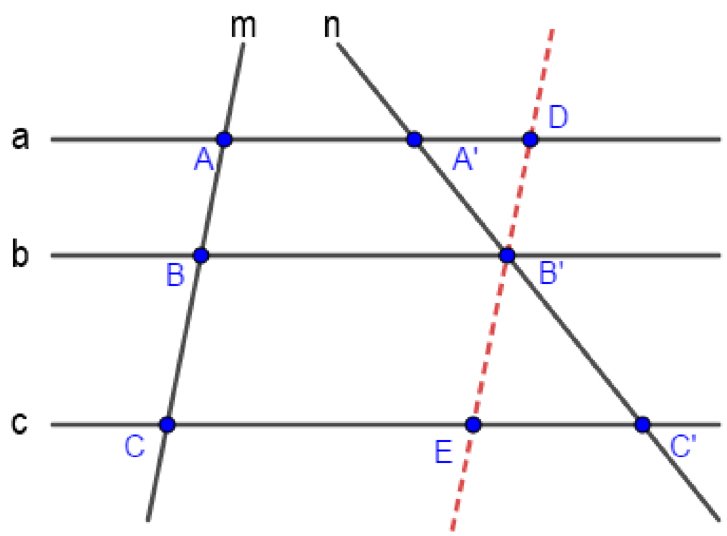
Definição 3.18. *Duas retas coplanares que não se interceptam são chamadas de paralelas.*

Definição 3.19. *Chamamos de paralelogramo o quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.*

Teorema 3.20 (Teorema de Tales)**.** *Suponha que três retas paralelas, a, b e c, cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C, então o ponto B' também encontra-se entre A' e C'. Se $AB = BC$, então também $A'B' = B'C'$.*

Demonstração. Sejam $a, b,$ e c retas paralelas e m e n retas que interceptam estas paralelas nos pontos A, B e C e A', B' e C' como indicado na figura.

Figura 9: Teorema de Tales.



Fonte: o autor.

Se B está entre A e C, então A e C estão em semiplanos distintos relativamente a reta b. Observe que A e A' estão em um mesmo semiplano determinado por b, já que a e b são retas paralelas a A e A' pertencem a reta a. Do mesmo modo C e C' estão no mesmo semiplano determinado por b. Podemos portanto concluir que A' e C' estão em semiplanos distintos em relação a reta b. Logo b intercepta o segmento $A'C'$ em um único ponto. Como B' é o ponto de intersecção da reta n com a reta b, e A' e C' pertencem a n, concluímos que o ponto de intersecção de $A'C'$ com b é exatamente o ponto B'. Logo, B' pertence ao segmento $A'C'$. Assim, B' está entre A' e C'. Isto demonstra a primeira parte da proposição.

Para demonstrar a segunda parte, trace pelo ponto B' uma reta paralela à reta m. Esta corta as retas a e c em pontos D e E, respectivamente. Podemos afirmar que os triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ são congruentes. De fato, como $DB'BA$ e $B'ECB$ são paralelogramos, então $DB' = AB$ e $B'E = BC$. Como $AB = BC$ por hipótese, então concluímos que $DB' = B'E$. Observe que os ângulos $D\widehat{B'}A'$ e $E\widehat{B'}C'$ são iguais por serem opostos pelo vértice e $B\widehat{D'}A'$ e $B'\widehat{E}C'$ são também iguais por serem correspondentes determinados por uma transversal cortada pelas paralelas a e c. Isto prova a nossa afirmação. Da congruência dos triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ decorre que $A'B' = B'C'$

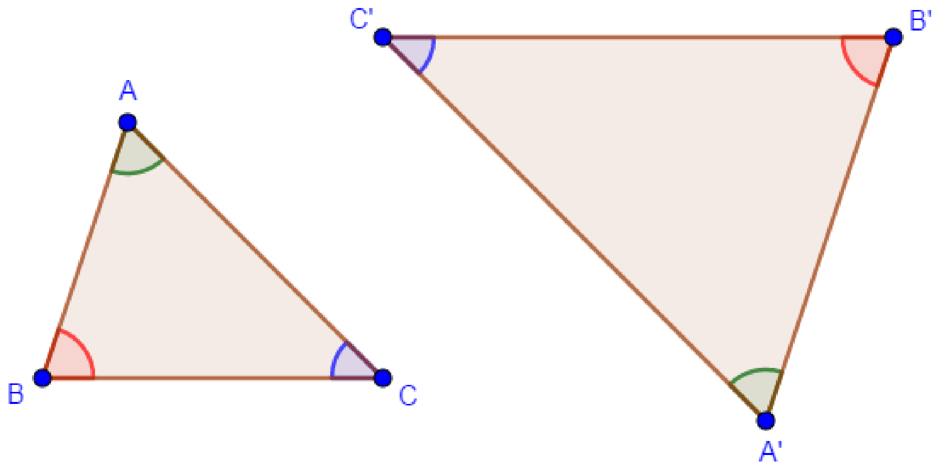
$\square$

Na próxima subseção, iremos trabalhar com semelhança de triângulos. Esse conteúdo é apresentado aos alunos nos anos finais do ensino fundamental. A semelhança de triângulos é uma ferramenta poderosa muito utilizada em diversas demonstrações em geometria.

3.2.3 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Definição 3.21. *Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Figura 10: Triângulos semelhantes.



Fonte: o autor.

Com isto queremos dizer que, se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos semelhantes e se $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$ e $C \longleftrightarrow C'$ é a correspondência que estabelece tal semelhança, então valem simultaneamente as igualdades:

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'} \quad \text{e} \quad \widehat{C} = \widehat{C'}, \text{ e}$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

O quociente comum entre as medidas dos lados correspondentes é chamado de razão de proporcionalidade entre os dois triângulos.

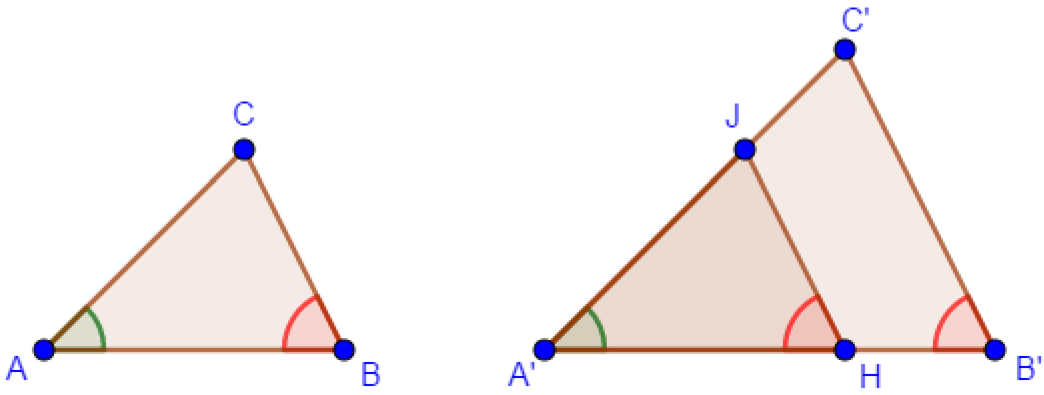
Na sequência veremos alguns resultados que nos auxiliará a verificar de forma “mais simples” quando dois triângulos são semelhantes. São os chamados casos de semelhança.

O primeiro caso de semelhança que veremos é conhecido como (AA) e diz que se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, eles são semelhantes.

Teorema 3.22. *Dados dois triângulos ABC e $A'B'C'$, se $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Como a soma dos ângulos de um triângulo é $180°$, então a igualdade dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{A'}$ e dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$ acarreta na igualdade dos ângulos $\widehat{C}$ e $\widehat{C'}$. Resta provar que os lados são proporcionais. Para isso tome na semirreta $\overrightarrow{A'B'}$ o ponto H de modo que $A'H = AB$. Sem perda de generalidade podemos supor que H esteja entre A' e B'. Pelo ponto H trace uma reta paralela a $B'C'$.

Figura 11: Primeiro caso de semelhança.



Fonte: o autor.

Tal reta corta a semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ num ponto J, formando um triângulo $A'HJ$. Note que $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $AB = A'H$ e $\widehat{B} = \widehat{B'} = A'\widehat{H}J$, onde esta última igualdade deve-se ao paralelismo de JH e $C'B'$. Então por ALA, segue que $ABC \equiv A'HJ$. Agora do Teorema de Tales temos que $\frac{\overline{A'H}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'J}}{\overline{A'C'}}$. Como $A'H = AB$ e $A'J = AC$ então, da igualdade acima obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

De maneira análoga podemos demonstrar que $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$. Fica assim demonstrado o teorema. $\square$

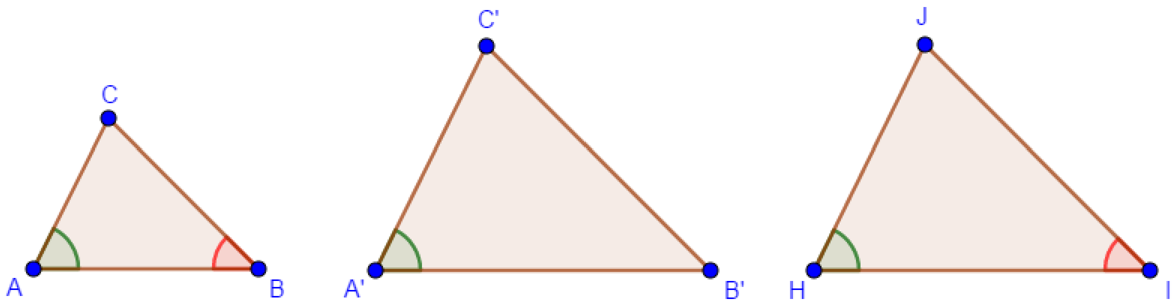
O próximo caso de semelhança relaciona pares de lados correspondentes de dois triângulos que formam ângulos congruentes.

Teorema 3.23. *Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$ temos $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$, então os triângulos são semelhantes.*

Demonstração. Construa um triângulo HIJ tal que $HI = A'B'$, $\widehat{H} = \widehat{A}$ e $\widehat{I} = \widehat{B}$. Pelo teorema anterior, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes, e assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Figura 12: Segundo caso de semelhança.



Fonte: o autor.

Como $HI = A'B'$, a hipótese $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ e a igualdade acima, podemos dizer que: $HJ = A'C'$.

Como por construção, $HI = A'B'$ e $\widehat{H} = \widehat{A} = \widehat{A'}$, podemos concluir, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que os triângulos $A'B'C'$ e HIJ são congruentes. Como já sabíamos que ABC e HIJ eram semelhantes, podemos concluir que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

□

A seguir veremos o último caso de semelhança que diz que se em dois triângulos, seus lados correspondentes forem proporcionais, esses triângulos são semelhantes.

Teorema 3.24. *Se em dois triângulos ABC e $A'B'C'$, temos*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}},$$

então os dois triângulos são semelhantes.

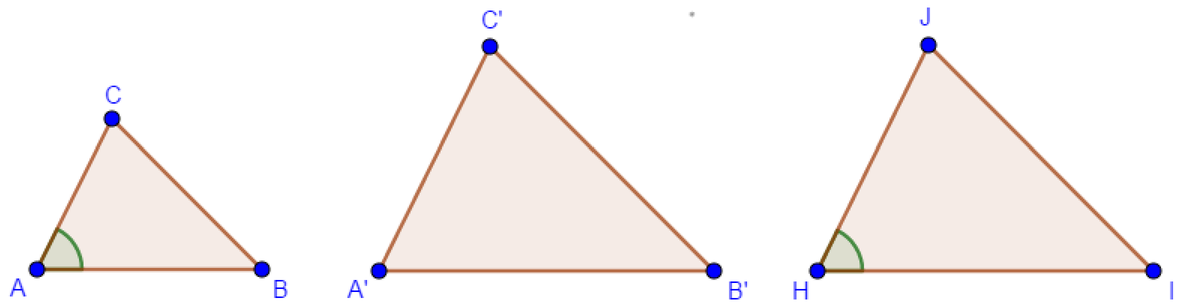
Demonstração. Construa um triângulo HIJ que tenha $\widehat{H} = \widehat{A}$, $HI = A'B'$ e $HJ = A'C'$. Temos por hipótese que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Portanto, de acordo com o teorema anterior, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Decorre daí que, além da igualdade acima, também ocorre

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}.$$

Figura 13: Terceiro caso de semelhança.



