

A EXPLORAÇÃO
DO PENSAMENTO

ALGÉBRICO ATRAVÉS
DA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS

UM CURSO DE
EXTENSÃO

Ariane da Silva Landgraf
Andresa Maria Justulin

L O N D R I N A
2 0 2 1

ARIANE DA SILVA LANDGRAF

**A EXPLORAÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO ATRAVÉS DA
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM CURSO DE EXTENSÃO**

**ALGEBRIC THINKING'S EXPLORATION THROUGH PROBLEM SOLVING:
AN EXTENSION COURSE**

Produto educacional da dissertação de mestrado intitulada "Pensamento Algébrico e a Resolução de Problemas: contribuições para a formação docente, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Andresa Maria Justulin.

LONDRINA

2021



4.0 Internacional

Esta licença permite que outros remixem, adaptem e criem a partir do trabalho para fins não comerciais, desde que atribuam o devido crédito e que licenciem as novas criações sob termos idênticos.

Conteúdos elaborados por terceiros, citados e referenciados nesta obra não são cobertos pela licença.



Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Londrina



ARIANE DA SILVA LANDGRAF

PENSAMENTO ALGÉBRICO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DOCENTE

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestre Em Ensino De Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Ensino De Matemática.

Prof.a Andresa Maria Justulin, - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof.a Fabiane Cristina Hopner Noguti, Doutorado - Universidade Federal de Santa Maria (Ufsm)

Prof Henrique Rizek Elias, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Documento gerado pelo Sistema Acadêmico da UTFPR a partir dos dados da Ata de Defesa em 14/12/2021.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	5
FORMAÇÃO DOCENTE	6
ÁLGEBRA	8
AS CONCEPÇÕES E O ENSINO DE ÁLGEBRA	8
ÁLGEBRA NA BNCC	9
O PENSAMENTO ALGÉBRICO	10
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	12
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO: BREVE HISTÓRICO E CONCEPÇÕES	12
METODOLOGIA DE ENSINO- APRENDIZAGEM- AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	13
O CURSO DE EXTENSÃO	16
CONSIDERAÇÕES	28
REFERÊNCIAS	29

APRESENTAÇÃO

Prezado(a) professor(a),

Este trabalho é um produto educacional construído a partir de uma pesquisa de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT), intitulada “PENSAMENTO ALGÉBRICO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DOCENTE”, disponível no Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) .

Se você veio até aqui, acreditamos que se interessa pela Resolução de Problemas e pela Álgebra. Dessa forma, desejamos conseguir te ajudar nesse caminho que está trilhando, bem como tirar algumas dúvidas e colaborar com novas fontes.

Nesse sentido, se você é professor e está iniciando o uso da Resolução de Problemas em suas aulas, indicamos que leia a dissertação também, pois suas dúvidas podem ser as mesmas dos professores participantes da pesquisa e, assim, a contribuição do nosso trabalho será ainda maior. Esperamos te orientar em relação ao uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a qual pode ser adaptada para o ensino remoto. Além disso, os problemas apresentados podem ser modificados e utilizados para outras habilidades e conteúdos.

Paralelamente ao uso da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, a Álgebra e o pensamento algébrico são destaques neste material. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) trata a Álgebra como uma Unidade Temática, que deixa de ser abordada juntamente com o campo dos Números. Com isso, muitas são as dúvidas dos professores acerca da exploração do pensamento algébrico, que passa a ser valorizado desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. A Álgebra assume seu papel de importante ferramenta matemática, que os alunos irão explorar como generalizadora da aritmética, equação, função ou símbolo abstrato.

Este material foi elaborado com a finalidade de promover suporte para o desenvolvimento profissional docente e de apresentar a Resolução de Problemas como um caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Esperamos auxiliar na construção de novos cursos de extensão voltados à formação de professores e contribuir para o desenvolvimento de novas práticas, a fim de que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas chegue até as salas de aulas e proporcione experiências para que os alunos se tornem protagonistas e participantes ativos na construção de seu conhecimento.


A FORMAÇÃO DOCENTE

A formação docente, tanto inicial quanto continuada, requer atenção, pois os professores são os agentes responsáveis pelo processo educativo. Segundo Shulman (2014), o professor tem responsabilidade sobre o conhecimento do conteúdo, pois ele é a primeira fonte do conhecimento, aquele que apresenta o conteúdo ao aluno. Ele é responsável pela forma como essa compreensão é comunicada, se ensina ao aluno o que é essencial e periférico na disciplina, etc. Diante da diversidade de alunos, o professor deve ter uma compreensão multifacetada e adequada à oferta de explicações diferentes dos mesmos conceitos e princípios.

Destaca-se que “o saber não é uma substância ou um conteúdo fechado em si mesmo; ele se manifesta através de relações complexas entre o professor e seus alunos” (TARDIF, 2014, p. 13). Desse modo, nota-se a importância da integração entre a escola, o aluno e a comunidade, visando tornar o conhecimento coletivo. Assim, ensinar requer “mobilizar uma ampla variedade de saberes, reutilizando-os no trabalho para adaptá-los e transformá-los pelo e para o trabalho” (TARDIF, 2014, p. 21).

Nesse sentido, o saber do professor pode ser compreendido em uma relação profunda com o trabalho que desempenha, envolvendo uma diversidade de saberes. É um saber “plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais” (TARDIF, 2014, p. 36).

Com a preocupação em atender esse pluralismo de saberes, “pesquisas vêm evidenciando a necessidade de que, em programas de formação, os conteúdos matemáticos sejam visitados e revisitados, mas é necessário pensar sob que olhar isso deveria acontecer” (NACARATO; PAIVA, 2008, p. 14). Shulman (1986 apud JUSTULIN, 2014) aponta a existência de três categorias de conhecimento do professor: de conteúdo, pedagógico do conteúdo e curricular. O primeiro envolve o domínio do conteúdo específico da área de conhecimento em que o professor é especialista. Já a forma como o professor “facilitará” o conteúdo para que o estudante possa compreendê-lo corresponde ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Segundo o autor, esse conhecimento se refere ao que é objeto de ensino/aprendizagem, aos procedimentos didáticos e a tudo que o docente adota em sala de aula para possibilitar a aprendizagem de um conteúdo específico. O conhecimento curricular, por sua vez, se refere ao conhecimento do currículo, em que o professor identificará quais conteúdos devem ser ensinados nos diferentes níveis de ensino, e fará as escolhas dos materiais didáticos a serem utilizados para garantir a aprendizagem dos alunos.



