

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS CORNÉLIO PROCÓPIO
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Thaísa Silvestre

ANÁLISE COMPARATIVA EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DE UMA VIGA
ENGASTADA LIVRE FLEXIONADA EM REGIME NÃO LINEAR

Cornélio Procópio
2017

Tháísa Silvestre

ANÁLISE COMPARATIVA EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DE UMA VIGA
ENGASTADA LIVRE FLEXIONADA EM REGIME NÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Tecnológica
Federal do Paraná – Campus Cornélio
Procópio, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Engenheira
Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Adailton Silva Borges.

Cornélio Procópio

2017

Tháísa Silvestre

ANÁLISE COMPARATIVA EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DE UMA VIGA
ENGASTADA LIVRE FLEXIONADA EM REGIME NÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Tecnológica
Federal do Paraná – Campus Cornélio
Procópio, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Engenheira
Mecânica.

Data de aprovação: ___/___/_____

Prof. Dr. Adailton Silva Borges (Orientador)

Prof. Dr. Adriano Silva Borges

Prof. Me. Conrado Di Raimo

Obs: A folha de aprovação assinada encontra-se na coordenação.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, que sempre me deu forças, me protegeu e iluminou os meus caminhos, e que me permitiu vivenciar todas as minhas experiências e alcançar mais esse objetivo em minha vida. Agradeço ainda a Mãe Três Vezes Admirável de Schoenstatt, que intercede por mim, me acolhe com tanto carinho e que me trouxe a paz necessária em todos os momentos difíceis ao longo deste trabalho.

Aos meus pais Gilberto e Luzia, meus exemplos de vida, que nunca mediram esforços para que eu realizasse todos os meus sonhos. Aos meus irmãos Nathália, Arthur e Renata. Obrigada por me darem amor e por me apoiarem sempre. Tudo que alcancei até aqui devo a vocês.

Ao meu namorado e companheiro de laboratório Rodrigo, que foi essencial no desenvolvimento deste projeto, por sempre estar disposto a me ajudar e ensinar, e por todo o amor e alegria que me mantiveram animada a continuar até o fim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Adailton Silva Borges, por estar disponível em prol do meu crescimento pessoal e profissional, pelas inúmeras discussões que tornaram este trabalho possível, pelos conselhos e pela amizade.

Agradeço também aos professores da UTFPR que fizeram parte da minha caminhada nestes anos da graduação, que me fizeram crescer como pessoa e que me ensinaram muito além do que está nos livros. Obrigada por serem meus guias e meus amigos.

À toda minha família e amigos, que sempre torceram por mim, me incentivaram, e que fizeram com que eu me tornasse quem sou hoje. Em especial, também dedico este trabalho aos que não estão mais presentes nessa vida comigo, ao vovô João, à tia Baixinha e a minha amiga Kellen.

Aos meus amigos do Lampião, Camila, Giovanna, Felipe, Silvio e Gabriel, que tornaram os cinco anos de engenharia um pouco mais leves. Obrigada por todos os aprendizados, pelo companheirismo, pelas risadas, pelas horas de estudo e até pelos momentos de desespero. Agradeço por ter tido a oportunidade de viver isso tudo com vocês.

Aos meus amigos da empresa Jacto pela paciência que tiveram comigo durante o período deste trabalho e pelas grandes experiências de vida que estão me proporcionando.

Por fim, agradeço aos membros da banca Adriano Silva Borges e Conrado Di Raimo pela disponibilidade e atenção no aperfeiçoamento deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo comparar os deslocamentos de uma viga sujeita à flexão, com a utilização de diferentes métodos de medição. Para a medição do deslocamento foram utilizadas três ferramentas, a medição tradicional com papel milimetrado, a medição sem contato com auxílio de uma câmera de alta velocidade e a utilização do método de elementos finitos não-lineares pela teoria de Cosserat.

A viga encontra-se engastada em uma das extremidades e sujeita à uma carga na extremidade livre. A estrutura é de material de aço inoxidável e suas propriedades tais como módulo de elasticidade e momento de inércia foram determinadas por um experimento complementado a teorias presentes na literatura. Neste experimento, a viga encontra-se em regime linear e com auxílio de um relógio comparador calculou-se a flecha máxima. Para a medição com a câmera aplicou-se um algoritmo já desenvolvido no âmbito no laboratório, que tem como ideia principal a conversão das coordenadas da matriz de imagem, que se encontram em pixels, em escalas de medida, no caso em milímetros. Para o terceiro método de medição foi empregado o método de elementos finitos. A principal vantagem da utilização de elementos finitos pela teoria de Cosserat é que esta é geometricamente exata e auxilia na discretização das equações do movimento. Essa teoria implica que a configuração deformada da viga é descrita através do vetor deslocamento da curva de centroides, e uma base móvel, sendo esta unida a seção transversal da viga, com relação à um referencial inercial. Para cálculo de deslocamentos por meio deste método também foi implementado um algoritmo. O presente trabalho propõe a realização dos estudos de elementos finitos não lineares aplicados a uma viga engastada livre sujeita a flexão, cujos deslocamentos impostos são maiores que 1% do comprimento da viga. Para verificar a eficácia da metodologia proposta no trabalho, foi realizada a comparação dos resultados numéricos através de algoritmo implementado em ambiente Matlab® com os experimentais.

Abstract

The present work has the objective of comparing the displacements of a beam subjected to bending, using different measurement methods. For the measurement of displacement, three tools were used, the traditional measurement with millimeter paper, contactless measurement with the help of a high-speed camera and the use of the non-linear finite element method by Cosserat's theory.

The beam is set at one end and subjected to a load at the free end. The structure is of stainless steel material and its properties such as modulus of elasticity and moment of inertia were determined by an experiment complemented to theories present in the literature. In this experiment, the beam was in a linear regime and the maximum shaft was calculated using a comparator watch. For the measurement with the camera an algorithm already developed in the scope in the laboratory was applied, whose main idea is the conversion of the coordinates of the image matrix, which are in pixels, in measurement scales, in the case in millimeters. For the third method of measurement the finite element method was used. The main advantage of the use of finite elements by the Cosserat theory is that it is geometrically accurate and assists in the discretization of the equations of motion. This theory implies that the deformed configuration of the beam is described through the displacement vector of the centroid curve, and a movable base, this being joined to the cross section of the beam, with respect to an inertial frame. To calculate displacements by means of this method, an algorithm was also implemented. The present work proposes the realization of studies of nonlinear finite elements applied to a free crimped beam subjected to bending, whose displacements imposed are greater than 1% of the length of the beam. To verify the effectiveness of the methodology proposed in the work, the numerical results were compared through an algorithm implemented in the Matlab® environment with the experimental ones.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 a. Comportamento linear :pequenos deslocamentos e pequenas deformações.....	13
Figura 2. Modelo esquemático de um elemento de viga de Cosserat.	14
Figura 3. Componentes de uma câmera digital.....	22
Figura 4. Representação de uma imagem digital.....	23
Figura 5. Representação de um cubo com as cores RGB	24
Figura 6. Fluxograma do processamento de imagens	26
Figura 7. Dimensão total obtida pela trena.....	26
Figura 8. Condição inicial da viga por papel milimetrado	29
Figura 9. Disposição e divisão da viga de estudo	29
Figura 10. Condição final da viga por papel milimetrado.....	30
Figura 11. Deslocamentos pelo algoritmo da câmera	31
Figura 12. Comparação de medição de deslocamentos da viga engastada com aplicação de 2,3054 N na extremidade livre	33
Figura 13. Comparação de medição de deslocamentos da viga engastada com aplicação de 5,101 N na extremidade livre	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Propriedades da viga.....	28
Tabela 2. Deslocamentos de cada alvo na medição por câmara	31
Tabela 3. Comparativo de deslocamento máximo	31
Tabela 4. Resultados de deslocamentos de cada nó para a Teoria de Vigas de Cosserat.....	32
Tabela 5. Erros presentes no comparativo de deslocamentos.....	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
2	OBJETIVOS	11
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	12
3.1	Comportamento estrutural.....	12
3.2	Teoria de vigas de Cosserat	15
3.3	Detecção de deslocamentos a partir do processamento de imagens obtidas da câmera.....	21
3.3.1	Estrutura de uma câmera digital.....	21
3.3.2	Sistema RGB	24
3.3.3	Processamento De Imagens	24
4	METODOLOGIA.....	27
4.1	Obtenção das propriedades e disposição da viga.....	27
5	RESULTADOS	30
5.1	Resultados experimentais.....	30
5.2	Resultados numéricos.....	32
6	CONCLUSÃO	35
	REFERÊNCIAS.....	36

1 INTRODUÇÃO

Conforme o mundo caminha em uma progressiva evolução tecnológica, nota-se que, o aprimoramento e desenvolvimento de técnicas em inúmeras áreas de engenharia encontram-se cada vez mais constantes. Muitos destes avanços são aplicados na aquisição de dados experimentais, tais como, a medição de deslocamento de objetos, sendo os mais usuais por contato direto e alternativamente os que não utilizam contato direto.

O emprego de técnicas de medição sem contato justifica-se em casos onde o contato físico direto do sensor de medição pode intervir nas propriedades do sistema pelo qual o objeto a ser medido está introduzido, ou também em locais onde o objeto situa-se em uma posição de difícil acesso para colocação dos instrumentos de medição, sendo muitos destes ambientes ameaçadores aos próprios operadores, como, ambientes com alta temperatura ou com presença de superfícies energizadas. Os métodos por laser e por ultrassom são normalmente empregados para as medidas sem contato (Leonardi, 2015).