Fonte: o autor.

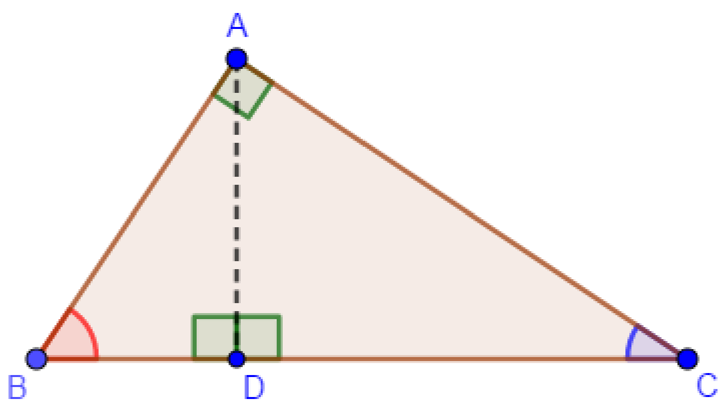
Por hipótese temos que $IJ = B'C'$. Como já tínhamos que $HI = A'B'$ e $HJ = A'C'$ (por construção), então, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, HIJ e $A'B'C'$ são congruentes. Como HIJ e ABC são semelhantes, conclui-se que ABC e $A'B'C'$ são também semelhantes. Isto conclui a prova do teorema. $\square$

A seguir veremos as relações métricas do triângulo retângulo. Esse conteúdo apresentado nos anos finais do ensino fundamental é muito explorado nas resoluções de exercícios, problemas e em demonstrações matemáticas.

3.2.4 RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considerando um triângulo ABC, retângulo em A, e conduzindo AD perpendicular a BC, com D em BC, vamos caracterizar os elementos seguintes:

Figura 14: Elementos do triângulo retângulo.



Fonte: o autor.

$\overline{BC} = a$: hipotenusa

$\overline{AC} = b$: cateto

$\overline{AB} = c$: cateto

$\overline{BD} = m$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa

$\overline{CD} = n$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

$\overline{AD} = h$: altura relativa à hipotenusa

Proposição 3.25. *Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo D o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{CD} = n$, $\overline{BD} = m$ e $\overline{AD} = h$, temos:*

(a) $ah = bc$.

(b) $an = b^2$ *e* $am = c^2$

(c) $a^2 = b^2 + c^2$.

(d) $mn = h^2$.

Demonstração. (a) e (b). Como $A\widehat{D}B = C\widehat{A}B$ e $A\widehat{B}D = C\widehat{B}A$, pelo Teorema 3.22 os triângulos BAD e BCA são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \longleftrightarrow C$, $\ D \longleftrightarrow A$, $\ B \longleftrightarrow B$. Assim,

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

ou, ainda,

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad \frac{h}{b} = \frac{c}{a}.$$

A relação $an = b^2$ é provada de maneira análoga.

(c) Somando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos a igualdade $a(m+n) = b^2 + c^2$. Mas, uma vez que $m + n = a$ temos,

$$aa = b^2 + c^2$$

logo,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

(d) Multiplicando membro a membro as duas relações do item (b), obtemos $a^2mn = (bc)^2$ ou, ainda,

$$mn = \left(\frac{bc}{a}\right)^2 = h^2,$$

onde utilizamos o item (a) na última igualdade acima.

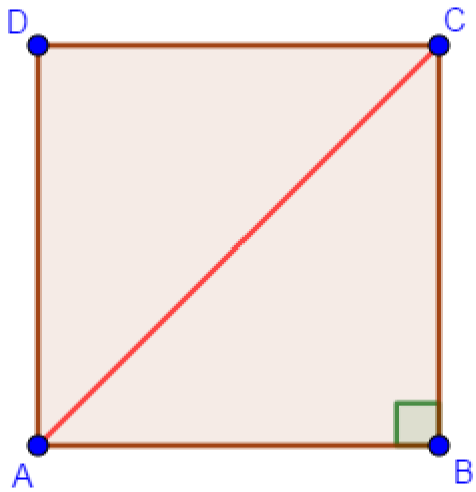
□

O item (c) da proposição acima é o famoso **Teorema de Pitágoras**. Apresentamos a seguir algumas importantes consequências do mesmo.

Corolário 3.26. *As diagonais de um quadrado de lado a medem $a\sqrt{2}$.*

Demonstração. Se $ABCD$ é um quadrado de lado a e diagonais AC e BD, então o triângulo ABC é retângulo e isósceles.

Figura 15: Diagonal de um quadrado em função de seu lado.



Fonte: o autor.

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

extraindo a raiz que quadrada de ambos os membros,

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$

como $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = a$, temos

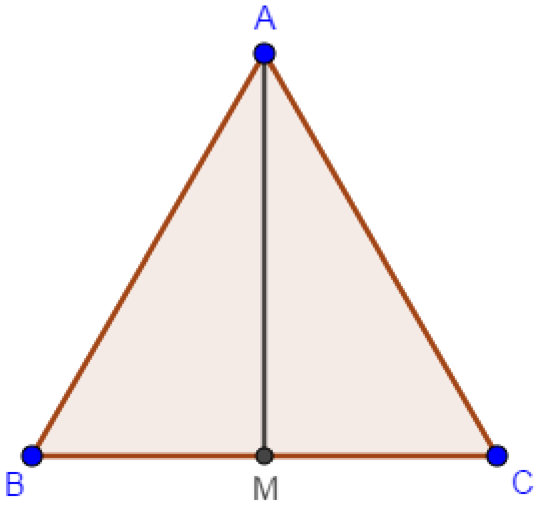
$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

□

Corolário 3.27. *As alturas de um triângulo equilátero de lado a medem* $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Demonstração. Sejam ABC um triângulo equilátero de lado a e M o ponto médio do lado BC. Temos que AM é a altura do triângulo ABC relativa ao ao lado BC.

Figura 16: Altura de um triângulo equilátero.



Fonte: o autor.

Portanto, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ACM, obtemos

$$\overline{AM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CM}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4},$$

como queríamos provar. □

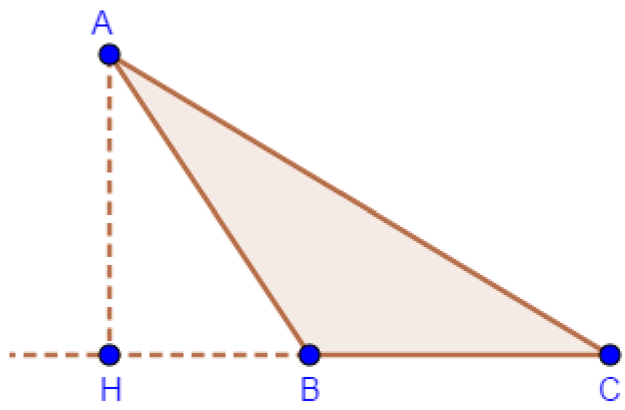
Após estudarmos um pouco sobre o Teorema de Pitágoras e ver algumas de suas consequências, veremos a seguir a recíproca desse importante teorema.

Proposição 3.28. *Seja ABC um triângulo tal que* $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ *e* $\overline{AC} = b$. *Se* $a^2 = b^2 + c^2$, *então ABC é retângulo em A.*

Demonstração. Seja H o pé da altura relativa a BC. Há dois casos essencialmente distintos:

(a) $B \in CH$: neste caso, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AHC obtemos

Figura 17: Recíproca do Teorema de Pitágoras - caso (a).



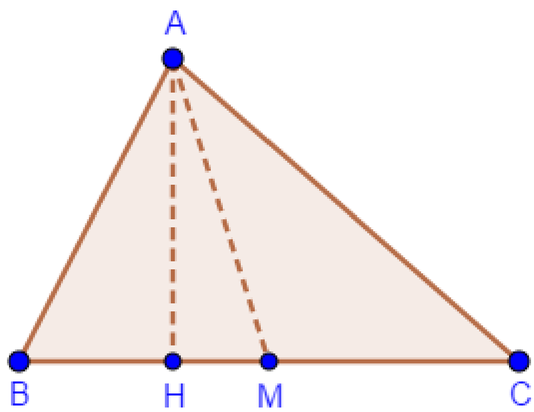
Fonte: o autor.

$$b^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 > \overline{CH}^2 \geq \overline{BC}^2 = a^2 = b^2 + c^2$$

e, daí, $0 \geq c^2$, o que é um absurdo.

(b) $H \in \overline{BC}$: Sejam $\overline{AH} = h$, M o ponto médio de BC e $\overline{BH} = x$.

Figura 18: Recíproca do Teorema de Pitágoras - caso (b).



Fonte: o autor.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $H \in BM$. Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos AHC e AHB, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 = \left(\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2\right) + \left(\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2\right) = 2h^2 + (a-x)^2 + x^2,$$

de sorte que $h^2 = ax - x^2$. Mas aí aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo AHM, obtemos

$$\overline{AM}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HM}^2 = h^2 + \left(\overline{BM} - \overline{BH}\right)^2 = \left(ax - x^2\right) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

de sorte que $\overline{AM} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Logo, M equidista dos vértices de ABC, portanto ABC é retângulo em A.

$\square$

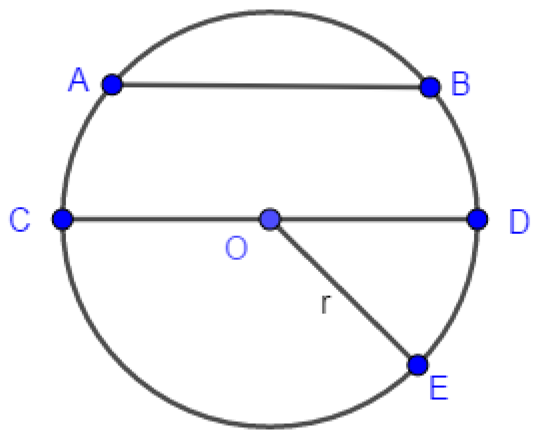
A seguir falaremos um pouco sobre circunferência e círculo. A aquisição de tais conhecimentos é muito importante para o desenvolvimento e compreensão de outros conteúdos bem como a realização de demonstrações.

3.2.5 CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

Começaremos falando sobre a circunferência.

Definição 3.29. *Dados um plano α, um ponto O que pertence a α e um número real positivo r, chamamos de circunferência o conjunto dos pontos que possuem uma distância r do ponto O.*

Figura 19: Circunferência.



Fonte: o autor.

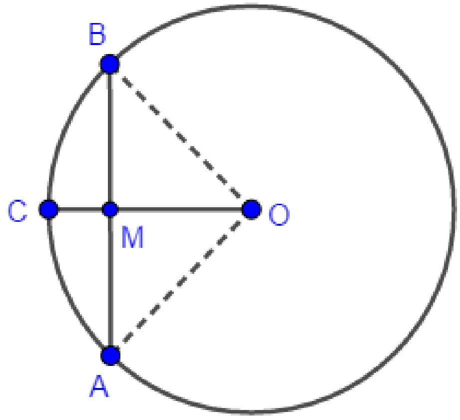
O ponto O é chamado de centro da circunferência. Se A, B, C, D e E são pontos da circunferência, chamaremos de *raio* o segmento que une o centro O da circunferência a qualquer um de seus pontos, como por exemplo, o segmento OE. Sendo A e B dois pontos da circunferência chamamos de *corda* o segmento que os une. Ao segmento CD, também podemos chamar de corda, porém a toda corda que contém o centro da circunferência, recebe o nome de *diâmetro*.

Vejamos a proposição a seguir que diz a condição necessária para que um raio seja perpendicular a uma corda.

Proposição 3.30. *Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.*

Demonstração. Seja O o centro do círculo e OC o raio que é perpendicular a corda AB. Seja M o ponto de intersecção da corda com o raio. Com OA = OB (raios) então o triângulo OAB é isósceles com base AB.

