

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
ENGENHARIA ELÉTRICA

VÍTOR AGUIAR LIMA

**ANÁLISE DA RESPOSTA FORÇADA E NATURAL DE  
CIRCUITOS RLC**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2018

VÍTOR AGUIAR LIMA

## **ANÁLISE DA RESPOSTA FORÇADA E NATURAL DE CIRCUITOS RLC**

Trabalho apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso II do curso superior de Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica (DAELE) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Vander Teixeira Prado.

CORNÉLIO PROCÓPIO  
2018



**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
**Campus Cornélio Procópio**  
**Departamento Acadêmico de Elétrica**  
**Curso de Engenharia Elétrica**



## **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Vítor Aguiar Lima**

### **Análise da resposta forçada e natural de circuitos RLC**

Trabalho de conclusão de curso apresentado às 15:50hs do dia 21/11/2018 como requisito parcial para a obtenção do título de Engenheiro Eletricista no programa de Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação, a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

\_\_\_\_\_  
Prof(a). Dr(a). Vander Teixeira Prado - Presidente (Orientador)

\_\_\_\_\_  
Prof(a). Dr(a). Carolina Ribeiro Rodrigues - (Membro)

\_\_\_\_\_  
Prof(a). Dr(a). Gabriela Helena Bauab Shiguemoto - (Membro)

A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação do curso.

## RESUMO

LIMA, Vítor A. **Análise da resposta forçada e natural de circuitos RLC.** 2018. 56f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Elétrica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

Um circuito elétrico ressoante, também conhecido por circuito RC, RL ou RLC, por ser formado por resistores, indutores e/ou capacitores, é muito utilizado nas diferentes áreas da engenharia elétrica, desde a análise em si deste circuito, como a modelagem e estudo de outros sistemas através de um circuito equivalente RLC, como máquinas elétricas, por exemplo. Não apenas sistemas/circuitos elétricos, mas um grande número de sistemas dinâmicos pode ser modelado por equações diferenciais ordinárias similares às obtidas no circuito RLC, dentre eles, sistemas mecânicos e térmicos. Observa-se, então, a importância dos circuitos RLC nas mais variadas áreas. O estudo e análise desses circuitos é de fundamental importância na formação de um engenheiro, principalmente do engenheiro eletricitista. Este trabalho apresenta a análise teórica do transitório em circuitos RLC nos domínios do tempo e da frequência, assim como uso da transformada de Laplace para resolução da análise temporal. As equações obtidas são comparadas com o resultado de simulações em um *software* comercial, Proteus, validando os resultados apresentados. Neste trabalho também é proposto um meio de atualizar os valores dos indutores disponíveis no laboratório.

**Palavras-chave:** Circuitos RLC. Transitórios. Resposta natural e forçada.

## ABSTRACT

LIMA, Vítor A. **Analysis of the forced and natural response of RLC circuits.** 2018. 56 f. Undergraduate Thesis – Electrical Engineering. Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2018.

A resonance electrical circuit, also known as RC, RL or RLC circuit, because it is composed by resistors, inductors and/or capacitors, is widely used in different areas of electrical engineering, such as the analysis of this circuit, as well as modeling and study of other systems through an equivalent RLC circuit, such as electric machines, for example. Not only electrical systems or circuits, but a large number of dynamic systems can be modeled by ordinary differential equations similar to those obtained in the RLC circuit, including mechanical and thermal systems. Therefore, the study and analysis of these circuits is of fundamental importance in the formation of an engineer, especially of the electrical engineer. This work presents the theoretical analysis of the transient in RLC circuits in time and frequency domains, as well as the use of the Laplace transform to solve the temporal analysis. The obtained equations are compared with the results of simulations in a commercial software, Proteus, validating the presented results. In this work a simple method for updating the values of the available inductors in the laboratory is also proposed.

**Keywords:** RLC Circuits. Transient. Forced and natural response.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	6
1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA .....	8
1.2 PROBLEMAS E PREMISSAS .....	10
1.3 OBJETIVOS .....	12
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	12
2. CIRCUITOS RC, RL E RLC.....	14
2.1 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	14
2.1.1 CIRCUITO RC SÉRIE .....	17
2.1.2 CIRCUITO RLC SÉRIE .....	18
2.1.3 CIRCUITO RLC PARALELO .....	26
2.2 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO UTILIZANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE .....	28
2.2.1 CIRCUITO RC SÉRIE .....	28
2.2.2 CIRCUITO RLC SÉRIE .....	29
2.3 SOLUÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	33
2.3.1 CIRCUITO RC SÉRIE .....	34
2.3.2 CIRCUITO RLC SÉRIE .....	35
3. SIMULAÇÃO .....	38
3.1 CIRCUITO RC SÉRIE .....	39
3.2 CIRCUITO RLC SÉRIE .....	41
3.2.1 SOBREAMORTECIDO.....	41
3.2.2 SUBAMORTECIDO .....	43
3.2.3 CRITICAMENTE AMORTECIDO.....	45
4. PRÁTICA.....	48
4.1 ESTIMAÇÃO DO VALOR DA INDUTÂNCIA .....	52
5. CONCLUSÃO .....	56
REFERÊNCIAS.....	58

## 1. INTRODUÇÃO

A engenharia elétrica se divide em diferentes áreas que se complementam entre si, tais como: energia, telecomunicações, eletrônica, computação, entre outras.

Na área de energia, trabalha-se com geração de energia, transmissão da mesma entre dois pontos, dimensionamento de redes elétricas, entre outros temas. Em telecomunicações: na modulação, codificação, transmissão e recepção de diferentes sinais de áudio e imagem para televisão, celulares, rádio, satélites. A área de eletrônica está inserida dentro das demais nos circuitos e dispositivos eletrônicos para geração, processamento e medição das informações.

Os equipamentos envolvidos em todas as áreas da engenharia necessitam ser reproduzidos através de componentes tais como resistores, indutores, capacitores, entre outros. Assim, de acordo com Sadiku e Alexander (2013), circuito elétrico é uma interconexão de elementos elétricos.

Segundo Nilson e Riedel (2009), o ponto comum a sistemas de comunicação, computação, controle, potência, aquisição de dados, processamento de sinais, entre outros são os circuitos elétricos. E, portanto, um circuito elétrico é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real.

Circuitos elétricos estão em toda a engenharia elétrica e algumas das leis fundamentais como Lei de Ohm e Leis de Kirchhoff são utilizadas em todas as áreas, desde a análise de polarização de um transistor até projeto de sistemas de telecomunicações e redes de transmissão de energia elétrica. Portanto, um bom embasamento em circuitos elétricos é fundamental ao engenheiro eletricitista.

De acordo com Kienitz (2010), o equacionamento de circuitos puramente resistivos sempre resulta em equações algébricas lineares nas correntes de ramo e potenciais dos nós. Contudo, quando o circuito não é puramente resistivo, isto é, um circuito dinâmico, também chamado circuito ressoante, ou ainda como circuito RLC (circuito formado por resistores, indutores

e capacitores), gera-se um conjunto de equações algébricas e diferenciais, advindas do equacionamento de elementos que armazenam energia.

Circuitos ressoantes podem ser classificados de primeira e segunda ordem. A classificação se dá pelo número de elementos diferentes que armazenam energia. Sadiku e Alexander (2013) definem que um circuito de primeira ordem é caracterizado por uma equação diferencial de primeira ordem. É formado por resistores e o equivalente de uns elementos de armazenamento, isto é, capacitor ou indutor. Já o de segunda ordem é regido por uma equação diferencial de segunda ordem. É formado por resistores e o equivalente de dois elementos de armazenamento que são o capacitor e o indutor.

Devido à possibilidade de modelagem de diversos sistemas por equações diferenciais ordinárias, como, por exemplo, sistemas mecânicos, térmicos, máquinas elétricas, entre outros, encontram-se vários trabalhos e estudos documentados utilizando circuitos RLC como modelo equivalente. Ferraz e Martinez (2015), por exemplo, propôs um modelo de circuito equivalente para estudar transformadores de distribuição em uma ampla faixa de frequência. Similar a este, Fernandes e Neves (2003) apresentam um do transformador de potencial por meio de um circuito capacitivo, a fim de entender os transitórios eletromagnéticos.

Mazzoti et al. (2013) trataram de um sistema eletromecânico com rigidez não-linear (amortecedor) interagindo com um sistema mecânico vibratório. Como resultado apresentaram as influências da resistência e capacitância em relação ao efeito de amortecimento eletromecânico.

Ainda utilizando dessa dualidade entre os sistemas, Ponte e Bortoli (1997) utilizaram circuito RLC na otimização de sistemas mecânicos/amortecedor mecânico.

Silva, Brandão e Steffen (2002) avaliaram o controle de vibrações em estruturas flexíveis utilizando um circuito ressonador acoplado a um elemento piezoelétrico (PZT), o qual tem características capacitivas. Utilizou-se um circuito ressonador, constituído de um resistor e um indutor, acoplados a um elemento piezoelétrico, todos em paralelo. O absorvedor dinâmico de vibrações se trata de um sistema massa-mola que complementa um sistema principal, com o propósito de absorver as vibrações desse sistema. As equações do sistema de



absorção são similares às equações de circuitos RLC, auxiliando na análise e projeto.

Barros (2009) modelou e simulou transformadores piezoelétricos de modo radial com utilização em conversão de potência, motivado pela similaridade entre o modelo elétrico do transformador piezoelétrico e o circuito tanque LC usado em conversão de energia em modo chaveado ressonante de alta frequência. O circuito equivalente utilizado para o transformador é uma redução do modelo de Mason.

Notas de estudo realizadas pelo Prof. Hugo L. Fragnito (2010), da Unicamp, abordam circuitos ressonantes aplicados a filtros passa banda, que tem como características a seleção de frequência, como, por exemplo, para operar em sintonia de estações de rádio e televisão, assim como instrumentação científica, para rejeitar frequências indesejáveis. Circuitos integradores e diferenciadores também são exemplos de aplicação.

Observa-se a importância dos circuitos RLC nas mais variadas áreas, portanto, o estudo e análise desses circuitos é de fundamental importância na formação de um engenheiro, principalmente do engenheiro eletricitista.

## 1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA

A análise de circuitos RLC pode ser dividida em regimes transitório e permanente. Segundo Johnson, Hilburn e Johnson, (1994), dado um circuito de corrente contínua (CC), transcorrido um tempo, todas as fontes de correntes e tensões se estabilizam, e quando isso ocorre pode-se dizer que o circuito se encontra em regime permanente. Nesse tipo de circuito, os capacitores funcionam como circuitos abertos, com correntes nulas. Os indutores por sua vez, agem como curtos-circuitos, e tem suas tensões nulas. Portanto, a solução resume-se em resolver circuitos resistivos com fontes constantes.

Capacitores são elementos que se opõem à variação de tensão nos seus terminais e indutores à variação de corrente que passa por ele. No momento que existe uma variação de algum parâmetro do circuito, por exemplo na tensão aplicada, esses elementos deixam de se comportar como circuitos abertos (capacitores) e fechados (indutores) e há correntes e tensões regidas por equações diferenciais que modificam os valores de tensões e correntes do

circuito. Essas tensões e correntes possuem uma característica de após um período não mais variarem, entrando novamente em regime permanente. O intervalo de tempo desde a variação no circuito até a estabilização do mesmo é denominado regime transitório (EDMINISTER,1991).

O foco desse trabalho é estudar e analisar o regime transitório dos circuitos. Os transitórios são alvo de estudos em várias áreas. Van Der Sluis (2001) escreveu o livro *Transients in Power Systems*, em português seria Transitórios em Sistemas de Potência, que tem foco na aplicação de Sistemas Elétricos de Potência. Cabral (2003) avaliou 3 tipos de transitórios elétricos em transformadores, utilizando um método intitulado *Transmission Line Modelling* (TLM). É um estudo de grande relevância, uma vez que os surtos rápidos de tensão podem causar diversos efeitos no transformador, quando os componentes são submetidos a altas frequências, por exemplo a distribuição de surtos de tensão em enrolamentos contínuos de transformadores. Também a histerese em transitórios elétricos de frequência industrial.

Outro exemplo foi apresentado no XIII ERIAC por Neto e Fernandes (2009), que avaliou a influência de transitórios eletromagnéticos em sistemas de transmissão, que podem ser caracterizados por curto-circuitos, surtos atmosféricos e outros distúrbios.

Martins (2004) apresenta uma análise do transitório em centrais hidrelétricas e tubulações, apoiado a metodologia dos Grafos de Ligação, que mescla potência e analogias de subsistemas hidráulico, mecânico e elétrico, descrevendo as não linearidades dos componentes, possibilitando simular respostas transitórias a partir de analogias entre circuitos hidráulicos e elétricos.

Basvasti et. al (2007) apresenta um estudo no CMNE/CILAMCE (Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia/Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia) sobre a neutralização da vibração em sistemas ressoantes simples, que acoplados a sistemas ou estruturas mecânicas reduz as vibrações a níveis aceitáveis. A utilização de neutralizadores foi utilizada pela possibilidade de adaptação das características dinâmicas, através da variação dos parâmetros elétricos RLC.

Caseira (2012) avaliou o deslocamento da frequência na análise de transitórios em redes elétricas simples. Foram simulados diferentes circuitos RC, RL e também um circuito de chaveamento com parâmetros concentrados,

circuitos de primeira e segunda ordem. Após observar que a análise dos circuitos com o deslocamento da frequência foi satisfatória por proporcionar passos maiores de integração, diminuindo o tempo de simulação com relação aos programas comumente utilizados de simulação no domínio do tempo, chegou-se à conclusão que o deslocamento de frequência é uma ferramenta praticável no estudo de transitórios eletromagnéticos.

Christoffersen e Steer (2001) apresentam a ideia da análise do transitório utilizando ondas e implementando um simulador de circuito. O estudo é direcionado para análise do transiente em circuitos simples e redes elétricas lineares variantes no tempo.

Costa e Freitas (2013) estudaram transitórios rápidos em sistemas elétricos de potência. Representou um sistema constituído de 9 barras, modelando através de circuitos RLC com acoplamento, que são característicos de equipamentos que fazem parte do sistema elétrico trifásico. O equivalente dinâmico substitui a parte da rede elétrica trifásica considerada externa a área de estudo. Os resultados apresentados de maneira gráfica mostraram a eficiência da sistemática utilizada.