A utilização de câmeras digitais como sensores sem contato é uma outra alternativa que nos últimos anos vem conquistando um crescente interesse na comunidade científica. Existem uma gama de aplicações na engenharia, que são utilizados estes tipos de sensores, dentre elas pôde-se citar: Ti, et al. (2007), Pankow et al. (2010), e Sabino (2013). ‘

A câmera digital apresenta uma grande quantidade de tecnologia embarcada, podendo assim ser utilizada de inúmeras formas. Entre os componentes principais destacam-se o conjunto de lentes, um sensor de captura de luminosidade, um processador e uma parte constituinte para armazenamento. Os sensores de captura de luminosidade convertem a intensidade da luz em um determinado valor, que são processados digitalmente. De acordo com a forma de processamento, estes sensores podem ser divididos em dois tipos CCD e CMOS. O sensor CCD (*Charge Coupled Device*) apresenta a utilização de capacitores como sensor e a captura da imagem se dá toda de uma vez, o que resulta em uma carga maior de processamento. Já o sensor CMOS (*Complementary Metal-Oxide-Semiconductor*), é formado por fileiras de fotodiodos que convertem a luz recebida em carga elétrica e assim realizam a captura da imagem de uma fileira de pixels por vez, até que, o processador digitalize toda a

imagem. Isso acarreta numa carga de processamento menor e aquisição em taxas mais elevadas (Zurich, 2001). Outro fator determinante na utilização da câmera é a taxa de aquisição dos quadros medida em frames por segundo. Esta taxa deve ser suficiente para a percepção do movimento de cada alvo desejado. Após a aquisição das imagens utilizando uma câmera digital, estas são processadas utilizando um software, a fim de identificar alvos pré-determinados, e realizar a conversão de pixel para as unidades de deslocamento.

O presente trabalho propõe a comparação de diferentes ferramentas para medição de deslocamento de uma viga engastada livre com aplicação de esforços progressivos. A estrutura a ser utilizada será uma viga engastada livre, composta por uma régua de material de aço inoxidável de 30 cm de comprimento (utilizável), com espessura de 1,2 mm e largura de 34,9 mm.

Para a medição dos deslocamentos será utilizado o método tradicional, a partir da impressão do deslocamento em um papel-milimetrado, e uma câmera digital como forma de sensor de deslocamento. Destaca-se que, a metodologia a ser utilizada para aquisição e processamento de imagem, a fim de se obter o deslocamento estrutural terá como base o trabalho de Baptista (2016).

Outro objetivo do trabalho é estabelecer uma comparação entre os dados experimentais e numéricos. Desta forma, será realizada uma implementação numérica utilizando o método de elementos finitos, em ambiente Matlab® dando continuidade ao trabalho de Baptista (2016) com enfoque na teoria não linear de vigas de Cosserat.

O método de elementos finitos (MEF) consiste em uma técnica de análise numérica destinada à obtenção de soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais. As equações diferenciais parciais podem ser utilizadas para descrever muito fenômenos da engenharia, porém as soluções dessas equações para geometrias arbitrárias tornam-se extremamente complexas por meio de métodos analíticos clássicos. Portanto, o método de elementos finitos, é uma aproximação numérica com a qual essas equações diferenciais parciais podem ser resolvidas de modo aproximado.

Do ponto de vista da engenharia, o MEF é um método para resolver problemas de engenharia, tais como análise de tensões, transferência de calor, escoamento de fluidos e eletromagnetismo, por simulações de computador. Milhões

de engenheiros e cientistas em todo o mundo usam o MEF para prever o comportamento estrutural, mecânico, térmico, elétrico e químico de sistemas, tanto na etapa de projeto quanto na de análise de desempenho (Fish, 2009).

Neste projeto, a análise de elementos finitos será aplicada aos elementos de viga em regime não-linear.

Entre os diversos métodos utilizados para uma análise não-linear de elementos destaca-se a teoria de vigas de Cosserat. A teoria de vigas de Cosserat foi desenvolvida pelos irmãos Eugene e François Cosserat em 1909, e no passar dos anos não foi muito recordada, devido a ausência ou até inexistência de ferramentas computacionais capazes de solucionar as equações não lineares inerentes a esta teoria. Já a recente retomada desta teoria pode ser explanada pelo aumento expressivo da capacidade computacional e o interesse da comunidade acadêmica relativo aos estudos de sistemas não-lineares. Esta teoria é exata geometricamente, ou seja, não se baseia em aproximações geométricas nem suposições mecânicas. A viga deformada comporta-se como um vetor deslocamento da curva de centroides das seções transversais e a orientação de uma dada base móvel, relativa a um sistema de referência inercial, é parametrizada usando três rotações elementares consecutivas (Borges,2010).

A utilização desta teoria em conjunto a análise de elementos finitos torna-se uma grande vantagem, já que as funções de forma são obtidas a partir de equações diferenciais de equilíbrio estático, sendo este um fator determinante para considerar todas as não-linearidades do sistema.

Desta maneira a precisão de resposta é atingida mais rapidamente, podendo se dividir a estrutura em poucos elementos, cujo número é bem inferior em relação à uma análise tradicional nos quais as funções de interpolação são frequentemente, mais simples, como polinômios de baixa ordem. Porém, para que estes ganhos sejam alcançados, há a exigência de uma maior complexidade analítica e numérica.

Assim, ao final do projeto, deseja-se comparar os deslocamentos experimentais e numéricos de uma viga engastada livre sujeita a cargas crescentes, de forma a evidenciar o comportamento não linear a medida que o deslocamento imposto a viga aumenta.

2 OBJETIVOS

O presente trabalho propõe a comparação de diferentes ferramentas para medição de deslocamento de uma viga engastada livre com aplicação de esforços progressivos. As medições dos deslocamentos serão feitas através do método tradicional, utilizando papel milimetrado, pela câmera como sensor sem contato, e por fim pelo método numérico de elementos finitos.

Outro objetivo do trabalho é estabelecer uma comparação entre os dados experimentais e numéricos. Desta forma, será realizada uma implementação numérica utilizando o método de elementos finitos, em ambiente Matlab® dando continuidade ao trabalho de Baptista (2016) com enfoque na teoria não linear de vigas de Cosserat.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Comportamento estrutural

Tradicionalmente, a modelagem da estrutura é feita com base em sua geometria, em função das hipóteses específicas adotadas. Os tipos estruturais mais comuns são cabos flexíveis, barras, vigas, placas finas ou espessas, cascas cilíndricas ou esféricas e sólidos maciços (BATHE,1996).

Neste projeto, a estrutura utilizada é definida como viga. De acordo com Hibbeler (2010), vigas são elementos delgados que suportam carregamentos aplicados perpendicularmente a seu eixo longitudinal. Em geral, vigas são barras longas com área de seção transversal constante e classificadas conforme o modo como são apoiadas.

Para a modelagem de estruturas, além de se levar em conta a sua geometria, é relevante também saber qual será o comportamento da estrutura com relação aos esforços aplicados e a deformação exibida.

Na mecânica estrutural, o comportamento da estrutura pode ser classificado como linear ou não-linear. O comportamento linear é caracterizado pela sua proporcionalidade entre as cargas aplicadas, deformações e deslocamentos da estrutura (Figura 1.a). Nesse tipo de comportamento a deformação não modifica a forma de aplicação do carregamento.

Por outro lado, segundo Bathe (1996), o comportamento não linear pode ocorrer de duas formas distintas:

- a) **Não linearidade física ou material**, que ocorre quando não existe proporcionalidade entre os esforços aplicados e as deformações. Como mostrado na figura 1.b, isso ocorre devido a uma característica intrínseca do material que compõe a estrutura.
- b) **Não linearidade geométrica**, que ocorre quando os deslocamentos e rotações sofridas pela estrutura influenciam a forma como as cargas externas são aplicadas. E ainda, esta forma de aplicação, por sua vez, influencia a deformação da estrutura. Este tipo de não linearidade pode ocorrer de duas formas, como indicado nas figuras 1.c e 1.d. No primeiro caso, têm-se grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas

deformações. Nota-se que em essência o material está sujeito a deformações infinitesimais medidas em uma base móvel solidária à estrutura $x'y'$. Entretanto essa base realiza grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Já o segundo caso representa uma análise mais geral, em que o material está sujeito a grandes deslocamentos e grandes deformações.

Figura 1 a. Comportamento linear :pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

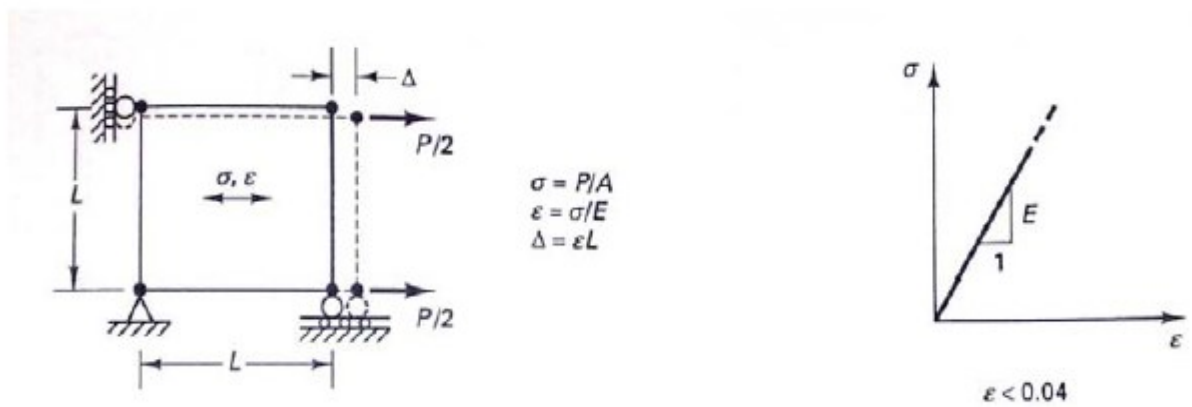


Figura 1 b. Não linearidade física :pequenos deslocamentos e grandes deformações.