Figura 20: Raio perpendicular a uma corda.



Fonte: o autor.

Logo $\widehat{A} = \widehat{B}$. Se a corda é perpendicular ao raio, então os ângulos $O\widehat{M}A$ e $O\widehat{M}B$ são retos. Como consequência, $A\widehat{O}M = B\widehat{O}M$. Segue-se então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, que $AOM = BOM$. Consequentemente teremos, $AM = MB$. Inversamente, se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então pelo terceiro caso de congruência de triângulos, deduz-se que: $AOM = BOM$. Assim temos, $O\widehat{M}A = O\widehat{M}B$. Mas como a soma destes dois ângulos é um ângulo raso, conclui-se que cada um deles mede 90°. Portanto, a corda é perpendicular ao raio passando por M. Como queríamos provar. $\square$

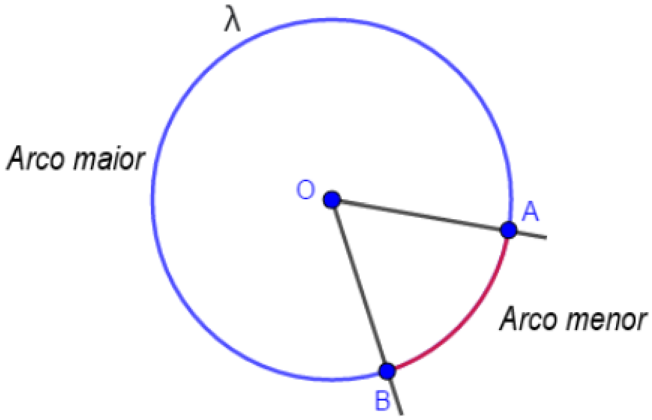
Outro importante elemento da circunferência é o arco e o definiremos a seguir:

Definição 3.31. *Seja λ uma circunferência de centro O e sejam A e B dois pontos de λ que não determinam o diâmetro, chamamos de:*

a. *arco menor $\overset{\frown}{AB}$ a reunião dos pontos que pertencem a λ e que estão entre A e B no interior do menor ângulo formado por $A\widehat{O}B$;*

b. *arco maior $\overset{\frown}{AB}$ a reunião dos pontos que pertencem a λ e que estão entre A e B no exterior do maior ângulo formado por $A\hat{O}B$;*

Figura 21: Arcos de uma circunferência.



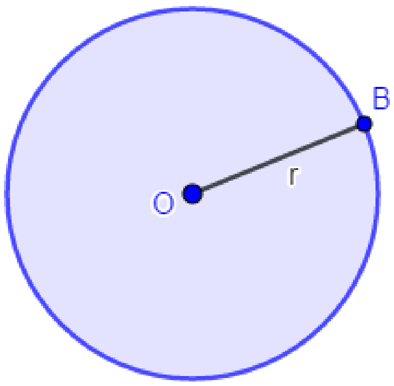
Fonte: o autor.

Quando A e B são extremidades do diâmetro, teremos dois arcos de mesma medida que chamamos de *semicircunferência*.

Encerrando essa subseção definiremos círculo.

Definição 3.32. *Seja O um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro O e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{OB} \leq r$.*

Figura 22: Círculo.



Fonte: o autor.

4 ATIVIDADES

Como comentado na introdução, com a chegada da pandemia de COVID-19 vieram muitos desafios. O ensino a distância passou a ser o único recurso para a continuidade do processo de ensino-aprendizagem. Diante disso, neste capítulo apresentamos propostas de atividades para trabalhar o raciocínio lógico-dedutivo em geometria plana, a serem realizadas de forma remota com alunos do ensino médio. Além disso, tais atividades tem como objetivo despertar nos alunos o interesse pelas demonstrações em geometria. Faremos a seguir uma pequena introdução de cada uma das atividades:

- A atividade 1 trabalhará com o Teorema de Tales e é constituída por seis tarefas dedutivas;
- A atividade 2 trabalhará com o Teorema de Pitágoras e está composta por cinco tarefas dedutivas. As atividades foram adequadas de (IMENES; LELLIS, 1988) e algumas figuras foram extraídas do mesmo;
- A atividade 3 trabalhará: a razão π, a razão entre arcos e ângulo e a razão entre arcos e raios. A atividade está dividida em quatro tarefas dedutivas.

Essas sugestões de atividades foram pensadas para a modalidade ensino remoto. Assim é importante que o professor selecione todo o material necessário para a realização das tarefas e disponibilize-o para ser retirado pelos alunos. Os atendimentos aos alunos, bem como as devolutivas das atividades por parte do professor, poderão ser realizados por videochamadas. Por outro lado, as respostas das atividades poderão ser enviadas para o professor via Whatsapp ou por formulário online.

A seguir apresentaremos ao leitor, de forma mais detalhada, as três sugestões de atividades.

4.1 ATIVIDADE 1: O TEOREMA DE TALES

- **Tópico a ser trabalhado:** Atividades dedutivas e aplicação do Teorema de Tales.
- **Séries:** Todas do ensino médio.
- **Tempo estimado para realização da atividade:** 4 aulas.
- **Recursos necessários:** Material impresso, celular e/ou computador com acesso à internet, tesoura, barbante, alfinete, maquete de isopor, esquadro e régua.
- **Objetivo da atividade:** Trabalhar com atividades dedutivas envolvendo o Teorema de Tales fazendo uso do raciocínio lógico dedutivo e aplicar esse conceito em situações cotidianas.
- **Expectativa:** Espera-se que o aluno seja capaz de realizar as atividade propostas utilizando o raciocínio lógico dedutivo e conhecimentos previamente adquiridos.
- **Comentários para o professor:** Caro professor, esta sugestão de atividade foi elaborada com o objetivo de trabalhar, de forma remota, os sensos dedutivo e investigativo do aluno. Esta atividade está dividida em pequenas tarefas: as tarefas 1 e 2 são investigativas e levarão os alunos a deduzirem que a intersecção entre um feixe de retas paralelas e duas transversais formam segmentos proporcionais. Para a realização dessas tarefas, é muito importante orientar os alunos a fazerem as medições de forma precisa. Após a realização das duas primeiras atividades, os alunos já deduziram a proporcionalidade entre os segmentos, e assim já estão prontos para realizarem a próxima tarefa. A tarefa 3 propõe, passo a passo, uma demonstração do Teorema de Tales usando a definição de paralelogramo e a semelhança de triângulos. É natural surgirem algumas dúvidas nessa tarefa, tendo necessidade de intervenção do professor em alguns momentos. As tarefas 4 e 5 são aplicações do Teorema de Tales, sendo a tarefa 4 um problema contextualizado com o cotidiano da comunidade escolar (cabe ao professor fazer as adequações necessárias para que a tarefa esteja contextualizada com o cotidiano do aluno). Na tarefa 5 o aluno fará uso de uma maquete onde aplicará o Teorema de Tales para calcular uma distância inacessível. É muito importante nessa tarefa, que o aluno se coloque no lugar do sujeito do problema, assim, ele enxergará uma aplicação real para o teorema. Por último, a tarefa 6 propõe uma demonstração formal do Teorema de Tales que será realizada com o apoio do professor.

  Um tutorial sobre essa atividade está disponível no Youtube no canal PROF. LUCIANO T CAMARA. Link: https://youtu.be/MumLLbQNMbA

4.1.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 1

Um pouco da história de Tales.

Tales de Mileto foi um importante pensador, filósofo e matemático grego pré-socrático. É considerado, por alguns, o "Pai da Ciência" e da "Filosofia Ocidental". Suas principais ideias expandiram os horizontes teóricos nas áreas da matemática, filosofia e astronomia. Para ele, a água era o principal elemento da natureza e a essência de todas as coisas.

Tales de Mileto, provavelmente descendente de fenícios, nasceu na antiga colônia grega Mileto, região da Jônia, atual Turquia, por volta de 623 ou 624 a.C. Foi um homem de muitas habilidades e erudição, sendo assim, uma figura respeitada pelo seu povo grego.

Buscou respostas racionais para os fenômenos da natureza e as razões da existência. Por isso, é considerado um dos primeiros filósofos a romper com o ponto de vista religioso.

Leia mais em https://www.todamateria.com.br/tales-de-mileto

4.1.2 TAREFA 1

a. Construa um triângulo ABC qualquer e escolha um ponto D no lado AB.

b. Ainda na figura acima, usando o esquadro, pelo ponto D, trace uma paralela ao lado BC. Chame de E o ponto de intersecção no lado AC.

c. Utilizando uma régua, meça os comprimentos dos segmentos AD, DB, AE e EC.

$\overline{AD} =$ ________ $\qquad$ $\overline{AE} =$ ________

$\overline{DB} =$ ________ $\qquad$ $\overline{EC} =$ ________

Com o auxílio de uma calculadora calcule as razões:

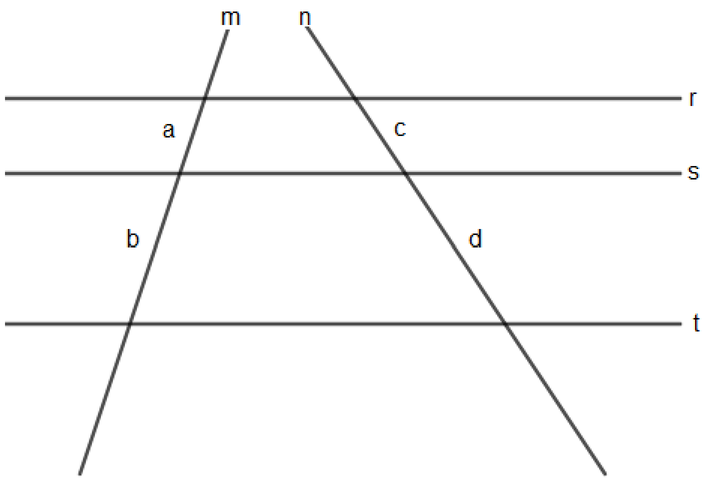
$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} =$ ________ $\qquad$ $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} =$ ________

d. Compare as razões encontradas no item anterior. O que você pôde perceber?

4.1.3 TAREFA 2

As retas r, s e t da figura são paralelas e as retas m e n, são transversais.

Figura 23: Teorema de Tales.



Fonte: o autor.

a. Usando uma régua, determine as medidas a, b, c e d, indicadas na figura acima:

$a =$ ________ $b =$ ________

$c =$ ________ $d =$ ________

b. Com o auxílio de uma calculadora, calcule as razões:

$\frac{a}{b} =$ ________ $\frac{c}{d} =$ ________

c. Comparando as razões, o que você observa? O que a experiência sugere?

____

____

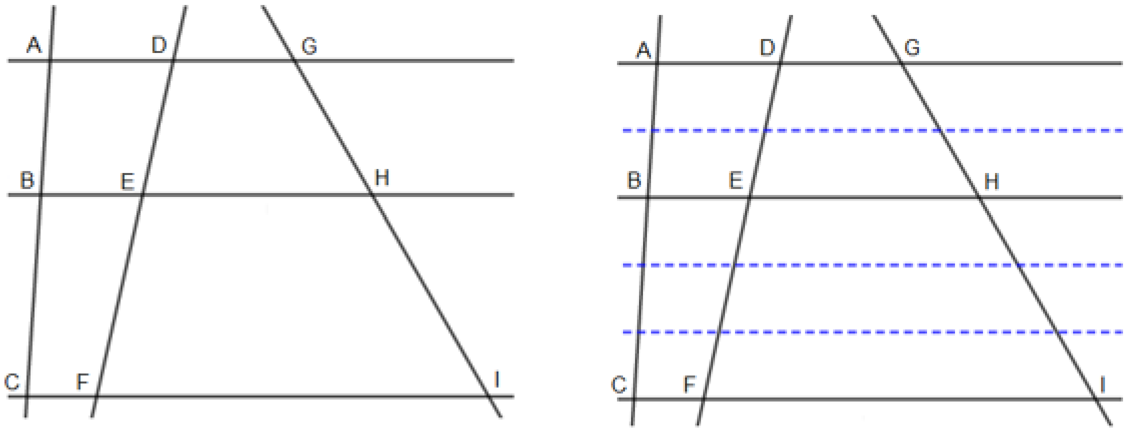
____

____

4.1.4 TAREFA 3

Tales percebeu que em situações como essa sempre ocorre uma proporção. Por exemplo, se a distância entre as paralelas estiver na razão 2 : 3, então, os segmentos transversais também estarão na razão de 2 : 3.