Este trabalho apresenta a análise teórica do transitório em circuitos RLC nos domínios do tempo e da frequência, assim como uso da transformada de Laplace para resolução da análise temporal.

## 1.2 PROBLEMAS E PREMISAS

O transitório em circuitos RLC são estudados no curso de Engenharia Elétrica na UTFPR-CP (Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Cornélio Procopio) em disciplinas relacionadas a eletricidade básica e circuitos elétricos, através de teoria, simulação e implementação de projetos.

Além da dificuldade em disponibilizar os componentes novos, os sistemas físicos dificilmente conseguem atingir resultados semelhantes, a sistemas simulados ou resolvidos manualmente, portanto, não são totalmente confiáveis.

Segundo Sanches (2014), a confiabilidade de um projeto deve levar em consideração as variações dos valores dos parâmetros, que para os componentes denomina-se tolerância do processo de manufatura e é

representada em porcentagem, além da variação advinda do envelhecimento, estresse por uso, e outros fatores. Afirma também que pode-se realizar duas ações para diminuir ou eliminar os efeitos das variações no sistema. São elas:

- Controle do componente: averiguar a variação dos parâmetros dos componentes por meio do projeto e controle nos processos de fabricação, submeter o componente a parâmetros dentro dos limites, período de tempo e condições específicas, permitindo a seleção dos componentes baseado nos limites permitidos de variação de cada parâmetro e das futuras condições ambientais.

- Controle do projeto: adequar o projeto para que o circuito consiga possibilitar o mínimo de performance quando os parâmetros do mesmo apresentarem o pior caso, assim sendo, o circuito ou sistema tem de ser suficientemente tolerante às variações dos parâmetros dos componentes.

Como os componentes utilizados nos laboratórios de ensino da UTFPR-CP são comprados por meio de licitação, não é possível a garantia de controle do componente. A especificação do controle na manufatura poderia resultar em falta de fornecedores. O controle do projeto envolveria um sistema de controle que poderia mudar o foco do experimento, que é analisar o transitório de circuitos RLC.

Então, quando o aluno vai para o laboratório, muitas vezes está comparando um experimento diferente da teoria vista, não considerando diversos fatores, o que impossibilita um experimento confiável em relação aos resultados obtidos.

O principal componente que apresenta barreiras ao experimento é o indutor: existem apenas três valores, em que os valores indicados não coincidem com os valores reais; e os indutores apresentam uma resistência interna, muitas vezes não considerada nem na teoria, nem na simulação.

Neste trabalho é proposto um meio de atualizar os valores dos indutores disponíveis no laboratório.

### 1.3 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo apresentar a análise de transitórios em circuitos RLC através de diferentes caminhos: análise temporal e na frequência, e propor um meio de atualizar os valores de indutância do laboratório a partir da análise apresentada.

### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 são apresentadas três maneiras para análise do regime transitório de circuitos RC, RL e RLC, considerando-se respostas forçada (função degrau) e natural: (i) análise no domínio temporal e equações diferenciais ordinárias; (ii) análise no domínio temporal com resolução das equações diferenciais através da transformada de Laplace e (iii) análise no domínio da frequência, também utilizando-se a transformada de Laplace.

No capítulo 3 encontram-se, as comparações dos resultados obtidos no capítulo 2 e simulações realizadas no software Proteus, validando o equacionamento apresentado no trabalho.

O capítulo 4 apresenta a verificação experimental, comparando-se as curvas de tensão nos componentes para circuitos RC, RL e RLC com o equacionamento proposto no capítulo 2 e validado no capítulo 3. Ainda neste capítulo, propõe-se um método para a atualização do valor da indutância do laboratório, comparando-se o resultado antes e depois desta atualização.

No capítulo 5 encontram-se as considerações finais, comentários em relação as comparações e experimentos realizados e propostas para trabalhos futuros.

Por fim encontram-se as referências que auxiliaram no desenvolvimento do trabalho.

## 2. CIRCUITOS RC e RLC

### CIRCUITOS DE PRIMEIRA ORDEM

Os circuitos denominados de primeira ordem são assim chamados pelo fato de que suas tensões e correntes são caracterizadas por equações diferenciais de primeira ordem. Eles são compostos por resistores e indutores (circuitos RL) ou resistores e capacitores (circuitos RC), ou seja, apenas um elemento armazenador de energia. Observa-se que o circuito RC ou RL pode possuir apenas um resistor ou uma rede resistiva. Neste caso, pode-se, na maioria das vezes, obter uma resistência equivalente e analisar o circuito com dois componentes passivos: um resistor e um capacitor ou indutor.

Nilsson e Riedel (2009) dividem a análise desses tipos de circuito em etapas. Na primeira etapa são consideradas correntes e tensões que surgem quando o circuito é desligado repentinamente de sua fonte de corrente contínua (CC). A energia até então armazenada no indutor, no caso dos circuitos RL, ou no capacitor no caso dos circuitos RC, é dissipada no resistor. Esse tipo de comportamento é denominado a resposta natural de um circuito. Quando se acrescentam fontes a esse tipo de circuito, surge a chamada resposta forçada.

Neste trabalho será analisada primeiramente resposta forçada, visto que as equações para a resposta natural são as mesmas quando se anulam os efeitos das fontes.

### CIRCUITOS DE SEGUNDA ORDEM

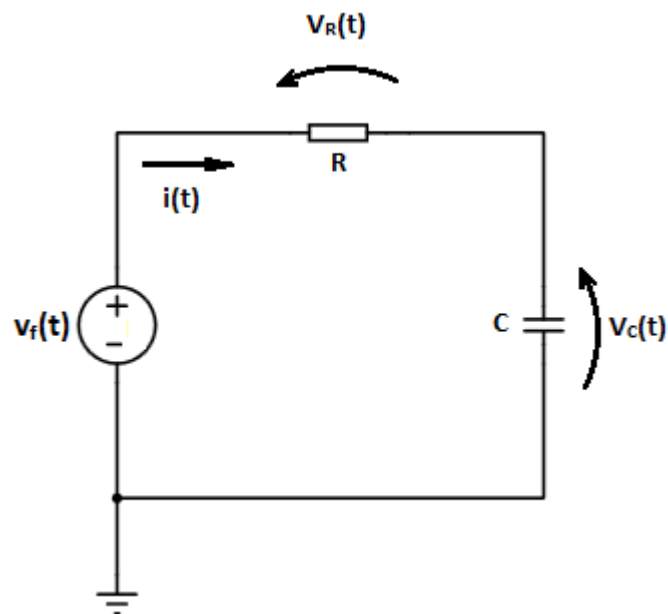
Circuitos compostos por resistores, indutores e capacitores são denominados de segunda ordem. São assim chamados pelo fato de que as tensões e correntes em cada componente são caracterizadas por equações diferenciais de segunda ordem.

## 2.1 Solução no domínio do tempo

### 2.1.1 Circuito RC

O circuito ilustrado na figura 1 representa um circuito RC alimentado por uma tensão  $v_f(t)$ .

Figura 1. Circuito RC série alimentado com fonte de tensão.



Fonte: Autoria própria

Admitindo-se que a fonte de tensão  $v_f(t)$  é ligada em  $t = 0$  com valor constante, esta pode ser escrita como:

$$v_f(t) = V_f u(t) \quad (1)$$

sendo  $V_f$  uma constante e  $u(t)$  a função degrau. Neste caso, tem-se o caso da resposta forçada do circuito RC.

Da Lei de Ohm, tem-se que a tensão no resistor é expressa por:

$$v_R(t) = Ri_R(t) \quad (2)$$

sendo R o valor da resistência e  $i_R(t)$  a corrente que passa pelo resistor.

Sabe-se que a corrente no capacitor é expressa pela equação (Nilsson; Riedel, 2009):

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (3)$$

sendo C o valor da capacitância e  $v_C(t)$  a diferença de potencial nos terminais do capacitor.

Por se tratar de um circuito série,  $i_C(t) = i_R(t) = i(t)$ . Substituindo-se (2) em (3) tem-se:

$$v_R(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (4)$$

Aplicando-se a Lei das tensões de Kirchhoff (LTK), o somatório das tensões na malha é igual a zero:

$$v_f(t) - v_R(t) - v_C(t) = 0 \quad (5)$$

Substituindo (4) em (5), chega-se a equação:

$$v_f(t) - RC \frac{dv_C(t)}{dt} - v_C(t) = 0 \quad (6)$$

Manipulando-se a equação (6) obtém-se a equação diferencial que representa o circuito da figura 1:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = \frac{v_f(t)}{RC} \quad (7)$$

Definindo-se a constante de tempo do circuito por  $\tau = RC$ , pode-se escrever (7) como:



$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_c(t) = \frac{v_f(t)}{\tau} \quad (8)$$

A equação (8), diferencial de primeira ordem, pode ser resolvida de diferentes maneiras. Aplicando-se, por exemplo, o método fator de integração, de acordo com (Zill; Cullen, 2000), dada uma função:

$$\frac{dy(x)}{dx} + P(x)y(x) = q(x) \quad (9)$$

tem-se:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} [\int q(x)e^{\int P(x)dx} dx + k] \quad (10)$$

sendo k uma constante.

Comparando-se a equação (8) com a equação (9) pode-se encontrar P(x) e q(x) e encontrar a resposta para v<sub>C</sub>(t) utilizando-se da equação (10). Tem-se:

$$v_c(t) = e^{-t} + k \quad (11)$$

Aplicando-se o tempo, t = 0 em (11), pode-se escrever k como:

$$k = v_c(0) - V_f \quad (12)$$

sendo v<sub>C</sub>(0) tensão inicial no capacitor, relacionada a energia inicialmente armazenada no capacitor, ou armazenada no instante t = 0.

Substituindo (12) em (11) a tensão no capacitor pode ser escrita:

$$v_c(t) = \{V_f + [v_c(0) - V_f]e^{-t/\tau}\}u(t) \quad (13)$$

Substituindo-se (13) em (3), a corrente no circuito é descrita por:

$$i(t) = \frac{-[v_c(0) - V_f]}{R} e^{-t/\tau} u(t) \quad (14)$$

Já a tensão no resistor é obtida substituindo-se (14) em (2):

$$v_R(t) = -[v_c(0) - V_f] e^{-t/\tau} u(t) \quad (15)$$

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  em (13), (14) e (15):

$$i(t) = \frac{-v_c(0)}{R} e^{-t/\tau} u(t) \quad (16)$$

$$v_C(t) = [v_c(0) e^{-t/\tau}] u(t) \quad (17)$$

$$v_R(t) = -v_C(t) = -v_c(0) e^{-t/\tau} u(t) \quad (18)$$

Embora em alguns livros a análise é feita considerando-se uma fonte de corrente em paralelo com o resistor e o capacitor, na prática, implementa-se na forma apresentada na figura 1, uma vez que nos laboratórios de circuitos elétricos da UTFPR-CP não se encontram disponíveis fontes de corrente. Aplicando-se transformação de fontes, uma fonte de corrente em paralelo com uma resistência é equivalente a uma fonte de tensão em série com a mesma resistência, chegando-se ao circuito analisado neste item.

Para análise do circuito RL, substitui-se o capacitor da figura 1 por um indutor de valor  $L$ , faz-se  $\tau = L/R$  e aplica-se a LTK de forma semelhante ao caso do circuito RC, sabendo-se que a tensão no indutor é expressa pela equação:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (19)$$

Como resultados da análise forçada, chega-se a:

$$i(t) = \left\{ \frac{V_f}{R} + [i_L(0) - \frac{V_f}{R}] e^{-t/\tau} \right\} u(t) \quad (20)$$

$$v_L(t) = -[Ri_L(0) - V_f]e^{-t/\tau}u(t) \quad (21)$$

$$v_R(t) = \{V_f + [Ri_L(0) - V_f]e^{-t/\tau}\}u(t) \quad (22)$$

sendo  $i_L(0)$  corrente inicial no indutor, relacionada com a energia inicialmente armazenada no indutor, ou armazenada no instante  $t = 0$ .

Para a resposta natural, faz-se se  $V_f = 0$  em (20), (21) e (22):

$$i(t) = i_L(0)e^{-t/\tau}u(t) \quad (23)$$

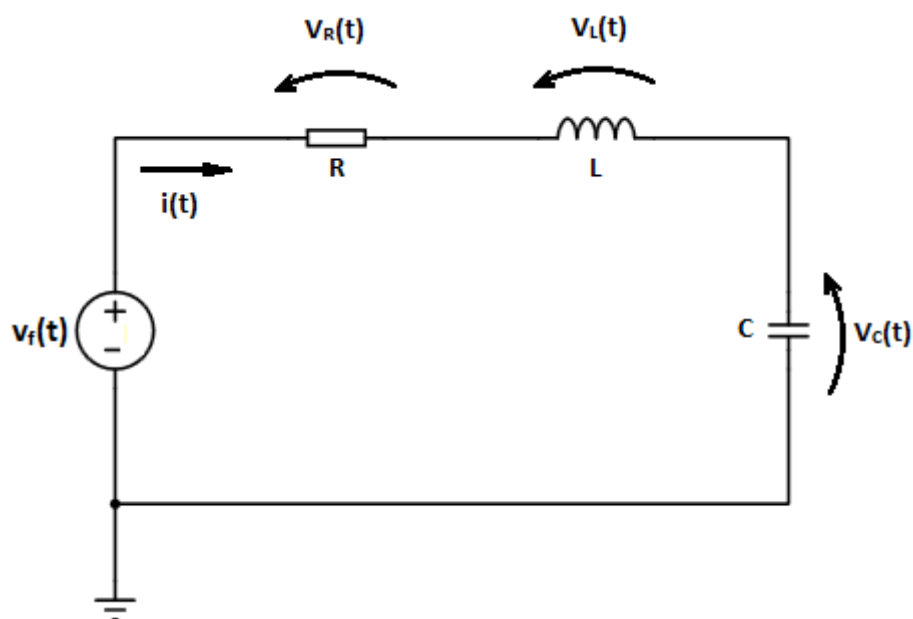
$$v_L(t) = -Ri_L(0)e^{-t/\tau}u(t) \quad (24)$$

$$v_R(t) = Ri_L(0)e^{-t/\tau}u(t) \quad (25)$$

### 2.1.2 Circuito RLC série

O circuito da figura 2 representa um circuito RLC série alimentado por uma fonte de tensão  $v_f(t)$ , descrita pela equação (1), para análise da resposta forçada.

