UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

BRUNA ANGELIS DE PAULA

TAREFAS EXPLORATÓRIAS E RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

BRUNA ANGELIS DE PAULA

TAREFAS EXPLORATÓRIAS E RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso de graduação, apresentado à disciplina Trabalho de Conclusão de Curso 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, como requisito parcial para a obtenção de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman
Coorientador: Prof. Dr. André Luis Trevisan

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

FOLHA DE APROVAÇÃO

BRUNA ANGELIS DE PAULA

TAREFAS EXPLORATÓRIAS E RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às 10:00 no dia 07/05/2021, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Eliane Araman Oliveira

Profa. Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman
(orientador)

Jader O Dalto

Prof. Dr. Jader Otávio Dalto

Marcia Aguiar

Profa. Dra. Marcia Aguiar

AGRADECIMENTOS

A elaboração deste trabalho não fruiria sem a colaboração, estímulo e empenho de diversas pessoas. Gostaria de expressar toda a minha gratidão e admiração a todos aqueles que, direto ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho se tornasse realidade. A todos quero demonstrar os meus sinceros agradecimentos.

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos da minha vida.

Gratidão à minha orientadora, professora Dra. Eliane Maria de Oliveira Araman e o meu coorientador professor Dr. André Luis Trevisan, cuja dedicação e atenção foram essenciais para que este trabalho fosse concluído satisfatoriamente.

Também quero agradecer à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e o seu corpo docente que demonstrou estar comprometido com a qualidade e excelência do ensino.

Aos professores da banca examinadora, professor Dr. Jader Dalto Otavio e professora Dra. Marcia Aguiar, agradeço por aceitar o convite e pelo paciente trabalho de revisão.

À minha família e a todos os meus amigos de verdade eu quero que saibam que reconheço tudo que fizeram por mim, a força que incutiram no meu pensamento para não desistir e o conforto de saber que nunca estarei só e serei sempre capaz de tudo por maiores que sejam as dificuldades.

PAULA, Bruna Angelis de. **Tarefas Exploratórias e Raciocínio Matemático.** 2021. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

RESUMO

Esta pesquisa, de característica qualitativa e interpretativa, tem como tema Tarefas Exploratórias e o Raciocínio Matemático. O objetivo é analisar os processos de raciocínio matemático mobilizados por alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem uma tarefa matemática de caráter exploratório e ações da professora diante desta tarefa. Para isso, neste presente estudo realizamos uma discussão teórica a respeito do raciocínio matemático e dos processos relacionados a ele, sobre ações de professores que apoiam o raciocínio matemático e sobre tarefas de natureza exploratória, tendo como embasamento estudos realizados por diversos autores. Os dados que compõe o corpus de análise dessa pesquisa foram coletados por registros de áudio e vídeo durante a realização da tarefa exploratória na respectiva turma. Os resultados apontam que as ações da professora contribuem para os processos de identificação de padrões, formulação de conjecturas, justificação e generalização, evidenciando o potencial que as ações docentes podem ter no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Palavras-chave: Raciocínio Matemático.Tarefas exploratórias. Ações da professora. Processos de raciocínio.

PAULA, Bruna Angelis de. Exploratory Tasks and Mathematical Reasoning. 2021. 55 f. Course Conclusion Paper (Graduation) - Degree in Mathematics Federal Technological University of Paraná. Cornélio Procópio, 2021.

ABSTRACT

This qualitative and interpretative research has the theme of Exploratory Tasks and Mathematical Reasoning. The objective is to analyze the mathematical reasoning processes mobilized by students of a 2nd year high school class when solving an exploratory mathematical task and actions of the teacher in the face of this task. To this end, in this study we conducted a theoretical discussion about mathematical reasoning and the processes related to it, about the actions of teachers who support mathematical reasoning and about tasks of an exploratory nature, based on studies carried out by several authors. The data that make up the corpus of analysis of this research were collected by audio and video records, during the performance of the exploratory task in the respective class. The results show that the teacher's actions contribute to the process of identifying patterns, formulating conjectures, justification and generalization, highlighting the potential that teaching actions can have in the development of students' mathematical reasoning.

Keywords: Mathematical reasoning. Exploratory tasks. Teacher's actions. Reasoning processes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O raciocínio matemático é dos grandes objetivos do ensino de Matemática nas escolas segundo diversos autores (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, STYLIANIDES, 2009). De acordo com Oliveira (2008), a expressão raciocínio matemático denomina um conjunto de processos mentais complexos por meio dos quais se obtêm novas afirmações (conhecimento novo) a partir de afirmações conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio). Nos documentos curriculares Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o raciocínio é apresentado no processo de escolarização.

Ao se tratar sobre raciocínio matemático está englobado os processos centrais do raciocínio, ou seja, a conjectura, a generalização e a justificação. É essencial desenvolver oportunidades de ensino para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático e, assim, a aprendizagem matemática. Logo, as tarefas de natureza exploratória/investigativa podem contribuir para o raciocínio matemático do aluno e significar sua aprendizagem (PONTE, 2005).

Neste contexto, esse trabalho tem por finalidade pesquisar os processos de raciocínio matemático de alunos do 2°ano do Ensino Médio na resolução de tarefas de natureza exploratória envolvendo padrão e regularidades. Os dados foram recolhidos por meio de registros de áudios e vídeos.

O texto está estruturado em oito sessões. A primeira é a introdução, na qual apontamos o tema e sua organização. Na segunda seção é abordada a justificativa e delimitação do texto, que apresenta documentos curriculares nacionais que destacam o processo de raciocínio na escolarização. A terceira seção traz os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

Na quarta seção, o referencial teórico é apresentado e é embasado em diversos estudos que apresentam e discutem o raciocínio matemático e seus processos, conceito de tarefa e ações da professora, assim analisando seus princípios na disciplina de Matemática. Na quinta seção é apresentada a metodologia, a tarefa que foi realizada numa turma do 2° ano do Ensino Médio, bem como a transcrição dos áudios e vídeos coletados durante a realização da tarefa pelos alunos.

Na sexta sessão, os resultados, onde é apresentado a identificação de categorias associadas às ações do professore os processos de raciocínio matemático evidenciados pelos alunos durante a resolução da tarefa. Na sétima sessão é a discussão referente a análise de cada grupo.

Por fim a conclusão, no qual estão presentes as considerações finais e os resultados obtidos na pesquisa.

1.1 Delimitação do tema

Um dos objetivos principais da disciplina de Matemática, ao longo do processo de escolarização, é o desenvolvimento do raciocínio. Desde início dos anos 2000, esse processo é analisado pelos documentos oficiais sendo os (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Em especial nos PCN (BRASIL, 2002), apresentam que

> Destacar que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar e validar a validade de raciocínios e construir argumentações (BRASIL, 2002, p. 536).

Nos PCN (BRASIL, 2002), menciona termos de raciocínio, que destaca importância do desenvolvimento do raciocínio lógico para que os alunos se adaptem com o sistema dedutivo de uma demonstração matemática. Assim,

> Ao se escolher a forma com a qual se vai trabalhar, deve-se reconhecer que os alunos precisam de tempo para desenvolver os conceitos relativos aos temas selecionados e, ainda, para desenvolver a capacidade de acompanhar encadeamentos lógicos de raciocínio e comunicar-se matematicamente; por isso é essencial o contato repetido com as diferentes ideias, em diferentes contextos, ao longo do ano e de ano para ano (BRASIL, 2002, p. 130).

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), focando sobre o raciocínio no ensino de Matemática,

> O desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2018, p. 529).

Observa-se que em Brasil (2018) o termo raciocínio aparece com um significado mais bem definido e é evidente que investigar, explicar, justificar e generalizar são processos do raciocínio matemático.

Os alunos não desenvolvem a capacidade de raciocinar apenas pela memorização de conceitos e procedimentos, mas a partir do trabalho com tarefas de natureza exploratória. Assim numa tarefa exploratória, os processos de raciocínio utilizados envolvem a concepção de uma conjectura baseada numa razão e a definição de uma estratégia de teste dessa conjectura (PONTE; SOUSA, 2010). Logo, uma tarefa de natureza exploratória pode requisitar o uso de uma demonstração, acarretando o uso de processos de raciocínio como a formulação de uma estratégia geral de demonstração e a formulação de etapas justificadas que conduz a uma conclusão. Portanto, o docente proporciona um papel de suma importância na contribuição no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (PONTE; QUARESMA, 2016).

A complexidade do trabalho pedagógico, de compreender a tarefa exploratória, questionar “O que você fez? ”, “Como você fez? ” (WOOD, 1998, p. 38), é de suma importância para compreender o raciocínio matemático que o discente utilizou para realização da tarefa exploratória. Portanto, é necessário que o docente seja reflexivo, ativo e que tenha conhecimentos sobre as abordagens e técnicas no processo educativo em sua prática cotidiana em sala de aula, isto é, que tragam uma abordagem desafiadora para o discente, que proporcione um ambiente desafiador de aprendizagem.

Contudo, é importante compreender a ideia de utilizar tarefa exploratória para desenvolver o raciocínio matemático, que é um dos grandes objetivos da

Matemática escolar. Assim, o curso de formação inicial de professores de Matemática deve se preocupar em discutir que ensinar é muito mais do que transmitir conteúdos.

2 JUSTIFICATIVA

No presente trabalho é dado destaque à importância das tarefas exploratórias e raciocínio matemático na aprendizagem matemática. Nesta perspectiva, a abordagem de pesquisa procurar evidenciar os processos de raciocínio matemático de estudantes do Ensino Médio em uma tarefa de natureza exploratória.

A Base Nacional Comum Curricular apresenta importância do raciocínio matemático e de seus processos (BRASIL, 2018).

Para promover o raciocínio matemático é preciso estabelecer um ambiente de aprendizagem em que os discentes possam utilizar diferentes estratégias de resolução para resolver suas tarefas. Lembrando que é fundamental que o professor selecione boas tarefas exploratórias, que pergunte o porquê da resposta, assim fará que o aprendiz apresente justificativas para suas escolhas e, com isto, proporcionando uma aprendizagem matemática.