Figura 24: Razões dos segmentos proporcionais.



Fonte: o autor.

$$\text{Se } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3} \quad \text{então} \quad \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{2}{3} \text{ e } \frac{\overline{GH}}{\overline{HI}} = \frac{2}{3}$$

Teorema de Tales: Duas retas m e n, cortam três retas paralelas r, s e t. Nessas condições os segmentos das medidas a, b, c e d são proporcionais, isto é,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Vamos demonstrar porque isso acontece:

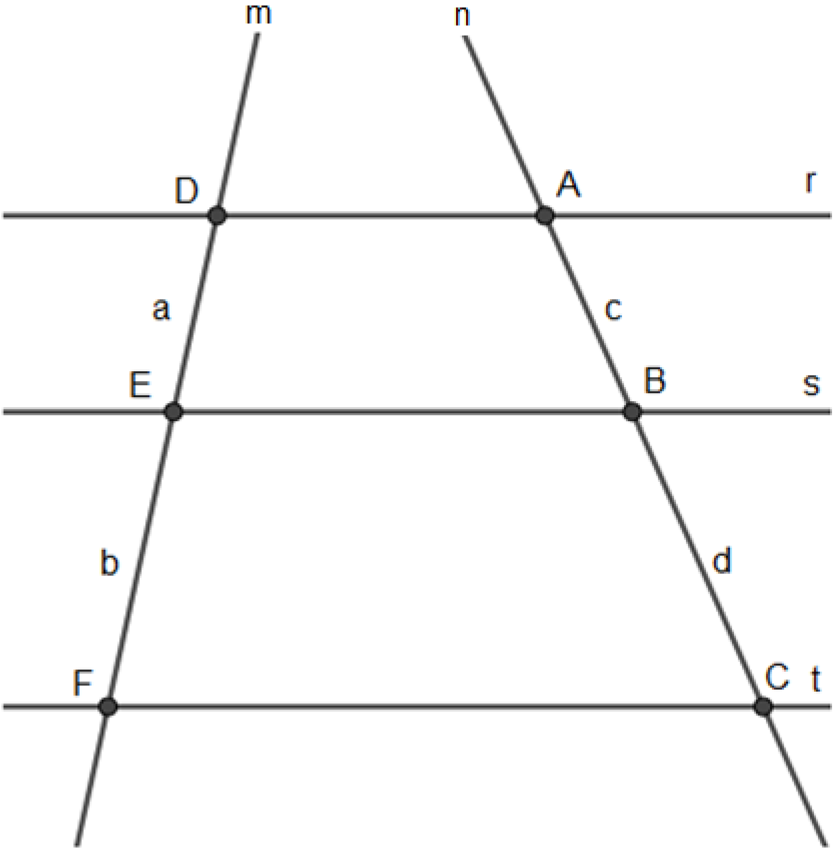
Siga os seguintes passos:

a. Trace pelo ponto A uma reta paralela p à reta m.

b. Na intersecção da reta p com a reta s marque o ponto G.

c. Na intersecção da reta p com a reta$t$ marque o ponto H.

Figura 25: Demonstração do Teorema de Tales.



Fonte: o autor.

Agora responda:

1. Que figuras são formadas pelos pontos $AGED$ e $GHFE$?

2. Sabendo que $\overline{DE} = a$ e $\overline{EF} = b$ e usando a primeira questão determine a medida de AG e GH.

3. Usando o fato dos triângulos AGB e AHC serem semelhantes (AA), prove que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

4.1.5 TAREFA 4

Nesta tarefa faremos uma demonstração formal do Teorema de Tales.

Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual a razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Para realização da demonstração formal do teorema é fundamental identificarmos a hipótese e a tese.

Hipótese: (É a informação dada pelo enunciado que será o ponto de partida da demonstração.)

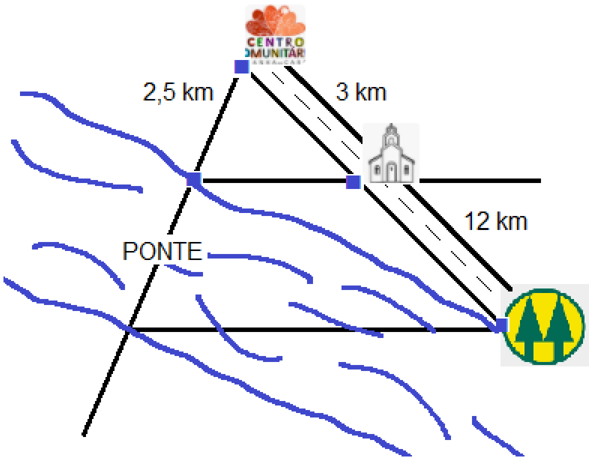
Tese: (É o que queremos provar.)

Após a identificação da hipótese e tese, com o auxílio do seu professor, realize a demonstração do Teorema de Tales.

4.1.6 TAREFA 5

Os moradores do bairro de São José das Laranjeiras, Maracaí-SP, irão solicitar ao prefeito a construção de uma ponte sobre o Rio Capivara na próxima visita que ele fizer a região. Para isso queremos saber a largura do rio. No desenho, pode-se ver que na Rua Beira-Rio ficam o centro comunitário, a Igreja e uma Cooperativa Agropecuária. Observe o desenho e calcule a largura do rio.

Figura 26: Aplicação do Teorema de Tales.



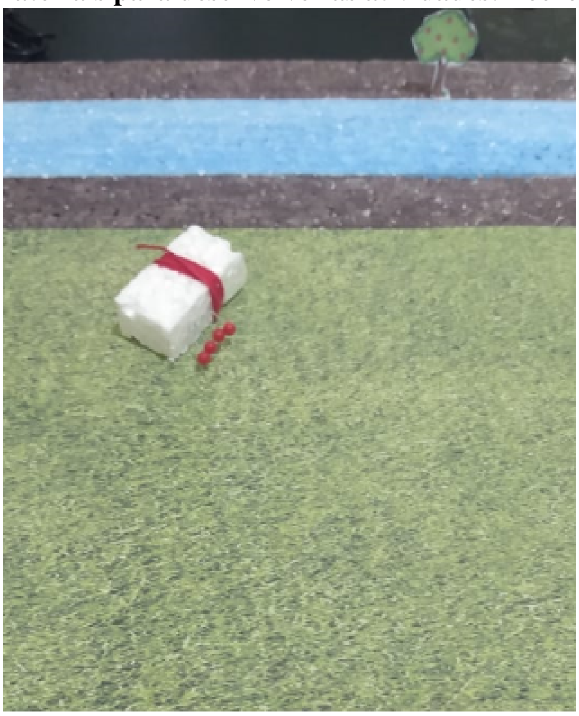
Fonte: o autor.

4.1.7 TAREFA 6

Um fazendeiro possui duas propriedades que são divididas por um rio. Para facilitar o trabalho de cuidar de suas fazendas, ele decidiu construir uma ponte que irá ligá-las, porém, ele não dispõe de equipamentos para atravessar o rio na realização da medição.

Coloque-se no lugar do fazendeiro, use a maquete que recebeu e descubra a largura do rio sem atravessá-lo. A maquete foi construída a uma escala de 1 : 100 cm, isto é, cada 1 cm na maquete representam 100 cm na realidade.
Sugestão: Use como referência a árvore que se encontra do outro lado do rio.
Observação: Para elaboração dessa atividade você recebeu uma maquete, um pedaço de linha e quatro alfinetes.

Figura 27: Materiais para desenvolver as atividades: Teorema de Tales.



Fonte: o autor.

4.2 ATIVIDADE 2: TEOREMA DE PITÁGORAS.

- **Tópico a ser trabalhado:** Demonstração e aplicação do Teorema de Pitágoras.
- **Série:** Todas do ensino médio.
- **Tempo estimado para realização da atividade:** 4 aulas.
- **Recursos necessários:** Material impresso, celular e/ou computador com acesso à internet, tesoura, lápis de cor, cartolina, esquadro e régua.
- **Objetivo da atividade:** Trabalhar a demonstração do Teorema de Pitágoras fazendo uso do raciocínio lógico dedutivo e aplicar esse conceito em situações cotidianas.
- **Expectativa:** Espera-se que o aluno seja capaz de realizar as atividade propostas utilizando o raciocínio lógico dedutivo e conhecimentos previamente adquiridos.
- **Comentários para o professor:** Esta sugestão de atividade foi elaborada com o objetivo de trabalhar, de forma remota, os sensos dedutivo e investigativo do aluno a partir de atividades dedutivas envolvendo o Teorema de Pitágoras. Para realização da atividade é necessário que o professor elabore um kit com todo o material (descrito acima no item, recursos necessários) e o disponibilize para que seus alunos façam a retirada na escola. A presente atividade está dividida em cinco tarefas. A tarefa 1, trata da construção de um quebra-cabeça que possibilitará ao aluno deduzir a relação entre o quadrado formado a partir da hipotenusa do triângulo e os quadrados formados partir dos catetos desse mesmo triângulo. A tarefa 2 é uma dedução do Teorema de Pitágoras, realizada com recortes de triângulos e quadrados, construídos a partir dos lados desses mesmos triângulos, que serão manipulados de maneira que se realize a dedução do referido teorema. Na Tarefa 3 os alunos com o auxílo do professor, considerando os experimentos realizados anteriormente, farão a demosntração formal do Teorema de Pitágoras. As Tarefas 4 e 5 são aplicações do Teorema de Pitágoras na construção civil, mais especificamente, na estrutura de madeira para telhados denominada tesoura. Essa estrutura é muito conhecida na comunidade escolar, o professor inclusive, pode pedir a participação dos pais que, na sua maioria, têm conhecimento sobre o assunto. Lembrando que a contextualização deve atender o cotidiano do aluno. Cabe ao professor fazer as adequações necessárias na tarefa.

  Um tutorial sobre essa atividade está disponível no Youtube no canal PROF. LUCIANO T CAMARA. Link: https://youtu.be/0wEmA9MlmvY

4.2.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 2

Um pouco da história de Pitágoras.

Pitágoras de Samos, foi um matemático de grande importância e filósofo pré-socrático da Grécia Antiga. Estudou matemática, astronomia, música, literatura e filosofia. Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha de Samos e morreu aproximadamente em 496 a.C. mas morou algum tempo no Egito, porém, suas ideias revolucionárias o levaram a ser muito perseguido. No entanto, por causa da perseguição, mudou-se para Crotona região conhecida como Magna Grécia, e neste local fundou uma escola de caráter místico-filosófico conhecida como "Escola Pitagórica". Como Pitágoras queria muito aprender matemática e cálculos complexos, foi aconselhado por seu professor Tales de Mileto a estudar geometria, porque, dessa forma, poderia entender os números e não somente os utilizar. Por causa das perseguições, fugiu para uma caverna e ali passava seus conhecimentos para um aluno, que começou a seguí-lo.

Compreendendo o Teorema de Pitágoras

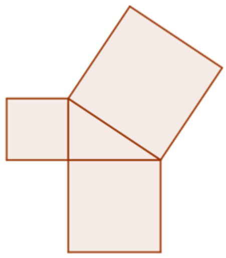
Para melhor compreendermos o Teorema de Pitágoras, vamos construir um quebra-cabeças. Para o desenvolvimento dessa atividade, vamos precisar de lápis, borracha, régua, esquadro, tesoura, lápis de cor e pedaços quadrados de cartolina. As peças do quebra-cabeça devem se encaixar perfeitamente e para isso precisamos que cada figura seja feita como muita precisão.

4.2.2 TAREFA 1

A construção do quebra cabeça.