Figura 2. Circuito RLC série alimentado com fonte de tensão.



Fonte: Autoria própria

Aplicando-se a LTK ao circuito tem-se:

$$v_f(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \quad (26)$$

Substituindo-se (2) e (19) em (26), chega-se a equação:

$$v_f(t) = Ri_R(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + v_C(t) \quad (27)$$

Derivando-se a equação (27) com relação ao tempo e utilizando-se (3), tem-se:

$$\frac{dv_f(t)}{dt} = R \frac{di_R(t)}{dt} + L \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i_C(t) \quad (28)$$

Sabendo-se que, por se tratar de um circuito série,  $i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = i(t)$ , a equação (28) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_f(t)}{dt} \quad (29)$$

Segundo Nilson e Riedel (2009), quando um circuito é submetido a uma função, por exemplo um degrau, como no circuito da figura 2, a solução para a equação diferencial de segunda ordem que o representa é igual à resposta final da função desejada, mais uma função resposta cuja forma é idêntica à resposta natural. Assim, pode-se escrever a solução para a resposta a um degrau na forma:

$$i(t) = K_f u(t) + \{função da mesma forma que a resposta natural\} \quad (30)$$

Portanto, primeiramente resolve-se a equação (29), considerando o termo à direita da igualdade igual a zero. Neste caso, considerando-se as relações

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} = s^2 e \quad \frac{di(t)}{dt} = s \quad (31)$$

Tem-se:

$$\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = 0 \quad (32)$$

a qual possui as seguintes raízes:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (33)$$

Fazendo-se  $\alpha = \frac{R}{2L}$  e  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  tem-se:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (34)$$

A equação (34) pode ter 3 tipos de soluções, que determinarão o comportamento da resposta do circuito com relação as tensões e correntes transitórias:

- $\alpha^2 > \omega_0^2$ :  $s_1$  e  $s_2$  reais e distintas  $\rightarrow$  resposta superamortecida;
- $\alpha^2 < \omega_0^2$ :  $s_1$  e  $s_2$  complexas conjugadas  $\rightarrow$  resposta subamortecida;
- $\alpha = \omega_0$ :  $s_1$  e  $s_2$  reais e iguais  $\rightarrow$  resposta criticamente amortecida.

### Resposta superamortecida

Se  $\alpha^2 > \omega_0^2$ :  $s_1$  e  $s_2$  serão reais e distintas. Neste caso, a equação que representa a corrente pode ser escrita como:

$$i(t) = (A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}) u(t) \quad (35)$$

sendo  $A_1$  e  $A_2$  constantes.

Considerando-se a equação (30), a corrente do circuito passa a ser escrita como:

$$i(t) = (A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + K_f)u(t) \quad (36)$$

Em regime permanente o capacitor se comporta como um circuito aberto e, portanto, a corrente em regime permanente será nula. Sendo assim,  $K_f$ , que é a resposta final da função desejada (corrente do circuito), neste caso é igual a zero.

Para encontrar os valores de  $A_1$  e  $A_2$ , faz-se  $t = 0$  na equação (36) e posteriormente, deriva-se a equação (36) para  $t = 0$ , como pode ser observado nas equações (37) e (38):

$$i_L(0) = A_1 + A_2 \quad (37)$$

$$\frac{di(0)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \quad (38)$$

Da equação (19):

$$\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{v_L(t)}{L} \Big|_{t=0} = \frac{v_L(0)}{L} \quad (39)$$

Substituindo-se  $t=0$  em (19):

$$v_f(0) = v_R(0) + v_L(0) + v_C(0) \quad (40)$$

Portanto:

$$\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{L} [V_f - v_R(0) - v_C(0)] = \frac{1}{L} [v_f(0) - Ri_L(0) - v_C(0)] \quad (41)$$

Manipulando a equação (37) e (38), considerando-se a equação (41), tem-se:

$$A_1 = \left( \frac{1}{s_1 - s_2} \right) \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_2 i_L(0) \right] \quad (42)$$

$$A_2 = \left( \frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_1 i_L(0) \right] \quad (43)$$

Substituindo-se (42) e (43) em (36), pode-se obter a corrente no circuito como:

$$i(t) = \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} + \right. \quad (44)$$

$$\left. + \frac{1}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t)$$

Substituindo-se (36) em (2), pode-se obter a tensão no resistor como:

$$v_R(t) = \left[ \frac{R}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} + \right. \quad (45)$$

$$\left. + \frac{R}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t)$$

Manipulando a equação (44) e substituindo-se na (19), pode-se obter a tensão no indutor como:

$$v_L(t) = \left[ \frac{Ls_1}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} + \right. \quad (46)$$

$$\left. + \frac{Ls_2}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t)$$

Substituindo-se (45) e (46) em (26), pode-se obter a tensão no capacitor como:

$$v_C(t) = \left[ V_f - \frac{(R + Ls_1)}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} + \right. \\ \left. - \frac{(R + Ls_2)}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0)}{L} - s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t) \quad (47)$$

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  em (44), (45), (46) e (47):

$$i(t) = - \left[ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} - \frac{1}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. + s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t) \quad (48)$$

$$v_R(t) = - \left[ \frac{R}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} - \frac{R}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. + s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t) \quad (49)$$

$$v_L(t) = - \left[ \frac{Ls_1}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} - \frac{Ls_2}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. + s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t) \quad (50)$$

$$v_C(t) = \left[ \frac{(R + Ls_1)}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + s_2 i_L(0) \right] e^{s_1 t} + \frac{(R + Ls_2)}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{Ri_L(0) + v_C(0)}{L} + \right. \right. \\ \left. \left. + s_1 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right] u(t) \quad (51)$$

### Resposta superamortecida

Se  $\alpha^2 < \omega_0^2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  serão complexas conjugadas, neste caso a equação que representa a corrente pode ser escrita como:

$$i(t) = [B_1 e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + B_2 e^{-\alpha t} \sen(\beta t) + K_f] u(t) \quad (52)$$

Onde  $B_1$  e  $B_2$  são as constantes e  $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ . Como se trata do mesmo circuito,  $K_f = 0$ .

Tratando-se a equação (52) de maneira análoga a equação (36), encontra-se  $B_1$  e  $B_2$ :



$$B_1 = i_L(0) \quad (53)$$

$$B_2 = \frac{[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + \alpha Li_L(0)}{\beta L} \quad (54)$$

e a corrente do circuito é dada por:

$$i(t) = \{i_L(0)e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + \alpha Li_L(0)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (55)$$

Substituindo-se (55) em (2), a tensão no resistor é dada por:

$$v_R(t) = \{Ri_L(0)e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\} + \frac{R[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + \alpha RLi_L(0)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (56)$$

Substituindo-se (55) em (19), a tensão no indutor é dada por:

$$v_L(t) = \{[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)]e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\} + \frac{\alpha[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + (\alpha^2 + \beta^2)Li_L(0)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (57)$$

Substituindo-se (56) e (57) em (26), pode-se obter a tensão no capacitor como:

$$v_C(t) \{V_f - [V_f - v_C(0)]e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\} + \frac{(\frac{R}{L} - \alpha)[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + [\frac{\alpha R}{L} - (\alpha^2 + \beta^2)]Li_L(0)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (58)$$

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  em (55), (56), (57) e (58):

$$i(t) = \{i_L(0)e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{(\alpha L - R)i_L(0) - v_C(0)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (59)$$

$$v_R(t) = \{Ri_L(0)e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{R(\alpha L - R)i_L(0) - Rv_C(0)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (60)$$

$$v_L(t) = \{-[Ri_L(0) + v_C(0)]e^{-\alpha t} \cos(\beta t)\} + \left\{ \frac{(\frac{\alpha R}{L} - \alpha^2 - \beta^2)Li_L(0) + \alpha v_C(0)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \right\}u(t) \quad (61)$$

$$v_C(t) = \{v_C(0)e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{\left[ \frac{2\alpha R}{L} - \frac{R^2}{L^2} - (\alpha^2 + \beta^2) \right] Li_L(0) - \left( \frac{R}{L} - \alpha \right) v_C(0)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)\}u(t) \quad (62)$$

### Resposta criticamente amortecida

Se  $\alpha^2 = \omega_0^2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  serão reais e iguais, neste caso a equação que representa a corrente pode ser escrita como:

$$i(t) = (D_1 e^{-\alpha t} + D_2 t e^{-\alpha t} + K_f)u(t) \quad (63)$$

onde  $D_1$  e  $D_2$  são as constantes. Como se trata do mesmo circuito,  $K_f = 0$ .

Tratando-se a equação (50) de maneira análoga a equação (28), encontra-se  $D_1$  e  $D_2$ :

$$D_1 = i_L(0) \quad (64)$$

$$D_2 = \frac{[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + \alpha Li_L(0)}{L} \quad (65)$$

e a corrente do circuito é dada por:

$$i(t) = \{i_L(0)e^{-\alpha t} + \left[ \frac{V_f - Ri_L(0) - v_C(0) + \alpha Li_L(0)}{L} \right] t e^{-\alpha t}\}u(t) \quad (66)$$

Substituindo-se (66) em (2), a tensão no resistor é dada por:

$$v_R(t) = \{Ri_L(0)e^{-\alpha t} + \frac{R[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + \alpha RLi_L(0)}{L}te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (67)$$

Substituindo-se (66) em (19), a tensão no indutor é dada por:

$$v_L(t) = \{[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)]e^{-\alpha t} - [\alpha[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + \alpha^2 Li_L(0)]te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (68)$$

Substituindo-se (67) e (68) em (26), pode-se obter a tensão no capacitor como:

$$v_C(t) = \{V_f - [V_f - v_C(0)]e^{-\alpha t} - \left[\left(\frac{R}{L} - \alpha\right)[V_f - Ri_L(0) - v_C(0)] + (R - \alpha L)\alpha i_L(0)\right]te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (69)$$

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  em (66), (67), (68) e (69):

$$i(t) = \{i_L(0)e^{-\alpha t} - \left[\frac{Ri_L(0) + v_C(0) + \alpha Li_L(0)}{L}\right]te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (70)$$

$$v_R(t) = \{Ri_L(0)e^{-\alpha t} - \frac{R[Ri_L(0) + v_C(0)] + \alpha RLi_L(0)}{L}te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (71)$$

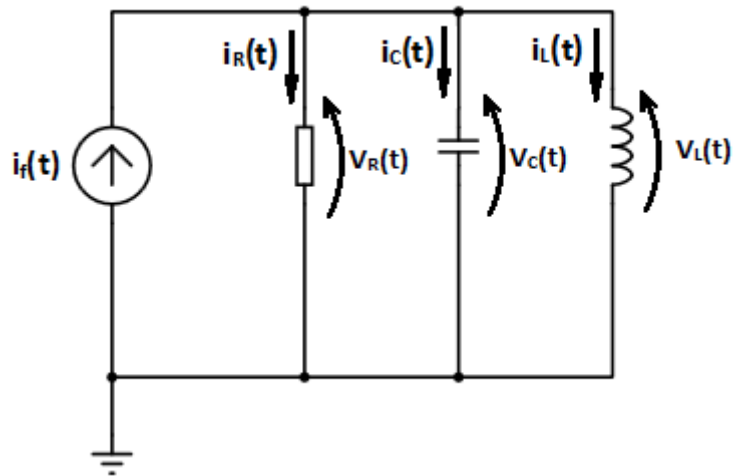
$$v_L(t) = \{-[Ri_L(0) + v_C(0)]e^{-\alpha t} - [\alpha[Ri_L(0) + v_C(0)] + \alpha^2 Li_L(0)]te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (72)$$

$$v_C(t) = \{v_C(0)e^{-\alpha t} + \left[\left(\frac{R}{L} - \alpha\right)[Ri_L(0) + v_C(0)] - (R - \alpha L)\alpha i_L(0)\right]te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (73)$$

### 2.1.3 Circuito RLC paralelo

O circuito da figura 3 representa um circuito RLC paralelo alimentado por uma fonte de corrente  $i_f(t)$ , para análise da resposta forçada.

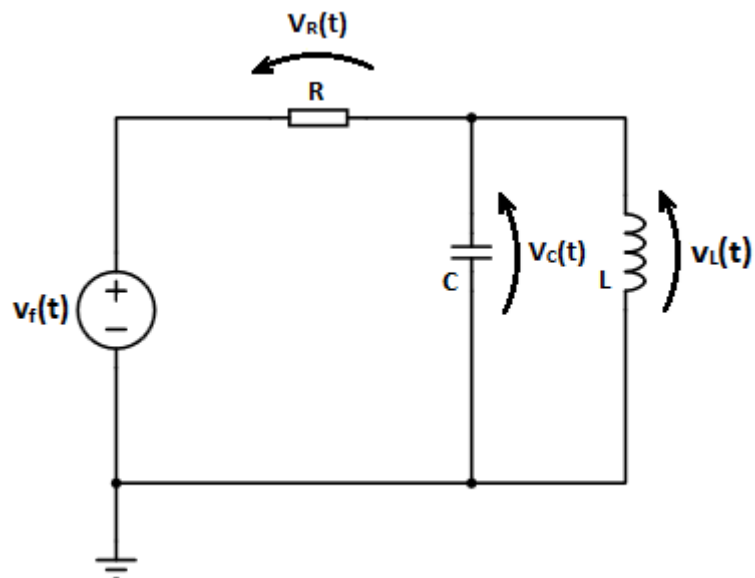
Figura 3. Circuito RLC paralelo alimentado com fonte de corrente.



Fonte: Autoria própria

Na prática utilizam-se fontes de tensão em vez de fontes de corrente. Portanto, pode-se aplicar a transformação de fontes e redesenhar o circuito da figura 3 como ilustrado na figura 4, o qual é alimentado por uma tensão  $v_f(t)$ , descrita pela equação (1), para análise da resposta forçada.

Figura 4. Circuito RLC paralelo alimentado com fonte de tensão.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando-se a lei das correntes de Kirchhoff (LCK) ao nó que conectam o resistor, capacitor e o indutor e utilizando-se as relações dadas por (2), (3) e (19), chega-se a uma análise muito similar à apresentada na subseção anterior. Neste caso  $\alpha = 1/2RC$ .

## 2.2 Solução no domínio do tempo utilizando transformada de Laplace

A tabela 1 apresenta as transformadas de Laplace das funções necessárias para esta subseção.