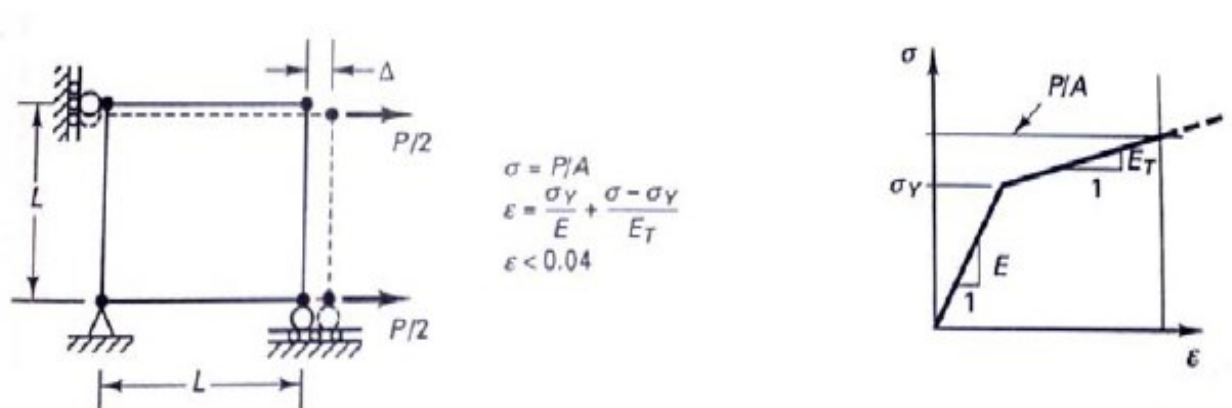


Figura 1 c. Não linearidade geométrica :grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações.

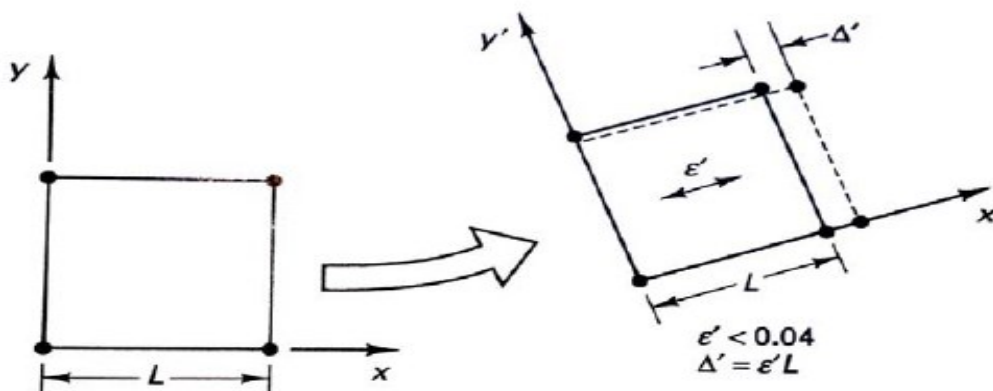
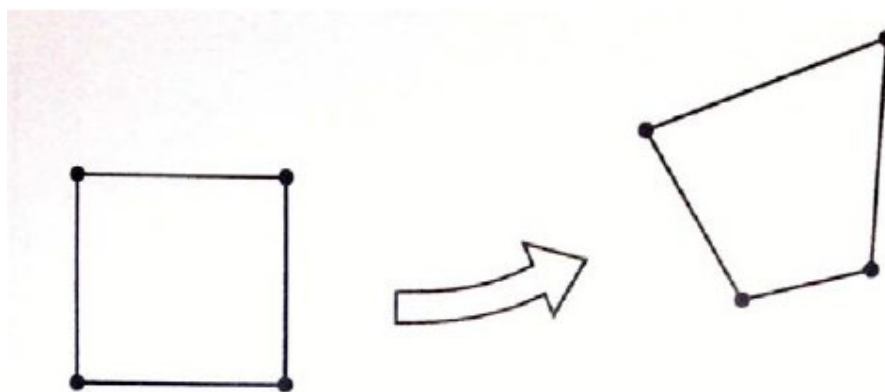


Figura 1 d. Não linearidade física e geométrica :grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações.



Fonte: Borges, 2010.

Para a modelagem clássica de elementos finitos, de acordo com as teorias de Euler e Timoshenko, considera-se que as deformações e os deslocamentos são infinitesimalmente pequenos e que o material é linearmente elástico. Porém, quando não é possível alcançar esta condição, é necessário considerar as não linearidades do sistema no modelo.

O presente trabalho abordará um caso de estudo com condições no qual a viga apresenta deformações não significativas e a ênfase é dada nos deslocamentos apresentados, caracterizando assim um comportamento de natureza não linear geométrica.

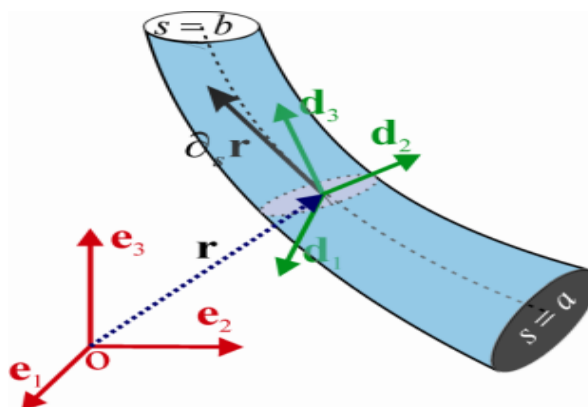
3.2 Teoria de vigas de Cosserat

Na teoria de vigas de Cosserat, a viga deformada é descrita através do vetor de deslocamento da curva de centroides, e de bases móveis, rigidamente unidas às seções da viga.

Diferentemente da teoria clássica de vigas, esta teoria é geometricamente exata, ou seja, não está baseada em aproximações geométricas ou suposições mecânicas.

A teoria de vigas de Cosserat determina que o comportamento de uma viga esbelta é modelado de acordo com o movimento no espaço, através do qual uma linha passa pelos centroides da seção transversal da estrutura. O vetor $\mathbf{r}(s)$ define as posições na base cartesiana fixa (inercial) representada por $F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv F$ com vetores unitários \mathbf{e}_i e por um conjunto de vetores ortogonais unitários presos à seção transversal $\{d_1(s), d_2(s), d_3(s)\}$. Ao longo da curva de centroides, é definida uma base móvel (S), formada pelos vetores diretores $d(s)$, no qual s é a distância ao longo da linha de centroides da viga não deformada. A cada ponto da curva de centroides ocorre uma associação dos diretores. Este fato é notado na Figura 2.

Figura 2. Modelo esquemático de um elemento de viga de Cosserat.



Fonte: Borges, 2010.

Da Figura 2, sabe-se que é assumido $d_1(s)$ e $d_2(s)$ como contidos no plano da seção transversal e $d_3(s)$ perpendicular a este plano. Portanto, para cada ponto da curva de centroides tem-se uma base móvel s , formada pelos vetores unitários $d_i(s,t)$, que são definidos de forma externa ao vetor $\mathbf{r}(s,t)$. As deformações da teoria de vigas

de Cosserat são classificadas como lineares $v(s)$ e angulares $u(s)$. As componentes $v_1(s)$ e $v_2(s)$ são chamadas deformações de cisalhamento e $v_3(s)$ de alongamento. Já as deformações angulares $u_1(s)$ e $u_2(s)$ são descritas como deformações de flexão e $u_3(s)$ como deformação de torção. Para fornecer uma descrição completa são estabelecidas as bases fixas e móveis, isto é, a posição espacial dos centroides assim como a rotação da seção transversal. Além disso a relação entre a deformação linear e angular ao qual um segmento de viga de cosserat está sujeito também é estabelecido. O vetor de deformação linear $v(s)$ é obtido da variação da linha de centroides ao longo da coordenada s e observado na equação 1.

$$F_{v(s)} = \frac{d^F r(s)}{ds} = |r'(s)|^F d_3(s) \quad (1)$$

O vetor de deformação angular $u(s)$ é obtido a partir da derivação da base móvel $d_i(s)$ em relação ao espaço, conforme visto na equação 2.

$$\frac{d d_i(s)}{ds} = u(s, t) \times d_i(s, t) \quad (2)$$

Para descrever as relações entre base móvel e fixa são empregados dois métodos de parametrização do vetor de Euler e dos ângulos de Euler. Estas relações apresentam suma importância para a resolução posterior das equações de equilíbrio estático. As matrizes de transformação encontradas no método do vetor de Euler e ângulos de Euler são representadas pelas equações 3 e equação 4 abaixo.