No centro de uma das cartolinas você vai desenhar com um lápis uma figura como esta:

Figura 28: Dedução do Teorema de Pitágoras.



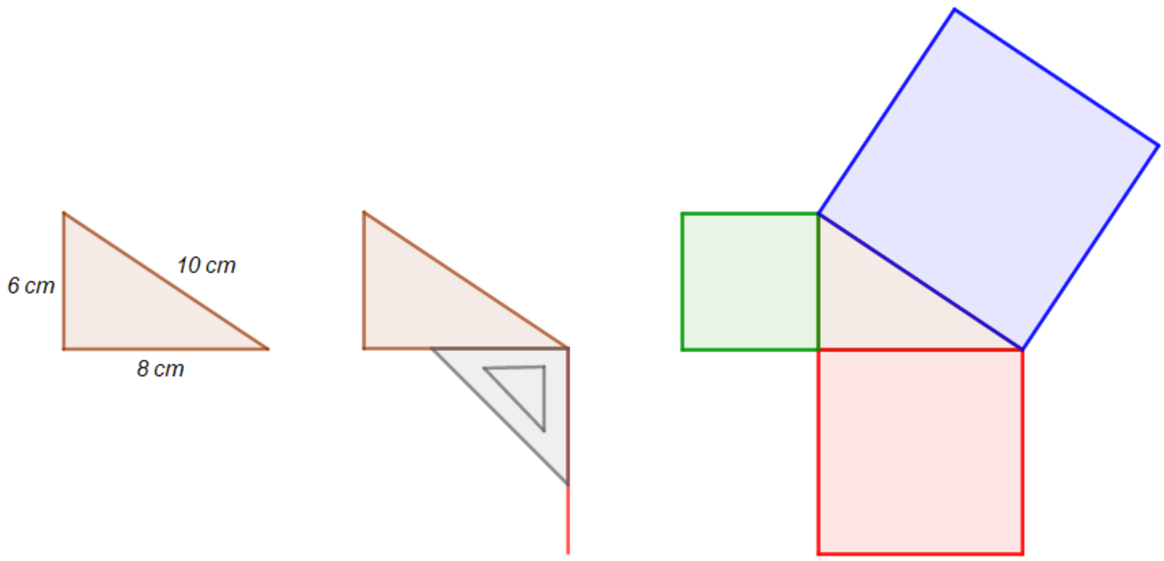
Fonte: o autor.

Para que tudo ocorra perfeitamente, siga as instruções abaixo:

a. Com um esquadro, construa um triângulo retângulo com catetos medindo 6 e 8 cm. Certifique-se que o ângulo formado pelos catetos tenham exatamente 90°.

b. Construa três quadrados a partir de cada lado do triângulo construído. Use o esquadro para garantir que cada ângulo do quadrado tenha exatamente 90°.

Figura 29: Posicionando o esquadro.

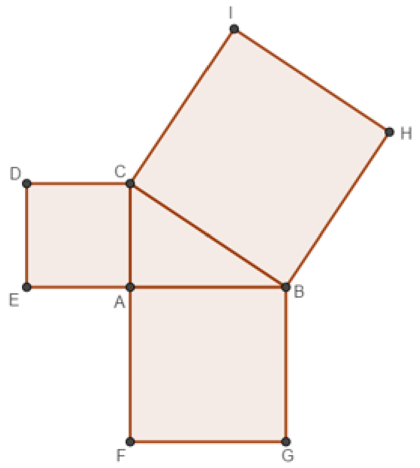


Fonte: o autor.

c. Após a construção da figura, confira todas as medidas dos lados de cada quadrado. Se forem constatadas diferenças maiores que 1 mm, convém refazer o desenho.

d. Para facilitar o entendimento das próximas instruções, vamos colocar letras nos vértices da figura:

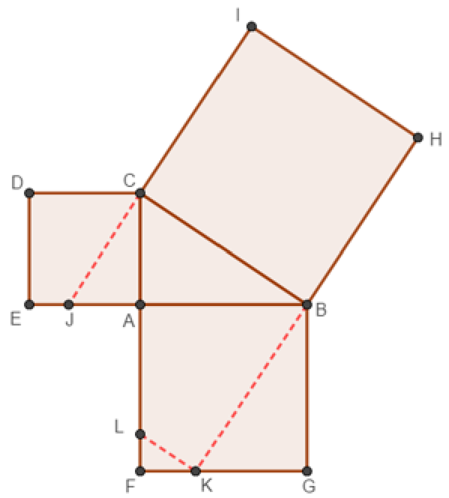
Figura 30: Nomeando os pontos da figura.



Fonte: o autor.

e. Usando um régua, prolongue o lado IC até encontrar com o lado EA e no ponto de intersecção marque o ponto J. Prolongue também o lado HB até encontrar o lado FG e no ponto de intersecção marque o ponto K. Em seguida, usando o esquadro, desenhe o segmento KL, que faz ângulo reto com BK.

Figura 31: Prolongando segmentos.

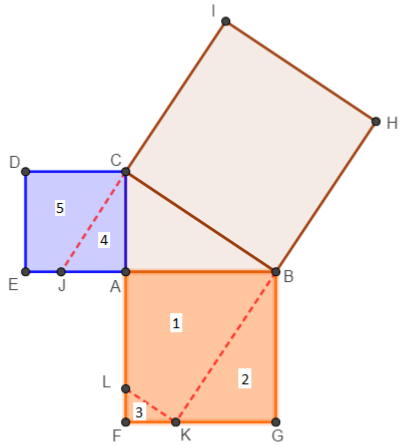


Fonte: o autor.

Está pronta a base do seu quebra-cabeça. Agora vamos construir suas peças.

f. Repita o processo e desenhe novamente a figura acima. Usaremos os dois quadrados menores. Pinte cada quadrado de uma cor diferente (ou personalize-os conforme preferir) e enumere todas as partes que dividem dos quadrados. Recorte todas as 5 peças enumeradas.

Figura 32: Peças do quebra-cabeça.



Fonte: o autor.

Está pronto o quebra-cabeça!

Desafio!

Preparado para montá-lo?

Você deve encaixar as figuras $1, 2, 3, 4$ e 5 dentro do quadrado maior, que será a base do quebra-cabeça. É possível arrumá-las de modo a preencher completamente o quadrado maior. Boa sorte!

Após vencer o desafio faça um pequeno relato apontando suas dificuldades, os pontos que considerou mais interessantes e diga a que conclusão você chegou.

____

____

____

____

____

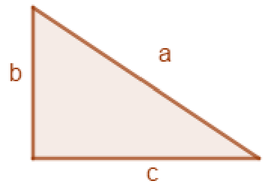
____

4.2.3 TAREFA 2

Vamos provar, dedutivamente, que em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Você acompanhará melhor esse raciocínio se construir algumas figuras usando uma cartolina. Siga as orientações abaixo:

a. Desenhe um triângulo retângulo qualquer. Não importa a medida de seus lados. Vamos representá-las por letras: a é a medida da hipotenusa; b e c são as medidas dos catetos. Em seguida, recorte outros três triângulos iguais ao mesmo.

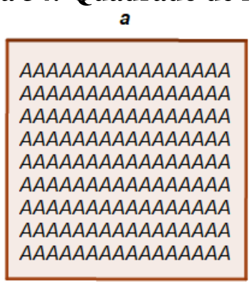
Figura 33: Triângulo retângulo.



Fonte: o autor.

b. Agora desenhe e recorte um quadrado, cuja a medida de seu lado seja igual à medida da hipotenusa, a, dos triângulos retângulos. Enfeite-o com as letras A.

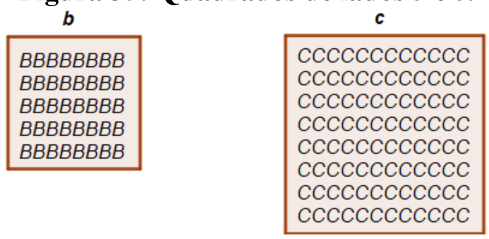
Figura 34: Quadrado de lado a.



Fonte: o autor.

c. Finalmente, desenhe e recorte mais dois quadrados: um de lado b e outro de lado c. Enfeite-os com letras B e C, respectivamente.

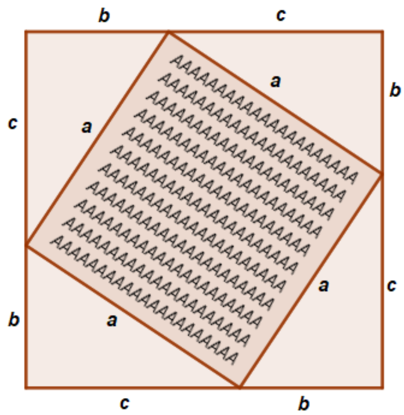
Figura 35: Quadrados de lados b e c.



Fonte: o autor.

d. Com o quadrado de lado a e os quatro triângulos retângulos, você pode formar um quadrado maior:

Figura 36: Quadrado formado pelos triângulos e o quadrado de lado a.



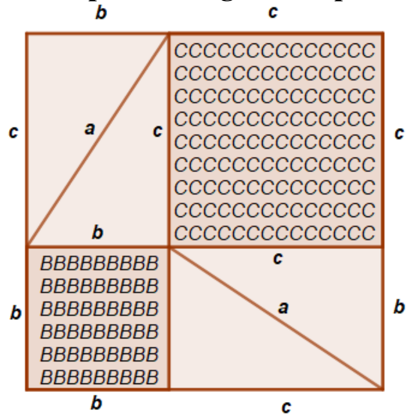
Fonte: o autor.

Após a junção das peças, demos origem a um novo quadrado. Qual a medida do lado desse quadrado?

---

e. Usando agora os mesmos quatro triângulos e os dois quadrados de lados b e c, você pode construir a seguinte figura:

Figura 37: Quadrado formado pelos triângulos e o pelos quadrados de lados b e c.



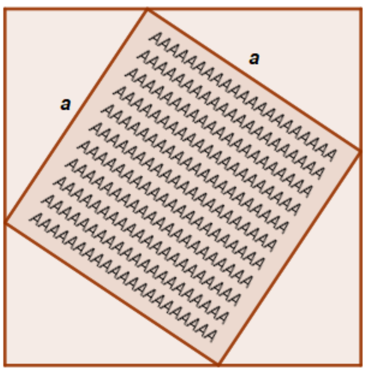
Fonte: o autor.

Após a nova junção das peças, demos origem a outro quadrado. Qual a medida do lado desse quadrado?

Agora responda:

1. Se no primeiro quadrado eliminarmos os quatro triângulos retângulos, o que restará da figura?

Figura 38: Eliminando os quatro triângulos.

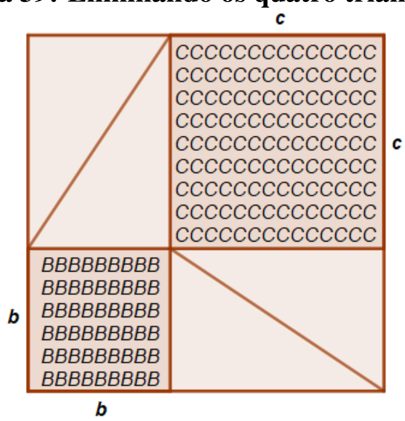


Fonte: o autor.

2. Se no segundo quadrado que é igual ao primeiro eliminarmos os mesmos quatro triângulos retângulos, o que restará da figura?

____

Figura 39: Eliminando os quatro triângulos.



Fonte: o autor.

3. Usando os itens *a* e *b* o que podemos concluir sobre as figuras que restaram?

____

____

____

____

4.2.4 TAREFA 3

Após a realização das Tarefas 1 e 2, faremos uma demonstração formal do Teorema de Pitágoras.

Em um triângulo retângulo, onde a é a medida da hipotenusa e b e c são as medidas dos catetos, temos que o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, isto é,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Para realização da demonstração formal do teorema é fundamental identificarmos a hipótese e a tese.

Hipótese: (É a informação dada pelo enunciado que será o ponto de partida da demonstração.)

Tese: (É o que queremos provar.)