### 2.2.1 Circuito RC

O circuito ilustrado na figura 1 representa um circuito RC alimentado por uma tensão  $v_f(t)$ . O circuito é representado pela equação diferencial de primeira ordem (8). Aplicando-se a Transformada de Laplace, tem-se:

$$sV_C(s) - v_c(0) + \frac{V_C(s)}{\tau} = \frac{V_f}{\tau s} \quad (74)$$

Manipulando-se (74), obtém-se:

$$V_C(s) = \frac{V_f}{s} + \frac{v_c(0) - V_f}{s + 1/\tau} \quad (75)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace, a partir da Tabela 1, chega-se a:

$$v_c(t) = \{V_f + [v_c(0) - V_f]e^{-t/\tau}\}u(t) \quad (76)$$

que é igual a equação (13).

A partir desta equação, encontram-se a corrente do circuito e a tensão no resistor como apresentado no item 2.1.1

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  em (76) e nas equações obtidas a partir desta.

Tabela 1. Pares de transformadas de Laplace.

Tipo	$f(t)$ ( $t > 0$ )	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(degrau)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(rampa)	$t$	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
(seno)	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(cosseno)	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

Fonte: Autoria própria

Para análise do circuito RL, substitui-se o capacitor da figura 3 por um indutor de valor  $L$ , faz-se  $\tau = L/R$  e aplica-se a LTK de forma semelhante ao caso do circuito RC para obter a equação diferencial do circuito.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = \frac{v_f(t)}{L} \quad (77)$$

Aplica-se a transformada de Laplace e obtêm-se as equações de forma análoga ao circuito RC.

### 2.2.2 Circuito RLC

O circuito da figura 2 representa um circuito RLC série alimentado por uma tensão  $v_f(t)$ , descrita pela equação (1), para análise da resposta forçada. A

equação diferencial que descreve este circuito é a equação (29). Aplicando-se a transformada de Laplace, tem-se:

$$s^2 I(s) - s i_L(0) - \frac{d i_L(t)}{dt} \Big|_{t=0} + \frac{R}{L} s I(s) - \frac{R}{L} i_L(0) + \frac{1}{LC} I(s) = \frac{1}{L} V_f - \frac{1}{L} v_f(0) \quad (78)$$

Isolando-se  $I(s)$  em (78) chega-se a:

$$I(s) = \frac{\frac{V_f - v_c(0)}{L} + s i_L(0)}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} \quad (79)$$

Nota-se que o denominador é igual a equação (32) e, portanto, suas raízes ( $s_1$  e  $s_2$ ) determinam o comportamento da resposta do circuito com relação as tensões e correntes transitórias, que pode apresentar 3 tipos de soluções diferentes:

### Resposta superamortecida

Se  $\alpha^2 > \omega_0^2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  serão reais e distintas. Neste caso, a equação (79) pode ser escrita como:

$$I(s) = \frac{\frac{V_f - v_c(0)}{L} + s i_L(0)}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad (80)$$

a qual pode ser escrita em frações parciais como:

$$I(s) = \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{V_f - v_c(0)}{L} + s_1 i_L(0) \right] \frac{1}{(s - s_1)} + \frac{1}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{V_f - v_c(0)}{L} + s_2 i_L(0) \right] \frac{1}{(s - s_2)} \quad (81)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace:

$$i(t) = \left\{ \frac{1}{(s_1 - s_2)} \left[ \frac{V_f - v_C(0)}{L} + s_1 i_L(0) \right] e^{s_1 t} + \frac{1}{(s_2 - s_1)} \left[ \frac{V_f - v_C(0)}{L} + s_2 i_L(0) \right] e^{s_2 t} \right\} u(t) \quad (82)$$

Comparando-se (82) com (44) pode-se pensar que são distintas. Entretanto, pode-se facilmente mostrar que:

$$\frac{-R}{L} i_L(0) - s_2 i_L(0) = s_1 i_L(0) \quad (83)$$

e, portanto, (82) com (44) são iguais.

A partir desta equação, encontram-se as tensões no resistor, no indutor e no capacitor, como apresentado no item 2.1.2

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  em (82) e nas equações obtidas a partir desta.

Da mesma forma, para as respostas subamortecida e criticamente amortecida são apresentados apenas os passos para se chegar à equação de  $i(t)$ .

### Resposta subamortecida

Se  $\alpha^2 < \omega_0^2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  serão complexas conjugadas:  $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ . Neste caso, a equação (79) pode ser escrita como:

$$I(s) = \frac{\frac{V_f - v_C(0)}{L} + s i_L(0)}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (84)$$

a qual pode ser escrita como:

$$I(s) = B_1 \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + B_2 \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (85)$$

Comparando-se (84) e (85) chega-se a:



$$B_1 = i_L(0) \quad (86)$$

$$B_2 = \frac{[V_f - v_C(0)] - \alpha L i_L(0)}{\beta L} \quad (87)$$

que é equivalente aos valores encontrados na análise temporal em (53) e (54).

Substituindo-se (86) e (87) em (85) e realizando-se a transformada inversa de Laplace a partir da Tabela 1, chega-se a:

$$i(t) = \{i_L(0)e^{-\alpha t} \cos(\beta t) + \frac{[V_f - v_C(0)] - \alpha L i_L(0)}{\beta L} e^{-\alpha t} \sen(\beta t)\}u(t) \quad (88)$$

que é igual à equação (55), sabendo-se que  $-Ri_L(0) + \alpha L i_L(0) = -\alpha L i_L(0)$ .

### Resposta criticamente amortecida

Se  $\alpha^2 = \omega_0^2$ ,  $s_1$  e  $s_2$  serão reais e iguais, sendo  $s_1 = s_2 = -\alpha$ , e a equação (79) pode ser escrita como:

$$I(s) = \frac{\frac{V_f - v_C(0)}{L} + s i_L(0)}{(s + \alpha)^2} \quad (89)$$

a qual pode ser escrita em frações parciais como:

$$I(s) = \frac{i_L(0)}{(s + \alpha)} + \frac{\frac{V_f - v_C(0) - \alpha L i_L(0)}{L}}{(s + \alpha)^2} \quad (90)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace a partir da Tabela 1, a corrente é dada por:

$$i(t) = \{i_L(0)e^{-\alpha t} + [\frac{V_f - v_C(0) - \alpha L i_L(0)}{L}]te^{-\alpha t}\}u(t) \quad (91)$$




que é igual à equação (66), sabendo-se que  $-Ri_L(0) + \alpha Li_L(0) = -\alpha Li_L(0)$ .

Análise similar é utilizada para a resolução do circuito RLC paralelo.

### 2.3 Solução no domínio da frequência

No domínio da frequência, utilizando-se a transformada de Laplace, além das leis de Kirchhoff para tensão e corrente, as associações de impedâncias e admitâncias, simplificações em série e paralelo e transformação estrela-triângulo, são as mesmas do domínio do tempo, quando consideradas apenas resistências do circuito. A tabela 2 mostra os componentes básicos de um circuito e as relações de tensão e corrente para cada componente.

Tabela 2. Relação entre tensão e corrente nos componentes no domínio do tempo e frequência.

Componente	Domínio do tempo	Domínio da frequência
	$v(t) = Ri(t)$	$V(s) = RI(s)$
	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}$
	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}$

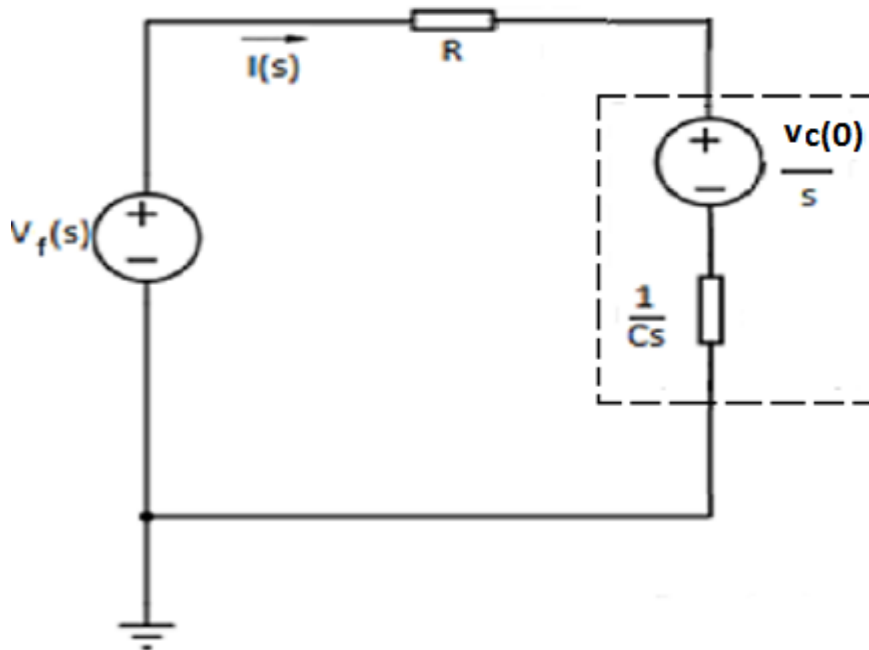
Fonte: Autoria própria

Utilizando-se da tabela 2 pode-se transformar quaisquer dos circuitos das figuras 1, 2, 3 e 4 em um circuito no domínio da frequência. Desta forma, derivadas e integrais se transformam em multiplicação e divisão. Resolve-se o circuito com fontes e impedâncias como se fossem fontes e resistências. Posteriormente, aplica-se a transformada inversa de Laplace para se chegar à equação de interesse no domínio do tempo.

### 2.3.1 Circuito RC série

O circuito da figura 5 é a representação do circuito da figura 1 (circuito RC) no domínio da frequência.

Figura 5. Circuito RC série, domínio da frequência.



Fonte: Autoria própria

Aplicando-se LTK ao circuito tem-se:

$$V_f(s) = RI(s) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{v_c(0)}{s} \quad (92)$$

Isolando a corrente na equação (109), tem-se:

$$I(s) = \frac{V_f(s) - \frac{v_c(0)}{s}}{\left(R + \frac{1}{sC}\right)} \quad (93)$$

Manipulando a equação (1) e substituindo  $V_f(s) = V_f/s$  na equação (93) tem-se:

$$I(s) = \frac{\left[\frac{V_f - v_c(0)}{R}\right]}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\left[\frac{V_f - v_c(0)}{R}\right]}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (94)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace, tem-se:

$$i(t) = \frac{V_f - v_c(0)}{R} e^{-t/\tau} u(t) \quad (95)$$

que é igual à equação (14).

De acordo com a tabela 2, a tensão no resistor é dada por  $V_R(s) = RI(s)$ :

$$V_R(s) = \frac{[V_f - v_c(0)]}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (96)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace, tem-se:

$$v_R(t) = [V_f - v_c(0)] e^{-t/\tau} u(t) \quad (97)$$

que é igual à equação (15).

De acordo com a tabela 2, a tensão no capacitor é dada por  $V_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + v_c(0)/s$ :

$$I(s) = \frac{\left[\frac{V_f - v_c(0)}{\tau}\right]}{s(s + \frac{1}{\tau})} + \frac{v_c(0)}{s} \quad (98)$$

a qual pode ser escrita em frações parciais como:

$$V_C(s) = \frac{V_f}{s} + \frac{[v_c(0) - V_f]}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (99)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace, tem-se:

$$v_c(t) = V_f + [v_c(0) - V_f]e^{-t/\tau}u(t) \quad (100)$$

que é igual à equação (13).

Para a análise da resposta natural, faz-se  $V_f = 0$  nas equações obtidas para cada caso.

A partir da primeira equação obtida em função do tempo (95), pode-se considerar as relações (2) e (3) no domínio do tempo, resultando nas equações (97) e (100) ou pode-se seguir a análise como foi apresentado neste item.

### 2.3.2 Circuito RLC série

De maneira análoga ao circuito da figura 5, pode-se chegar ao circuito da figura 6 com auxílio da tabela 2. O circuito da figura 6 é a representação do circuito da figura 2, um RLC série, no domínio da frequência.

Utilizando-se da equação para transformação de fontes (Lei de ohm), no circuito da figura 6, chega-se ao circuito da figura 7.

Aplicando-se LTK ao circuito tem-se:

$$V_f(s) = RI(s) + sLI(s) - Li_L(0) + \frac{v_c(0)}{s} + \frac{I(s)}{sC} \quad (101)$$

Isolando-se a corrente, chega-se a:

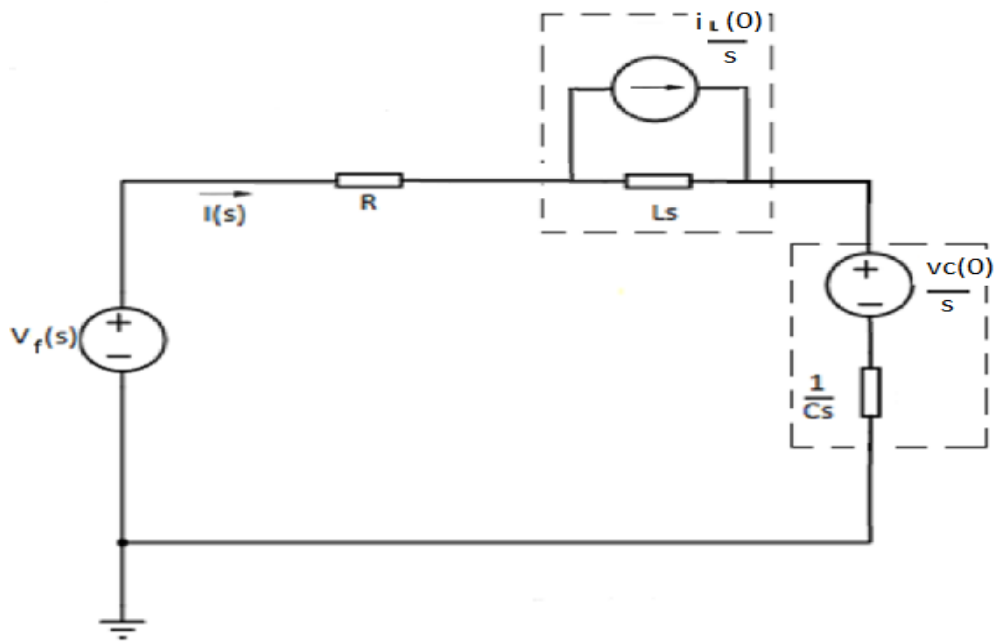
$$I(s) = \frac{\frac{V_f - v_c(0)}{L} + si_L(0)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (102)$$

que é a mesma corrente encontrada na equação (79).