O papel do professor é de suma importância no processo de ensino e no desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno, auxiliando e incentivando o estudante a compreender e dar um sentido para suas ideias e em suas justificativas (BELL, 2011). Segundo Mata-Pereira e Ponte (2017, p.172), é a capacidade do professor

> de articular várias ideias que surgem dos alunos, incentivá-los a elaborar seu pensamento, levá-los a avaliar e comparar suas ideias e, muitas vezes, também garantir que ideias matemáticas importantes são os focos do trabalho.

É importante que o professor compreenda como o aluno pensa, para que, na sala de aula, suas ações auxiliem no progresso do raciocínio matemático do aluno. Durante a aula, o professor é o mediador de conhecimentos, ele que irá desafiar o aluno utilizar outros métodos diferentes do usual para solucionar tarefas propostas. As tarefas exploratórias promovem uma “visão global da Matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio [matemático]” (BOAVIDA et al, 2008, p. 7).

Para o desenvolvimento do raciocínio matemático as tarefas não necessitam que o nível de complexidade seja elevado, pois pode desestimular o aluno (BRODIE, 2010). Entretanto, é considerável que as tarefas exploratórias tenham um nível adequado para o aprendiz, em que os desafios devem ser propostos de forma gradual, pois tal desafio auxilia no desenvolvimento do raciocínio matemático. É essencial que haja interação entre educador e educando para que possa ser desenvolvida a tarefa de forma que proporciona às discentes "oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar" (BRODIE, 2010, p. 47).

3. OBJETIVOS

3.1 Objetivo Geral

- Compreender os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos do 2° ano do Ensino Médio ao solucionar uma tarefa exploratória e as ações do professor que o apóiam.

3.2 Objetivos Específicos

- Discutir a importância da tarefa exploratória na mobilização dos processos de raciocínio matemático.
- Transcrever áudios de três grupos de alunos contendo a discussão da resolução de uma tarefa exploratória.
- Analisar as ações da professora ao ministrar uma aula com aplicação de uma tarefa exploratória.
- Analisar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem a tarefa exploratória.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Raciocínio Matemático

A consciência humana consiste em aspectos complexos e instáveis. Nesta concepção, na prática educativa e na compreensão do conhecimento matemático, o desenvolvimento do pensamento matemático não pode ser visto como trivial, mas como um elemento essencial no desenvolvimento do raciocínio matemático (WUNDT, 1912).

Sabemos que o desenvolvimento do raciocínio matemático “é um dos grandes objetivos da matemática escolar” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2018, p.782) e que, sem ele, não há Matemática. O raciocínio matemático auxilia assimilar o por quê existem relações matemáticas e é decisivo para desenvolver uma compreensão mais profunda da matemática (JEANNOTE; KIERAN, 2017).

Muitos teóricos mostram a importância de desenvolver o raciocínio matemático no âmbito escolar, no qual ele é apontado como um processo central na aprendizagem matemática (BRUNHEIRA; PONTE, 2019).

Diversos teóricos abordaram o tema raciocínio matemático, com objetivo de compreender suas características.

Para Oliveira (2008, p. 3), a expressão raciocínio matemático é utilizada para referir “um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio) ”. Na opinião de Stylianides (2009), o raciocínio matemático é um processo de inferência que utiliza informação matemática já conhecida para obter novo conhecimento ou novas conclusões. Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 728) definem como o “processo que utiliza informação já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. Para Morais, Serrazina e Ponte (2018) o raciocínio matemático é obtido por meio de um conjunto de ideias já conhecida de, a partir dessas ideias, criam-se novos conceitos complexos para obter assim um novo conhecimento. Para esses últimos autores, o raciocínio matemático se desenvolve a partir um conjunto de informações já adquiridas e que resulta em novas conclusões, isto é, criar inferências.

Ellis, Özgür e Reiten (2018, p. 2), definem o raciocínio matemático como “um processo de inferência que inclui procurar semelhanças ou diferenças, validar e exemplificar”. Logo, raciocinar é criar inferências, ou seja, usar conhecimento adquirido para alcançar novas conclusões.

Jeannotte e Kieran (2017) apontam que o raciocínio matemático pode ser analisado com base em dois aspectos que, apesar de diferentes, se completam: o estrutural e o processual, tendo o primeiro um caráter abstrato e, o segundo, um caráter mais prático e temporal. Os modelos mais citados do aspecto estrutural são a dedução, a indução e a abdução. Jeannotte e Kieran (2017) apontam alguns processos específicos que surgiram da literatura, dentre os quais estão a generalizar, conjecturar, justificar, provar, entre outros.

As inferências lógicas e conclusivas estão relacionadas com o raciocínio dedutivo. Num ponto de vista dedutivo, o raciocínio matemático é definido como se os conhecimentos adquiridos estiverem corretos à conclusão será verdadeira, logo não haverá dúvidas com o resultado (ALISEDA, 2003). Para Ponte, Branco e Matos (2009, p. 89) “raciocinar envolve, sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento”. Assim, a partir de uma cadeia de deduções “o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas” (OLIVEIRA, 2008, p. 7). É um raciocínio lógico, desenvolvido de um conhecimento generalizado para o específico, com uma conclusão necessária e com uma função de comprovar conhecimento (OLIVEIRA, 2002). Logo o “raciocínio dedutivo é sinônimo de raciocínio matemático” (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 8). Muitos autores assumem o raciocínio dedutivo como um “elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático” (OLIVEIRA, 2002, p. 178).

Segundo Mata-Pereira (2012), outros teóricos levam o raciocínio matemático a uma área indutiva, em que se constitui uma generalização com base na identificação de uma certa assimilação usual a diversos casos, assim a partir de um princípio de ideias discernimos um padrão e fazemos uma generalização e aplicamos em um conceito matemático (PÓLYA, 1954 apud MATA-PEREIRA, 2012, RUSSEL, 1999). É por meio do raciocínio indutivo que se desenvolvem conjecturas que podem ser investigadas ao longo dos processos de demonstração como a indução matemática (PÓLYA, 1954a apud MATA-PEREIRA). Neste sentido, o raciocínio indutivo é investigativo, desenvolvendo-se do conhecimento específico para o generalizado, sem uma dedução relevante e com uma função de produzir conhecimento (OLIVEIRA, 2002).

Oliveira (2002, p. 176) argumenta que “a demonstração (referente ao raciocínio dedutivo) esconde o trabalho do matemático que é mais relevante de um ponto de vista epistemológico, ou seja, a criação matemática, propriamente dita”, é nessa circunstância que aparece o raciocínio abdutivo. Interiormente conectada ao raciocínio abdutivo encontra-se a noção de plausibilidade (OLIVEIRA, 2002), demonstrada anteriormente por Pólya (1954b apud MATA-PEREIRA). A plausibilidade possui, de acordo com este autor, uma função crucial tanto na descoberta de teorias matemáticas como na descoberta de resultados para questões e na concepção da demonstração. Assim, raciocinar abdutivamente abrange induzir conjecturas plausíveis sobre uma determinada situação, comprovando-a na finalidade de validar o seu significado na conjectura em questão (RIVERA; BECKER, 2009). Nesta perspectiva, o raciocínio abdutivo possibilita não só criar conjecturas explicativas, e sim como analisar hipóteses no percurso de deduzir a melhor explicação (OLIVEIRA, 2002).

Outro tipo de raciocínio, diferente dos anteriores, é o transformativo.Segundo Oliveira (2002), apresenta dois conceitos fortes: (i) o conceito de operação (mental ou física); e (ii) o conceito de dinamismo. Na opinião deste autor, o raciocínio é desenvolvido por meio de imagens mentais tendo em vista uma explicação ou validação, assim é necessário possuir ou não uma conclusão e desenvolver uma função de criar ou validar conhecimento. Deste modo o autor enfatiza o raciocínio transformativo como mais rico entre outros tipos de raciocínio, pois as imagens mentais existentes nos pensamentos são mais eficientes e possibilitam investigar diversos conceitos matemáticos.

Observa-se que o raciocínio dedutivo, indutivo e abdutivo são notados com mais facilidades no âmbito escolar, e visto que o raciocínio transformativo baseia em imagens mentais é mais difícil de distinguir.

Outro aspecto que pode ser considerado para análise do raciocínio matemático diz respeito aos processos que podem ser mobilizados. Assume-se assim esse raciocínio com “um processo evolutivo de conjecturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.10).

Criar conjecturas coincide em raciocinar matematicamente e desenvolver afirmações que exige uma investigação para verificar se são verdadeiras ou falsas (MORAIS; SERRAZINA; PONTE, 2012). Com a mesma perspectiva “conjecturar é parte do processo de raciocínio que leva a afirmações que podem se mostrar verdadeiras ou falsas afirmações que chamamos de conjecturas” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.14). Um dos processos do raciocínio matemático é a conjectura a qual pode ser compreendida pela “busca de semelhanças e diferenças, infere numa narrativa sobre alguma regularidade com um valor epistêmico provável que tem o potencial para teorização matemática (JEANNOTTE; KIERAN, 2017, p. 10). Assim conjectura “serve como uma introdução ao raciocínio matemático desde o desenvolvimento das conjecturas requisitando a verificação ou refutação das declarações” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.16). Para Jeannotte e Kieran (2017) conjecturar leva a uma ampliação do discurso pela construção de narrativas prováveis, a partir da busca por semelhanças e diferenças. Neste processo de detectar conjecturas comuns entre diversos fatos, o aluno desenvolve generalizações, que os induzem a manusear e esclarecer o significado de conceitos, símbolos e representações (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012). Deste modo a conjectura pode ser ou não ser uma generalização, ou seja, conjecturar é visto como um conjunto de afirmações gerais e a generalização consistem a partir de uma conjectura específica.

A generalização é destacada por “identificar pontos comuns em casos diferentes e estender uma afirmação além do domínio em que foi originada” (BRUNHEIRA; PONTE, 2019, p.90). Entretanto generalizar “envolve a identificação da aplicação da generalização através do reconhecimento do domínio relevante” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.12). Assim, a generalização constitui uma particularidade significativa na formulação de conjecturas.

A generalização, enquanto conjectura com características específicas, tem uma função fundamental na concepção da Matemática. Pois “formular uma generalização matemática envolve uma afirmação sobre uma propriedade, conceito ou procedimento que se pretende válido para um conjunto alargado de objetos ou condições matemáticas” (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012, p.12).