Após a identificação da hipótese e tese, com o auxílio do seu professor, realize a demonstração formal do Teorema de Pitágoras.

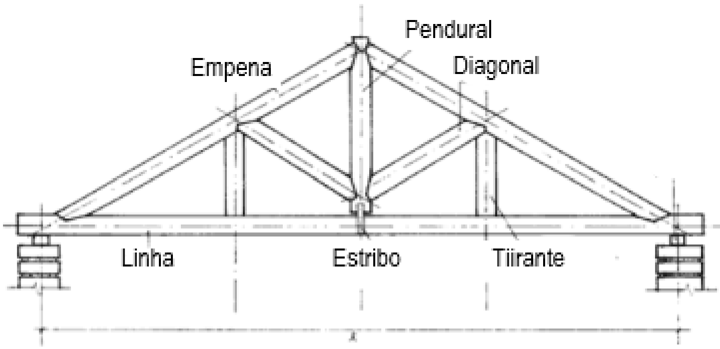
4.2.5 TAREFA 4

Aplicação do Teorema de Pitágoras na construção civil.

A tesoura do telhado e o Teorema de Pitágoras.

Na construção do telhado de uma casa, os carpinteiros fazem uma estrutura de madeira que tem o seguinte formato:

Figura 40: Tesoura de madeira.



Fonte: (IMENES; LELLIS, 1988).

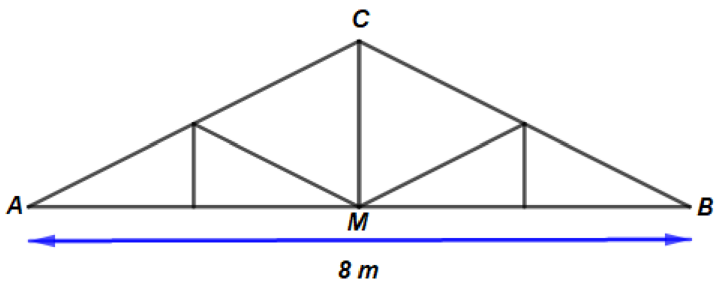
Em geral, a madeira usada é a peroba, por ser muito resistente. Veja só quantos triângulos as vigas de peroba estão formando. Muitos deles são triângulos retângulos.

Os carpinteiros e engenheiros chamam essa estrutura de tesoura do telhado.

Ao construir a tesoura de um telhado, o carpinteiro se viu diante de um problema: com que comprimento deve serrar cada viga?

Pois bem, o comprimento das vigas depende da largura da casa e da inclinação do telhado. Se a casa tiver 8 m de largura, a viga *AB* da tesoura terá 8 m de comprimento.

Figura 41: Estrutura da tesoura de madeira.



Fonte: o autor.

O comprimento da viga CM depende da inclinação do telhado. Quanto mais inclinado for o telhado, maior será a viga CM.

A inclinação do telhado, por sua vez depende do tipo de telha que se pretende usar na cobertura.

Observe alguns telhados. Note que existem vários tipos de telhas. A telha francesa, por exemplo, exige uma inclinação de pelo menos 40%, para que a água da chuva possa escoar-se.

Essa inclinação de 40% é obtida assim: partindo da extremidade para o topo do telhado, a cada metragem na horizontal, subimos 40% dessa metragem na vertical. Por exemplo, se uma casa possuir 10 m na horizontal, então subiremos 4 m na vertical.

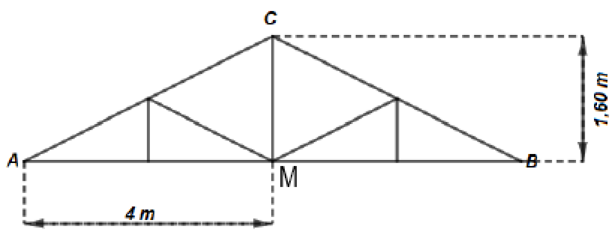
Figura 42: Telhado com a estrutura de Tesoura.

Fonte: (IMENES; LELLIS, 1988)

No exemplo dado, como AM mede 4 m, a vertical CM terá 40% de 4 m, isto é:

$$CM = \frac{40}{100}\,4\text{ m} = \frac{160}{100}\text{ m} = 1,60\text{ m}$$

Figura 43: Inclinação da Tesoura.



Fonte: (IMENES; LELLIS, 1988)

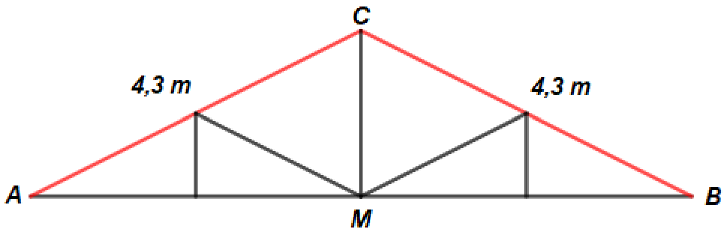
Agora vamos calcular o comprimento da viga AC, que deve ter o mesmo comprimento da viga CB. Como o triângulo AMC é retângulo, podemos usar o Teorema de Pitágoras. Já sabemos que AM e CM, que são os catetos, medem 4 m e $1,6$ m, respectivamente. Para calcular a hipotenusa AC, escrevemos:

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + (1,6)^2 = 16 + 2,56 = 18,56.$$

Se $\overline{AC}^2 = 18,56$, então $\overline{AC} = \sqrt{18,56}$, calculando a raiz quadrada, obtemos:

$$\overline{AC} \cong 4,3 \text{ m}.$$

Figura 44: Calculando as medidas das vigas *AC* e *BC*.

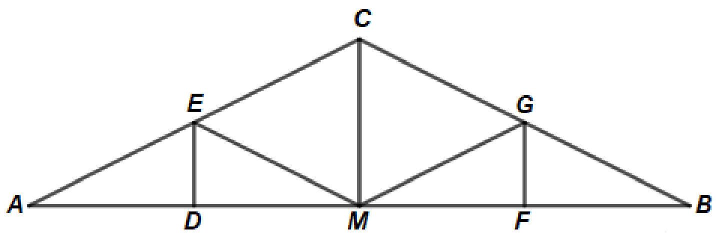


Fonte: o autor.

Esse exemplo mostra um aplicação prática do Teorema de Pitágoras.

Já conhecemos o comprimento de cada uma das vigas AB, CM e AC da tesoura do telhado.

Figura 45: Todas as dimensões da tesoura.



Fonte: o autor.

Sabendo que o ponto D é ponto médio de AM e que o ponto F, o ponto médio de MB. Determine o comprimento de cada uma das vigas:

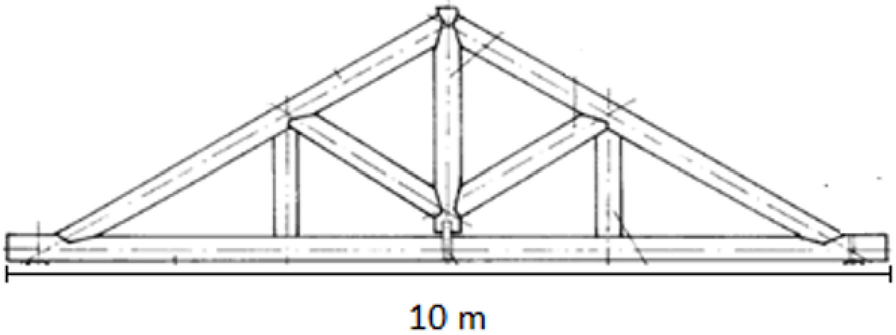
Obs: Neste exercício usaremos também a semelhança de triângulos para calcular os comprimentos das vigas DE e FG.

Viga	Comprimento da viga
DE	
EM	
GM	
FG	

4.2.6 TAREFA 5

Um fazendeiro está construindo um barracão para armazenar sementes e fertilizantes. Chegou o momento de começar a comprar os materiais que serão usados na cobertura do barracão. Serão construídas algumas tesouras como na figura abaixo.

Figura 46: Estrutura de tesoura do barracão.



Fonte: (IMENES; LELLIS, 1988).

Sabendo que as telhas a serem utilizadas serão do tipo francesa, o que requer uma inclinação de 40%, calcule quantos metros de vigas o fazendeiro terá que comprar.

4.3 ATIVIDADE 3: CIRCUNFERÊNCIA E ARCO.

- **Tópico a ser trabalhado:** Circunferência e arco.
- **Série:** Ensino médio.
- **Tempo estimado para realização da atividade:** 4 aulas.
- **Recursos necessários:** Material impresso, celular com acesso à internet, placa de isopor, barbante, compasso, transferidor, alfinetes, tesoura e régua.
- **Objetivo da atividade:** Deduzir a fórmula do comprimento da circunferência e aplicar o conceito em situações cotidianas.
- **Expectativa:** Espera-se que o aluno seja capaz de realizar as atividade propostas utilizando o raciocínio lógico dedutivo e conhecimentos previamente adquiridos.
- **Comentários para o professor:**

  Para a realização desta atividade é necessário que o professor elabore um kit com os materiais (descritos no item acima, recursos necessários) e o disponibilize para que seus alunos o retire na escola. A presente atividade está dividida em quatro tarefas. A tarefa 1 diz respeito a dedução da razão π. Para a realização dessa tarefa os alunos terão que recuperar o centro da circunferência, assim é necessário que o professor oriente-os a utilizar o compasso com máximo de precisão para que a recuperação do centro da circunferência seja a mais exata possível. Ainda na primeira tarefa, após a dedução da razão π, os alunos farão uma demonstração da equação que gera o comprimento da circunferência. A tarefa 2, é uma aplicação da equação do comprimento da circunferência. Essa tarefa está contextualizada com o meio rural, portanto cabe ao professor realizar as devidas adequações se houver necessidade. A tarefa 3 trabalha de maneira dedutiva a razão entre arcos e ângulos. Na tarefa 4 é trabalhado de maneira também dedutiva a razão entre Arcos e raios.

  Um tutorial sobre essa atividade está disponível no Youtube no canal PROF. LUCIANO T CAMARA. Link: https://youtu.be/aBZu1zDrjNI

4.3.1 APLICAÇÃO DA ATIVIDADE 3

Roda

A roda é talvez uma das invenções principais na trajetória de desenvolvimento tecnológico do ser humano. Com ela, os povos primitivos tornaram o transporte mais rápido e fácil, além de contribuir para transformar as primeiras aglomerações humanas em cidades maiores.

A prova mais antiga de seu uso data de cerca de 3500 a.C., e vem de um esboço em uma placa de argila encontrada na região da antiga Suméria, na Mesopotâmia (atual Iraque), mas é certo que sua utilização venha de períodos muito mais remotos.

As rodas mais antigas encontradas em explorações arqueológicas são de cerca de 3000 a 2000 a.C. e estavam em túmulos na mesma Mesopotâmia. Eram compostas de três tábuas presas por suportes em forma de cruz, e a tábua central possuía um furo natural no nó da madeira. A madeira em volta do nó costuma ser bastante resistente, por isso, acredita-se que esta girava em torno de um eixo fixo, apesar do restante do veículo à qual estas rodas pertencessem não tenha sido conservado o bastante para identificar se era assim mesmo que o conjunto funcionava.