$$F T^S = \begin{bmatrix} \frac{v_2^2 + v_3 v_1^2 \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{(v_2^2 + v_3 v_1^2) \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} v_1 \\ \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{(v_1^2 + v_3 v_2^2) \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} & \frac{(v_1^2 + v_3 v_2^2) \cos \varphi}{v_1^2 + v_2^2} + \frac{(v_3 - 1) v_1 v_2 \sin \varphi}{v_1^2 + v_2^2} v_2 \\ -v_1 \cos \varphi - v_2 \sin \varphi & v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi v_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$F T^S = \begin{bmatrix} \cos \phi_z \cos \phi_y & -\sin \phi_z \cos \phi_y & \sin \phi_y \\ \sin \phi_x \sin \phi_y \cos \phi_z + \cos \phi_x \sin \phi_z & \cos \phi_x \cos \phi_z - \sin \phi_x \sin \phi_y \sin \phi_z & -\sin \phi_z \cos \phi_y \\ \sin \phi_x \sin \phi_z - \cos \phi_x \sin \phi_y \cos \phi_z & \cos \phi_x \sin \phi_y \sin \phi_z + \sin \phi_x \cos \phi_z & \cos \phi_z \cos \phi_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

Realizando uma expansão polinomial das funções trigonométricas da equação 4 e igualando à equação 3, encontram-se relações (Equação 5) que podem ser manipuladas matematicamente e truncadas até a terceira ordem a fim de obter as relações entre $\{\varphi(s), x'(s), y'(s)\}$ e $\{\varnothing_x(s), \varnothing_y(s), \varnothing_z(s)\}$:

$$\begin{aligned}\varphi(s) &= \varnothing_z(s) + \frac{1}{2}\varnothing_x(s)\varnothing_y(s) - \frac{1}{6}\varnothing_z^3(s) \\ v_1 &= \frac{x'(s)}{r'(s)} = \varnothing_y(s) - \frac{1}{6}\varnothing_z^3(s) \\ v_2 &= \frac{y'(s)}{r'(s)} = -\varnothing_x(s) + \frac{1}{2}\varnothing_x(s)\varnothing_y^2(s) - \frac{1}{6}\varnothing_x^3(s)\end{aligned}\quad (5)$$

Analogamente pela Equação 6:

$$\begin{aligned}\varnothing_x(s,t) &= -v_2(s,t) + \frac{1}{2}\varphi(s,t)v_1(s,t) - \frac{1}{6}(v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t) - \frac{1}{2}\varphi^2(s,t))v_2(s,t) \\ \varnothing_y(s,t) &= v_1(s,t) + \frac{1}{2}\varphi(s,t)v_2(s,t) + \frac{1}{6}\left(v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t) - \frac{1}{2}\varphi^2(s,t)\right)v_1(s,t) \\ \varnothing_z(s,t) &= \varphi(s,t) - \frac{1}{12}(v_1^2(s,t) + v_2^2(s,t))\varphi(s,t)\end{aligned}\quad (6)$$

O comportamento dinâmico local de um elemento de viga de Cosserat, com densidade $\rho(s)$ e área de seção transversal $A(s)$, conforme deduzido em Antman (1995) é dado pelas equações diferenciais parciais abaixo, equação 7 e equação 8 respectivamente:

$$\rho(s)A(s)\frac{\partial^2 \mathbf{r}(s,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{n}(s,t)}{\partial s} + \mathbf{f}(s,t)\quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{m}(s,t)}{\partial s} + \mathbf{v}(s,t) \times \mathbf{n}(s,t) + \mathbf{l}(s,t)\quad (8)$$

onde:

\mathbf{n} - força de contato;

\mathbf{m} - momento de contato resultante;

\mathbf{h} - quantidade de movimento angular;

\mathbf{f} - densidade de força externa;
 \mathbf{l} - densidade de momento externo.

Uma das maiores dificuldades encontradas na utilização do método de elementos finitos é a determinação das funções de forma. São estas as encarregadas em indicar o campo de deslocamentos no interior do elemento a partir dos deslocamentos nodais. Normalmente elas são aproximadas com o uso de polinômios de baixa ordem. Diferentemente, na teoria de viga de Cosserat, as funções podem ser adquiridas segundo equações diferenciais de equilíbrio estático e considerar as não-linearidades do sistema.

Quando trabalhada no regime estático, as equações de movimento tornam-se equações diferenciais ordinárias, onde s é a única variável independente. Na literatura, o equilíbrio estático é obtido na ausência de forças externas e da gravidade e da equação 7, as forças de contato devem, portanto, satisfazer a condição exposta na equação 9:

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = 0 \quad (9)$$

E partindo da equação 8 os momentos de contato satisfazem a equação 10:

$$\frac{d\mathbf{m}(s)}{ds} + \mathbf{v}(s) \times \mathbf{n}(s) = 0 \quad (10)$$

Uma vez definidas as quantidades de vetores principais envolvidos nas equações 9 e 10, como descrito por Borges (2010), é necessário obter $\mathbf{m}(s)$ e $\mathbf{n}(s)$ em termos de deformações $\mathbf{u}(s)$ e $\mathbf{v}(s)$. Uma característica que pode auxiliar na obtenção destes é quando se leva em consideração as relações constitutivas do material. Para este trabalho foi utilizado um modelo constitutivo, onde adotou-se as características de um material elástico linear, com base nas relações constitutivas de Kirchhoff (Cao et al., 2005). Para isso assume-se que o módulo de Young E , o módulo de cisalhamento G e a massa específica ao longo do elemento de viga de Cosserat são

apenas função da variável espacial s , e o centro de massa coincide com o centroide da seção transversal.

Borges (2010) considera deste fato as forças e torque de contato dadas respectivamente como funções de deformações lineares e angulares e, como resultado, a equação 9 e equação 10 podem ser escritas em termos das forças e momentos de contato sob a forma de um sistema altamente não-linear, dado pelas equações de 11 a 14:

$$n_1'(s) = u_3(s)n_2(s) - u_2(s)n_3(s) \quad (11)$$

$$n_2'(s) = u_1(s)n_3(s) - u_3(s)n_1(s) \quad (12)$$

$$n_3'(s) = u_2(s)n_1(s) - u_1(s)n_2(s) \quad (13)$$

$$m_3'(s) = u_2(s)m_1(s) - u_1(s)m_2(s) \quad (14)$$

Para encontrar as funções de forma torna-se necessária a resolução do sistema altamente não linear acima que compreende da equação 11 até a equação 14. Nota-se que esta equação não pode ser desenvolvida através de integração direta. Portanto utiliza-se o método da perturbação para obtenção da solução aproximada (Nayfeh, 1985). Para este fim, utilizou-se um método de perturbação orientada a esta natureza de solução e, entre os vários métodos disponíveis, optou-se pelo método de Frobenius (Arfken et al., 2000). Alamo (2006) demonstra mais detalhadamente este fato.

Para simplificação das funções de forma adotou-se truncá-las na terceira ordem. Os deslocamentos genéricos da viga de Cosserat, para $s = [0, L]$ são, de acordo com o método de Frobenius observados nas equações de 15 a 18:

$$x(s) = \bar{x}(\bar{s})L = \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_2(s) + \varepsilon^3 x_3(s) \quad (15)$$

$$y(s) = \bar{y}(\bar{s})L = \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \varepsilon^3 y_3(s) \quad (16)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{s}) = \bar{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{s}})L = \varepsilon \mathbf{z}_1(\mathbf{s}) + \varepsilon^2 \mathbf{z}_2(\mathbf{s}) + \varepsilon^3 \mathbf{z}_3(\mathbf{s}) \quad (17)$$

$$\varphi(\mathbf{s}) = \bar{\varphi}(\bar{\mathbf{s}})L = \varepsilon \varphi_1(\mathbf{s}) + \varepsilon^2 \varphi_2(\mathbf{s}) + \varepsilon^3 \varphi_3(\mathbf{s}) \quad (18)$$

onde:

ε - parâmetro da perturbação;

$x_i(\mathbf{s}), y_i(\mathbf{s}), z_i(\mathbf{s}), \varphi_i(\mathbf{s})$ – aproximações da função de forma de ordem i ;

$\bar{x}(\bar{\mathbf{s}}), \bar{y}(\bar{\mathbf{s}}), \bar{z}(\bar{\mathbf{s}})$ - posição adimensional do centroide;

$x(\mathbf{s}), y(\mathbf{s}), z(\mathbf{s}), \varphi(\mathbf{s})$ – posição do centroide e ângulo de torção.

Deve-se enfatizar que estas funções podem ser aproximadas para a ordem requerida pelo usuário, mas os custos computacionais são drasticamente aumentados para ordens superiores.

A equação 19 foi obtida utilizando um software de manipulação simbólica. A partir do desenvolvimento da formulação e após várias manipulações matemáticas, encontra-se a equação do movimento com não linearidades da mesma ordem das funções de deslocamento (terceira ordem).

$$\mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}(t) + \mathbf{g}^{(e)}(\mathbf{q}^{(e)}(t)) = \mathbf{f}^{i(e)}(t) + \mathbf{f}^{c(e)}(t) + \mathbf{f}^{d(e)}(t, \mathbf{q}^{(e)}) \quad (19)$$

onde:

$\mathbf{M}^{(e)}$ - matriz de massa linear;

$\mathbf{K}^{(e)}$ - matriz de rigidez linear;

$\mathbf{g}^{(e)}(\mathbf{q}^{(e)}(t))$ - vetor não-linear com termos quadráticos e cúbicos sobre os componentes de $\mathbf{q}^{(e)}$;

$\mathbf{q}^{(e)}$ - vetor de deslocamento nodal ;

$\mathbf{f}^{i(e)}$ - forças internas e o momento;

$\mathbf{f}^{c(e)}$ - forças externas e impulso;

$\mathbf{f}^{d(e)}$ - força dos elementos de carga distribuída.