No âmbito escolar os alunos apontam afirmações comuns entre vários casos, desenvolvendo generalizações que conduz a usar e esclarecer os significados matemáticos de conceitos, símbolos e representações. Assim a matemática baseia-se em afirmações gerais sobre uma grande classe de objetos, em função disso a generalização constitui uma modalidade particularmente importante de formulação de conjecturas. Consequentemente a elaboração de conjecturas, generalizações aparecem como processos centrais no raciocínio matemático.

O conjunto de conjecturas tem um papel central para a atividade matemática (PÓLYA, 1954). As “conjecturas podem ser desenvolvidas através do exame de exemplos específicos e então raciocinar inferencialmente a partir da situação específica para criar uma conjectura” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.14). No momento que os alunos se envolvem no processo de conjecturar e generalizar, são capazes de usar uma linguagem matemática nova ou compreensível. Assim “a medida que os alunos desenvolvem conjecturas e generalizações, eles frequentemente introduzem termos que precisam ser esclarecidos à medida que os alunos validam ou refutam uma conjetura ou generalização” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 26).

Na sala de aula de matemática “os alunos desenvolvem conjecturas, sejam elas faladas ou imagens mentais, a respeito de conceitos e partida para a atividade matemática e para o raciocínio matemático” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.13). Os discentes são capazes de desenvolver conjecturas a partir uma atividade matemática que realize em sala de aula, viabilizando oportunidades para agregar o raciocínio matemático em muitas atividades cotidianas da classe.

No âmbito escolar, é fundamental desenvolver e analisar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos. Na Educação Básica, desde os anos iniciais, os alunos devem ser incentivados a formular e analisar conjecturas presentes em situações matemáticas, procurar relacionar afirmações por meio de padrões existentes. Ao induzirem situações matemáticas, os alunos criam conjecturas sendo verdadeiras ou falsas, mesmo que o raciocínio incorreto não seja desejável, ele surge naturalmente na sala de aula de matemática (RUSSELL, 1999). As conjecturas inválidas e raciocínios incorretos podem auxiliar a uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, os alunos devem “formular conjecturas sobre relações matemáticas, investigar essas conjecturas e elaborar argumentos matemáticos baseados nas suas experiências” (NCTM, 2007, p. 223). Contudo, as conjecturas dos alunos, referentes a propriedades e relações, poderão ser incorretas. Nesta situação, a análise da conjectura será capaz de levar o aluno a explorar à utilização de contraexemplos, o que faz parte integrante do raciocínio matemático. As “conjecturas incorretas normalmente contêm raciocínios válidos que podem levar ao desenvolvimento de afirmações válidas, isto é parte natural de se fazer matemática e deve ser esperado que seja uma parte natural do aprendizado da matemática” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.10). Logo os alunos muitas vezes aprendem tanto do exame do porquê de uma determinada afirmação falsa quanto do entendimento do porquê de uma determinada afirmação ser verdadeira. Entretanto “os alunos podem ir e vir entre conjecturas e generalizações, investigando o porquê e justificando ou refutando a qualquer momento no processo de raciocínio” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.11).

No Ensino Médio para que os alunos se tornem capazes de raciocinar indutivamente, dedutivamente e abdutivamente é essencial que haja um espaço para o debate sobre as conjecturas indicadas e afirmações matemáticas com o professor e os colegas (NCTM, 2007). Frequentemente os alunos necessitam analisar os símbolos e explicitar seus significados para comunicar o raciocínio e tornar as afirmações acessíveis aos outros. Assim, é possível que os alunos utilizem processos de raciocínio matemático como a formulação de uma conjectura, a investigação desta conjectura e a apresentação da resolução utilizada (NCTM, 2007).

No âmbito da Educação Matemática, a validade de uma generalização deve ser vista de acordo com as capacidades, conhecimento e competências dos discentes. Nesta situação “os alunos generalizam quando se concentram em um aspecto particular de um problema ou de uma ideia e pensam mais amplamente sobre esse aspecto”(LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.16). Uma generalização pode se manifestar de diversas formas diferentes e às vezes não é facilmente perceptível, podendo até mesmo ser a apresentação verbal de um aluno. Desse modo, a generalização é tida como um processo em que o aluno se engaja, ao contrário de enfatizar um resultado final. Assim, o exercício contínuo com generalizações é essencial para que desenvolvam técnicas que proporciona a formulação de generalizações válidas e apropriadas em várias situações.

Ao decorrer ciclo escolar dos alunos, segundo Joana Mata-Pereira (2012), é fundamental que seja estimulada e compreendida a transição entre as generalizações fundamentadas principalmente em investigações empíricas e casos particulares e as generalizações embasada numa coerência lógica raramente ou nada apoiada pela experiência empírica (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008, MATA-PEREIRA, 2012). No âmbito das generalizações assentada em observações empíricas ou casos particulares, Radford (2003 apud MATA-PEREIRA 2012), conceitua três tipos de generalização: factual, contextual e simbólica. A generalização factual manifesta quando a observação empírica ou casos particulares são prontamente utilizados a recentes casos particulares, sem variação do conjunto de objetos matemáticos que está a ser operado. Da mesma forma, baseada em observação empírica ou casos particulares a generalização contextual prevê um aumento de um novo conjunto de objetos matemáticos. Já a generalização simbólica é aquela que abrange na sua formulação a compreensão e utilização da linguagem algébrica. Assim, "uma generalização em matemática pode significar uma regra algébrica ou uma equação" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.16).

Particularmente no tema da Álgebra, "os estudantes necessitam primeiramente a formular generalizações em tarefas nos quais tem a probabilidade de constatar padrões e relações" (MATA-PEREIRA, 2012, p. 13). Em seguida, devem formular generalizações empregando a notação algébrica para que finalmente seja plausível obter novos conhecimentos ao raciocinarem sobre as expressões algébricas formuladas pelos próprios alunos (CARRAHER; MARTINEZ; SCHLIEMANN, 2008). Contudo é crucial proporcionar a formulação de generalizações em várias fases, pois uma ampla parte da compreensão referente a objetos algébricos.

Segundo Galbraith (1995), a formulação de generalizações caracteriza entre os alunos que utiliza abordagens empíricas, provando alguns casos, e os que seguem uma abordagem dedutiva. Para os que seguem abordagens empíricas, para Galbraitn (1995) são apresentadas em dois grupos: os que realizam teste casualmente, de modo aleatório, e aqueles em que a seleciona casos a ser analisados é conduzido pelas conjecturas a serem testadas. Consequentemente os alunos que seguem abordagens dedutivas encontram etapas para ser realizadas, devem reconhecer a importância de uma certa afirmação, analisar se a mesma é válida e executar a afirmação de forma apropriada (GALBRAITH, 1995), mais podendo ocorrer erros em qualquer etapa.

Para Lo, Grant e Flowers (2007), justificar é certificar o porquê de executar uma série de estratégias é um critério válido para adquirir uma resposta. De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12) "uma justificação matemática é um argumento lógico baseado em ideias já compreendidas”. Morais, Serrazina e Ponte (2018) diz que é importante que os alunos estejam informados da necessidade de se justificar e do que faz com que uma justificativa seja válida para que sejam capacitados à recusar afirmações embasadas na autoridade de um livro ou professor.

Os estudantes geram justificativas para demonstrar a si mesmo e aos outros por que uma afirmação própria é verdadeira. Logo para proporcionar uma justificativa válida, “os alunos devem fornecer uma sequência lógica de afirmações, cada uma delas baseada em afirmações, ideias ou entendimentos, para chegar a uma conclusão” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.35).

Embasadas em questões como “Por que pensa que esta afirmação é verdadeira? Algum aluno tem outra ideia diferente, por quê? Por que isso ocorre? ” sugeridas pelo NCTM (2007, p. 61), se são apresentadas aos estudantes com frequência, criam hábitos de justificação que promove o pensamento, ordenando o desenvolvimento do raciocínio matemático. Entretanto, não é provável que os alunos se justifiquem sem a intervenção do professor, mas também não é esperado que os alunos justifiquem matematicamente nos primeiros anos escolares.

De acordo com o NCTM (2007) o processo de justificação deve-se iniciar apoiado a exemplos específicos e de forma bastante informal. No entanto, “os alunos deverão aprender e chegar a acordo sobre o que deverá ser aceite como argumento válido” (NCTM, 2007, p. 61) “para que compreendam, desde cedo à existência de suposições específicas e de regras no raciocínio matemático” (MATA-PEREIRA, 2012, p. 15).

Em níveis mais avançados, segundo Joana Mata-Pereira (2012), os anos finais do Ensino Fundamental, os estudantes devem analisar se as justificativas são válidas ou inválidas, uma “justificativa bem-sucedida faz mais do que apenas mostrar que uma afirmação é verdadeira” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.35). Assim neste período é recomendado pelo NCTM (2007), que os estudantes necessitam basear-se em suas justificativas no estudo de propriedades, estruturas e relações, para obter uma prática na elaboração de justificativas matemáticas. A justificação deve estabelecer alguma formalização, sendo que o professor contribua no desenvolvimento do aluno para que ele possa organizar e classificar seus raciocínios, pondo em questão “Como chegou nesse resultado? Por que considera correto? O que ocorre se....? ” (PONTE; SOUSA, 2010, p. 32).

Para Joana Mata-Pereira (2012), no ensino médio os alunos devem ser capazes de identificar se é formal ou informal aquela tal justificação. O NCTM (2007) menciona que os estudantes “deverão expor os seus argumentos matemáticos a outros públicos, para além dos seus professores e colegas” (p. 310), gera a necessidade de “desenvolver justificativas persuasivas baseadas em várias evidências” (MATA-PEREIRA, 2012, p. 15). Logo “reconhecer se uma justificativa matemática é válida é um componente crítico do processo de raciocínio” (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p.35).

No final do ensino básico, como apresenta Lannin, Ellis e Elliot (2011), os alunos devem se basear em ideias já compreendidas para gerar argumentos lógicos para fazer uma justificação; refutar se tal afirmação está incorreta; analisar a validade dos argumentos utilizados; que tenha noção que a matemática não se fundamenta em senso comum ou exemplos particulares; e justifica o porquê de uma generalização estar incorreta, analisando quais elementos podem influenciar essa generalização. Logo as justificações dos estudantes, segundo Lannin (2005), podem ser classificadas em cinco níveis, de acordo com sua conforme a sua complexidade: nível 0 – quando a solução não tem uma justificativa; nível 1 – quando se fundamenta em ideia de outra pessoa; nível 2 – a justificação se baseia em exemplos específicos; nível 3 - a justificação é dedutiva mais se manifesta em uma situação particular; nível 4 – a justificação é dedutiva que é independente dos casos particulares.