Trecho retirado do texto “Roda” disponível em: www.infoescola.com/cultura/roda/

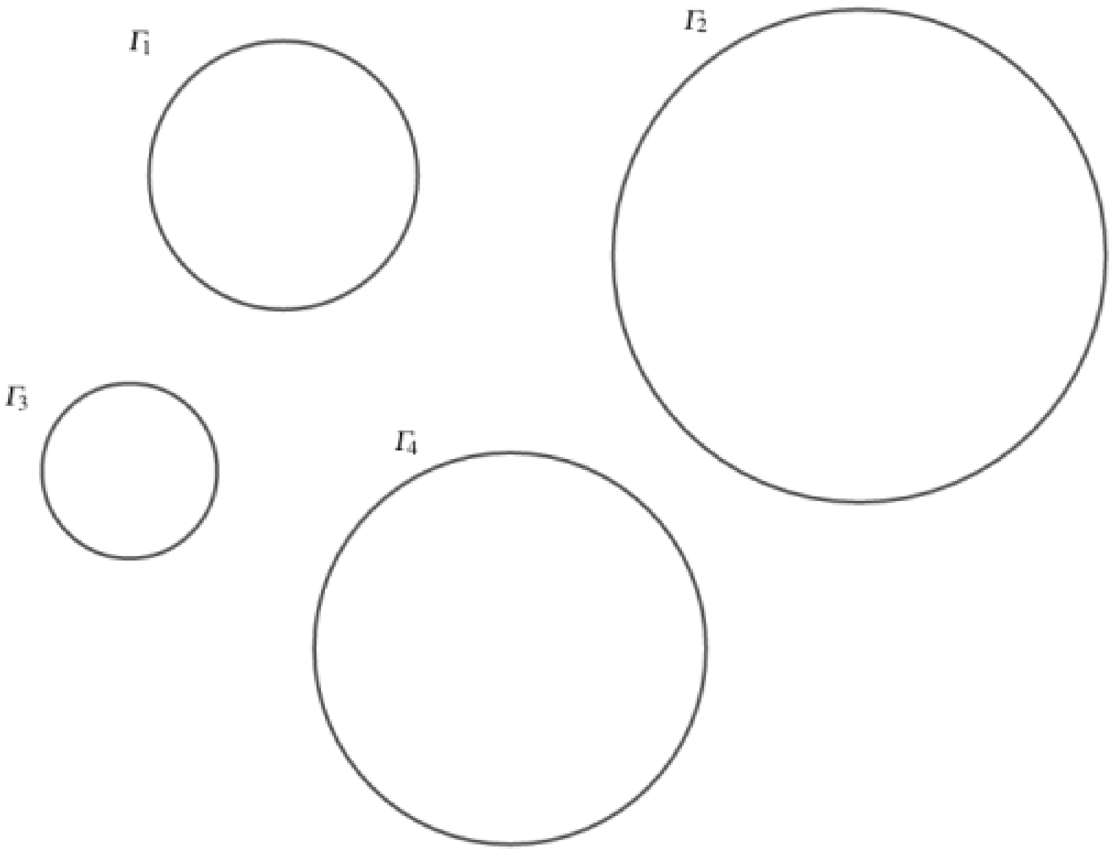
4.3.2 TAREFA 1

A razão π

Para a realização desta tarefa, precisaremos de uma placa de isopor, um pedaço de barbante, compasso, régua e tesoura.

a. Usando compasso recupere o centro das circunferência representadas abaixo.

Figura 47: Circunferências.



Fonte: o autor.

b. Coloque a folha com as circunferências sobre uma placa de isopor e com o auxílio de alfinetes e barbante, seguindo as orientações do professor, encontre o comprimento de cada uma delas.

c. Meça os diâmetros de todas as circunferências.

d. Complete a tabela abaixo com as medidas encontradas.

Circunferência	Diâmetro (d)	Comprimento (c)	Razão $\frac{c}{d}$
Γ_1			
Γ_2			
Γ_3			
Γ_4			

e. Calcule a média dos valores obtidos na última coluna.

Ao valor médio encontrado na última coluna da tabela do item anterior daremos o nome de π. Em outras palavras, podemos definir que π é a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência que sempre resultará em aproximadamente $3,14$.

f. Utilizando a razão π conclua que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi r$.

4.3.3 TAREFA 2

O aspersor é um dispositivo usado na irrigação de jardins e hortas.

Figura 48: Aspersor.

Fonte: www.amazon.com.br

Um fazendeiro comprou um aspersor que trabalha de forma circular e atinge 10 m de distância em relação ao ponto em que está fixado. O proprietário pretende cultivar alfaces em um canteiro circular nivelado e utilizar esse dispositivo para a irrigação, de modo que na circunferência do canteiro sejam plantadas mudas de pimentas a cada 50 cm e que estas também possam ser irrigadas. Quantas mudas de pimentas serão necessárias para o plantio? (use: $\pi = 3,14$)

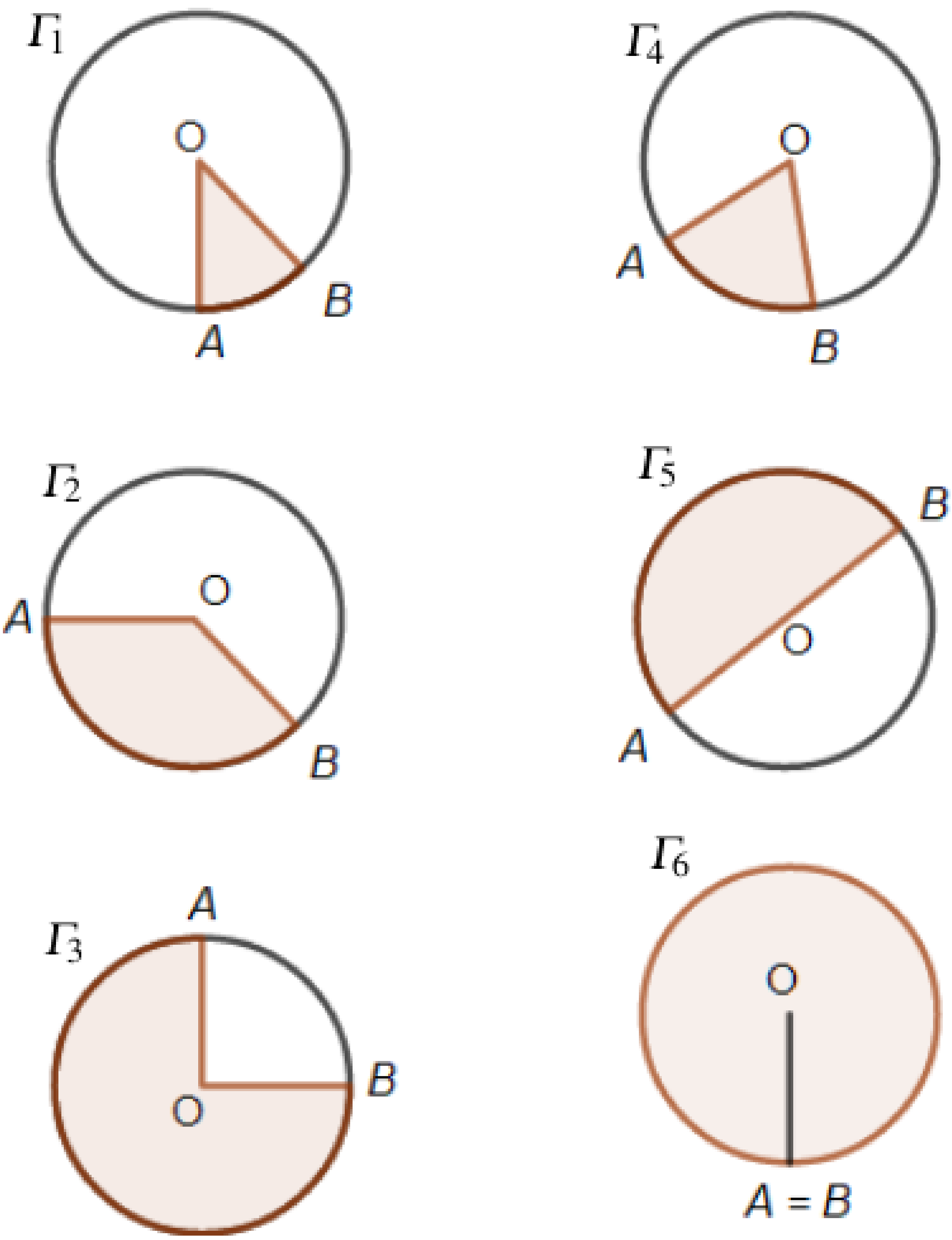
4.3.4 TAREFA 3

Para a realização da tarefa abaixo iremos precisar de tesoura, transferidor, régua e barbante.

Arcos e ângulos.

Observe os figuras abaixo:

Figura 49: Arcos e ângulos.



Fonte: o autor.

a. Para a realização dessa tarefa, siga os seguintes passos:

   1. Com o auxílio de um barbante e uma régua meça o comprimento dos arcos de todas as circunferência;
   2. Com um transferidor meça o menor ângulo $A\widehat{O}B$ em cada uma das circunferências.

   Agora complete a tabela abaixo.

Circunferência	Medida do arco (cm)	Medida do ângulo $A\widehat{O}B$
Γ_1		
Γ_2		
Γ_3		
Γ_4		
Γ_5		
Γ_6		

b. Calcule o comprimento das circunferências sabendo que o raio de cada uma delas mede 2 cm. (use: $\pi = 3,14$). (Obs.: Use a calculadora para a realização dos cálculos.)

c. Ao preenchermos a tabela acima podemos notar que quando o ângulo central aumenta, o arco que lhe é correspondente também aumenta. O que podemos concluir sobre esse aumento?

d. Crie uma nova coluna na tabela e calcule em cada circunferência a razão entre o arco e o ângulo central correspondente. Em seguida explique o que podemos observar em relação aos valores obtidos nessa nova coluna.

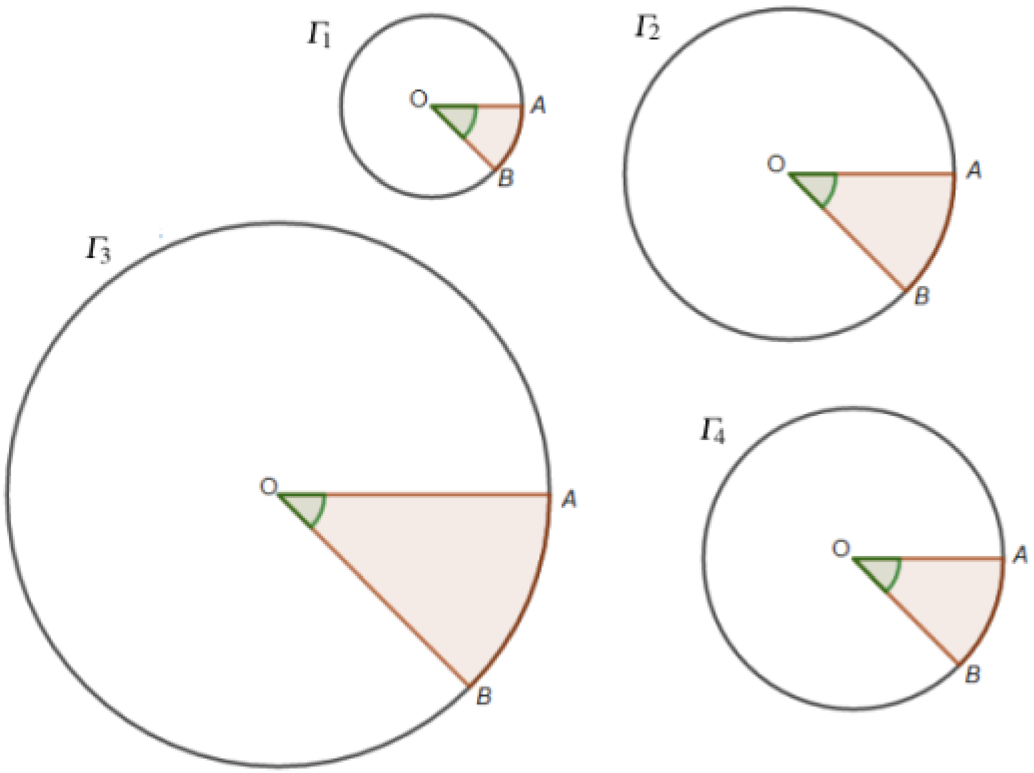
4.3.5 TAREFA 4

Arcos e Raios

Para a realização desta atividade precisaremos de tesoura, régua e barbante.

Observe as figuras abaixo:

Figura 50: Arcos e raios.