As condições de contorno são impostas, e as matrizes globais e os vetores de esforços globais são montados a partir das matrizes elementares e os vetores elementares, conforme a teoria clássica de elementos finitos, e são representadas pela equação 20.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ff} & \mathbf{M}_{fr} \\ \mathbf{M}_{rf} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fr} \\ \mathbf{K}_{rf} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_f \\ \mathbf{q}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{q}_f) \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_f^c(t) + \mathbf{f}_f^d(t, \mathbf{q}_f) \\ \mathbf{f}_r^c(t) + \mathbf{f}_r^d(t, \mathbf{q}_r) \end{bmatrix} \quad (20)$$

As equações 21 e 22 apresentam os deslocamentos livres e as reações de apoio. O índice f refere-se aos graus de liberdades livres, enquanto r se refere aos deslocamentos restritos.

$$\mathbf{M}_{ff} \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f + \mathbf{g}(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_r) = \mathbf{f}_f^c(t) + \mathbf{f}_f^d(t, \mathbf{q}_f) \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_{rf} \ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{K}_{rf} \mathbf{q}_f + \mathbf{g}(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_r) = \mathbf{f}_r^c(t) + \mathbf{f}_r^d(t, \mathbf{q}_r) \quad (22)$$

Para mais detalhes desta implementação e construção das matrizes globais, o leitor pode consultar o trabalho de Cao et al. (2005) e Borges (2010).

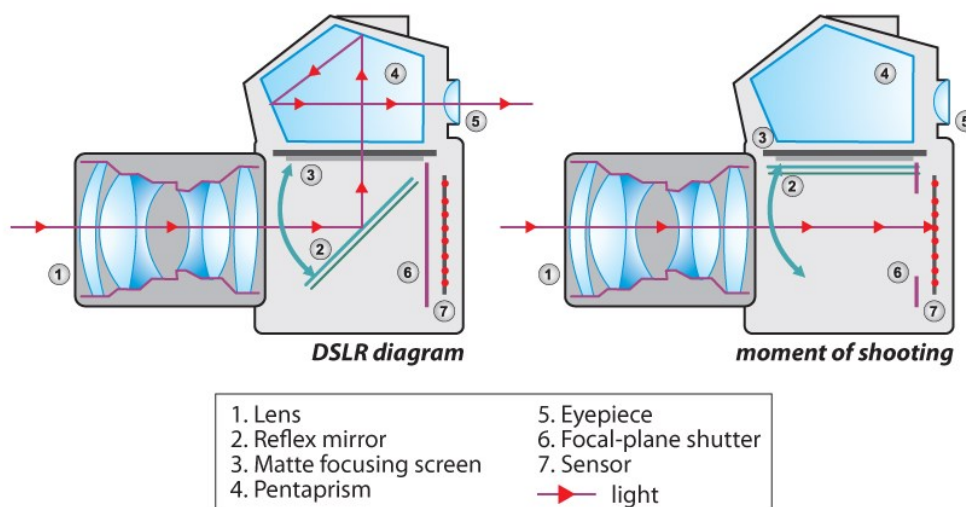
3.3 Detecção de deslocamentos a partir do processamento de imagens obtidas da câmara

Este tópico abordará a estrutura de uma câmara digital e o funcionamento do processamento das imagens.

3.3.1 Estrutura de uma câmara digital

A qualidade das imagens obtidas de uma câmara digital pode ser melhorada através de diferentes ferramentas, entre elas, se sobressaem as ferramentas embarcadas, como a anti-vibrações, o foco automático e o reconhecimento de padrões. Dos diversos componentes de uma câmara digital destacam-se a lente, o sensor de captura de luminosidade, processador e mídia de armazenamento de dados. Alguns destes componentes são ilustrados na Figura 3.

Figura 3. Componentes de uma câmera digital.



Fonte: Fotografia DG, 2015.

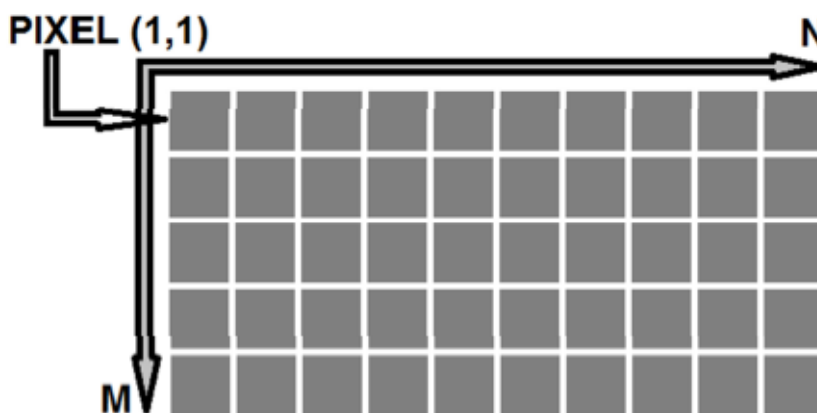
As câmeras mais simples em geral usam apenas uma lente, porém as mais elaboradas, possuem um conjunto de lentes que são ajustadas por complexos mecanismos. O objetivo das lentes é focar a luz refletida ou emitida pelo cenário a ser capturado pelo sensor. A princípio, uma lente convexa simples pode ser suficiente para focar a luz da imagem no sensor, porém, na prática uma lente composta é necessária para corrigir as imperfeições que podem aparecer.

A intensidade da luz é convertida em um determinado valor através dos sensores de captura de luminosidade, e este valor é então processado digitalmente. Os sensores podem ser divididos de acordo com a forma de processamento da imagem. São classificados como CCD ou CMOS. De acordo com Zurich (2001), o sensor CCD (*Charge Coupled Device*) apresenta a utilização de capacitores como sensor e a captura da imagem se dá toda de uma vez, o que resulta em uma carga maior de processamento. Já o sensor CMOS (*Complementary Metal-Oxide-Semiconductor*), é formado por fileiras de fotodiodos que convertem a luz recebida em carga elétrica e assim realiza a captura da imagem de uma fileira de pixels por vez, até que, o processador digitalize toda a imagem. Isso acarreta numa carga de processamento menor e aquisição em taxas mais elevadas. A taxa de aquisição dos quadros é medida em frames por segundo, e deve ser suficiente para a percepção do movimento dos alvos desejados.

As imagens digitais são formadas a partir das informações captadas pelos sensores da carga acumulada de energia luminosa. Esta carga acumulada é dividida em brilho (intensidade), cor (frequência) e luz capturada, que incidem sobre o objeto.

Existem dois tipos de imagens digitais: as vetoriais e as matriciais. As imagens vetoriais são utilizadas para definir e modelar os objetos que serão representados pela imagem, tais como pontos, linhas e curvas. Esse método é de fácil manipulação e também de fácil armazenamento de elementos geométricos, porém necessita de dispositivos de saída específicos para a aquisição de bons resultados e a reconstrução da imagem ocorre de maneira mais lenta. Já a imagem digital do tipo rastreio ou matricial que é a abordada neste trabalho, também conhecida como bitmap, dispõe de uma representação pela qual a imagem é descrita por um conjunto de células em um arranjo espacial bidimensional (matriz) nos quais a imagem é discretizada tanto em coordenadas espaciais quanto em brilho. Cada célula da matriz representa um pixel da imagem e a imagem final é formada através do conjunto destes. Isso possibilita fácil tradução para dispositivos baseados em pontos como monitores e impressoras, fácil armazenamento e leitura e uma maleabilidade nos valores dos pixels que podem ser alterados individualmente ou em grupo. A representação de matriz de uma imagem digital encontra-se na Figura 4 onde pode-se visualizar onde se encontra a origem, ou seja, o pixel (1,1), e o sentido crescente das linhas e colunas dos pixels na matriz.

Figura 4. Representação de uma imagem digital



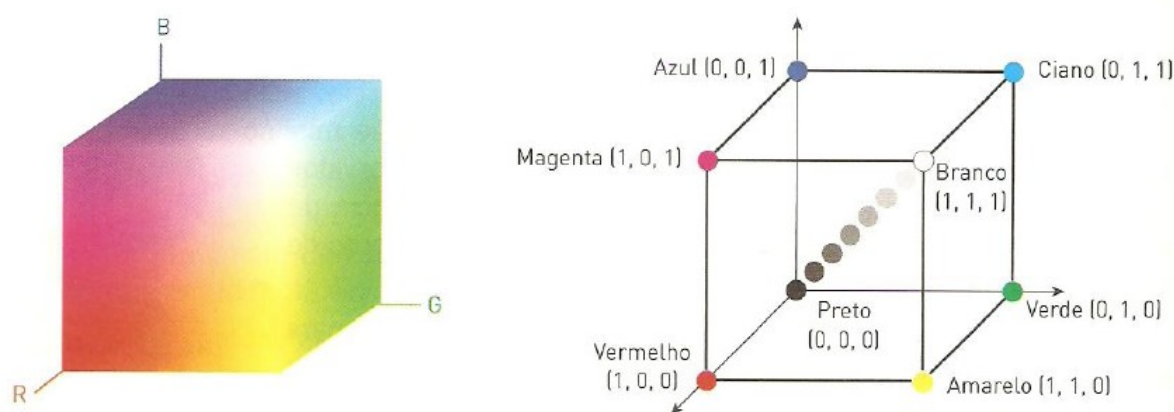
Fonte: Leonardi, 2015.