Durante o ensino básico, a explicação e a justificação matemática permitem elucidar o raciocínio do aluno, auxiliando para o desenvolvimento de um raciocínio matemático de excelente qualidade. Desta maneira, a justificação, no ponto de vista do raciocínio matemático, deve ser estimulada no início da vida escolar do aluno, sendo depois fortificada em todo o trajeto escolar dos estudantes (MATA-PEREIRA, 2012).

No que respeita à refutação de afirmações, segundo Lannin, Ellis e Elliot (2011, p. 12), “uma refutação matemática envolve a demonstração de que uma determinada afirmação é falsa”. Para Galbraith (1995), os estudantes apresentam muitas vezes dificuldades em assimilar um contraexemplo de uma afirmação matemática e aceitar que apenas um fato seja suficiente para refutar uma afirmação. Entretanto, Coffland (2012) enfatiza que aplicar exemplos empíricos pode levar a conclusões incorretas se não forem analisados todos os fatores ou caso necessários à refutação de conclusão, pelo qual o professor deve ressaltar a utilização de diversos fatores nos processos de raciocínio indutivo.

Contudo explicar e justificar matematicamente permitem que os estudantes esclareçam seu raciocínio (NCTM, 2007), e é o papel do professor criar situações que dêem ênfase no processo de justificação. Mas é necessário que os estudantes entendam o tipo de justificação que são válidas matematicamente (LANNIN, 2005).

Proporcionar o raciocínio matemático resulta em uma intervenção explicita que faça o estudante entender a justificação existente e da ênfase nos "por quê" das afirmações apresentadas (BELL, 2011). Assim esse estímulo promove o desenvolvimento entre as justificações simples e informais e as formais, muito das vezes semelhante a demonstrações (MATA-PEREIRA, 2012).

4.2 Tarefas Exploratórias

Para desenvolver o raciocínio matemático a forma como o professor organiza o ensino é relevante e deve ser coerente com o que se almeja indo além dos métodos de ensino tradicionais. Nesta perspectiva, a escolha de tarefas e o modo de aplicá-las são de suma importância para que possa proporcionar aos estudantes o desenvolvimento do raciocínio matemático. Para que o aluno possa raciocinar matematicamente é "necessária uma melhor compreensão sobre como podem as tarefas ser direcionadas para esse efeito, como devem ser apresentadas aos alunos, como é feita a sua discussão e quais as suas implicações para a compreensão da Matemática" (MATA-PEREIRA, 2012, p. 03,). Alguns estudos apontam que a resolução de problemas e as tarefas de natureza exploratórias ou investigativas, levam o aluno a desenvolver o raciocínio em sala de aula de Matemática (AZEVEDO, 2009; FRANCISCO; MAHER, 2010; HENRIQUES, 2010).

Assim para desenvolver o raciocínio matemático, as tarefas propostas devem proporcionar diferentes maneiras de chegar a uma conclusão verdadeira, pois tarefas que não estimulam o aluno a raciocinar criam condições que não favorecem o raciocínio matemático nos seus processos, ao passo que a memorização sem compreensão, a resolução de exercícios rotineiros e a realização de tarefas padronizadas o inibem o raciocínio (STEEN, 1999). Desta forma, a aplicação de uma tarefa em sala de aula, segundo Boavida et al. (2008), devem favorecer a compreensão dos estudantes em atividades de aprendizagem diversificadas e significativas, ou seja, tarefas que propicie a resolução de problemas, conexões matemáticas, comunicação matemática e argumentação.

Brodie (2010, p. 47) expõe que uma tarefa deve oferecer aos alunos "oportunidades de investigar, analisar, explicar, conjecturar e justificar", assim podendo auxiliar no desenvolvimento do raciocínio matemático no estudante. Desta maneira o professor deve proporcionar um ensino que instiga o aluno a desenvolver processos mentais mais complexos.

Pesquisas apontam que as tarefas de natureza exploratória e resoluções de problemas, são capazes de desenvolver o raciocínio matemático nos alunos e "à compreensão de conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos" (MATA-PEREIRA, PONTE, 2018, p. 784). Assim, segundo Brodie (2010), a tarefa deve desafiar o aluno a raciocinar, mas deve seguir uma sequência de desafios, que irá progredir o grau de complexidade de acordo com o desenvolvimento do aluno, pois poderia desmotivar ou até mesmo causar desinteresse do aluno, ou seja, a "frustração e o desapontamento em razão das falhas podem ter um efeito devastador no seu auto estima, inibindo a sua capacidade de raciocinar matematicamente ou o seu desejo de o fazer" (OLIVEIRA, 2008, p. 08). Desta maneira, além de propor tarefas desafiadoras, o professor deve proporcionar uma interação em sala de aula, incentivar o aluno a explorar, apresentar e discutir os processos de raciocínio.

A tarefa de natureza exploratória pode proporcionar "uma compreensão vivida dos processos matemáticos envolvidos numa investigação (...) [facilitando] o desenvolvimento do raciocínio na resolução de problemas", (HENRIQUES, 2010, p. 373, apud MATA- PEREIRA, PONTE, 2018, p. 784?). Assim por meio da tarefa o aluno investiga as afirmações que surge no decorrer da resolução, assim o aluno cria conjecturas e generalizações. A investigação matemática estimula o aluno raciocinar matematicamente, que é "o envolvimento dos alunos em discussões nas quais elaboram e defendem argumentação matemática e analisam a argumentação matemática dos colegas e do professor" (OLIVEIRA, p. 07, 2008).

No ensino de matemática, os conceitos de atividade e tarefa estão presentes no cotidiano dos alunos. Desta maneira é importante conhecer suas relações e conceitos, para que possa alcançar a aprendizagem de forma integral.

A tarefa está relacionada com a atividade, pois “uma vez que as tarefas são o elemento organizador da atividade que aprende” (PONTE, 2014, p.14). Assim as tarefas têm um papel fundamental na aprendizagem, no qual têm objetivos distintos, algumas tarefas têm objetivo de investigar se o aluno aprendeu e outras analisar o processo de raciocínio do aluno.

Para distingui tarefa e atividade na matemática, Christiansen e Walther (1986) apresenta a ideia de:

> A atividade humana realiza-se através de um sistema de ações, que são processos dirigidos para objetivos causados pelo motivo da atividade. A atividade é realizada através destas ações, que podem ser vistas como as suas componentes. A atividade existe apenas nas ações, mas atividade e ações são entidade diferentes. Por isso, uma ação específica pode servir para realiza diferentes atividades, e a mesma atividade podem dar origem a diferentes ações.... Uma tarefa é então... O objetivo de uma ação. (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986, p.255-256)

Assim ao realizar uma atividade o aluno executa inúmeras tarefas, onde a tarefa representa somente uma determinada ação em que a atividade vai se desenvolvendo. Para Christiansen e Walther (1986) a atividade e o conjunto de tarefas se constituem num método pelo qual a matemática possa ser transmitida aos alunos, de forma que as propostas de tarefas associada com a resolução da atividade resulta em uma boa aprendizagem.

A orientação curricular da NCTM (1991/1994) apresenta a diferença entre tarefa e atividade. O conceito de tarefa é:

> As tarefas são os projetos, questão, problemas, construções, aplicações, e exercícios em que os alunos se envolvem. Elas fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos. (p.20)

Assim as tarefas são instrumentos fundamentais para aprendizagem matemática. As tarefas podem surgir de várias maneiras na formulação feita pelo aluno, pelo professor, apresentada na questão. Existem diversas formas de tarefas matemáticas, como os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos e as tarefas de modelação.

Segundo Ponte (2005) a tarefa tem duas dimensões fundamentais que é o grau de complexidade matemático e o seu grau de estrutura. O grau de complexidade resulta do nível de dificuldade da questão, oscilando entre reduzido ou elevado. De outro modo, o grau de estrutura varia entre os pólos aberto ou fechados. Assim numa tarefa fechada é perceptível seu objetivo e a tarefa aberta envolve alguma indeterminação no que é dado. Por exemplo, “uma investigação tem um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta” (PONTE 2005).

Uma tarefa exploratória e investigativa apropriada cria benefícios para o envolvimento dos alunos na Matemática. Em uma sala que trabalha esse tipo de tarefa, segundo Christiansen e Walther (1986), segue três segmentos: introdução, desenvolvimento do trabalho e apresentação dos resultados e discussão. Na introdução, o professor e o aluno observam como a tarefa deve ser realizada, analisar os aspectos apresentados e quais estratégias irá utilizar para solucionar. Seguidamente, no desenvolvimento do trabalho, os alunos realizam a tarefa de forma independente, individual, em pares ou em grupo menores, com a direção do professor. Por fim, o período de discussão e apresentação dos resultados, onde a turma partilha as estratégias elaboradas no intuito de criar um novo conhecimento matemático.

Segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), na tarefa de investigação “os alunos trabalham em tarefas para as quais não têm um método de resolução imediato – para as resolver têm de construir as suas próprias estratégias, usando conhecimentos prévios” (p.10). Nesta tarefa, os alunos são estimulados a resolver a atividade elaborando estratégias e convalidando-as, compreender conceitos e representar ideias matemáticas. A partir das ações do professor os alunos são convidados a apresentar e justificar seus raciocínios. Mais adiante serão apresentadas as categorias das ações da professora, segundo Araman; Serrazina e Ponte (2019).

4.3 Ações do Professor

Recentemente tem-se discutido que as realizações das tarefas exploratórias e as discussões coletivas contribuem para o raciocínio matemático, onde tem sido apontado como crucial no ensino de matemática, segundo Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013). No que se refere ao papel do professor, tem-se dado ênfase as condições relacionadas com a “seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 55).