Fonte: o autor.

a. Com o auxílio de um barbante, régua e tesoura, se necessário, realize as medições e complete a tabela abaixo:

Circunferência	Medida do raio	Medida do arco AB	Razão $\dfrac{\text{medida do arco}}{\text{Medida do raio}}$
Γ_1			
Γ_2			
Γ_3			
Γ_4			

b. Mantendo o ângulo central, o que ocorre com o arco quando aumentamos o raio?

c. O que podemos concluir a respeito dos valores obtido na última coluna da tabela acima?

d. Qual o comprimento de um arco determinado sobre uma circunferência de raio 6 *cm*, por um ângulo de 60°?

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O raciocínio lógico desenvolve os sensos argumentativo e investigativo nos alunos e os auxiliam no momento de trabalhar com demonstrações. Inclusive é uma das competências exigidas pela BNCC.

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. (BRASIL, 2017, p.267)

Trabalhar com demonstrações é o caminho mais “sincero” para ensinar matemática, pois, ao testar hipóteses, estamos instigando no aluno o ato de refletir sobre algo ao invés de dar a ele algo pronto. Mostrar aos alunos de onde vem cada fórmula ou sentença matemática e, principalmente, provar que é verdadeiro é apresentar a eles algo novo: a investigação, que os auxilia no desenvolvimento de seu raciocínio lógico, além de enriquecer seu letramento matemático. No entanto, trabalhar com demonstrações não é uma tarefa tão simples, pois requer alguns cuidados e um bom planejamento das ações, principalmente porque os alunos, na sua maioria, acreditam que matemática é apenas números ou simplesmente resolução de exercícios. Quando partimos para as demonstrações, muitas vezes necessitamos abstrair conceitos e utilizar letras, o que causa estranhamento na sala de aula. Essa tarefa se torna ainda mais difícil quando temos que desenvolver as aulas na modalidade de ensino remoto.

No ano de 2020, fomos todos surpreendidos pela COVID-19 e tivemos que nos reinventar num curto intervalo de tempo. Uma das maiores indagações foi: Como ensinar matemática à distância? E como todos os outros profissionais da educação o professor se reinventou. O professor de Matemática ainda mais, afinal expressar a linguagem matemática utilizando apenas os recursos até então conhecidos, nem sempre era possível.

Sabemos que este ano letivo de 2021 será cheio de novos desafios e que a aula remota ainda estará presente em parte dele, pelo menos. Dessa forma, procuramos contribuir para a capacitação do professor, por meio de um material introdutório que possa auxiliá-lo a trabalhar com atividades dedutivas na modalidade do ensino remoto. Neste trabalho disponibilizamos ao leitor os recursos utilizados e atividades dedutivas elaboradas com a finalidade de explorar a lógica das demonstrações com enunciados contextualizados com o cotidiano da comunidade escolar, pois a falta de contextualização em enunciados de exercícios matemáticos é outro entrave para que o aluno perceba a importância desta ciência.

Podemos concluir que, apesar da distância é possível oferecer um ensino de qualidade, fazendo uso das tecnologias que dispomos e outras que virão. A educação é algo que deve ser revista constantemente, pois é imprescindível que possamos perceber as transformações que ocorrem, sejam elas decorrentes do desenvolvimento tecnológico ou não. No entanto, considerando que trabalhamos com jovens, os impactos da tecnologia são mais perceptíveis. Portanto, devemos notar que o uso de novas ferramentas deve ser algo a ser incorporado no cotidiano da sala de aula, não somente agora, mas de forma constante.

As atividades 1 e 2 foram aplicadas para alunos do ensino médio, porém, por questões burocráticas não foi possível disponibilizar as imagens da realização das mesmas.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da matemática antiga**. 10ª ed. Coleção fundamentos da matemática elementar. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BICUDO. **Os elementos**. 1ª ed. São Paulo: Unesp, 2009.

BONGIOVANNI, V. **O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico.** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 2, n. 1, p. 94–106, 2007.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo: Blucher, 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHAGAS, E. F. **Apresentando alguns aspectos históricos do desenvolvimento da lógica clássica, ciências das idéias e dos processos da mente.** Millenium, v. 29, p. 109–122, 2004.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometria Plana**. 9ª ed. Coleção Fundamentos de matemática elementar. São Paulo: Atual, 2013.

EVES, H. **Geometria: tópicos de história da matemática para uso em sala de aula.** São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.

HUNTER, D. J. **Fundamentos da matemática discreta**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Descobrindo o Teorema de Pitágoras**. 14ª ed. Coleção Vivendo a matemática. São Paulo: Scipione, 2000.

JÚNIOR, C. A. A.; NASSER, L. **Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental.** Revista Vidya, v. 32, n. 2, p. 15, 2012.

KELLER, V.; BASTOS, C. L. **Aprendendo lógica**. 17ª ed. Petrópolis - RJ: Vozes, 2008.

NETO, A. C. M. **Geometria**. 1ª ed. Coleçao Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

APÊNDICE A – IMAGENS DAS TAREFAS

Esse apêndice traz algumas imagens de possíveis soluções para algumas atividades dedutivas que foram propostas neste trabalho.

A.0.1 IMAGEM DA ATIVIDADE 1

Uma possível solução para a tarefa 5 da atividade 1.

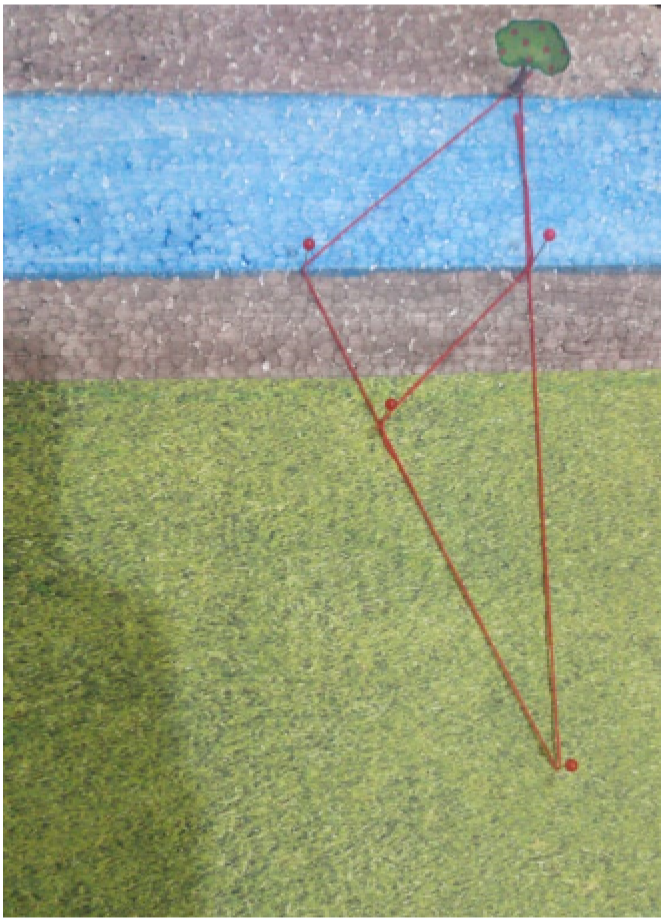
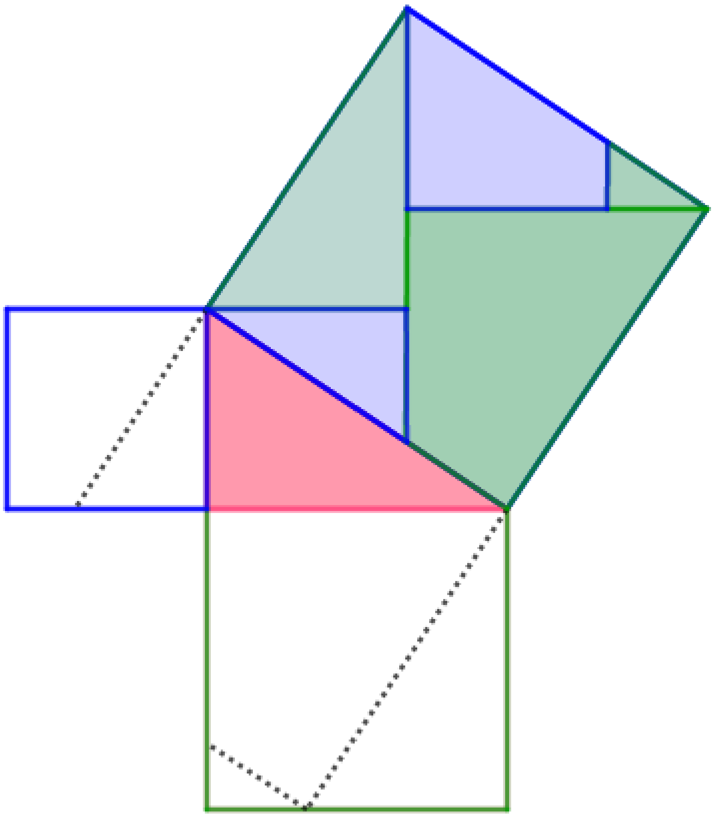


Figura 51: Aplicação do Teorema de Tales

A.0.2 IMAGEM DA ATIVIDADE 2

Uma possível solução para o quebra-cabeça, tarefa 1 da atividade 2.

Figura 52: Solução do quebra-cabeça.

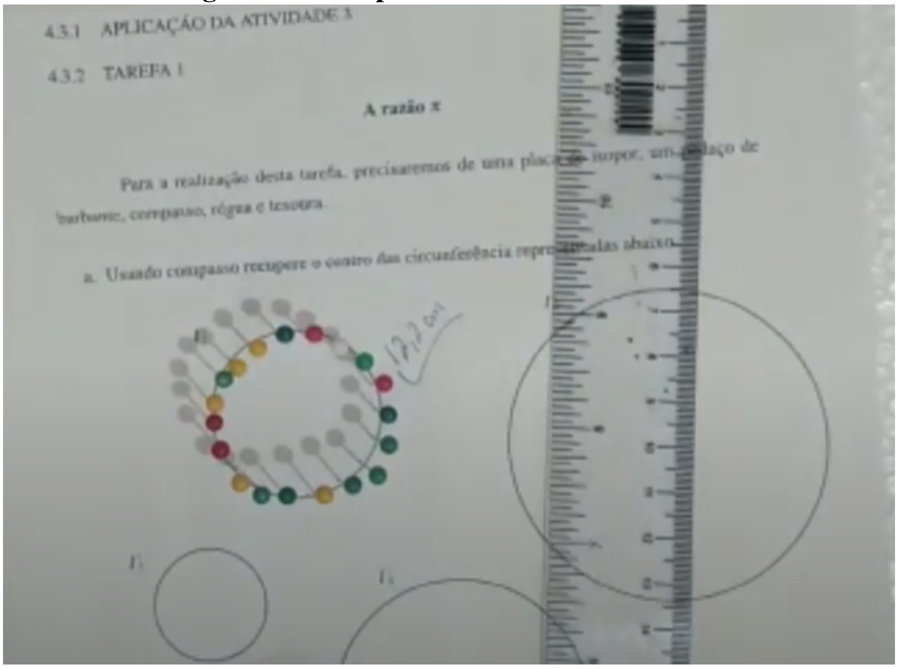


Fonte: o autor.

A.0.3 IMAGEM DA ATIVIDADE 3

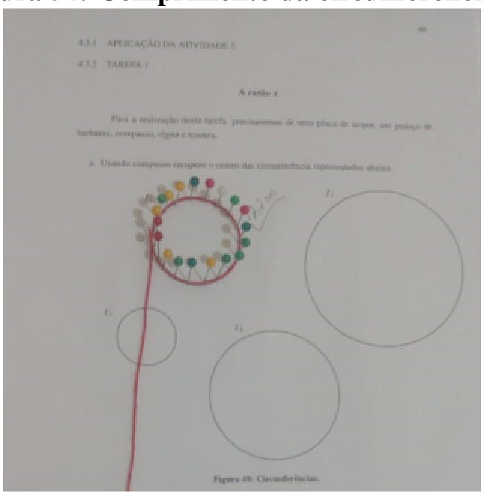
Calculando o comprimento da circunferência com material manipulável.

Figura 53: Comprimento da circunferência.



Fonte: o autor.

Figura 54: Comprimento da circunferência 2.



Fonte: o autor.