3.3.2 Sistema RGB

Para que haja um bom processamento de imagens é necessário também a compreensão de como são interpretadas as cores em um determinado sistema de cores. Para o trabalho em questão o sistema de cores RGB é o utilizado.

No modelo RGB de cores, cada cor é representada na sua componente espectral primária, ou seja, as combinações dos valores atribuídos aos componentes R (Red), G (Green) e B (Blue) são o que formarão as cores da imagem gerada. Cada pixel possui sua cor formada por 256 níveis de intensidade de luz, representada por 8 bits, para cada uma das três camadas de cores. Se o mesmo valor for atribuído para as três componentes básicas é gerado um tom neutro, denominado gris ou tom de cinza, podendo este tom neutro ser branco puro ou preto puro, o primeiro quando se atribui o valor 255 e o segundo quando se atribui o valor 0 para as três componentes. Este sistema de cores pode ser classificado como aditivo, ou seja, as cores são exibidas em porcentagens de vermelho, verde e azul, já que é possível adicionar todos os níveis destas três cores para obter um nível de máxima luminosidade. A Figura 5 mostra as cores do sistema RGB representada em um cubo.

Figura 5. Representação de um cubo com as cores RGB



Fonte: Lima , 2012.

3.3.3 Processamento De Imagens

Para que seja possível o cálculo dos deslocamentos o primeiro passo consiste em fixar os alvos na viga em estudo e iniciar então a filmagem, para que

posteriormente ocorra o processamento do vídeo quadro a quadro. Através do processamento dos quadros, a imagem é gravada e separam-se os alvos do restante da mesma, obtendo a posição do alvo na imagem em pixels.

Através de um algoritmo implementado em ambiente Matlab®, pode-se importar um vídeo gravado de uma câmera digital. A partir disto, as imagens digitalizadas de cada quadro da filmagem tornam-se representadas por matrizes bidimensionais de pixels. A imagem é convertida em tons de cinza pelo algoritmo e o mesmo realiza a subtração da camada vermelha do vídeo. Os alvos devem ser previamente definidos e além disso, devem possuir cor contraste as demais da imagem, para que sejam identificados e separados do restante da cena.

Para que a imagem resulte em uma imagem binarizada, onde cada pixel será representado pela cor preta e branca, aplicam-se técnicas de limirização. Após a aplicação destas técnicas, ainda podem haver resíduos na imagem que não são de interesse para o estudo, assim, faz-se necessário a utilização de filtros para eliminar objetos que prejudiquem a identificação dos alvos reais. No final do processo, os alvos são representados pela cor branca, enquanto o resto da cena é representada pela cor preta.

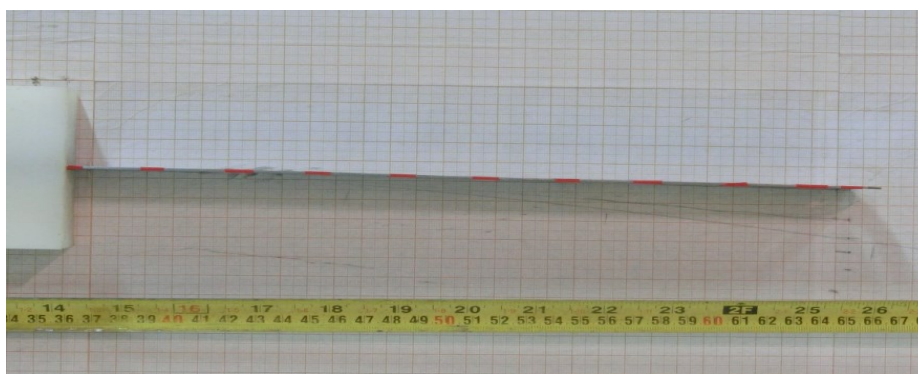
O centroide do alvo é o ponto que o referencia para medição do deslocamento, sendo este calculado pela interseção das diagonais do menor retângulo contendo o alvo. As posições são armazenadas na matriz de pixel de cada imagem para cada quadro do vídeo, sendo o deslocamento, a variação da posição do alvo no intervalo de tempo requerido. Porém as posições armazenadas encontram-se em coordenadas da matriz da imagem, ou seja, estão em pixels e precisam ser transformadas na unidade de medida a ser utilizada. Assim, tendo conhecimento da medida em escala real (mm, pol, etc.) da dimensão total da imagem e os dados de sua resolução (por ex: 1920x1080p, 1280x720p), a transformação se dá pela conversão das coordenadas da matriz de imagem, que estão em pixel, em medidas de escala real. Essa conversão é representada pela divisão da medida em escala real pela resolução na mesma direção e obtém, para determinada direção, uma relação de, por exemplo, mm/pixel. O fluxograma da Figura 6 ilustra o processamento computacional do vídeo no algoritmo utilizado. Já a Figura 7 ilustra a obtenção da dimensão total da imagem com uso da trena.

Figura 6. Fluxograma do processamento de imagens



Fonte: Leonardi, 2015.

Figura 7. Dimensão total obtida pela trena



Fonte: Autoria Própria

Para maiores informações a respeito do processamento de imagens consultar o trabalho de Leonardi (2015).

4 METODOLOGIA

Nesta seção serão abordadas as metodologias e os materiais utilizados no projeto.

As medições dos deslocamentos na viga serão feitas através do método tradicional, da câmera como sensor sem contato e do método numéricos utilizando elementos finitos.

A primeira etapa consiste na obtenção do módulo de elasticidade da viga, através da metodologia de flecha máxima. Após a obtenção das propriedades da viga, tem-se a etapa de realização dos experimentos através do método tradicional (papel milimetrado) e com uma câmera digital como sensor sem contato para medição de deslocamentos.

A segunda etapa consiste na implementação numérica utilizando o método de elementos finitos, em ambiente Matlab®, para a medição dos deslocamentos através da teoria de vigas de Cosserat. E por fim realizou-se como última etapa a comparação entre os dados experimentais e numéricos e avaliação dos resultados.

4.1 Obtenção das propriedades e disposição da viga

A rigidez é uma característica extremamente importante para a modelagem de estruturas, pois ela consiste na capacidade da estrutura em resistir à deformação. Neste trabalho, priorizou-se obter os parâmetros que mais influenciam na rigidez para a obtenção de resultados precisos, sendo eles, a área da seção transversal (A), o comprimento da viga (L), o momento de inércia (I) e o módulo de elasticidade (E).

No experimento utilizou-se uma régua vendida comercialmente, feita de aço inoxidável. Para a área e o momento de inércia da viga, utilizou-se o paquímetro e obteve-se essas propriedades através das equações 23 e 24 onde b é a base da viga e h a altura.

$$A = b * h \tag{23}$$

$$I = \frac{b * h^3}{12} \tag{24}$$

O módulo de elasticidade (E), assim como sua densidade foram obtidas experimentalmente, e as propriedades da régua encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades da viga

Propriedades da Estrutura	Valores
Módulo de elasticidade	1,77e11[N/m ²]
Comprimento	1 [m]
Espessura	0,0012 [m]
Área de Seção Transversal	4,188e-5[m ²]
Densidade	7850 [kg/m ³]

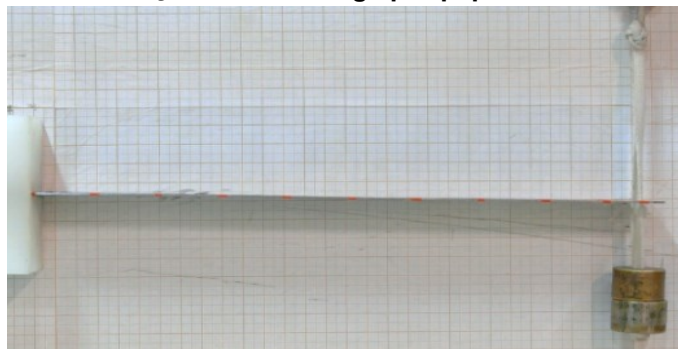
Para a aferição do módulo de elasticidade a metodologia utilizada neste trabalho foi a mais encontrada na literatura, o método da flecha máxima. Este método trabalha com vigas no estado linear e consiste em realizar a medição do deslocamento máximo de uma viga e retornar os valores de E através de equações aprimoradas por vários estudiosos. Utilizou-se para o cálculo a equação 25 a seguir:

$$f = \frac{-PL^3}{3EI} \quad (25)$$

Nesta equação f refere-se a deflexão máxima da viga, L ao comprimento total da viga, P a carga aplicada na extremidade, E o módulo de Elasticidade e I o momento de Inércia.

Uma das condições necessárias para o experimento era que a régua fosse engastada em uma de suas extremidades, então a mesma foi anexada a um cubo de nylon presente em um painel de madeira. Este painel de madeira apresentava 1,0m de comprimento e 0,5m de altura, sendo inteiramente envelopado com papel milimetrado. A Figura 8 ilustra o experimento.