Shulman (2014) incluindo novas categorias com relação às apresentadas anteriormente: conhecimento do conteúdo; conhecimento pedagógico geral, relacionado ao gerenciamento e à organização na sala de aula; conhecimento do currículo, voltado aos materiais e programas; conhecimento pedagógico do conteúdo, ligado à compreensão profissional; conhecimento dos alunos e de suas características; conhecimento de contextos educacionais, que vai desde o funcionamento da sala de aula, passando pela gestão dos sistemas educacionais, até às características das comunidades e suas culturas; e conhecimento dos fins, propósitos e valores da educação e de sua base histórica e filosófica.

Em relação ao modo como a formação de professores tem acontecido no contexto da Resolução de Problemas, Fiorentini (2011) destaca seis abordagens principais: (1) “Ensinar para a resolução de problemas”, na qual os professores começam trabalhando com conteúdos de Matemática, e em seguida, com problemas de aplicação, geralmente, fechados e que precisam de conceitos e procedimentos adquiridos; (2) “Ensinar sobre Resolução de Problemas”, em que o professor precisa conhecer a teoria sobre Resolução de Problemas – o que é feito na formação inicial, por exemplo, com uma disciplina isolada sobre Resolução de Problemas; (3) “Aprender sobre a Resolução de Problemas”, que é uma variação da abordagem anterior e enfatiza a necessidade de o professor assumir um papel central na construção de conhecimentos sobre a Resolução de Problemas, o formador propõe bibliografias ou recursos para o desenvolvimento de atividades; (4) “Propõe que o professor-aluno vivencie (...) práticas com/através ou via resolução de problemas, sem necessariamente teorizá-las ou problematizá-las” (FIORENTINI, 2011, p. 70); (5) Esta abordagem é variante da anterior e tem a “intencionalidade explícita de problematizar e teorizar a vivência, da formação inicial, de práticas com/através ou via resolução de problemas” (FIORENTINI, 2011, p. 70) e (6) Esta abordagem “com forte impacto no desenvolvimento profissional docente, é a investigação sobre a própria prática de ensinar/aprender matemática em um ambiente exploratório- investigativo ou de resolução de problemas” (FIORENTINI, 2011, p. 70).

ÁLGEBRA

Nesta seção, serão apresentadas brevemente as concepções e o ensino da Álgebra, como a Álgebra passou a ser trabalhada na BNCC (BRASIL, 2018) com foco no Ensino Fundamental anos finais, e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

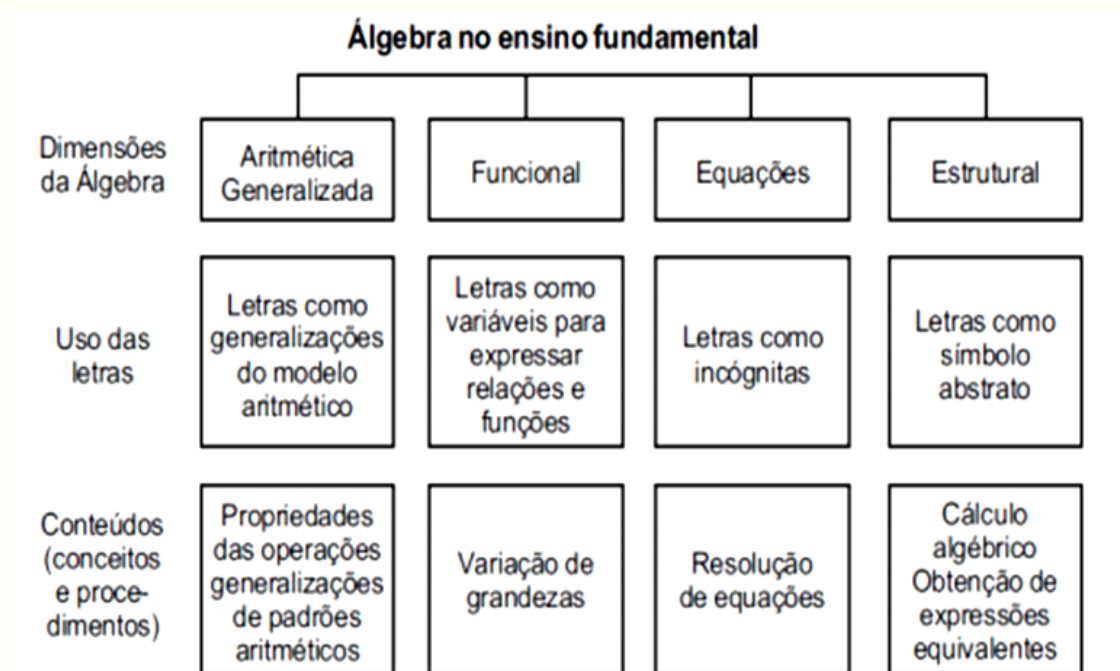
AS CONCEPÇÕES E O ENSINO DE ÁLGEBRA

Segundo Miguel, Fiorentini e Miorim (1992 apud ARAUJO, 2008), desde que a Álgebra passou a ser um conteúdo do currículo escolar brasileiro, até a década de 60, prevaleceu um ensino reprodutivo e mecânico, apresentado com um caráter instrumental, com a utilidade de apenas resolver equações e problemas propostos.


Para Santos e Santos (2010), é possível notar facilmente que o ensino da Matemática, e o caso particular da Álgebra, se encontram desassociados da realidade de alunos e professores. Nesse sentido, essas dissociações provocam dificuldades no ensino do professor e na aprendizagem dos alunos – fator relacionado à forma como a Álgebra é tratada por livros didáticos e como tem sido ensinada por professores em sala de aula, conforme Kieran (1992 apud SANTOS; SANTOS, 2010).

As concepções de Álgebra dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) são apresentadas no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – As dimensões de álgebra no Ensino Fundamental segundo os PCN



Fonte: Brasil (1998, p. 116).



Segundo Pinheiro (2019), a Álgebra é referida como o ramo da Matemática elementar, que possui papel de generalizar situações aritméticas, introduzindo letras como variáveis, com função de representar números, simplificando e resolvendo problemas que envolvem equações ou inequações, nos quais as grandezas são incógnitas representadas por símbolos.