Estes autores elaboraram um modelo das ações do professor para orientar as discussões matemáticas apreciando duas dimensões, as ações referentes aos conteúdos e processos matemáticos e aquelas relacionadas com a gestão da aprendizagem, sendo que o seu modelo conceitua, “sobretudo as ações relacionadas com os aspectos matemáticos” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Os autores citados pesquisaram sobre as ações dos professores que desenvolvem o raciocínio matemático e categorizaram-nas em quatro categorias: ações de Convidar; ações de Guiar/Apoiar; ações de Informar/Sugerir e ações de Desafiar; essas ações do professor colaboram para o raciocínio matemático dos alunos.

As ações de Convidar abrangem as ações do professor no qual convida o aluno a apresentar suas ideias, seja por meio de questão específica, ou por meio de explicações e encaminham os alunos a desfrutarem do primeiro contato do que será discutido, diante desta ação o professor pode observa como os alunos estão raciocinando e qual é a sua compreensão a respeito daquele conteúdo, e as próximas ações dão base às discussões matemáticas.

Na categoria de Guiar/Apoiar o professor, por meio do questionamento ou explicações, guia o pensamento do aluno para uma determinada situação ou enfatiza fatos importantes ou então fornece pistas aos alunos e os encoraja a refletir sobre suas resoluções. Nas ações de Informar/Sugerir “o professor assume o papel de introduzir informação, proporcionar argumentos, ou validar respostas dos alunos” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59), com base nas informações concedidas pelos alunos, o professor auxilia por meio da validação ou correção de uma resposta a mostrar ao aluno onde necessita aprimorar e também fornece explicações e solicita novas estratégias para solucionar a questão apresentada e a responsabilidade do discurso matemático fica a responsabilidade do professor.

As ações de Desafiar professor “coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar” (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Nessas ações o professor tenta conduzir os alunos em um ambiente desafiador de modo que os alunos progridem o seu raciocino matemático, buscando novas formas de representação, criando novas ideias e analisando a situação presente, nessa categoria o aluno é incentivado à forma uma generalização e justificar os seus pensamentos assim estimulam o aluno a avançar seus limites e encorajá-los a uma contemplação.

Em pesquisa mais recente, Araman, Serrazina e Ponte (2019) avançaram nos estudos sobre as ações do professor a partir deste modelo de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013). Para além das categorias, foi elaborado um quadro síntese que descrevem as ações previstas em cada categoria de ação, conforme consta na Figura 1. Como umas das finalidades dessa pesquisa é analisar as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático, para a análise consideramos as quatro categorias de ações, conforme consta no quadro de análise (Figura 1).

Figura 1: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático

<table>
<tr><td rowspan="4">C
A
T
E
G
O
R
I
A
S</td><td>Convidar</td><td>- Solicita respostas para questões pontuais.
- Solicita relatos de como fizeram.</td><td rowspan="4">A
Ç
Õ
E
S</td></tr>
<tr><td>Guiar/Apoiar</td><td>- Fornece pistas aos alunos.
- Incentivaa explicação.
- Conduzo pensamento do aluno.
- Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes.
- Encoraja os alunos re-dizerem suas respostas.
- Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.</td></tr>
<tr><td>Informar/Sugerir</td><td>- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos.
- Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos.
- Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos.
- Fornece informações e explicações.
- Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.</td></tr>
<tr><td>Desafiar</td><td>- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas).
- Propõe desafios.
- Encoraja a avaliação.
- Encoraja a reflexão.</td></tr>
</table>

		- Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

5 METODOLOGIA

Neste trabalho utilizamos referências que procedem de um projeto de pesquisa de formação continuada do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – PPGMAT, da UTFPR Campus Cornélio Procópio e Londrina, desenvolvido em uma parceria da UTFPR com a Universidade Federal do ABC, no qual o coorientador deste trabalho de conclusão do curso é integrante. O projeto de pesquisa é titulado como “Aprendizagem profissional do professor de Matemática e o ensino de Álgebra: um estudo envolvendo os contextos da escola básica e da universidade”, com a finalidade de assimilar como se constitui e informar como se desenvolve a aprendizagem profissional do professor de Matemática no qual se refere ao ensino de Álgebra.

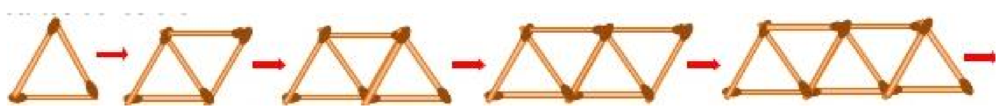
Os dados analisados da pesquisa foram coletados numa turma do Ensino Médio. Durante a tarefa realizada, a aula foi gravada em áudio e em vídeo e posteriormente transcrito para este estudo.

A atividade ocorreu em uma turma do 2° ano do Ensino Médio, em uma pequena cidade no interior do Paraná, Brasil. A aula foi ministrada por uma professora com o contrato temporário. No dia da aula estavam presentes 18 alunos que foram divididos em grupos de 3 alunos, totalizando 6 grupos. A tarefa foi sobre uma sequência de palitos (Figura 2), em que tinha como objetivo apresentar uma sequência de palitos de forma linear, os alunos deveriam determinar um padrão onde tinham que analisar uma representação que determinava o número de palitos de algumas posições subsequentes. Em seguida os alunos observaram um esquema onde tinha que relacionar a variação de posições com a quantidade de palitos, consequentemente estabelecer a quantidade de palitos em uma determinada posição, bem como a posição conhecido o número de palitos. Por último, foram apresentados dois gráficos (um linear e outro exponencial), os alunos deveriam analisar qual deles representava a relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos.

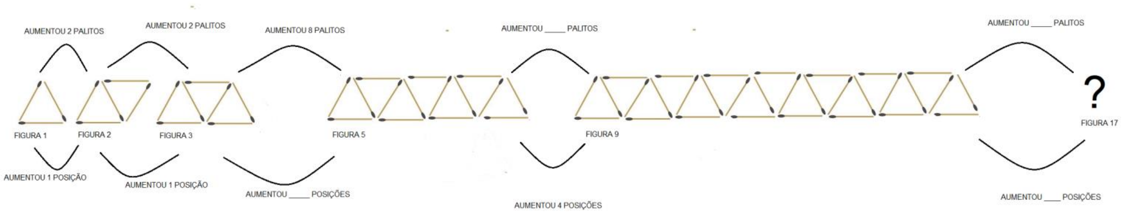
Os nomes dos alunos e da professora foram alterados com a finalidade de garantir a confidencialidade. É com base nas transcrições das resoluções da tarefa de 3 grupos que se realizou a análise dos dados deste TCC. Foi realizado a análise de 3 grupos, pois o registro de áudio de dois grupos está danificado. Como já dito, a análise dos dados teve dois focos: 1) os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos alunos ao resolverem a tarefa, tendo como base os processos apresentados e discutidos no referencial teórico e as ações desenvolvidas pela professora durante a discussão da tarefa nos grupos, tendo como base o quadro de ações da Figura 1.

Figura 2 – Tarefa dos Palitos

Darlini construiu uma sequência de figuras utilizando palitos de fósforo, dispostos da seguinte maneira:



Responda as seguintes perguntas registrando seu pensamentos, por símbolos, cálculos, esquemas ou palavras:
a) Represente a 6ª e a 7ª figura desta sequência
b)Quantos palitos, no total, tem a 12ª figura?
c) Construa uma tabela que relacione a quantidade de palitos em cada figura, da 1ª até a 7ª figuras.
d) Observe o esquema a seguir e complete as sentenças incompletas.



e) Descreva como o esquema anterior foi completado.
f) Qual a quantidade de palitos da 29ª figura?
g) Uma figura tem 101 palitos. Qual é sua posição na sequência?
h) Qual dos gráficos abaixo melhor representa a relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos? Justifique.

Fonte: Trevisan, Ribeiro e Ponte (2020, p. 7)

6 RESULTADOS

A tarefa foi realizada primeiramente pelos alunos em trios. Enquanto eles resolviam, a professora circulava pela sala e auxiliava os alunos que apresentavam dúvidas. Após a finalização da tarefa pelos alunos, a professora conduziu a correção conjunta na lousa, com ajuda dos alunos. As discussões ocorridas durante a resolução pelos alunos foram transcritas e apresentam a interação entre aluno/aluno e aluno/professor de três grupos de alunos: Grupo 1 (alunos C, D e E); Grupo 2 (alunos F e G) e Grupo 3 (alunos H, I e J).

A análise foi feita considerando dois aspectos: 1) a identificação de categorias associadas às ações do professor, entre parênteses, e 2) os processos de raciocínio matemático evidenciados pelos alunos durante a resolução da tarefa.

- Grupo 1 (alunos C, D e E)

No primeiro momento da resolução, o grupo apresenta suas ideias e para a professora.

<u>Trecho 1</u>

[...]Aluno D: Professora? É para desenhar os palitos?

Professora: Você vai ver o jeito que acha melhor representar... (Informar/Sugerir)

Aluno D: Mais fácil desenhar então né?

Professora: Não quero que vocês se prendam, o jeito que achar melhor para vocês resolverem...

Neste momento os alunos têm o primeiro contato com a tarefa, observando que, como ela foi apresentada com desenhos, a primeira questão teria que ser resolvida também com desenho, assim procurando uma forma mais usual para solucionar a questão. Diante disso, nota-se que a professora sugeriu para o aluno utilizar outras formas de resolver a questão, que a mesma questão pode ser resolvida de várias maneiras que não tem uma forma padrão (ação de Informar/Sugerir).

<u>Trecho 2</u>

[...]Professora: Como vocês fizeram? (Convidar)

Aluno D: A fizemos pela lógica, tipo sabíamos que a 5° figura tinha 11 então descobrimos que a razão era 2, por que a figura aumentava 2 palitos. Daí nos colocamos 11+2 e depois que achamos o resultado colocamos mais 2, daí achamos o resultado daí achamos o 6° e o 7°. E na "b" era para achar a 12° figura a gente sabia que a 6° era 13, então 12 tinha que ser o dobro, então a gente fez 13x2, praticamente isso.