A partir da equação (102), pode-se resolver o circuito como apresentado no item 2.2.2, encontrando-se e considerar as relações (2), (3) e (19) para obter as tensões no resistor, indutor e capacitor, ou pode-se utilizar as relações apresentadas na tabela 2 para se chegar em equações no domínio da frequência para as tensões nestes componentes e, a partir da tabela 1, aplicar a transformada de inversa de Laplace em cada uma das equações encontradas.

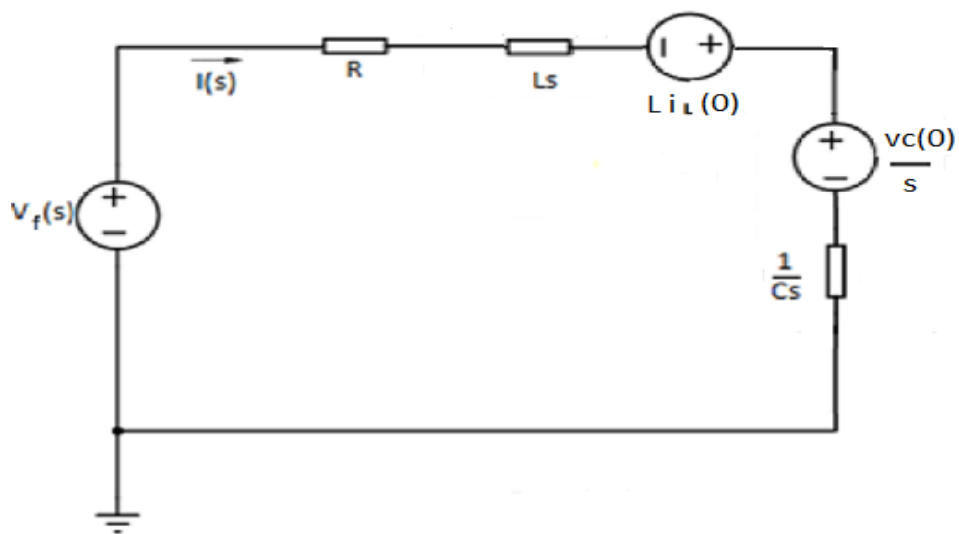
Os mesmos procedimentos podem ser utilizados para a resolução do circuito RLC paralelo.

Figura 6. Circuito RLC série, domínio da frequência



Fonte: Autoria própria

Figura 7. Circuito RLC série equivalente, domínio da frequência.



Fonte: Autoria própria

### 3. SIMULAÇÕES

Com o propósito de validar as equações obtidas no capítulo 2, utilizou-se o software Matlab para comparar os gráficos das tensões nos componentes dos circuitos a partir das equações encontradas e a partir do software de simulação de circuitos Proteus. Entende-se que por ser um programa comercial com 30 anos no mercado, pode-se confiar nos resultados de suas simulações, principalmente por se tratar de circuitos relativamente simples, como os apresentados nas Figuras 1, 2, 3 e 4. Utilizaram-se esses programas por estarem disponíveis na instituição.

De acordo com a disponibilidade dos componentes nos laboratórios da UTFPR-CP, foram selecionados os valores para utilização nas simulações e também para a montagem em bancada. Para o circuito RC série, foram utilizados uma resistência de  $10k\Omega$  e uma capacitância de  $C=1\mu F$ . Para o circuito RLC série, os valores selecionados para o indutor e capacitor, foram  $L=21mH$  e  $C=1\mu F$ , respectivamente.

Como visto na subseção 2.1.2 para uma resposta criticamente amortecida, faz-se necessário que  $\alpha = \omega_0$ , portanto:

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (103)$$

Substituindo-se os valores na equação (103), o valor de resistência é:

$$R = 2 \sqrt{\frac{21mH}{1\mu F}} = 289,82753\Omega \quad (104)$$

A partir desse valor foram escolhidas as resistências para os casos, sobreamortecido,  $R=1k\Omega$ , e subamortecido,  $R=10\Omega$ .

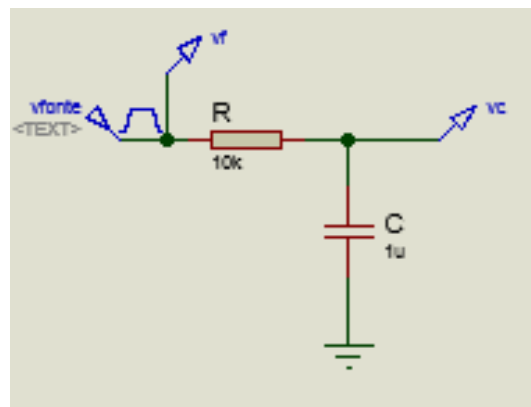
Para todos os casos, aplicou-se uma onda quadrada com amplitudes de 0V e 2V. Desta forma, observam-se as respostas natural e forçada na mesma simulação.

A frequência do sinal da fonte foi escolhida empiricamente, de modo a permitir a observação de todo o regime transitório para cada resposta (natural e forçada), que se observa em metade do período.

### 3.1 Circuito RC

O circuito da figura 8 representa o circuito RC simulado. Como comentado, os valores utilizados para resistor e capacitor, são de  $10\text{k}\Omega$  e  $1\mu\text{F}$ , respectivamente.

Figura 8. Circuito RC simulado no Proteus.

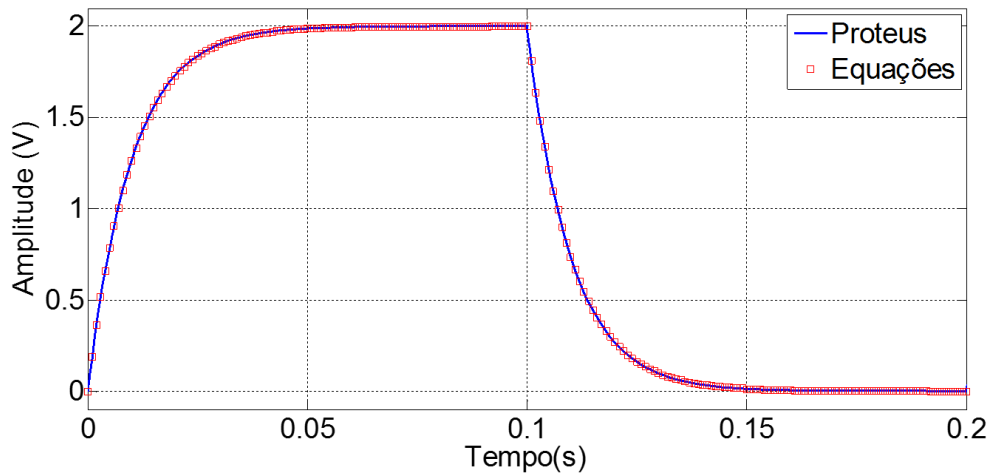


Fonte: Autoria própria

A tensão no capacitor em função do tempo é representada pela figura 9. Em linha cheia, na cor azul, a resposta da simulação no Proteus. Com os marcadores, em vermelho, a resposta obtida a partir das equações encontradas no capítulo 2.



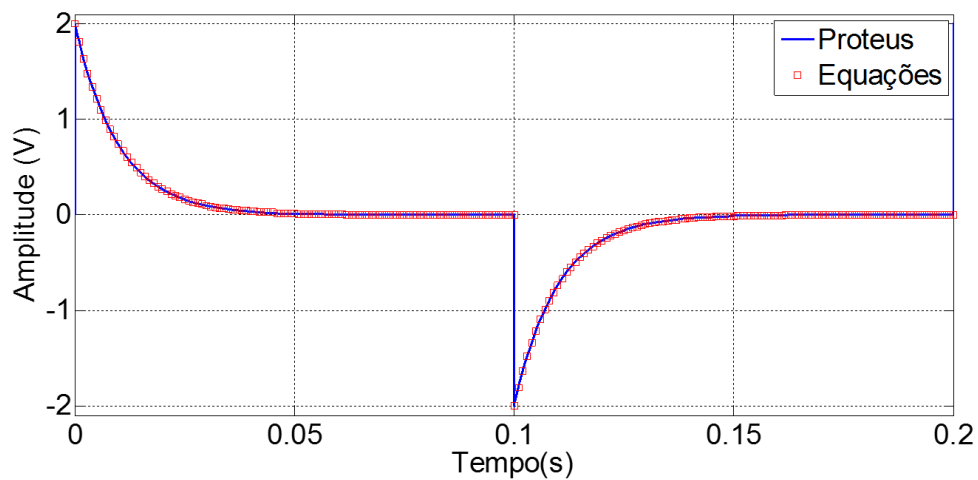
Figura 9. Gráfico tensão no capacitor.



Fonte: Autoria própria

A figura 10 representa a tensão no resistor no domínio do tempo.

Figura 10. Tensão no resistor



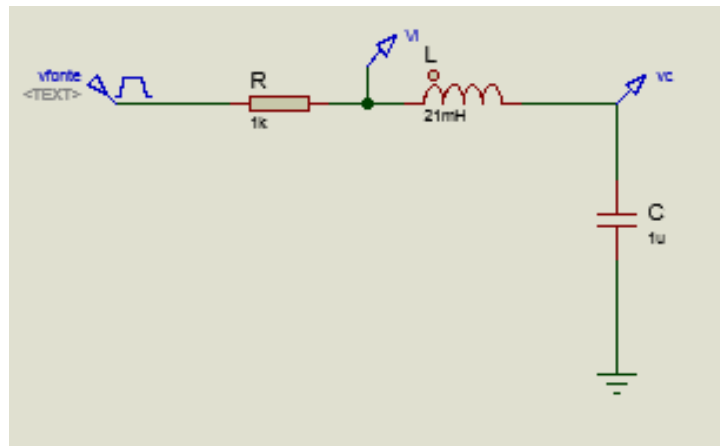
Fonte: Autoria própria

Pode-se observar, através dos resultados apresentados nas figuras 9 e 10, que as curvas geradas com as equações obtidas seguem a referência teórica, gerada no proteus.

### 3.2 Circuito RLC

O circuito da figura 11, simulado no Proteus, representa o circuito RLC série.

Figura 11. Circuito RLC série simulado no Proteus.

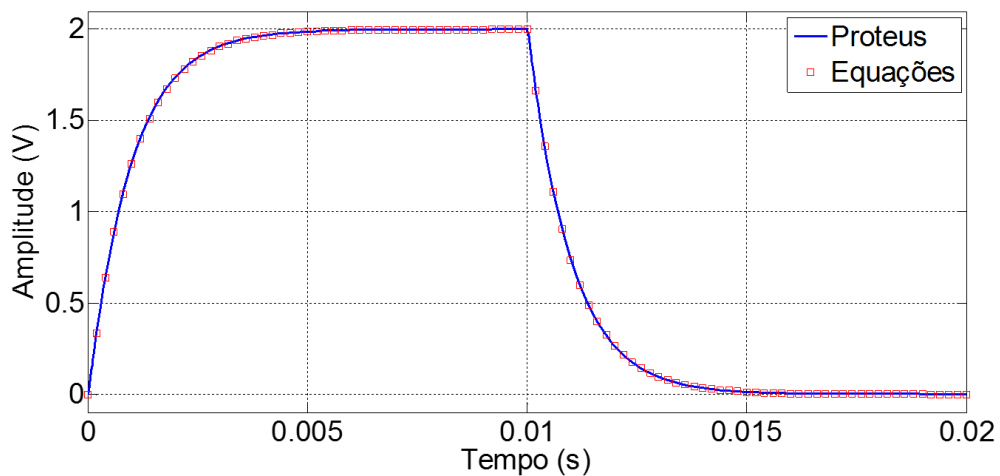


Fonte: Autoria própria

#### 3.2.1 Sobreamortecido

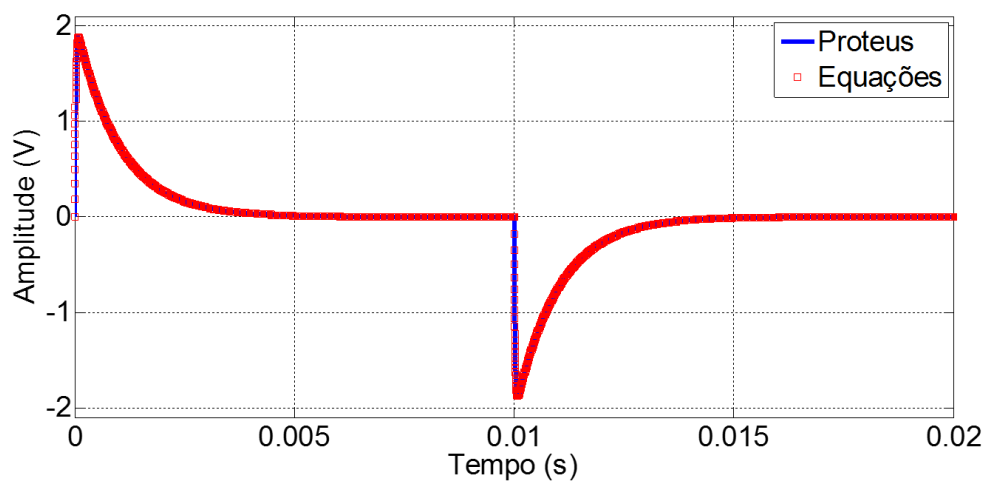
Para simulação da resposta sobreamortecida, os valores utilizados para resistor, capacitor e indutor, são  $1k\Omega$ ,  $21mH$  e  $1\mu F$ , respectivamente. A tensão no capacitor em função do tempo é representada na figura 12. Já a tensão no resistor no domínio do tempo é representada na figura 13.

Figura 12. Tensão no capacitor – resposta sobreamortecida.