Onuchic e Allevalo (2011) defendem que é essencial que os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental explorem conceitos algébricos de uma maneira informal, para que consigam construir uma fundamentação para o estudo formal. Nessa perspectiva, o trabalho Pré-Álgebra – que consiste na transição da Aritmética para Álgebra – é essencial. No entanto, infelizmente, a maioria dos cursos de Álgebra iniciam-se com o uso de letras como objetos matemáticos e prosseguem com as operações possíveis com os mesmos.


ÁLGEBRA NA BNCC

Atualmente, os conhecimentos matemáticos estão organizados em cinco Unidades Temáticas na BNCC (BRASIL, 2018): Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Conforme o documento, as competências podem ser definidas como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades práticas, cognitivas e socioemocionais, atitudes e valores, para resolver a demanda da vida cotidiana, do exercício de cidadania e do mundo do trabalho.

Em relação à Álgebra no Ensino Fundamental, foi a partir de 2017, com a reformulação da BNCC (BRASIL, 2018), que ela passou a aparecer como Unidade Temática a ser explorada desde os anos iniciais. Nesse sentido, as orientações são:

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento- pensamento algébrico- que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemática, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018, p. 270).

Já para os anos finais do Ensino Fundamental, o documento orienta que:



[...] os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam o que foi trabalhado no Ensino Fundamental- Anos Iniciais. Nessa fase, os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação (BRASIL, 2018, p. 270-271).

A BNCC (BRASIL, 2018) traz mudanças não apenas na classificação das Unidades Temáticas, como também no papel de cada uma delas. No caso da Álgebra, o desenvolvimento do pensamento algébrico é recomendado desde os anos iniciais, o que auxilia nos processos de abstração e generalização.

PENSAMENTO ALGÉBRICO

Ponte (2006) afirma que o grande objetivo do estudo da Álgebra em sala de aula está atrelado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, e inclui que a capacidade de manipulação da simbologia vai além de estudos mecanizados de expressões, equações e funções.

O pensamento algébrico ou raciocínio algébrico envolve formar generalização a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda matemática e é essencial para torná-la útil na vida cotidiana (VAN DE WALLE, 2009, p. 287).

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) considera que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, da simbolização, da modelação e da variação. Nessa direção, o aluno deve compreender padrões, relações e funções; representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos; usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e analisar mudança em diversas situações (estudo da variação) (NCTM, 2000).

Sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, destaca-se que:

[...] são considerados dois objetos centrais: o primeiro é permitir que, os alunos sejam capazes de produzir significados para a álgebra, e o segundo é que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente. Assim, o desenvolvimento de habilidades e técnicas seria uma consequência, e propõem a articulação de recursos postos em jogo na resolução de problemas ou na condução de uma investigação. (LAIER, 2014, p. 40).



Nobre, Amado e Carreira (2009) apontam que, nos primeiros anos, os alunos aprendem a simbologia ligada às operações aritméticas, como o sinal de igual, de mais, de menos, os quais também estão presentes na álgebra, embora possuam significados diferentes. Desse modo, surge a necessidade de desenvolver uma nova compreensão desses símbolos. Assim, pode-se perceber que a compreensão dos símbolos é algo muito complexo, que requer muitas experiências de aprendizagem, as quais devem ser mais elaboradas e ocorrer ao longo de todo o percurso escolar. O aluno pode ter o pensamento algébrico desenvolvido, no entanto, pode não compreender a simbologia algébrica.

Portanto, compreender como deve ser o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico e a relação entre o pensamento e a linguagem algébrica faz-se importante para o professor de Matemática. Para Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007), o pensamento algébrico está próximo dos alunos: eles chegam à escola com um grande potencial para pensar algebricamente, só precisam ser encorajados a desenvolverem suas potencialidades em um ambiente favorável.



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção inicialmente será apresentado um breve histórico e as concepções da resolução de problemas, bem como o roteiro da Metodologia de Ensino- Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, conceitos como problemas geradores, e o uso da metodologia em sala de aula.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO: BREVE HISTÓRICO E CONCEPÇÕES

Um dos autores pioneiros a discutir e alavancar a resolução de problemas, em 1944, foi George Polya. No Brasil, ele ficou conhecido por meio do livro “How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method”, traduzido como “A arte de resolver problemas”. Nesta obra, Polya (2006) apresenta quatro fases que considera importante no processo de resolver um problema. Inicialmente, é necessário compreender o problema e os dados fornecidos, pois só se pode resolver o que é compreendido; em seguida, deve-se elaborar um plano de resolução para, então, executá-lo. Por fim, é essencial examinar a solução obtida e validá-la (POLYA, 2006). Sua pesquisa vai além das quatro fases apresentadas, voltando-se para a melhoria das habilidades de resolver problemas, conforme pontuam Morais e Onuchic (2014).

Segundo Morais e Onuchic (2014), a Resolução de Problemas faz-se como abordagem metodológica na primeira metade do século XX, pressupondo aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando papéis diferentes, visando uma aprendizagem com mais significado.

O grande marco da associação entre a Resolução de Problemas e a aprendizagem, ao menos na teoria, ocorreu com a publicação do documento “An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980’s”, traduzido como “Uma agenda para a ação: Recomendações para a Matemática escolar na década de 1980”, pelo NCTM, o qual indicou que a Resolução de Problemas deveria ser o foco da Matemática escolar naquela década.

Schroeder e Lester (1989) defendem que há três formas de se conceber a resolução de problemas: (1) Ensinar sobre a resolução de problemas, na qual se recomenda teorizar a resolução como mais um conteúdo a ser ensinado, (2) Ensinar para a resolução de problemas, que se caracteriza pelo ensino focado em resolver os problemas, na qual o propósito é ser capaz de utilizar os conteúdos já aprendidos e (3) Ensinar via ou através da resolução de problemas, que considera a resolução de problemas como um meio de ensinar Matemática, na qual o problema é ponto de partida para a atividade matemática e o gerador do novo conteúdo a ser construído pelo aluno, tendo professor como mediador.

Neste trabalho, adotamos a recomendação de Onuchic e Allevato (2004) a respeito do uso da resolução de problemas no início de um conteúdo, destacando sua potencialidade na construção de conceitos matemáticos, e valorizando o que os alunos já dispõem de conceitos construídos.



Em relação à resolução de problemas, os PCN (BRASIL, 1998, p. 52) salientam que:

[...] a Resolução de Problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problemas novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejamento de etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções, desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 266), o Ensino Fundamental deve contribuir para o letramento matemático, ou seja, para “competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos”.