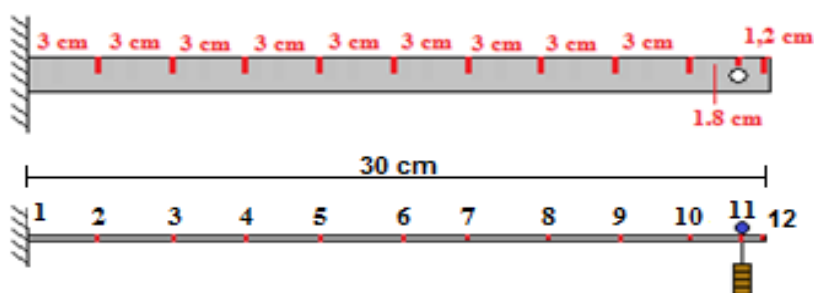
Figura 8. Condição inicial da viga por papel milimetrado



Fonte: Autoria própria

Para ambos os métodos de medição, a viga foi ajustada para apresentar um comprimento total de 0,30m de comprimento e os alvos foram espaçados ao longo do comprimento da viga, a cada 0,3 m. Na posição de 28,8 cm também foi colocado um alvo, no qual foi aplicada a força. O sistema foi solicitado com forças concentradas de variando de 1,373 à 5,101 N. Essa força foi aplicada gradativamente com o intuito da avaliação da não linearidade imposta ao sistema, pois o aumento da força gera deslocamentos e rotações maiores, assim, aumentando o grau de não linearidade imposta ao sistema. A disposição da viga e a divisão em elementos seguiu o modelo observado na Figura 9.

Figura 9. Disposição e divisão da viga de estudo



Fonte: Autoria própria

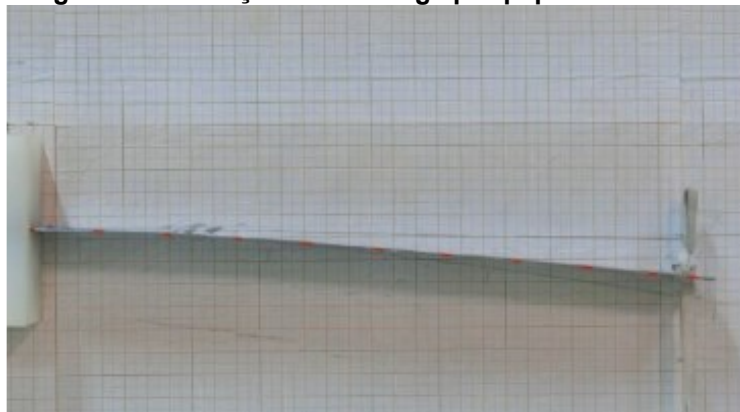
Para a aplicação da força, blocos de cobre eram suspensos por um fino barbante que era preso no alvo citado anteriormente. Os pesos dos blocos de cobre foram estimados por uma balança de precisão com resolução de 0,005g.

5 RESULTADOS

5.1 Resultados experimentais

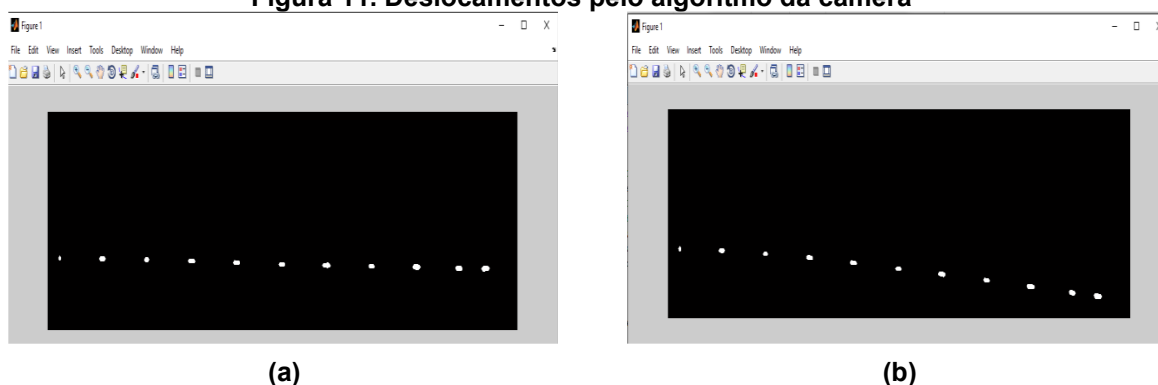
A primeira aquisição de dados baseou-se no método tradicional de medição de deslocamentos através do papel milimetrado. Este experimento consistiu em apenas obter informação relativa ao perfil exibido na flexão da régua e ao deslocamento máximo relativo a cada força, ou seja, na demarcação da extremidade livre. Esses valores serão utilizados na avaliação e validação dos resultados obtidos com a câmera. Neste caso, devido à dificuldade de se medir pequenos valores de deslocamento no interior da viga, no papel milimetrado, optou-se por apresentar apenas os valores de deslocamento no último nó. A Figura 10 ilustra este experimento.

Figura 10. Condição final da viga por papel milimetrado



Fonte: Autoria própria

Para o segundo experimento, uma câmera digital da marca CASIO® modelo EXILIM EX-ZR700 foi utilizada, possuindo um sensor CMOS, e resolução de 1280 x 720 pixels, com velocidade de filmagem de 30 quadros por segundo. A câmera foi fixada em um suporte para garantir um melhor posicionamento durante a filmagem. A viga manteve as mesmas condições utilizadas no experimento com papel milimetrado. Utilizando algoritmos de análise e processamento de imagem, todos pontos eram reconhecidos, e convertidos para as unidades de deslocamento. Na Figura 11a é possível observar a condição inicial, sujeita apenas ao peso próprio, e na Figura 11b a condição final, após a aplicação da carga em suas extremidades.

Figura 11. Deslocamentos pelo algoritmo da câmera

Fonte: Autoria própria

A Tabela 2 mostra os deslocamentos em centímetros de cada alvo para as diferentes forças aplicadas na medição com câmera.

Tabela 2. Deslocamentos de cada alvo na medição por câmera

Alvo \ Força	1,3734 [N]	2,3054[N]	3,0902[N]	3,8259[N]	5,1012[N]
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,048	0,071	0,136	0,137	0,190
3	0,147	0,230	0,371	0,405	0,513
4	0,276	0,441	0,689	0,787	0,9819
5	0,461	0,723	1,080	1,258	1,560
6	0,681	1,066	1,542	1,807	2,247
7	0,909	1,430	2,030	2,372	2,952
8	1,162	1,823	2,538	2,979	3,722
9	1,456	2,254	3,069	3,617	4,518
10	1,740	2,705	3,599	4,251	5,320
11	1,952	3,002	3,920	4,625	5,804
12	2,086	3,195	4,268	4,907	6,080

Na Tabela 3 encontra-se a comparação dos resultados obtidos pela metodologia de identificação e o método direto, através das marcações em papel milimetrado, para o alvo posicionado na extremidade livre da viga, ponto 12 da Figura. Os deslocamentos apresentados na Tabela 3 encontram-se em centímetros.

Tabela 3. Comparativo de deslocamento máximo

Alvo \ Força	1,37[N]	2,30[N]	3,09[N]	3,83[N]	5,10[N]
Câmera	2,086	3,195	4,268	4,81	6,08
Milimetrado	2,1	3,2	4,2	4,7	6,2
Erro [%]	0,67	0,16	1,62	2,34	1,94

5.2 Resultados numéricos

Para implementação do modelo numérico, utilizou-se o método de elementos finitos não linear, a partir da teoria de vigas de Cosserat. Desta forma, a viga foi dividida em 11 elementos, 12 nós, com 3 graus de liberdade por nós, translação em y e z, e rotação em x. Os elementos de 1 a 9 apresentam comprimento de 0,03 m, o elemento 10 apresenta 0,018m, e o elemento 11 apresenta 0,012m, análogo aos alvos apresentados na figura 4. O nó 1 encontrava-se engastado e a força é aplicada na direção y no nó 11, juntamente ao peso próprio da viga, que é distribuído a todos os nós. As demais características geométricas e materiais foram inseridas no modelo numérico com base na Tabela 1.

Na Tabela 4 são apresentados os resultados dos deslocamentos para a análise de Cosserat (Não-linear). Realizou-se então a comparação entre os resultados obtidos através da câmara e pela análise numérica, portanto, na Tabela 5 encontra-se o erro obtido entre os dois métodos. A unidade de medida do deslocamento é centímetros.

Tabela 4. Resultados de deslocamentos de cada nó para a Teoria de Vigas de Cosserat

Nó	1,373 [N]	2,305[N]	3,090[N]	3,825[N]	5,101[N]
Força					
1	0	0	0	0	0
2	0,043	0,064	0,124	0,131	0,189
3	0,133	0,208	0,346	0,392	0,495
4	0,261	0,403	0,656	0,748	0,98
5	0,442	0,689	1,037	1,207	1,546
6	0,659	1,021	1,463	1,745	2,113
7	0,903	1,375	1,96	2,282	2,872
8	1,16	1,776	2,488	2,868	3,6
9	1,448	2,206	2,956	3,502	4,479
10	1,737	2,65	3,489	4,139	5,388
11	1,948	2,92	3,768	4,563	5,941
12	2,0852	3,099	4,201	4,845	6,309

As forças aplicadas variaram de 1,373 N à 5,101 N, onde o maior deslocamento obtido foi de 6,309 centímetros.