Neste trecho, pode-se observar que a professora convida os alunos a relatar como resolveram a questão (ação de Convidar). O aluno inicialmente apresenta sua ideia, com base no conhecimento matemático da razão de uma P.A., pois nota-se que o aluno utiliza a 5° figura para mostrar que somando mais 2 palitos daria a quantidade de palitos da próxima figura, assim criando uma conjectura, onde sempre somando 2 palitos ira descobrir posteriormente a quantidade de palitos da figura seguinte. Na próxima questão, ele utilizou a anterior para resolver à atual, pois na questão seguinte solicita a quantidade de palitos na figura 12°, logo ira aplicar a ideia de usar o dobro, pois como já sabia a quantidade de palitos da 6° figura, era só dobrar a quantidade de palitos para descobrir a quantidade que tinha na figura 12. Assim elaborou uma nova conjectura, usando a ideia de dobrar a quantidade de palitos quanto se tem uma figura atual e que quer descobrir a figura que é respectivamente é o seu dobro.

Trecho 3

[...] Professora: Aqui é isso mesmo que acontece.... Vamos visualizar a figura 2, quantos palitos aqui? (Guiar/Apoiar)

Aluno D: 5.

Professora: 5(Informar/Sugerir). Então você teria que pensar que a figura 4 é o dobro dessa, então o que seria o dobro disso? Quantos têm na figura 4? (Guiar/Apoiar)

Aluno D: Nossa é verdade...

Professora: Será que é isso que está acontecendo? Tá aumentando? Pensa no jeito que vocês estão fazendo. (Guiar/Apoiar)

A professora continua questionando os alunos na tentativa de observar como estão pensando e qual a compreensão que tem a respeito do conceito matemático discutido (dobro) e da conjectura que elaboraram. As ações da professora de Guiar/Apoiar são observadas no momento que ela conduz o questionamento para aluno, para que ele observa que o conceito de dobro não se encaixa no momento. Desta maneira a professora leva o aluno a pensar em relacionar a 2° figura com a 4° figura, que respectivamente seria seu dobro. Ao notar que o dobro não se encaixaria nessa questão, a conjectura elaborada sobre o dobro é invalidada. O trecho ainda contém uma ação que se encaixa na categoria de Informar/Sugerir, quando a professora rediz a resposta correta dada pelo aluno, no sentido de validá-la. No trecho seguinte a professora pergunta como os alunos conseguiram resolver a mesma questão novamente.

Trecho 4

[...] Professora: Conseguiram pensar nessa? (Guiar/Apoiar)

Aluno E: Fizemos a mesma lógica da primeira. Não nos lembrávamos da fórmula, daí fizemos igual a lógica da primeira.

Professora: Não precisa de fórmula não. Que vocês pensaram aqui? (Guiar/Apoiar)

Aluno D: Mesma lógica, fomos aumentando em 2 e 2, até chegar no 12°.

A professora questiona novamente os alunos como conseguiram descobrir a quantidade de palitos da figura 12, já que anteriormente se equivocaram na conjectura elaborada. Logo o aluno utiliza a mesma conjectura da razão, que é somar de dois em dois palitos até chegar à figura que procura. Neste trecho nota-se que o aluno fala sobre uso de uma fórmula, pois como eles utilizaram a razão para resolver a questão logo relacionaram com a PA, que na sua fórmula a razão é usada. A ação da professora é guiar os alunos a descobrir outras formas de solucionar a questão sem se prender as fórmulas já conhecidas.

<u>Trecho 5</u>

[...] Professora: E se perguntarem de uma figura muito grande você iria fazer isso? Como você conseguiria fazer sem fórmula, de outra maneira, que você precisa como 49° figura você conseguiria fazer isso? (Desafiar)

Aluno D: 49°?

Professora: É um exemplo.

Diante a dificuldade dos alunos ao encontrar uma maneira mais fácil de descobrir a quantidade de palitos, utilizando somente a conjectura da adição de 2 em 2, a professora conduz um desafio (ação de Desafiar), de descobrir quantos palitos tem na figura 49, sem precisar ficar somando de 2 em 2, pois seria uma solução muito demorada e cansativa. Assim, a professora desafia os alunos a pensarem de outra maneira. No próximo trecho os alunos resolvem outra questão sobre posição da figura.

<u>Trecho 6</u>

Aluno D: A cada número de palitos é o dobro de posições. Porque a cada 1 posição aumenta 2.

[...]Aluno D: 8 posições... dá 16 palitos....

Aluno E: Dá para escrever que a cada 2 palitos aumentava uma posição, então como são 8 palitos aumenta 4 posições.

Neste trecho o grupo apresenta uma nova conjectura. Eles notaram que cada 2 palitos é 1 posição, assim se aumentam 8 posições aumentam 16 palitos. Assim foi criada uma conjectura.

No próximo trecho os alunos tentam resolver quantos palitos tem na figura 29.

<u>Trecho 7</u>

[...] Aluno E: Vou contar quantos palitinhos tem aqui.... Tem 31 palitos na figura 15, na figura 17 são 35 palitos.... Aumentaram 4 palitos.

Aluno D: Da figura 17 para 29 da quantos? 12...

Aluno E: Aumentaram 12...

Aluno D: Então sabemos que, na figura 17 é 35, e a figura 12 é 25. Então seja a 17 com a 12... 35+25? Da 60...

O aluno E, observou que da figura 15 até a figura 17 (duas posições), aumentou 4 palitos, numa tentativa de validar a conjectura elaborada por eles. O aluno D começou a elaborar uma nova conjectura para descobrir quantos palitos tem na figura 29. Sabendo quantos palitos tem na figura 12 e na figura 17, notou que se pegar a figura 12 somar com a figura 17 vira a figura 29, pois $12 + 17 = 29$, somando a quantidade de palitos dessas duas figuras respectivamente será o resultado da figura que estão procurando. Assim o aluno elaborou uma nova conjectura.

<u>Trecho 8</u>

[...] Professora: Como vocês pensaram na 29°? (Guiar/Apoiar)

Aluno D: Aqui a gente sabe que na figura 17 são 35 palitos, e a figura 15 são 31.... Se aumenta 4 palitos são 35... E aqui a gente sabe que a figura 12 tem 25 palitos, então se a gente somar os dois dá 29, iria dar a quantidade de palitos da figura 29. Da figura 17 mais a figura 12 daria 29... A gente não sabe se dá o mesmo resultado...

Aluno E: Tenho certeza disso.

Professora: Vocês acham que 60 é número razoável por ser a quantidade de palitos ou... (Guiar/Apoiar)

Aluno E: Acho que não é, por causa da sequência sempre chega uma parte que dá... 21 caso seria 61...

Aluno D: Nunca tem um número par na sequência, por isso que não pode ser 60...

Aluno E: A gente sabe que vai ter uma figura que vai chegar que vai dar 101, então provavelmente vai ter um 11, 21, 31, 41...

Aluno D: Então a gente não tinha pensado nisso, não tem número par. Porque pelo fato que a 1° figura começa com 3, é a única que vai ter 3, as outras sempre vai aumentar 2.

Neste trecho a professora questionou como os alunos chegaram ao resultado (ação de Guiar/Apoiar). Os alunos apresentaram sua nova conjectura e como conseguiram chegar até o resultado. No meio da explicação a professora incentiva o grupo a pensar se o número 60 seria a resposta correta, a partir dessa hipótese e o aluno E percebe um padrão referente à quantidade de palitos de cada figura, que ela nunca termina em número par, sempre em números ímpares porque a 1° figura tem 3 palitos e se aumenta 2 palitos em cada figura (conjectura de 2 em 2) logo sempre terá que ser números ímpares e que algumas posições as quantidades de palitos é 101, 21... Logo os pensaram no 61 que seria o resultado mais próximo de 60. Assim perceberam que essa conjectura de somar as posições estava incorreta. Observa-se que a professora direciona os alunos a refletir sobre a conjectura criada, apresentando o resultado sem dizer que estava incorreto, mais sim se a quantidade era razoável pela posição que estavam se referindo, esse direcionamento se encaixa nas ações da professora em conduzir o aluno em analisar suas ideias e encorajar os alunos a uma reflexão.

<u>Trecho 9</u>

Professora: Será que isso que vocês estão pensando, isso não pode mudar um pouquinho para chegar então? (Guiar/Apoiar)

Aluno D: É a gente sabe que vai ser em torno de 60, provavelmente vai ser 61. O número mais próximo.

Aluno E: Mais próximo.

Professora: Por que não 63 ou 59? (Desafiar)

Aluno E: Pera aí, a gente sabe que a figura 17 é 35, e a figura 18 são 37, a figura 19 são 39. Então é 59.

Aluno D: É 59...

Aluno E: Tipo se a figura 19 são 39, a figura 29...

Aluno D: Vai ser 59.... Por que aumentou 20 posições...

Aluno E: É 10 né?

Neste trecho a professora encoraja os alunos re-elaborarem suas respostas, que se encaixa nas ações da professora de Guiar/Apoiar. Os alunos sabem que o resultado será próximo de 60, então a professora se baseia nessa ideia e desafia os alunos questionando por que não 63 ou 59, já que esses números são próximos de 60 também. O grupo observou que a figura 19 têm 39 palitos, como para chegar na figura 29 aumentaram 10 posições, e eles já sabiam que cada posição aumenta 2 palitos (conjectura das posições, onde cada 2 palitos aumentam 1 posição), da figura 19 até a figura 29, irão aumentar 20 palitos, logo a figura 29 contém 59 palitos. Nota-se que os alunos utilizaram a conjectura que tinham elaborado em outra questão e testaram na questão atual e conseguiu chegar à resposta correta, esse processo de validação da conjectura pode levar a uma generalização.

<u>Trecho 10</u>

[...] Professora: O que você pensou nisso aqui? (Guiar/Apoiar)

Aluno D: A gente sabia que a figura 17 tinha 35 palitos, a figura 19 como aumentaram 2 posições aumentaram 4 palitos, então de 35+4=39 então a figura 19 é 39 palitos.

A professora novamente questiona como os alunos conseguiram saber a quantidade de palitos de uma figura, numa ação de Guiar/Apoiar. Os alunos uniram as duas conjecturas já elaboradas por eles para responder essa pergunta. Segundo eles, para descobrir quantos palitos tinha na figura 19, é necessário pegar a figura anterior e somar mais 2 palitos e depois como aumentou 2 posições seriam 4 palitos, logo a partir dessas conjecturas eles conseguiram descobrir a quantidade de palitos da figura atual, validando a conjectura, aplicando em um novo exemplo que pode conduzir a uma generalização.