Ao longo do tempo, professores e pesquisadores vêm trabalhando a Resolução de Problemas de maneiras distintas e revelando novas concepções.


Considerada o “coração” da atividade matemática, a resolução de problemas tem sido a força propulsora para a construção de novos conhecimentos e, reciprocamente, novos conhecimentos proporcionam a proposição e resolução de intrigantes e importantes problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 35).

Na direção de um trabalho que busque promover o ensino de Matemática considerando o problema como ponto de partida, localiza-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que será abordada detalhadamente a seguir.

METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para fazer com que o estudante se torne um sujeito ativo na construção de conhecimentos em sala de aula, e o professor exerça o papel de mediador, são propostas novas possibilidades metodológicas no ensino de Matemática. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é um desses caminhos, pois permite que o aluno desenvolva sua autonomia ao explorar novos conhecimentos e conceitos a partir de problemas propostos pelo professor.

Segundo Allevato e Onuchic (2014), embora o ensino, a aprendizagem e a avaliação de Matemática sejam elementos distintos, que não ocorrem necessariamente ao mesmo tempo ou como decorrência do outro, seria ideal que o ensino e a aprendizagem se realizassem integrados, desse modo, não seria raro utilizar-se da expressão ensino-aprendizagem. Os autores acrescentam que,



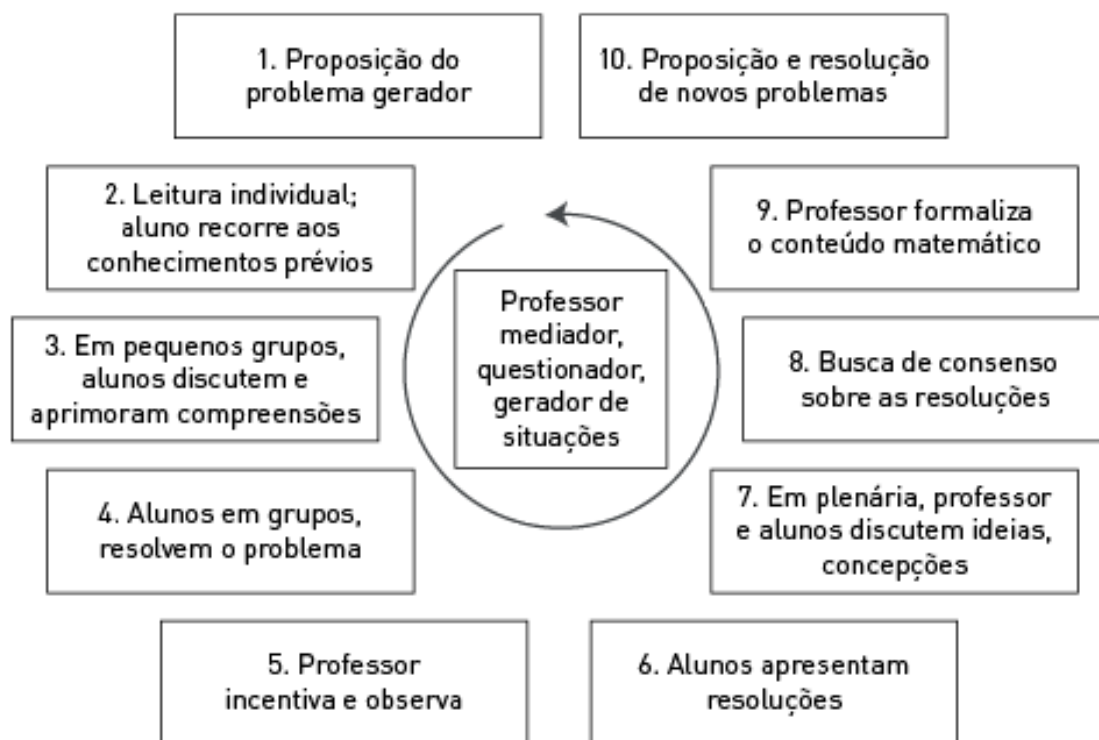
mais recentemente, o conceito de avaliação começou a ser repensado a partir da necessidade de uma avaliação formativa e contínua, passando a ser mais incorporada nos processos e menos no julgamento dos resultados neles obtidos.

Dando continuidade aos estudos e pesquisas em como trabalhar a Matemática através da Resolução de Problemas, “passamos a empregar a expressão ensino- aprendizagem-avaliação, dentro de uma dinâmica que integra a avaliação às atividades de sala de aula e que entendemos como uma metodologia” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 43).

No ensejo de auxiliar os professores na implementação da metodologia, Onuchic (1999) criou um roteiro que pretendia orientá-los – e que foi modificado ao longo dos anos a partir da realização de novas pesquisas. No trabalho de Allevato e Onuchic (2014), tem-se a seguinte configuração de roteiro:

- 1. Preparação do Problema:** consiste na preparação e seleção do chamado “problema gerador”, visando à construção de algum conceito matemático que ainda não foi trabalhado em sala de aula.
- 2. Leitura Individual:** os alunos devem receber uma cópia do problema selecionado e realizar uma leitura individual.
- 3. Leitura em conjunto:** deve ser realizada uma leitura em conjunto a partir da formação de grupos e, caso haja necessidade, o professor também pode realizar a leitura e tirar dúvidas sobre palavras difíceis ou desconhecidas.
- 4. Resolução do problema:** sem dúvidas quanto ao enunciado, ocorre a resolução do problema a partir dos entendimentos dos alunos e do trabalho cooperativo – é o momento em que os alunos assumem o papel de construtores do próprio conhecimento.
- 5. Observar e incentivar:** o professor deve observar e incentivar seus alunos, assumindo o novo papel de levá-los a pensar, dando-lhes tempo e instruindo o compartilhamento de ideias.
- 6. Registro das resoluções na lousa:** ocorre o registro das resoluções encontradas, no qual um representante de cada grupo escreve no quadro a resolução encontrada em consenso pelo seu grupo, estando certa ou não.
- 7. Plenária:** nesta etapa, acontece uma plenária com discussões sobre as resoluções registradas, defesa dos pontos de vista e esclarecimento de dúvidas. O professor também assume o papel de guia e mediador, constituindo um momento muito rico para a aprendizagem.
- 8. Busca do consenso:** ocorre a busca por um consenso geral da sala para encontrar um resultado correto e satisfatório.
- 9. Formalização do conteúdo:** o professor deve apresentar o conteúdo de maneira formal, organizada e estruturada em linguagem matemática, com padronização de conceitos, princípios e procedimentos envolvidos no problema.
- 10. Proposição e resolução de novos problemas:** nesta última fase, o professor deve propor novos problemas para que os alunos possam aplicar o conteúdo construído.