Fonte: Autoria própria

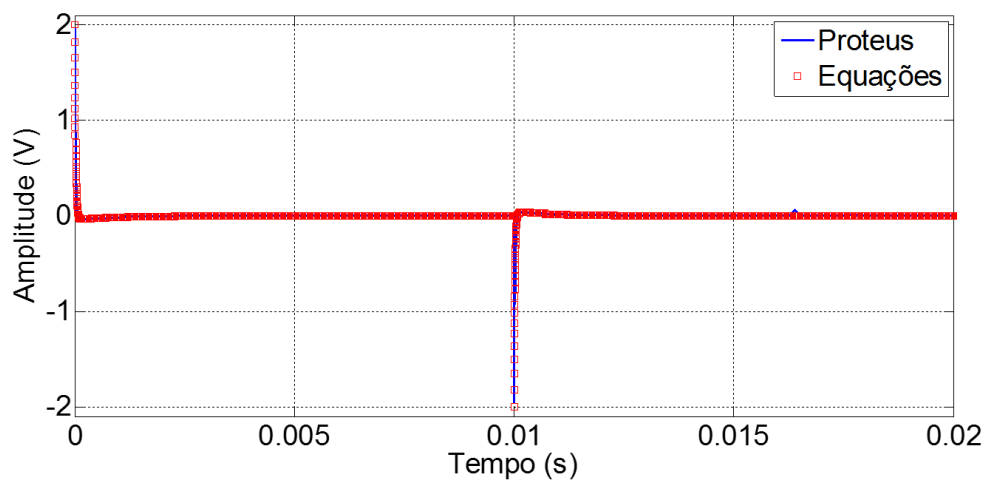
Figura 13. Tensão no resistor – resposta sobreamortecida.



Fonte: Autoria própria

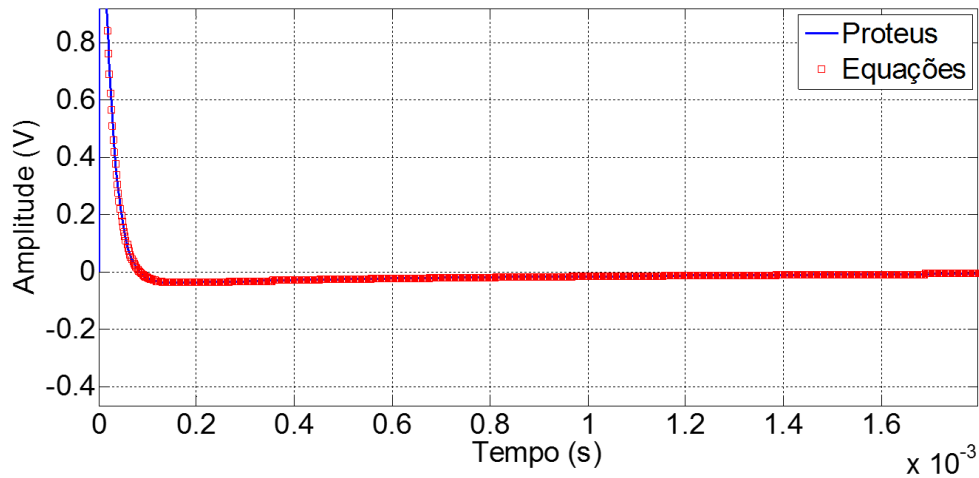
A tensão no indutor no tempo é representada na figura 14. Nas figuras 15 e 16 observa-se a tensão no indutor com mais detalhes no regime transitório, aplicando-se um zoom na figura 14.

Figura 14. Tensão no indutor – resposta sobreamortecida.



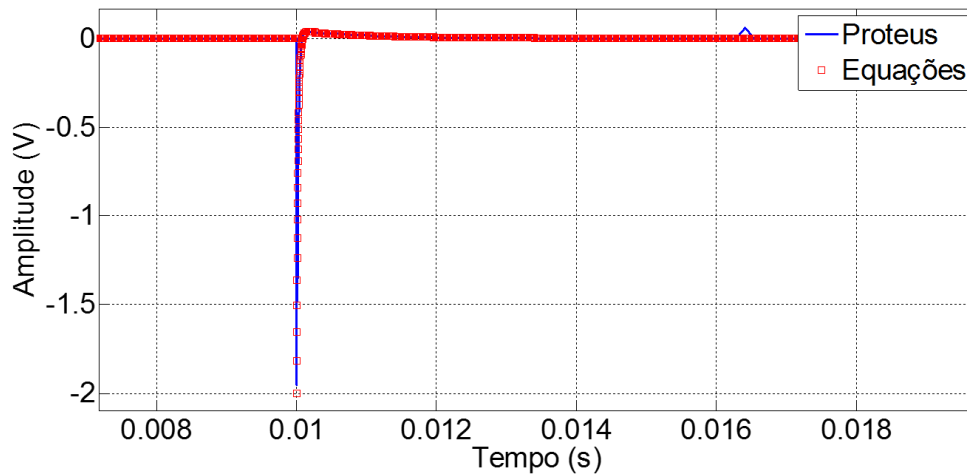
Fonte: Autoria própria

Figura 15. Zoom tensão no indutor – resposta forçada



Fonte: Autoria própria

Figura 16. Zoom tensão no indutor – resposta natural

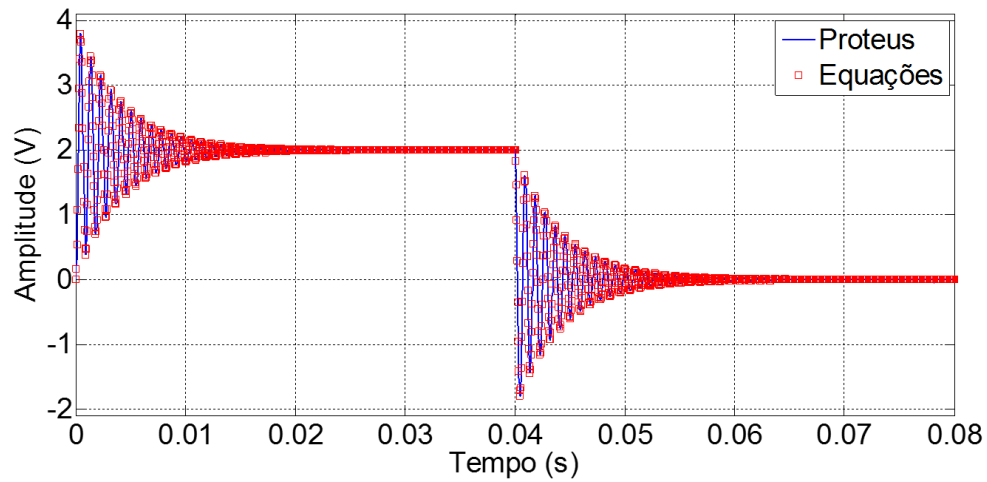


Fonte: Autoria própria

### 3.2.2 Subamortecido

Alterando-se o valor da resistência no circuito da Figura 11 para  $10\Omega$  obtém-se uma resposta subamortecida. Os demais componentes não foram alterados. A tensão do capacitor é representada pela figura 17.

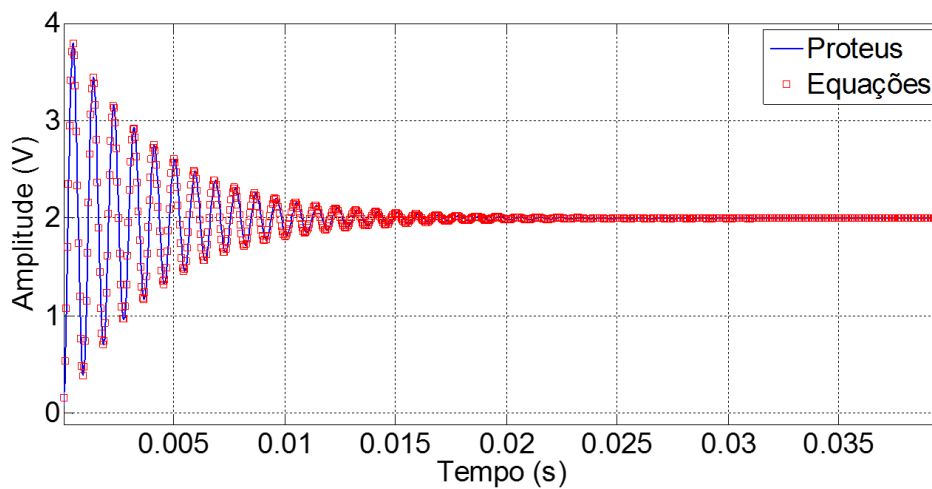
Figura 17. Tensão no capacitor – resposta subamortecida.



Fonte: Autoria própria

Uma melhor visualização do comportamento da tensão no capacitor é possível aplicando-se zoom na figura 17, como se observa na figura 18.

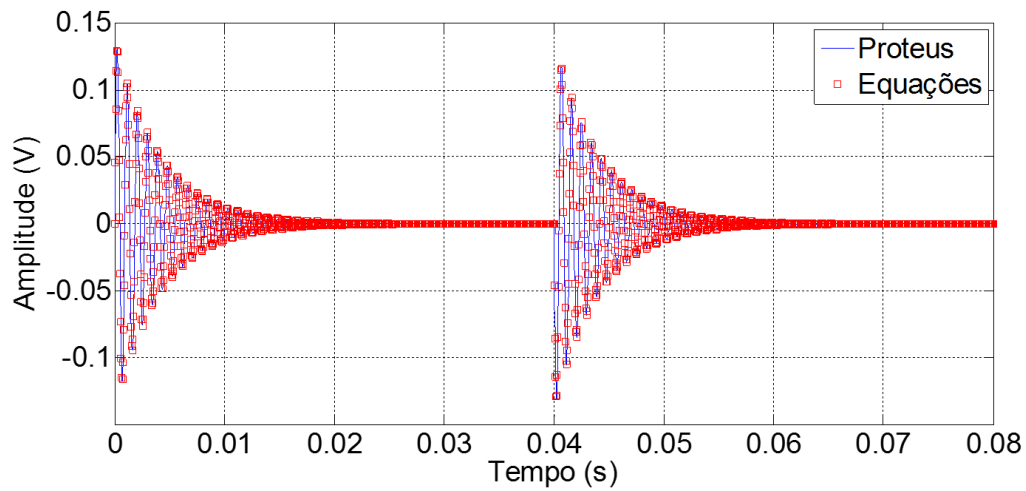
Figura 18. Zoom tensão no capacitor – resposta forçada.



Fonte: Autoria própria

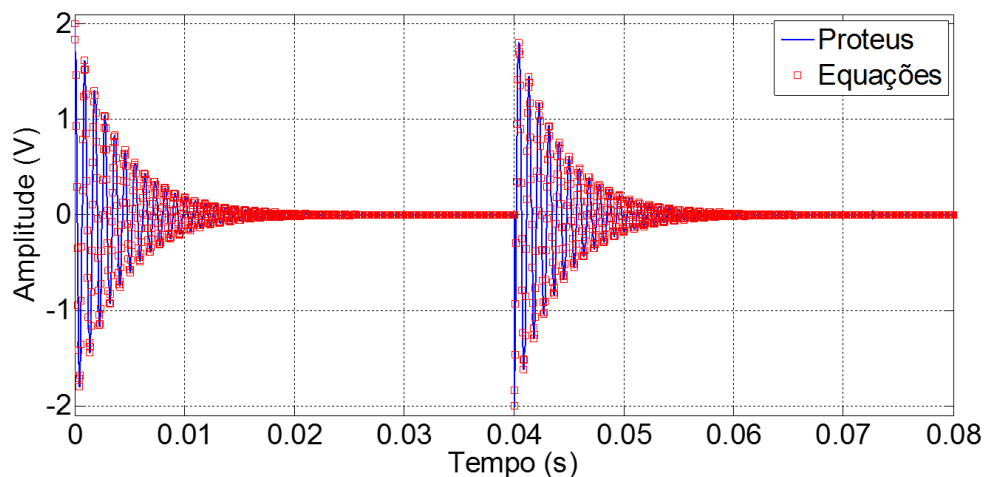
As tensões do resistor e do indutor estão representadas nas figuras 19 e 20, respectivamente.

Figura 19. Tensão no resistor– resposta subamortecida.



Fonte: Autoria própria

Figura 20. Tensão no indutor – resposta subamortecida.

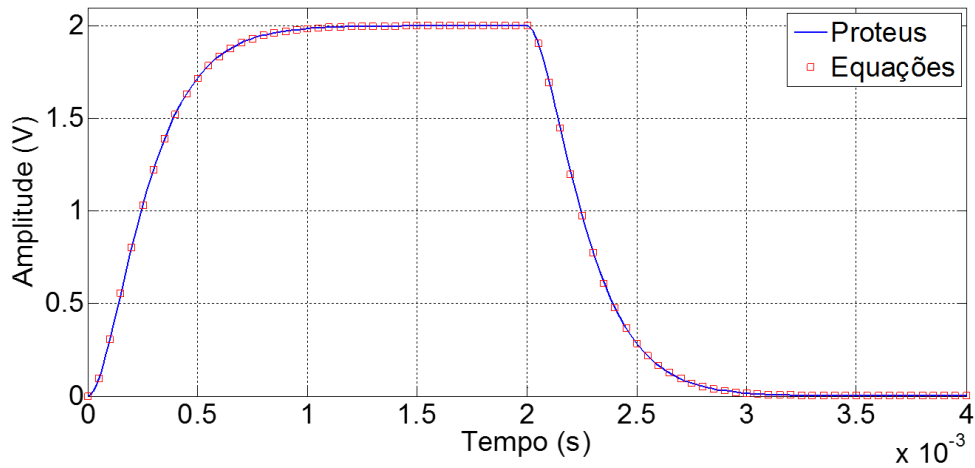


Fonte: Autoria própria

### 3.2.3 Criticamente Amortecido

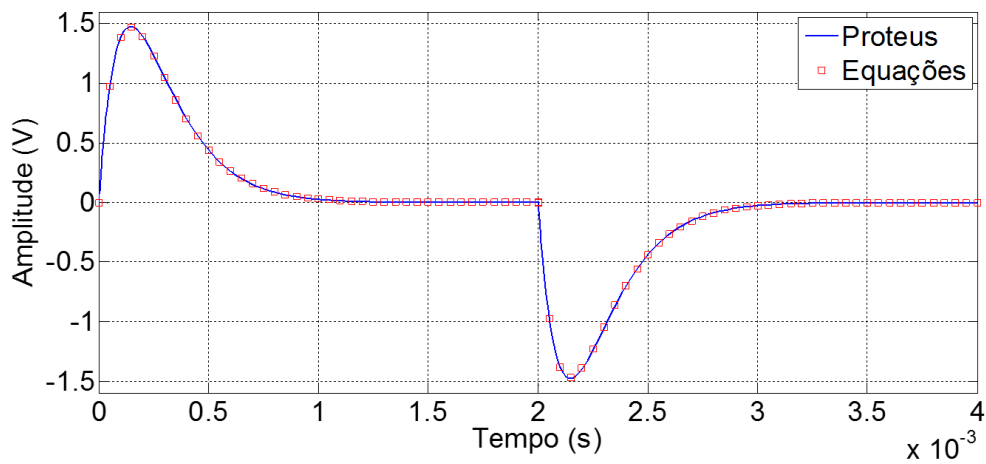
Fazendo-se  $R = 289,82753\Omega$  no circuito da figura 11, tem-se a resposta criticamente amortecida. As tensões no capacitor, no resistor e no indutor estão representadas nas figuras 21, 22 e 23, respectivamente.