No próximo trecho a professora convida o grupo a explicar como resolveram as questões para toda a turma.

<u>Trecho 11</u>

[...] Professora: Iremos começar com as discussões das atividades. Vamos começar com o grupo do Aluno E, pois, eles fizeram um raciocínio diferente. Aluno E queria que você falasse como você fez para descobrir qual a quantidade de palitos na 29° figura... (Convidar)

Aluno E: Então a gente sabia que a figura 17 tinha um total de 35 palitos, então a figura 19 tinha que dar mais 4 palitos então daria 39, sabemos que na figura 19 seriam 39 palitos. Então se a gente aumenta 10 posições aumenta 20 palitos. Que cada posição que aumenta, aumenta 2 palitos.

A professora convida o grupo do aluno E a apresentar suas soluções, pois o grupo resolveu de uma forma diferente do restante da turma. No início os alunos apresentam que utilizaram a conjectura sobre posições para conseguir chegar ate aquele resultado. A professora prossegue com a discussão.

Trecho 12

[...]Professora: Você tinha pensado nisso desde início? Ou pensaram em algo diferente? (Guiar/Apoiar)

Aluno E: A gente pensou assim desde o começo. Então a figura 29, será a figura 19 mais 10 posições, então se 10 posições são 20 palitos, então seria 39 mais 20 palitos por isso 59.

A professora, numa ação de Guiar/Apoiar, questiona aos alunos se pensaram da mesma forma desde o começo, pois ela sabe que não e quer que as outras conjecturas sejam compartilhadas com todos. Entretanto o aluno responde que sim.

No trecho a seguir a professora fala sobre a primeira conjectura que eles criaram sobre descobrir a quantidade de palitos somando as posições, mostrando para a turma que eles não tinham pensado só dessa forma.

Trecho 13

*Professora: Qual posição vocês somaram para chegar à posição 29? (Guiar/Apoiar). Você tinha pensando assim que tinham me falado, pegaram a figura 17 e somou com a figura 12, não era isso que vocês tinham feito para descobrir a figura 29? (*Informar/Sugerir)

Aluno E: Que a gente sabia que a figura 17 tinha 35 palitos...

*Professora: Na posição 12 tinha quantos palitos? Vocês acharam na posição 12? (*Guiar/Apoiar)

Aluno E: A 25...

*Professora: 35+25 daria quantos? (Guiar/Apoiar). Que eles pensaram no primeiro raciocínio deles era pegar a figura da posição 17 e somar com a figura da posição 12 que tinha na primeira folha, 17+12 daria a posição da figura 29, pegaram lá 35 palitos da figura 17 e 25 palitos da posição 12, somando daria quantos? (*Informar/Sugerir)

Aluno E: 60.

Professora: Por que vocês viram que não era 60? (Desafiar)

Aluno E: Porque a progressão sempre estava números ímpares e não números pares.

Professora: Perceberam que eram ímpares, como 60 é par perceberam que não poderia ter feito daquele jeito. (Informar/Sugerir)

Neste trecho o objetivo da professora é mostrar que os alunos elaboram outras conjecturas que ao tentar validar, perceberam que não estavam corretas, logo os alunos precisaram criar novas conjecturas e validá-las. Para conseguir isso, ela mobilizou ações da categoria Guiar/Apoiar, ao realizar questionamentos pontuais, de Informar/Sugerir ao relatar algumas coisas que eles haviam feito no grupo e de Desafiar, ao questionar por que o 60 não era um valor válido, solicitando deles uma justificativa.

- Grupo 2 (alunos F e G)

<u>Trecho 1</u>

[...]Aluno F: Não pode olhar no caderno como era aquela fórmula?

Professora: Não, não pode se prender a fórmula já falei para vocês. Que vocês vão analisar o que está aumentando de uma figura para outra, analisa isso... (Guiar/Apoiar)

Aluno F: Já conseguimos analisar...

Professora: Então você conseguiu analisar, raciocinou sem usar fórmula. Dessa figura para essa aumentou quantos? (Guiar/Apoiar)

Aluno F: Não representa como cálculo.... Seria a razão né...

Professora: Isso, daí você consegue descobrir. Não precisa da fórmula, se você não sabe a fórmula, resolve de outra maneira. (Guiar/Apoiar)

Neste trecho o aluno tem o primeiro contato com a tarefa observando que existe uma razão e uma progressão, logo ele quer aplicar a fórmula de PA, mas não a lembra. No entanto, as ações da professora de Guiar/Apoiar direcionam o aluno a pensar de outra forma, para não se prender somente ao uso de fórmulas. Assim a professora conduz o aluno a analisar que está acontecendo de uma figura para a outra, tentando fazer com que ele perceba alguma regularidade, sem necessidade da fórmula.

<u>Trecho 2</u>

[...]Aluno G: Acho que aqui tem que fazer o cálculo, porque a gente já tem da 7° então...

Aluno F: A figura 1 tem 3, figura 2 tem 5, só fazer aqui o.... 11, 12, 13...

Aluno G: E o total?

Aluno F: 25?

Aluno G: 25...

O grupo nota que a cada figura aumenta 2 palitos, assim elaborando uma primeira conjectura (razão igual a 2). Queriam descobrir quantos palitos teria na figura 12, logo usaram a nova conjectura, foram somando de 2 em 2 a partir da figura 1 até chegar na figura 12 até descobrir que a figura procurada tem25 palitos.

Trecho 3

Aluno F: Não é possível isso.... Aqui vai ter no número 25 vai ter 25 triângulos?

Aluno G: Sim 25 triângulos... E palitos? Ou é palitos...

Aluno F: Não faço ideia...

Aluno G: Olha aqui, aqui vai ter 3 eu acho que aqui vai ter que somar, não é?

Aluno F: Não, aqui vai ter 12 triângulos e 25 palitos. Porque acho que só pegaria esse número vezes 2 mais 1. Por exemplo, é 12 certo...

Aluno G: Não estou entendendo...

Aluno F: Como posso te dizer se quisesse achar 24 palitos seria 49 entende? Esse dobro mais 1. Na fórmula tinha mais 1 no final, não tinha?

Aluno G: Então eu acho que é desse jeito mesmo, esse número vezes 2 mais 1. Nesse exercício...

Neste trecho o grupo tenta criar uma nova conjectura para descobrir a quantidade de palitos da figura. O aluno observou que a figura 12 tem 25 palitos, se ele pegar a posição que é 12 e multiplicar por 2 e depois somar mais 1, daria a quantidade de palitos da respectiva figura, relacionando com a fórmula da PA, na qual também aparece o mais 1.Portanto eles afirmam essa nova conjectura, a posição da figura multiplicado por 2 mais 1 dá a quantidade de palitos.

Trecho 4

[...]Aluno F: Como aumentou 2 palitos, aumentou uma posição. Se aumentou 8 palitos aumentou 4 posições.... Não sei se tá certo...

Aluno G: Entendi...

[...]Professora: Se você fez isso daqui, responde aqui.

Aluno F: Não, que tipo vai ficar tão igual.... Será que tá certa?

Professora: Por que não estaria? (Desafiar)

Aluno F: Duvido que se eu estou fazendo certo, tem algo errado...

Professora: Não, você tem que confiar em você.... Às vezes na vida as coisas são assim complica as coisas que não é....

Neste trecho o aluno observou que a cada posição aumentava 2 palitos, logo se aumenta 4 posições aumenta 8 palitos, assim criando uma nova conjectura. Entretanto, o aluno acredita que não está certo e nesse momento a professora o incentiva ele a explicar o porquê de não estar certo. O aluno insiste que há algo errado na sua forma de resolver.

<u>Trecho 5</u>

[...]Professora: Por que você acha que está errado? (Desafiar). Que ele fez da figura 1 para figura 2 aumentou o que? (Guiar/Apoiar)

Aluno F: 1 casa e 2 palitos...

Professora: Certo... (Informar/Sugerir)

Aluno F: Esse aqui aumentou 8 palitos são 4 casas.... Esse daqui parece que aumentou 16 palitos...

A professora insiste na explicação do porque estar errado, mas diante da dificuldade do aluno executa ações de Guiar/Apoiar ao questionar o que aconteceu da figura 1 para a figura 2 e de Informar/sugerir ao validar uma resposta correta fornecida pelo aluno.

<u>Trecho 6</u>

[...] Professora: Você acha que é mesmo raciocínio da letra “a” até a letra “e”... (Guiar/Apoiar)

Aluno F: Sim eu acho... A cada 2 palitos aumenta 1 casa e a figura que a gente está vai ser ela vezes 2 mais 1 para descobrir o quanto de palitos. Se a gente souber que tá na figura 15 e a na 30 só fazer isso. Como eu vou escrever...

Professora: Tô aqui na 17° figura e quero chegar na 24°, não preciso adotar a fórmula para saber como chegar... (Guiar/Apoiar)

Aluno F: Não, você sabe que cada casinha é 2 palitos ir só adicionando. Mais daí no caso como é vezes 2 mais 1, só fiz 24x2+1= 49... Só não sei como escrever...

Neste trecho nota-se que o aluno utiliza novamente a conjectura formulada anteriormente, sobre o dobro da posição mais 1, para descobrir a quantidade de palitos. A ação da professora de Guiar/Apoiar incentiva o aluno a apresentar seu raciocínio e com base nessa ideia ela encoraja o aluno a testar essa conjectura em outro exemplo. Desta forma essa ação da professora pode conduzir o aluno a fazer uma generalização.

<u>Trecho 7</u>

[...] Aluno G: Então 29°...

Aluno F: É só multiplicar 29° vezes 2 mais 1, vai da 59...

Aluno G: Já pôs mais 1?

Aluno F: Sim, na 29° figura vai ter 29 triângulos né...

Aluno G: Na figura 7, tem 7 triângulos, 7x2+1=15 palitos.... Então a figura 29° vai ter 29 triângulos.... Então 29x2 é 58 mais 1 da 59 palitos.... Agora é sua vez de fazer.

Neste momento o grupo valida a conjectura sobre a quantidade de palitos na posição, testando-a em outros exemplos, numa tentativa de generalização. Como essa conjectura foi testada várias vezes, o grupo observou que por meio desse raciocínio chegavam à resolução correta.