Figura 1 – Fluxograma Metodologia de Ensino- Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas



Fonte: Onuchic et al (2021).

Após a conclusão do roteiro, de acordo com as autoras, o aluno identificará novos conceitos e teorias matemáticas que foram construídos durante o processo da metodologia desenvolvida e, desse modo, conseguirá relacioná-los de maneira mais significativa e efetiva.

O CURSO DE EXTENSÃO



Nesta seção, apresentamos a sugestão de estrutura de um curso de extensão voltado para a formação de professores, de modo a trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico através da Resolução de Problemas. São trazidos problemas geradores que foram validados durante o curso “A exploração do pensamento algébrico através da Resolução de Problemas”, por nós oferecido.

Objetivo Geral

Explorar, com os participantes, possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas adaptada ao ensino remoto, apoiando-se nas orientações da nova BNCC (BRASIL, 2018).

Objetivo Específico

- 1) Traçar um perfil dos participantes por meio de dados como idade, período da graduação, tempo de serviço no magistério, local onde realizou a formação inicial e nível de ensino em que trabalha;
- 2) Promover a reflexão sobre o modo como os participantes desenvolvem sua aula de Matemática e como trabalham a resolução de problemas;
- 3) Apresentar para os participantes a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e explorá-la nos encontros;
- 4) Solicitar que os participantes desenvolvam planos de aula para implantação dessa metodologia em sala de aula.

Participantes

Professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio, bem como licenciandos em Matemática.

Conteúdos a serem trabalhados

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; Álgebra escolar; habilidades de Álgebra do 6º e 7º ano propostas na BNCC (BRASIL, 2018).

Carga horária e desenvolvimento

Sugerimos a carga horária em torno de 25 horas, divididas em sete encontros e organizadas em momentos síncronos e assíncronos – com certificação.

Os participantes podem se reunir em encontros síncronos via Google Meet. O uso da plataforma Google Classroom é pertinente para a disponibilização e organização de materiais aos participantes e, também, para postagem das atividades e da proposta final de aula de cada um. Além disso, os participantes devem responder a questionários para auxiliar os formadores em ações específicas ao longo do curso e na avaliação das aprendizagens dos participantes.

O Quadro 2 é uma sugestão de organização dos encontros e das ações formativas a serem realizadas.

Quadro 2 – Estrutura sugerida para um curso de formação de professores

Encontro		Duração	Ações
0	Assíncrono	5h	<p>Preenchimento do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.</p> <p>Questionário inicial para levantamento do perfil dos participantes e de como compreendem a resolução de problemas e ensino de Álgebra.</p> <p>Google Classroom: 1. Leitura inicial sobre Resolução de Problemas, Texto 1: Allevato e Onuchic (2014) e Texto 2: Allevato e Onuchic (2009).</p> <p>2. Disponibilizar um link do Google Meet para acesso aos encontros síncronos.</p>
1	Síncrono	2h30	<p>Apresentação das pesquisadoras e participantes. Explicação da dinâmica do curso.</p> <p>Discussões:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sobre Resolução de Problemas e seu uso em sala de aula, de acordo com os Textos 1 e 2; • Sobre as habilidades da BNCC e as mudanças do documento em relação a propostas anteriores.
2	Assíncrono	5h	<p>Ação: O participante deverá encaminhar, via <i>Google Classroom</i>, um problema que usaria para trabalhar Álgebra, justificando o objetivo e conteúdo abordado.</p> <p>No Google Classroom:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Solicitar que os participantes façam a leitura dos textos sobre as temáticas: Aritmética Generalizada e os caminhos do ensino de Álgebra; Pensamento algébrico e o ensino de Álgebra, Texto 3: Coxford e Shulte (1995) e Texto 4: Nobre, Amado e Carreira (2009); • Disponibilizar as habilidades da BNCC discutidas anteriormente.

3	Síncrono	2h30	Encontro Prático
4	Síncrono	2h30	Encontro Prático
5	Assíncrono	5h	<p>Encontro Prático de forma assíncrona:</p> <p>Solicitar que cada participante escolha ao menos um problema gerador que levaria para aplicação da metodologia em sala de aula e que monte um plano de aula e uma apresentação final, incluindo: apresentação do problema, possíveis resoluções, ano escolar em que será aplicado, quais habilidades da BNCC contempla e o conteúdo formalizado.</p> <p><i>Google Classroom:</i> Definir a data de entrega do plano de aula.</p>
6	Síncrono	2h30	<p>Apresentação dos planos de aula, com destaque aos problemas e aos encaminhamentos da aula.</p> <p>Questionário final a ser respondido logo após a elaboração do plano de aula.</p> <p>Esclarecimento de dúvidas.</p>

Fonte: elaborado pelas autoras.

A partir da experiência realizada, descrevemos os objetivos, textos, problemas e encaminhamentos abordados em cada encontro do nosso curso. No entanto, esses elementos podem ser alterados de acordo com a realidade dos participantes do curso, inserindo novas leituras ou problemas.

Encontro 0 - Assíncrono

Objetivos:

1. Explicar a dinâmica do curso e sua organização.
2. Conhecer, por meio de um questionário, o perfil dos participantes.
3. Identificar o que cada participante conhece sobre Resolução de Problemas, ensino de Álgebra e pensamento algébrico.

Textos trabalhados:

- Texto 1: Allevato e Onuchic (2014).
- Texto 2 Allevato e Onuchic (2009).



Encontro 1 - Síncrono

Objetivos:

1. Mostrar a trajetória da Resolução de Problemas e suas concepções, bem como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Resolução de Problemas.
2. Discutir brevemente sobre a Resolução de Problemas em sala de aula e as mudanças da BNCC (BRASIL, 2018).

Temáticas abordadas:

- Apresentação sobre a evolução histórica da Resolução de Problemas, suas concepções, e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
- Discussão sobre a utilização da Resolução de Problemas em sala de aula.
- Breve introdução sobre o ensino de Álgebra e as mudanças na BNCC (BRASIL, 2018), com destaque para as habilidades do 6º e 7º ano.