Figura 21. Tensão no capacitor – resposta criticamente amortecida.



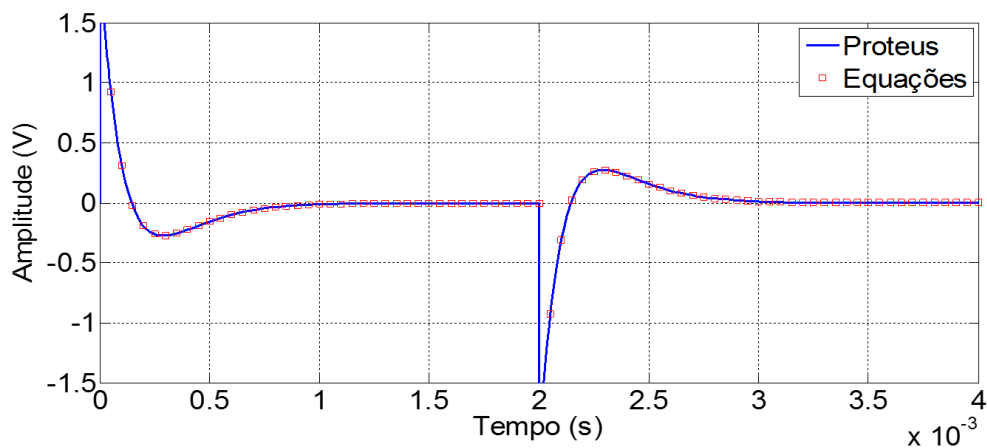
Fonte: Autoria própria.

Figura 22. Tensão no resistor – resposta criticamente amortecida.



Fonte: Autoria própria.

Figura 23. Tensão no indutor – resposta criticamente amortecida.



Fonte: Autoria própria.

Novamente observa-se que as curvas geradas com as equações obtidas no capítulo 2 seguem a referência teórica, gerada no proteus, validando o trabalho apresentado até então.



#### 4. PRÁTICA

Montaram-se os circuitos das figuras 8 e 11 no laboratório. Os dados foram medidos com um osciloscópio digital e exportados para o matlab a partir de um pendrive conectado à interface USB do osciloscópio. Utilizou-se uma fonte geradora de sinais BK Precision 4017B.

Para comparação dos resultados experimentais com a teoria, utilizaram-se as equações propostas no capítulo 2 e os valores reais dos componentes, medidos com um multímetro digital, os quais estão apresentados na tabela 3.

Tabela 3 – Valores dos componentes utilizados nos experimentos

Valor comercial	Valor real	Circuito
10 $\Omega$	15,4 $\Omega$	RLC subamortecido
1k $\Omega$	0,979k $\Omega$	RLC sobreamortecido
10k $\Omega$	9.78k $\Omega$	RC
1 $\mu$ F	0,978 $\mu$ F	*
21mH	*	*

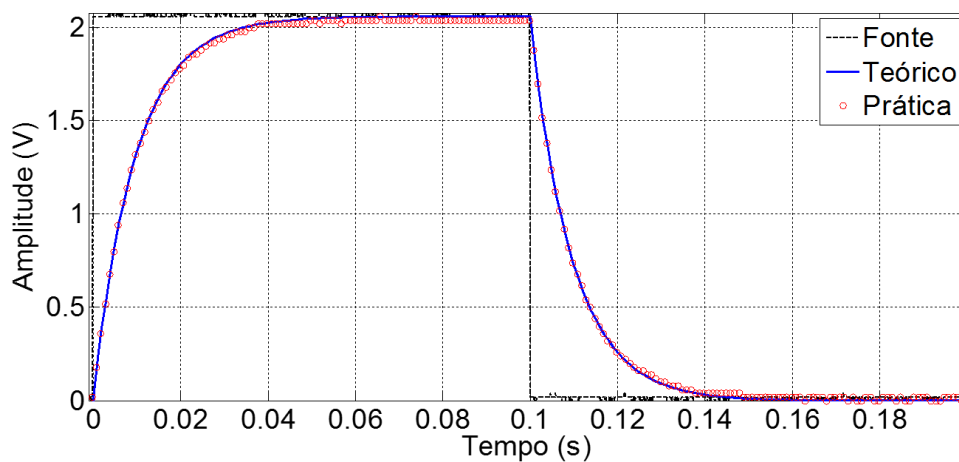
\* Valor não medido.

Fonte: autoria própria.

Como apresentado nas equações (103) e (104), para a resposta criticamente amortecida, o valor da resistência depende de uma relação exata entre os demais componentes do circuito, o que em um circuito real, é muito difícil de acontecer, não apenas pela tolerância do valor comercial, mas também por pequenas variações nos valores dos componentes em função de temperatura, por exemplo. Portanto, apenas são apresentados os resultados para o circuito RC, e respostas sobreamortecida e subamortecida do circuito RLC série.

O gráfico da figura 24 ilustra a tensão no capacitor para o circuito RC. Em linha cheia, na cor azul, a resposta teórica, utilizando as equações do capítulo 2. Com os marcadores, em vermelho, a resposta obtida a partir da montagem em laboratório.

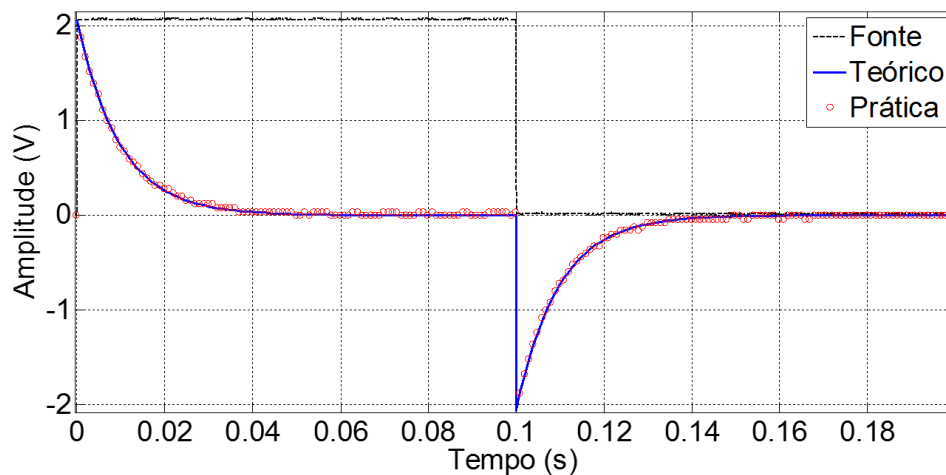
Figura 24. Tensão no capacitor – circuito RC.



Fonte: Autoria própria.

A tensão no resistor está apresentada na figura 25.

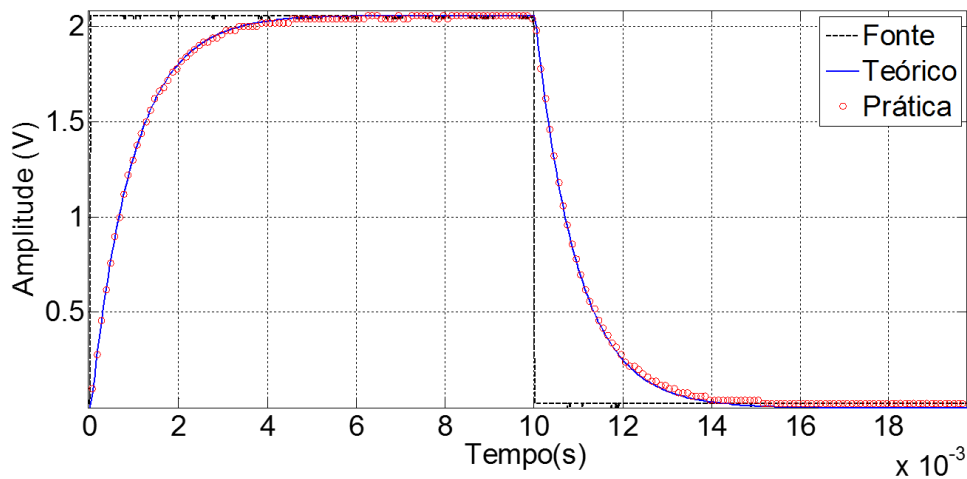
Figura 25. Tensão no resistor



Fonte: Autoria própria

O gráfico da figura 26, mostra a tensão no capacitor para o circuito RLC série com resposta sobreamortecida. Para esse tipo de resposta, apenas a forma de onda da tensão no capacitor é apresentada, visto que o osciloscópio utilizado só possui dois canais de entrada. Poder-se-ia fazer modificações no circuito para medição das tensões no resistor e indutor. Entretanto, entende-se que apenas a tensão no capacitor é suficiente para validar os resultados deste trabalho, visto que a equação da tensão no capacitor foi obtida a partir das equações nos demais elementos (ver capítulo 2).

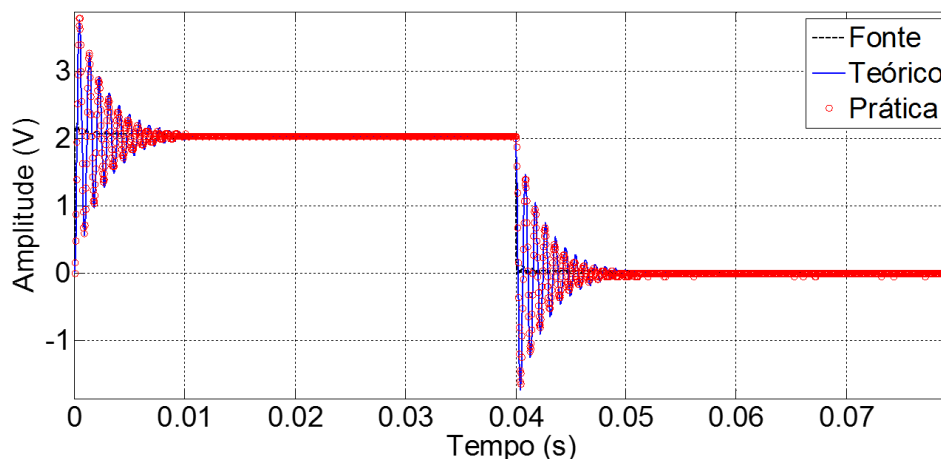
Figura 26. Tensão no capacitor – resposta sobreamortecida.



Fonte: Autoria própria

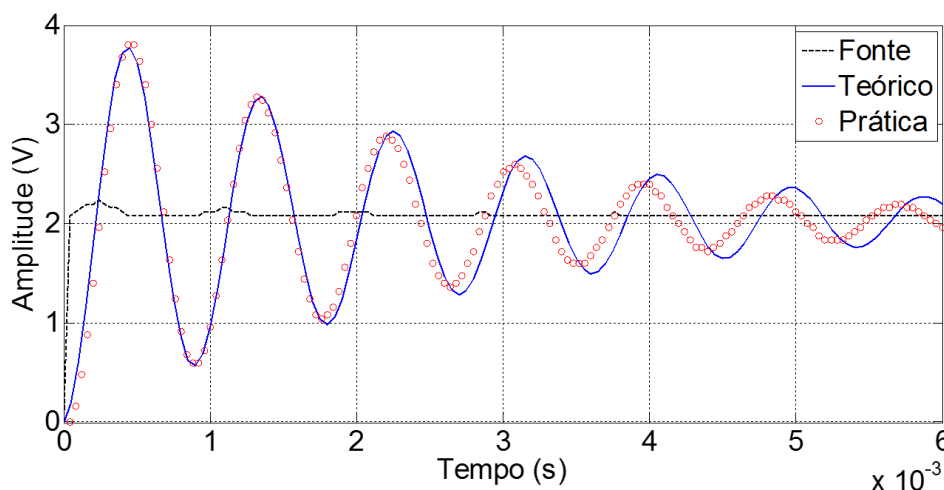
O gráfico da figura 27, mostra a tensão no capacitor para o circuito RLC série com resposta subamortecida e a figura 28 ilustra um zoom na resposta forçada.

Figura 27. Tensão no capacitor – resposta subamortecida.



Fonte: Autoria própria.

Figura 28. Zoom tensão no capacitor – resposta forçada.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se que, a partir de aproximadamente 2ms, as respostas prática e teórica apresentam comportamentos diferentes. Nota-se que a frequência de oscilação da resposta prática é um pouco maior, tendo 6 períodos completos em aproximadamente 5,2ms, enquanto que a resposta teórica isso se dá em aproximadamente 5,4ms.

A frequência das oscilações na resposta subamortecida está relacionada aos valores do capacitor e do indutor ( $\omega_0$ ), sendo que este último não foi medido.

Propõe-se então uma maneira de encontrar um valor mais próximo ao valor real da indutância utilizada no laboratório.

#### 4.1 ESTIMAÇÃO DO VALOR DA INDUTÂNCIA

Montou-se um circuito RL, considerando-se a resistência de  $1\text{k}\Omega$ . Neste caso, substituiu-se o capacitor do circuito da figura pelo indutor. Mediu-se a tensão no indutor, como ilustrado nas figuras 29 e 30.

Sabendo-se o valor real da resistência, apresentado na tabela 3, consideraram-se diferentes valores da indutância de  $15\text{mH}$  a  $25\text{mH}$ , variando-se com passos de  $0,1\text{mH}$ . Utilizando-se do Matlab, realizou-se os cálculos para cada valor de indutância encontrando-se a curva para a tensão no indutor, a partir da equação (21) e comparou-se com a resposta prática, calculando-se o erro quadrático médio.