Tabela 5. Erros presentes no comparativo de deslocamentos

Nó	1,373 [N]	2,305[N]	3,090[N]	3,825[N]	5,101[N]
Força	Erro [%]	Erro [%]	Erro [%]	Erro [%]	Erro [%]
1	-	-	-	-	-
2	10,41667	9,859155	8,823529	4,379562	0,526316
3	9,52381	9,565217	6,738544	3,209877	3,508772
4	5,434783	8,61678	4,78955	4,955527	0,193502
5	4,121475	4,702628	3,981481	4,054054	0,897436
6	3,230543	4,221388	5,123217	3,431101	5,963507
7	0,660066	3,846154	3,448276	3,794266	2,710027
8	0,172117	2,578168	1,970055	3,726083	3,277808
9	0,549451	2,129547	3,681981	3,17943	0,863214
10	0,172414	2,033272	3,056405	2,634674	1,262064
11	0,204918	2,731512	3,877551	1,340541	2,360441
12	0,038351	3,004695	1,569822	1,263501	3,766447

As Figuras 12 e 13 ilustram os deslocamentos da viga para as diferentes medições com a aplicação de força de 2,3054 N e 5,101 N respectivamente.

Figura 12. Comparação de medição de deslocamentos da viga engastada com aplicação de 2,3054 N na extremidade livre

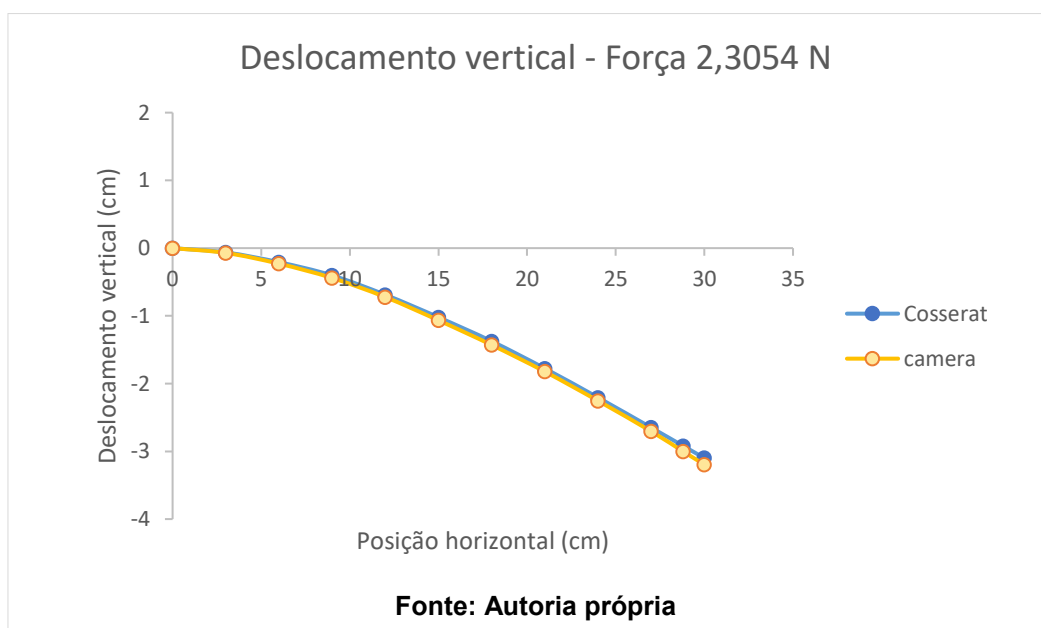
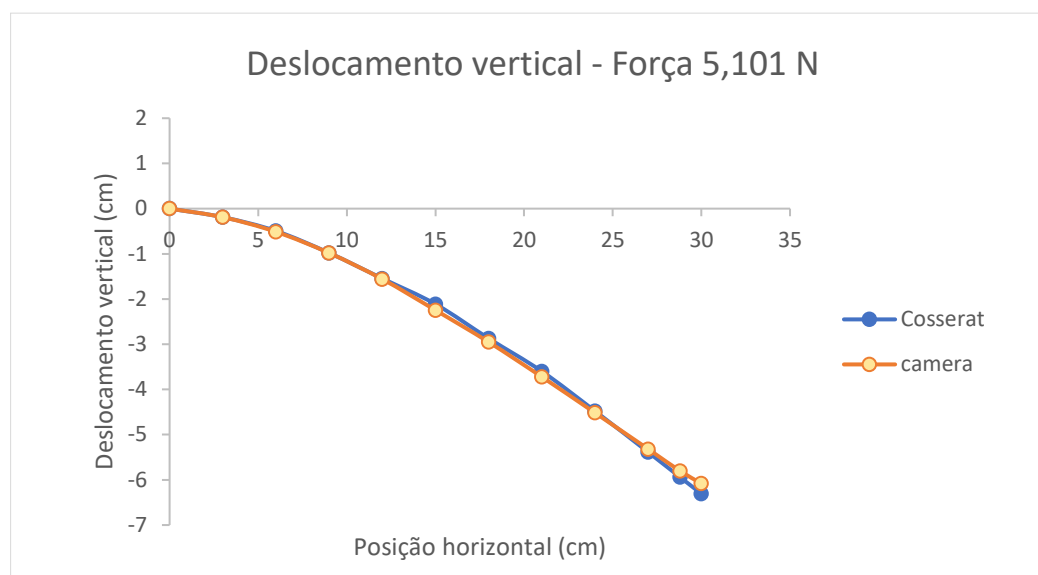


Figura 13. Comparação de medição de deslocamentos da viga engastada com aplicação de 5,101 N na extremidade livre



Fonte: Autoria própria

6 CONCLUSÃO

Nota-se a partir da avaliação mediante confrontação de valores dos decorrentes métodos aplicados neste trabalho, que os resultados se mostraram satisfatórios, pois apresentam uma pequena variação entre os métodos experimentais, utilizando a medição com câmera e o papel milimetrado. Conclui-se, portanto, que a metodologia para identificação de deslocamento de alvos estáticos simultâneos, utilizando uma câmera como sensor apresentou bons resultados, cujo erro máximo foi aproximadamente 2,35%, em comparação ao método tradicional.

Os resultados mostraram-se satisfatórios também na comparação do método experimental através da câmera digital com o algoritmo da teoria de vigas de Cosserat, apresentando erros máximos aceitáveis de 6%. Os erros que obtiveram valores acima de 6% podem ser atribuídos ao caráter linear de deslocamentos na viga próximo ao ponto de engaste, já que tais deslocamentos não excediam o valor de 1% do comprimento utilizável da viga. Vale destacar que os deslocamentos nodais deste trabalho apresentaram medidas em valores de 1% a 18% do comprimento utilizável da viga.

REFERÊNCIAS

ALAMO, F.J.C., 2006, **Dinâmica de estruturas unidimensionais esbeltas utilizando o contínuo de Cosserat**, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), PUC-Rio.

ANTMAN, S.S, 1995, **Nonlinear Problems of Elasticity**. Applied Mathematical Sciences 107, New York: Springer-Verlag.

AZEVEDO, A.F.M. **Método dos elementos finitos**. Disponível em: <http://www.arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/117/1/Livro_MEF.pdf>. Acesso em 05 de jul. 2017.

BATHE, K. J. **Conserving Energy And Momentum In Nonlinear Dynamics: A Simple Implicit Time Integration Scheme**. *Computers and Structures*. v.85, p. 437–445. 2007.

BEER, F. P.; JR, E. R. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. *Mecânica dos Materiais*. 5. ed. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 2003.

BORGES, A.S., 2010, **Desenvolvimento de procedimentos de modelagem de interação fluido-estrutura combinado a teoria de vigas de cosserat e a metodologia de fronteira imersa**, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CAO, D.Q., DONGSHENG, L., CHARLES, H., WANG, T., **Three dimensional nonlinear dynamics of slender structures: Cosserat rod element approach**, *International Journal of Solids and Structures*.

CARVALHO, A.; SILVA, R.; REBELLO, J.; VIANA, A. O mundo das imagens digitais, *Revista Matéria*, n. 8 (2); p. 167-186, 2003.

CAVALCANTI, J., 2009, “Representação de imagens”. Universidade Federal do Vale do São Francisco. Disponível em

<http://www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti/comput_graf03_rep_img_hw.pdf>.

Acesso em 20 out. 2017.

HIBBELER, H. B. Resistência dos Materiais. 7. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso de Elementos Finitos**. Rio de Janeiro. LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2009.

LEITE, R. de Freitas, 2004, **Aplicação de Estereoscopia em Imagens Digitais**. Recife, Pernambuco, Brasil, 73p.

LEONARDI, D.M., 2015, **Medida de deslocamento e vibrações utilizando uma câmera digital com sensor sem contato**, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio.

NAYFEH, A.H., 1985, **Problems in Perturbation**, Wiley, New York.

NASH, W. A. Resistência dos Materiais. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

PANKOW, M.; JUSTUSSON, B.; WAAS, A. M. Three-dimensional digital image correlation technique using single high-speed camera for measuring large out-of-plane displacements at high framing rates, **Applied Optics**, v. 49, p. 3418-3427, 2010.

PAVANELLO, R. **Introdução em elementos finitos**. Disponível em: <<http://www.fem.unicamp.br/~pava/Cursos/IntroducaoElementosFinitos/Cap1.pdf>>.

Acesso em 15 de jul. 2017.

SABINO, D. D. **Medidas de deslocamento e vibrações através de imagens de câmeras digitais**, 2013, Dissertação (Mestrado em engenharia mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP, Ilha Solteira, SP, 2013.

TI, H. W.; MING, C. L.; CHEN, C. H.; YIN, Y. L.; CHENG, P. T. Three dimensional distance measurement based on single digital camera, In: Proceedings of the 2007 WSEAS Int. Conference on Circuits, Systems, Signal and Telecommunications, 2007.

Zurich, N. B. **CCD versus COMS – has CCD imaging come to an end?**, 2001 Photogrammetric Week 01, Wichmann, Heidelberg, p. 131-137.