Considerações sobre as discussões:

No primeiro encontro do nosso curso, as discussões se deram em torno de alguns pontos: a prática de cada professor e a forma com que trabalham a Resolução de Problemas em sala de aula; a diferença entre problema e exercício; a Resolução de Problemas na BNCC (BRASIL, 2018) e a apresentação do roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Depois disso, as considerações foram em relação à escolha de bons problemas geradores, visto que os participantes, nos próximos encontros, também fariam a seleção de problemas e explicitariam como desenvolveriam (ou já desenvolveram) sua aula fazendo uso da referida metodologia. Ressaltamos que trabalhar esses pontos com os participantes possibilitou o envolvimento e a participação ativa deles.

Encontro 2 - Assíncrono

Objetivos:

1. Investigar, por meio da primeira ação, as dificuldades dos participantes em trabalhar a Resolução de Problemas.
2. Apresentar, por meio de artigos, conceitos envolvendo o ensino de Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico.



Textos trabalhados:

Texto 3: Coxford e Shulte (1995) e Texto 4: Nobre, Amado e Carreira (2009), com as seguintes temáticas: aritmética generalizada e caminhos do ensino de Álgebra; pensamento algébrico, o ensino de Álgebra e habilidades da BNCC (BRASIL, 2018).

Considerações:

A leitura prévia foi incentivada e solicitada aos participantes, o que foi possível porque o cronograma do curso alternava semanas com momentos síncronos e assíncronos. A fundamentação teórica possibilitou que os professores a relacionassem com a prática, o que iniciou um processo reflexivo necessário na formação docente.

Encontro 3- Síncrono

Objetivos:

1. Discutir o Problema 1, de acordo com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e com as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018).
2. Apresentar diversas possibilidades de problemas para serem utilizados em sala de aula.

Desenvolvimento:

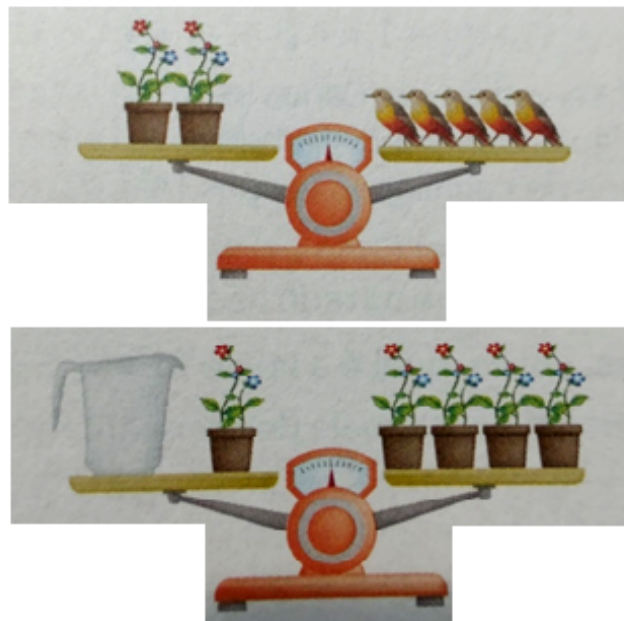
Nesse encontro, inicialmente, foram desenvolvidas discussões sobre qual concepção de Álgebra é a mais utilizada e explorada pelos professores e pelos participantes, em especial, ao longo do currículo. Esse levantamento nos possibilitou perceber se eles realizaram as leituras propostas no momento assíncrono e, também, esclarecer possíveis dúvidas existentes. Foi o momento de retomar as ideias do texto e relacioná-las com as práticas e o currículo de Matemática.

Em seguida, apresentamos aos participantes o Problema 1, que foi discutido fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, com adaptações ao ensino remoto. Assim, sugerimos que os participantes sejam divididos em grupos menores, em novas salas do Google Meet ou pelo aplicativo de mensagens WhatsApp. Cada grupo realizou as discussões e resoluções do Problema 1 e, posteriormente, as transformaram em imagens. Ao voltar para a sala principal no Google Meet, realizamos a plenária utilizando o Jamboard – um quadro branco inteligente que possibilita realizar reuniões, rabiscar, exibir apresentações, inserir imagens, bem como salvar as modificações realizadas. Destacamos que, nesse momento, também pode ser utilizado outro site de interação online que possua essa mesma funcionalidade. Após isso, o formador pode realizar a apresentação (ou a indicação) de qual conteúdo é explorado no problema proposto, bem como propor outros problemas.

Problema trabalhado:

PROBLEMA 1: BALANÇAS (BIANCHINI, 2018, p. 121)

Nas figuras a seguir, as balanças estão equilibradas. Sabendo que a massa de cada sabiá é igual a 90 gramas e que os vasos têm massas iguais entre si, qual é a massa em gramas de cada vaso com flor? E qual é a massa da jarra?




Habilidade BNCC: EF06MA14 - Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

Possíveis resoluções esperadas no Ensino Fundamental:

Neste primeiro problema, espera-se uma solução algébrica, visto que o conteúdo de equações não deve ter sido abordado.

Desse modo, a resolução apoia-se na ideia de igualdade. O problema mostra uma balança equilibrada, em que a soma da massa de dois vasos é equivalente à soma da massa de cinco sabiás. O problema ainda fornece a massa de cada sabiá, que é de 90 gramas. Para resolvê-lo, pode-se somar a quantidade de 90 gramas cinco vezes: $90+90+90+90+90 = 450$ ou realizar a multiplicação de $90 \times 5 = 450$. Logo, em cima do prato direito da balança tem-se o total de 450 gramas. Em seguida, divide-se o total encontrado por dois, para encontrar a massa de cada vaso que compõe o lado esquerdo, $450/2 = 225$. Assim, cada vaso possui 225 gramas.



Partindo para a segunda balança, é preciso encontrar a massa do novo objeto. Sabe-se que cada vaso possui o peso de 225 gramas, logo, do lado direito dessa balança basta somar o valor quatro vezes: $225+225+225+225 = 900$ ou multiplicá-lo por 4, $225 \times 4 = 900$. Assim, a massa total em cima do prato esquerdo da balança é de 900 gramas. Novamente, a balança encontra-se equilibrada. Para descobrir a massa da jarra, basta subtrair o valor da massa do vaso que está junto dela no prato, $900-225 = 675$. Logo, o vaso possui massa de 675 gramas.

Além disso, no momento de formalização das ideias, o aluno pode ser questionado da seguinte forma:

1. Na primeira balança, se acrescentarmos um sabiá em cada prato, a igualdade se manterá? Ou o que poderá acontecer?
2. Na segunda balança, se retirarmos um vaso de cada prato, a igualdade se manterá?
3. Multiplicando a quantidade de sabiás por dois e a quantidade de vasos por dois, a igualdade se mantém?
4. O que podemos verificar com relação a essas igualdades? Elas são equivalentes?