Os comandos utilizados foram:

```
i1=177; %índice inicial do trecho analisado t_inicial = tlab(177)
i2=984; %índice final do trecho analisado t_final = tlab(984)

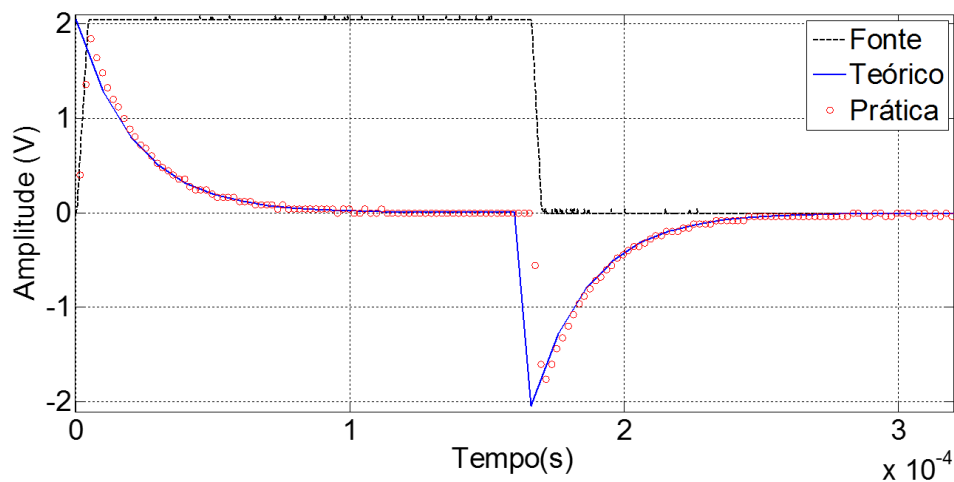
t = tlab(i1:i2)-tlab(i1);
R = 0.979e3; %valor da resistência medida em laboratório
Vf = 1.84; %valor da tensão no indutor no tempo inicial do trecho
utilizado
iL0 = 0;

erro_inicial = 1e3; %valor elevado para entrar no laço
for L=15e-3:1e-4:25e-3 %valores de indutância analisados
    %cálculo da tensão teórica no indutor (vL) e cálculo do erro com
    %relação à tensão medida com o osciloscópio (vllab)
    tau = L/R;
    vL = -(R*iL0-Vf).*exp(-t/tau);
    erro = sum((vL-vllab((i1:i2))).^2);
    if erro < erro_inicial
        indutor=L;
        erro_inicial = erro;
    end
end

indutor
```

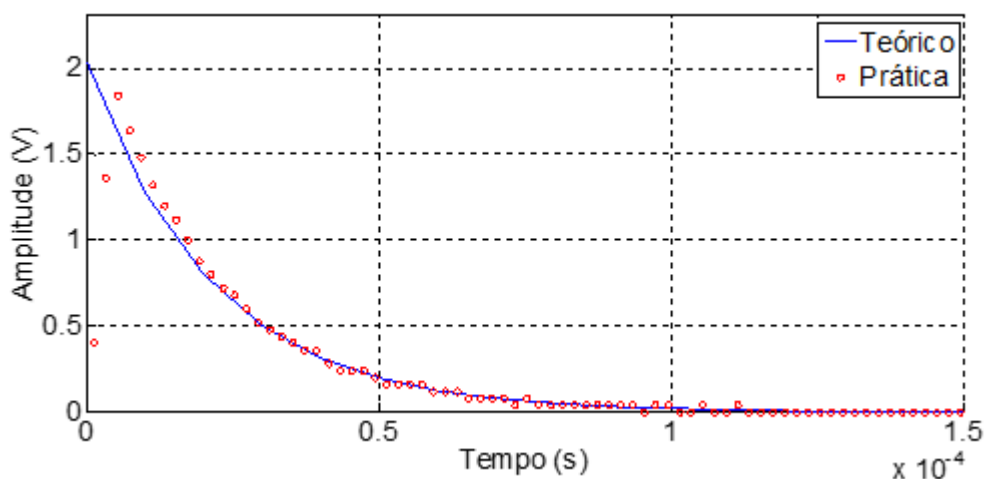
O valor estimado da indutância é o valor para o menor erro quadrático médio, que se deu para  $L = 20\text{mH}$ .

Figura 29. Tensão no indutor – circuito RL.



Fonte: Autoria própria.

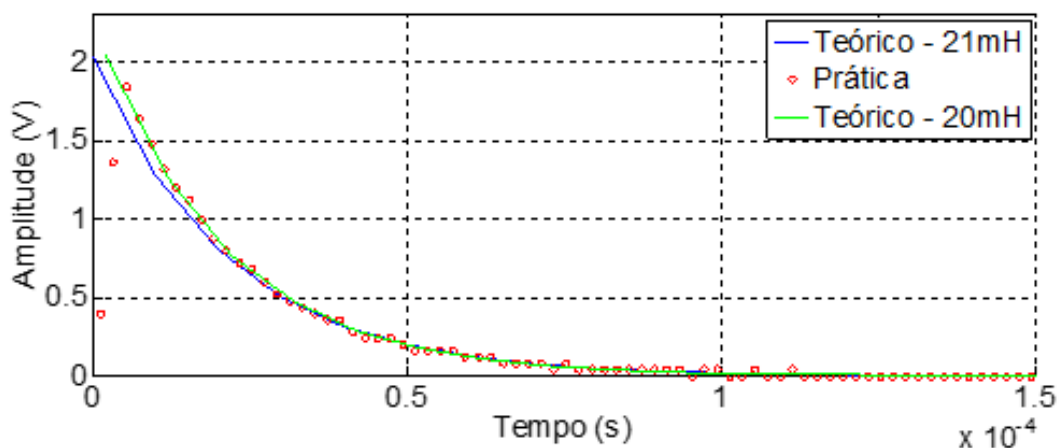
Figura 30. Zoom na tensão do indutor.



Fonte: Autoria própria.

Observa-se na figura 31 o resultado obtido com a indutância estimada para o zoom na tensão do indutor apresentado na figura 30. A resposta teórica considerando o novo valor do indutor está apresentada também em linha cheia, mas na cor verde.

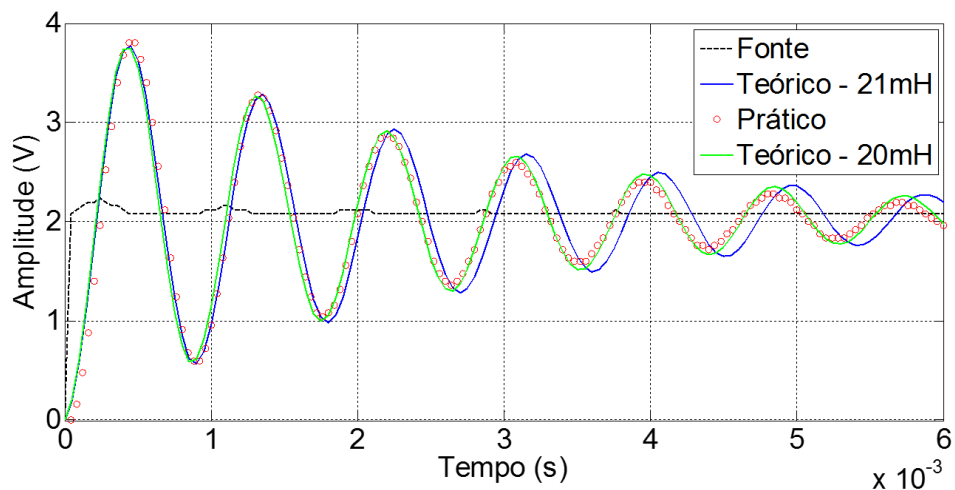
Figura 31. Zoom na tensão do indutor.



Fonte: Autoria própria.

O gráfico da figura 32 ilustra o zoom tensão no capacitor para o caso RLC subamortecido, apresentado na figura 28 considerando o valor estimado para a indutância.

Figura 32. Tensão no capacitor



Fonte: Autoria própria.

Observa-se que a curva teórica considerando-se o valor da indutância de 20mH se aproxima mais à resposta real do que quando considerado o valor de 21mH.

Nota-se também que embora os comportamentos teórico e prático se aproximaram mais, ainda há pequenas divergências. Para a estimação do

indutor, considerou-se o indutor ideal, isto é, sem considerar a resistência do enrolamento e possíveis capacitâncias parasitas.



## 5. CONCLUSÃO

O trabalho apresenta a análise do regime transitório, tanto resposta forçada como resposta natural, para circuitos RLC de diferentes formas: (i) análise no domínio temporal e equações diferenciais ordinárias; (ii) análise no domínio temporal com resolução das equações diferenciais através da transformada de Laplace e (iii) análise no domínio da frequência, também utilizando-se a transformada de Laplace.

As fórmulas obtidas foram comparadas com curvas teóricas geradas via simulação num software comercial, validando as equações apresentadas no trabalho. Posteriormente compararam-se as curvas teóricas com valores medidos no laboratório, observando-se grande concordância entre os resultados.

Para a resposta subamortecida do circuito RLC notou-se uma leve diferença entre os resultados teórico e prático, devido ao valor real da indutância ser diferente do valor considerado (21mH). A partir da resposta de um circuito RL, considerando-se diferentes valores de indutância encontrou-se, através do menor erro quadrático médio o valor de indutância que mais aproxima os resultados teóricos do prático. Com o valor ajustado (20mH), observou-se que a resposta teórica para circuito RLC ficou bastante próxima da resposta obtida no experimento.

Nota-se que o ajuste do valor da indutância considerou o indutor real. Na prática, dependendo das condições de operação, a resistência do enrolamento e possíveis capacitâncias parasitas podem modificar significativamente os resultados. Portanto, propõe-se, como sugestão de trabalhos futuros que um novo método para o ajuste da indutância seja desenvolvido levando em consideração tais parâmetros.

Sugere-se também que, a partir do equacionamento apresentado, seja desenvolvido um sistema que emule os circuitos analisados e, em tempo real, apresente as respostas de acordo com a entrada, por exemplo através de um microcontrolador. Desta maneira, pode-se trabalhar com o valor exato do componente.

Tratando-se das disciplinas relacionadas a eletricidade básica e circuitos elétricos, o desenvolvimento desse trabalho é uma grande contribuição teórica,

que pode ser utilizado como material de apoio no desenvolvimento na disciplina. Os vários métodos abordados para resolução aumentam o arsenal de ferramentas à disposição do aluno quando se deparar com problemas semelhantes.

## REFERÊNCIAS

BARROS, Marcelo Henrique Martins de. **Modelagem, simulação e otimização de transformadores piezoelétricos de modo radial para aplicações em conversão de potência** / Marcelo Henrique Martins de Barros. – São Carlos : UFSCar, 2009.

BAVASTI, Carlos A., et. al. **Modelo geral de neutralizadores dinâmicos para controle passivo de vibrações e ruído: Parâmetros equivalentes generalizados**. CMNE/CILAMCE, Porto, Portugal, 2007.

CABRAL, Sérgio H. L. **Análise de transitórios elétricos em transformadores através do método TLM**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

CASEIRA, F. de Alverda F., “**Análise de transitórios envolvendo deslocamento da frequência**”, Rio de Janeiro. Curso de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.

CHRISTOFFERSEN, Carlos E.; STEER, Michael B. **State-variable-based transient circuit simulation using wavelets**. 2001.

COSTA, Tito R. Vaz; FREITAS, Francisco D. **Identificação de impedâncias de sistemas de potência trifásicos por meio do método *vector fitting***. Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade de Brasília, 2013.

EDMINISTER, J. A. **Circuitos Elétricos: Reedição da edição clássica revisada**. 2ª.ed. São Paulo: Makron, McGraw-Hill, 1991.

FERNANDES JR, D.; NEVES, W. L. A., “**Um modelo de transformador de potencial capacitivo para estudos de transitórios eletromagnéticos**”, Campina Grande. Departamento de Engenharia Elétrica – UFCG, 2003.

FERRAZ, G. Martinez F., “**Proposta de um modelo de Circuito Equivalente para representação em Banda Larga de Transformadores de Distribuição**”, 2015, Itajubá. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica na Universidade Federal de Itajubá, 2015.

FRAGNITO, Prof. Hugo L. **Circuitos de corrente alternada**. 2010. 78 p. Notas de Aula. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010.

JOHNSON, D. E., HILBURN, J. L., JOHNSON, R. J., **Fundamentos de Análise de Circuitos Elétricos**. 4ª Ed – Rio de Janeiro, RJ: Editora Prentice-Hall do Brasil LTDA, 1994.

KIENITZ, K. H., **Análise de circuitos: um enfoque de sistemas**. 2ªed – São José dos Campos: Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 2010.

MARTINS, Adair Vilas Boas. **O Uso da Técnica dos Grafos de Ligação para a Simulação de Centrais Hidrelétricas em Regime Transitório**, 2004. Tese de Doutorado. UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ, 2004.

MAZZOTI, A. C.; Pontes Jr, B. R; Silveira, M; Baltazar, J. M., “**Modelagem e Comportamento Dinâmico de um Sistema com Rigidez Não-Linear e Amortecimento Eletromecânico**”, 2013. Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – CMAC Sudeste, 2013.

NETO, A. S., FERNANDES, A. B., **Efeito da modelagem da carga para estudos de transitórios eletromagnéticos em sistemas de transmissão**. XII ERIAC, Porto Iguaçu, Argentina, 2009.

NILSSON, J. W., RIEDEL, S. A., **Circuitos Elétricos**. 8ªEd – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

PONTE, Fernando A. Rosa; DE BORTOLI, Álvaro Luiz. **Otimização de sistemas mecânicos/amortecedor mecânico**. Salão de Iniciação Científica. Livro de resumos. Porto Alegre: UFRGS, 1997.

SADIKU, M. O. S; ALEXANDER, C. K. **Fundamento de circuitos elétricos**. 5ªed. AMGH Editora Ltda. , 2013.

SANCHES, D., “**Confiabilidade eletrônica**”, 1ª Ed, 2014.

SILVA, J. P.; BRANDÃO, R.; STEFFEN Jr, V., “**Amortecimento de vibrações em estruturas flexíveis utilizando um elemento piezoelétrico conectado a um circuito tipo shunt ressonador**.”, Uberlândia. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia – MG, 2002.

VAN DER SLUIS, Lou. **Transients in power systems**. Wiley, 2001.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 2000.