Conteúdo a ser formalizado: Propriedades da Igualdade.

Considerações sobre as discussões:

As discussões levaram os participantes do curso a repensarem suas práticas em sala de aula com relação ao uso da Resolução de Problemas, principalmente em relação ao uso do problema como ponto de partida e não somente para aplicação dos conceitos apresentados. A concepção de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas mostrou-se nova aos participantes, que consideraram a experiência que tiveram nesse encontro como uma alternativa ao uso de problemas de aplicação e que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O Problema 1 foi escolhido para mostrar que o pensamento algébrico também ocorre por meio de um exercício que possui conceitos elementares da Álgebra, que podem ser explorados sem o uso prévio da simbologia algébrica. Ou seja, ele pode ser promovido a partir de problemas considerados simples, cujos conceitos se relacionem com conhecimentos prévios dos alunos, como o uso de operações aritméticas

Encontro 4- Síncrono

Objetivos:


1. Discutir os Problemas 2 e 3, de acordo com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e conforme as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018), além de diversas formas de serem utilizados em sala de aula.

Desenvolvimento:

Neste encontro, foram abordados os Problemas 2 e 3. Como estavam presentes seis participantes, optamos por fazer um grupo único. A Metodologia de Ensino- Aprendizagem- Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas foi adaptada, conforme descrito no encontro anterior.

Problemas trabalhados:

PROBLEMA 2: SEQUÊNCIAS (ALBUQUERQUE, 2021)



1- Continue observando a sequência. Em seguida, escreva o número de triângulos equiláteros pretos dos sete primeiros termos dessa sequência.

2- Represente simbolicamente através de sentença matemática, um termo qualquer dessa sequência numérica.

3- Você conseguiria determinar o 10º e 20º termo dessa sequência sem conhecer os termos anteriores?

4- Explique verbalmente, se essa sequência é recursiva ou não recursiva. Justifique sua resposta.

Habilidade BNCC: EF07MA14 - Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na Matemática, mas também nas Artes e na Literatura.

Possíveis resoluções esperadas no Ensino Fundamental:

O aluno poderia resolver esse problema por meio de duas estratégias:

Na primeira questão, o aluno poderia recorrer à estratégia do desenho ou já identificar um padrão. Assim, ele poderia pensar em montar sua sequência da seguinte forma: $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6 \dots$, e perceber que é possível determinar um termo sem recorrer ao anterior, ou seja, basta calcular a potência 3^6 . Nesse caso, o aluno estaria considerando uma sequência não-recursiva. Outra possibilidade seria fazer a multiplicação do termo anterior por 3, partindo do primeiro termo, ou seja, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729..., o que seria trabalhar com uma sequência recursiva. Para esse problema, essa estratégia não resolveria o problema, visto que a segunda questão solicita uma sentença matemática geral.

O foco da segunda e da terceira questão está no trabalho de sequências não recursivas. Na segunda, pede-se uma sentença matemática geral para expressar qualquer termo, é possível encontrar, $3^{(n-1)}$. Na terceira, a partir do termo geral, basta calcular as potências $3^{(10-1)}$ e $3^{(20-1)}$.

Na quarta questão, a resposta pode ser dada de acordo com o objetivo do professor que, conforme apontado, pode trabalhar os dois tipos de sequência (recursiva e não recursiva) ao mesmo tempo ou isoladamente.

Conteúdo a ser formalizado: Sequências recursivas e/ou Sequências não recursivas.

PROBLEMA 3: PROBLEMA DA LOTERIA (TINOCO, 2011, p. 57)

Um prêmio de loteria de 120000 reais será dividido igualmente entre os ganhadores.

1. Complete a tabela na qual **n** representa o número de ganhadores e **Q** a quantia que cada um receberá.
2. Observando a tabela, escreva a relação entre os números de cada coluna.
3. Qual é a fórmula que possibilita o cálculo do prêmio que cada jogador receberá, dependendo do número de acertadores?
4. É possível cada ganhador receber 16000 reais? Por quê?

n	1	2	3	4	5	6...	10...	15...
Q								

Habilidades BNCC: EF07MA17 - Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

EF08MA13 - Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Possíveis resoluções esperadas no Ensino Fundamental:

Na primeira questão, é solicitado ao aluno que complete a tabela. Para isso, basta realizar a divisão da quantia do prêmio entre a quantidade de ganhadores:

n	1	2	3	4	5	6..	10..	15..
Q	120000	60000	40000	30000	24000	20000	12000	8000

Na segunda questão, é possível identificar que a relação existente é: quanto mais ganhadores, menor será a quantia em dinheiro recebida.

Na terceira questão, o cálculo pode ser realizado pela fórmula $Q=120/n$.

E na quarta questão, não é possível cada ganhador ganhar 16000, pois ao dividir 120000 por 16000, tem-se um total de 7,5 ganhadores.

Conteúdo a ser formalizado: Grandezas inversamente proporcionais e função.

Considerações sobre as discussões:

Os problemas escolhidos neste encontro oportunizaram mostrar aos participantes que um bom problema gerador pode ser utilizado não apenas para trabalhar um único conteúdo ou ano escolar, mas que pode ser modificado e adaptado de acordo com os objetivos do professor. No caso do Problema 2, há a possibilidade de formalizar sequências não recursivas, mas também é possível discutir o que seria uma sequência recursiva. Já o Problema 3 trabalha com a possibilidade de formalizar o conteúdo de grandezas diretamente proporcionais.

O pensamento algébrico cria condições de utilizar diferentes estratégias para resolver problemas. Conforme Mason, Graham e Johnston-Wilder (2007), esse pensamento está próximo dos alunos, ou seja, eles chegam à escola com um grande potencial para pensar algebricamente, só precisam ser encorajados a desenvolverem suas potencialidades em um ambiente favorável. Assim, cabe ao professor instigar seus alunos a resolverem problemas e, por meio dessas experiências, contribuir com o desenvolvimento desse tipo de pensamento.


Encontro 5- Assíncrono

Objetivos:

1. Implementar a Metodologia de Resolução de Problemas discutidos durante o curso, bem como propor problemas para o ensino de Álgebra de modo a possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Desenvolvimento:

- Cada participante precisou escolher um problema gerador que levaria para aplicação da metodologia em sala de aula;

- 
- Para o último encontro, o participante deveria realizar uma apresentação do plano de aula elaborado, contendo: problema escolhido, possíveis resoluções, formalização do conteúdo, ano a ser aplicado, quais habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) contempla, entre outras. A apresentação deveria ocorrer em, aproximadamente, 15 minutos.

Encontro 6- Síncrono

Objetivo: Avaliar a aprendizagem que o processo formativo propiciou aos participantes.

Desenvolvimento:

Nesse encontro, os planos de aula elaborados pelos participantes foram apresentados, destacando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Os problemas geradores deveriam ser propostos juntamente com as habilidades da BNCC.

Ressaltamos que as discussões devem ser mediadas com o intuito de proporcionar reflexões sobre o pensamento algébrico e as formas de promovê-lo. Por fim, o formador deve finalizar o curso, esclarecendo dúvidas que ainda possam restar. Um questionário final também pode ser aplicado com o objetivo de identificar as principais dificuldades dos participantes na elaboração do plano, bem como as características dos problemas apresentados e a promoção do pensamento algébrico.

Considerações sobre as discussões:

A exposição dos planos de aula elaborados, bem como a maneira de explorar Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas mostraram o quão difícil é esse trabalho e a realização de mudanças na prática do professor. Dois dos participantes selecionaram problemas, mas não utilizaram a metodologia solicitada. Apesar de as aulas se mostrarem diferenciadas com o uso de tecnologias e de materiais manipulativos, o problema não foi trabalhado como ponto de partida e, assim, suas propostas não contemplaram o ensinar Matemática enquanto se resolve problemas.

CONSIDERAÇÕES

As possibilidades indicadas neste trabalho produziram um material que permite investigações futuras. Novamente, caso possua interesse em buscar mais referências e discussões sobre o curso ofertado, consulte a dissertação “PENSAMENTO ALGÉBRICO E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DOCENTE”, disponível no Repositório Institucional da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (RIUT) com acesso pelo link: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2119>.

A Resolução de Problemas pode ser considerada uma metodologia ativa em sala de aula, e possibilita que o aluno se torne agente ativo na construção de seu conhecimento por meio da mediação do professor. Dessa forma, para efetivação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, indicamos a utilização do roteiro apresentado por Allevato e Onuchic (2014).

A oferta do curso para professores de Matemática que atuam nos anos finais do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio e/ou para Licenciandos em Matemática teve como objetivo analisar que contribuições para a formação docente são evidenciadas em um curso de Resolução de Problemas para ensinar Álgebra, de acordo com as habilidades da BNCC (BRASIL, 2018).

O foco deste trabalho volta-se para a formação docente, possibilitando aos professores compreender os aspectos históricos e concepções da Metodologia de Resolução de Problemas, e levá-la para preparação de suas aulas. Além disso, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018), as ideias da Álgebra podem ser trabalhadas para o desenvolvimento do pensamento algébrico de seus alunos. Ressaltamos a possibilidade de levar diferentes problemas geradores para novas propostas de cursos ou, se necessário, realizar adaptações aos que propusemos.

Destaca-se a possibilidade a tornar a carga horária do curso ofertado maior, com o intuito de progredir em discussões após os participantes aplicarem a Metodologia de Ensino- Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas para a sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, S. C. Plano de aula: Sequência recursiva e não recursiva nas figuras fractais. **Nova Escola**. [S. l.], 2021. Disponível em: <https://planosdeaula.novaescola.org.br/fundamental/7ano/matematica/sequencia-nao-recursiva-nas-figuras-fractais/4926>. Acesso: 3 mar. 2021.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. E. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, v. 55, p. 133-152, 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. E. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

ARAÚJO, E. A. Ensino da álgebra e formação de professores. **Educ. Mat. Pesq.**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília: MEC/SEB, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)**. Brasília: MEC/SEB, 1998.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

FIORENTINI, D. Formação de professores a partir da vivência e da análise de práticas exploratório-investigativas e problematizadoras de ensinar e aprender matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais [...]**. Recife: Conferences & Journals Sa, 2011. p. 1-14. Disponível em: http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2890/1188. Acesso em: 20 jun. 2021.

JUSTULIN, A. M. **A formação de professores de matemática no contexto da resolução de problemas**. 2014. 254 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/127631>. Acesso em: 12 nov. 2021.

LAIER, S. S. S. **Álgebra e Aspectos do Pensamento Algébrico: Um estudo com Resolução de Problemas na licenciatura em Ciências Naturais e Matemática UFMT/SINOP**. 2014. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014. Disponível em: <https://ri.ufmt.br/handle/1/318>. Acesso em: 12 nov. 2021.

MASON, J.; GRAHAM, A.; JOHNSTON-WILDER, S. **Developing Thinking in Algebra**. London: The Open University in Association / Paul Chapman Publishing, 2007.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17-34.

NARACATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org). A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

NOBRE, S.; AMADO, N.; CARREIRA, S. Manifestações do Pensamento Algébrico na Resolução de Problemas. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20, 2009, [S. l.]. **Anais [...]**. [S. l.]: SIEM, 2009. p. 1-19. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/261759058_Manifestacoes_do_pensamento_algebrico_na_resolucao_de_problemas. Acesso: 21 jan. 2021.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BÓRBA, M. C. (Orgs.). **Educação matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortês, 2004. p. 212-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática (2a ed)**. Jundiaí: Paco Editorial, 2021.

PINHEIRO, B. R. M. **Uma abordagem da álgebra dentro do currículo do ensino fundamental: mudanças e proposta para sala de aula**. 2019. 41 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido,, Mossoró, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufersa.edu.br/handle/prefix/5392>. Acesso em: 14 nov. 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14, 2006, Lisboa. **Anais [...]**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf>. Acesso: 17 abr. 2020.

SANTOS, L. G.; SANTOS, V. M. Introdução do Pensamento Algébrico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10, 2010. Salvador. **Anais [...]**. Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010. p. 1-11. Disponível em: https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T4_CC1985.pdf. Acesso em: 12 nov. 2021.

SCHROEDER, T. L.; JR LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SHULMAN, L. S. Conhecimento e ensino: fundamentos para a nova reforma. **Cadernos Cenpec**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 196-229, dez. 2014.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

TINOCO, L. A. (Coord.). **Álgebra: pensar, calcular, comunicar**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.

VAN DE WALLE, J. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto de Alegre: Artmed, 2009.