<u>Trecho 8</u>

[...]Professora: Isso daqui é um gráfico que representa isso aqui. As posições da figura e a quantidade, qual deles que representa essa sequência e por quê? (Guiar/Apoiar) (Desafiar)

Aluno F: Porque aqui aumentou 2 em 2, gradativa a razão...

Professora: Isso! (Informar/Sugerir) Quero que você escreva isso...

Aluno F: Mais não consigo falar...

As ações da professora de Guiar/Apoiar, conduz o aluno a observar pontos importantes do gráfico, onde apresenta a posição e quantidade da figura, analisando o que ocorre e qual se relaciona mais com a tarefa apresentada. Entretanto, para além dessa observação, professora desafia incentiva o aluno a apresentar uma justificativa, ao perguntar o porquê, ação da categoria Desafiar. Além disso, ela executa também uma ação de Informar/Sugerir, ao validar a resposta correta fornecida pelo aluno.

<u>Trecho 9</u>

[...] Professora: Como vocês disseram que iria acontecer para ser esse gráfico? (Guiar/Apoiar)

Aluno F: Teria que variar né, a constante e a razão, as casinhas que sobe aqui...

Professora: Que vocês estão chamando de razão aqui? (Guiar/ Apoiar)

Aluno F: Os palitinhos, cada 2 sobe 1... E aqui, por exemplo, parece que não subiu 1 casa e sim 3 casas, por isso está errado.

Neste trecho as ações da professora de Guiar/Apoiar solicitam ao grupo que explique como analisou os dois gráficos. Os alunos observaram que em um gráfico parece que subiu 3 casas, como na tarefa a razão é 2, logo notam qual gráfico que representa melhor a situação dada.

<u>Trecho 10</u>

[...] Professora: Agora será o Grupo F e G, como vocês resolveram esses dois, como chegaram nesse resultado? (Convidar)

Aluno F: É a gente só multiplicou por 2 mais 1 e sabemos que a_1 é diferente dos outros certo, a gente só fez vezes 2 mais 1, sabemos que na 29° figura vai ter 29 triângulos...

Professora: E nesse aqui que dei os palitos? (Guiar/Apoiar)

Aluno F: Fiquei pensando.... Se na 29° dá 59, então 50x2+1=101, então é 50° figura.

Professora: Então você usou essa daqui para pensar naquela? Beleza...

Aluno G: Só isso...

Neste momento a professora convida (ação de Convidar) o grupo a apresentar para turma como resolveram a tarefa. Os alunos apresentam a sua conjectura elaborada, para descobrir a quantidade de palitos na figura (pegar a posição da figura multiplicar por 2 e somar mais 1). Eles iniciam uma generalização, pois testaram em outros exemplos e validaram a conjectura.

Grupo 3: alunos H, I e J

<u>Trecho 1</u>

[...] Aluno I: Aumenta 2 fósforos cada vez.

Aluno H: Qual a fórmula da PA mesmo?

Aluno J: Não necessariamente precisa ser PA, ela disse que não tem fórmula. Aqui começa com 3 depois aumenta 2.

No primeiro contato com a tarefa os alunos observaram que aumenta 2 palitos a cada figura, elaborando assim uma conjectura. E a relacionam com a fórmula de PA. Logo eles começam a analisar o que ocorre de uma figura para outra.

Trecho 2

[...] Professora: Alguém me explica como pensou aqui? (Convidar)

Aluno J: Como já tem 3 na 1° e depois só aumenta 2, daí vai aumentando cada um, pega o último resultado da última e aumenta mais 2.

Professora: Entendi. Mas vocês conseguem pensar como poderia chegar, por exemplo, na 7° sem ficar usando os outros? (Guiar/Apoiar).

Neste trecho o grupo continua usando a mesma conjectura, onde para descobrir quantos palitos existe na figura, é só utilizar a figura anterior e somar 2 palitos para descobrir a quantidade de palitos da figura seguinte. Note que a professora convida o aluno a explicar como conseguiram resolver, logo ela conduz o aluno aplicar essa conjectura em outro exemplo, para que o grupo repare que existe outra maneira de resolver. Essas ações se encaixam nas categorias Convidar e Guiar/Apoiar.

Trecho 3

[...] Professora: Será que se não tivesse estudado isso ou estudou mais não lembra de você consegue pensar em um jeito de continuar? (Guiar/Apoiar) Vocês continuaram aqui...

Aluno H: Sim daí ele pede no exercício...

Professora: Mais vocês poderiam chegar sem ficar fazendo isso? (Guiar/Apoiar)

Aluno I: Deve ser bhaskara....

Neste momento a professora incentiva o grupo a pensar de uma forma que não se baseia em somente fórmulas, mas criar novas estratégias para resolver a tarefa, essa ação se encaixa em Guiar/Apoiar. A professora insiste no grupo que eles possam observar que existem várias estratégias para resolver uma mesma questão.

Trecho 4

[...] Professora: Como você chegou nisso daqui? (Guiar/Apoiar)

Aluno J: Como aumentava 2, a gente colocou o número da 1° que é $3+2=5$*, depois pegamos o resultado e somamos mais 2. Nós estávamos pensando numa fórmula de chegar ate isso...*

A ação da professora de Guiar/Apoiar solicita que os alunos expliquem como fizeram. Ao explicar o aluno apresenta que analisou, uma figura para a seguinte aumentava 2 palitos, logo para descobrir a próxima era só somar mais 2, assim criou uma nova conjectura. Entretanto os alunos queriam elaborar uma fórmula para representar esse raciocínio.

Trecho 5

[...] Aluno H: Professora qual a fórmula de PA mesmo?

Professora: Tem outras maneiras de fazer... (Informar/ Sugerir)

Aluno H: A gente fez de outra maneira mais daí...

Professora: Depois vocês vão me falar o jeito que pensaram para chegar nisso, não tem que fazer igual fórmula. Tentar fazer de outra maneira, você vai me explicar o que fez aqui. (Guiar/Apoiar)

Observa-se que os alunos ainda insistem em utilizar fórmulas, a ação da professora de Informar/Sugerir realça que não tem necessidade de utilizar fórmulas e sim criar estratégias para chegar a uma solução. Logo na sequência, a professora inventiva o aluno a explicar o que fez ação da categoria Guiar/Apoiar.

Trecho 6

[...] Aluno J: Para completar aqui. Aumentou 2 palitos aumentou 1 posição né? Aqui aumentou 8...

Aluno H: Aumentou 8 palitos aumenta 4 posições. Se a cada 2 palitos aumenta 1, então tem que aumentar 4.

Aluno J: Sim.

Neste trecho os alunos criam uma nova conjectura, onde a cada 2 palitos é uma posição. Assim se aumentou 8 palitos, aumenta 4 posições, relacionando a quantidade de palitos que aumentam de uma figura para a próxima.

Trecho 7

[...] Professora: E aí que vocês escreveram? Como vocês pensaram? (Guiar/Apoiar)

Aluno J: Toda vez que o muda a posição aumenta 2 palitos. Como aqui aumentou 8 temos 16 palitos.
Professora: Certo. E vocês acham que essa ideia que ajuda vocês naquilo que tinha perguntado antes? Sem precisar ficar fazendo de 1 em 1. Vocês conseguem pensar como calcularia a posição 12, por exemplo? (Desafiar)

A professora solicita ao grupo que expliquem como fizeram para resolver a questão (ação de Guiar/Apoiar). O aluno apresenta a conjectura que elaborou sobre a posição e quantidade de palitos. A professora questiona se dessa maneira foi mais fácil do que ficar somando de 1 em 1, como tinham feito no começo e questiona se essa ideia funciona em outros exemplos, essa ação da professora se encaixa em Desafiar, pois com isso pode conduzir essa conjectura em uma generalização.

<u>Trecho 8</u>

[...] Professora: Na figura 17 tem um ponto de interrogação aqui para vocês completarem, vocês chegaram a completar? Quantos palitos vão ter na figura 17? (Guiar/ Apoiar)
Aluno J: Teria 35...
Professora: Como é que você sabe que da 35? (Guiar/Apoiar)
Aluno J: Por que fomos contando na figura 15...
Professora: A vocês foram contando da figura 15 e aí como você chegam na 17? (Guiar/Apoiar)
Aluno J: Aumentamos 4 palitos.
Aluno H: Aqui seria 31 palitos total. E na figura 17 terá 35.
Professora: Tá.

A professora incentiva que o aluno explique como resolveram a questão e o que eles utilizaram para chegar até a resposta e, para isso, faz alguns questionamentos. Estas ações da corresponde a categoria Guiar/Apoiar. Os alunos utilizaram a conjectura de que, para descobrir a quantidade de palitos de uma figura é só somar 2 palitos da figura anterior para descobrir a seguinte. Note que eles também utilizaram a ideia da posição, se aumentou 4 palitos aumentou 2 posições

<u>Trecho 9</u>

[...] Aluno J: Vai precisar da fórmula.

Aluno H: 29° figura... Seriam 57 palitos?

Aluno J: Eu não sei...

Aluno H: A quantidade de palitos da 29°... $29 + 29 = 58$.

Aluno J: Sim.

Aluno H: Então tira 1 por causa que na 1° figura tem palito a mais, daí tira 1 daí ficaria 57.

Os alunos discutem como descobrir quantos palitos tem a figura 29. Logo o aluno cria uma nova conjectura: ele somou a posição com ela mesma e depois subtraiu 1, pois ele notou que tem 1 palito a mais na 1° figura. Para o grupo tirar 1 palito da 1° figura está correto, pois teria que ter somente 2 palitos, por conta de sempre somar de 2 em 2. Em seguida eles tentam validar essa conjectura.

Trecho 10

Aluno J: Tô pensando... Vamos pegar $2 \times 12 + 1 = 25$

Aluno H: Ham?

Aluno J: Pensa assim como aumenta 2 para cada então seria $2x + 1$. *Então na 29 seria* $2 \times 29 + 1 = 59$.

Neste trecho note que os aluno não utiliza mais aquela conjectura de subtrair 1 e sim somar 1, então eles descartaram aquela conjectura e elaboraram uma nova. A nova conjectura para descobrir quantos palitos tem na figura é: como eles sabem que de uma figura para outra aumentam 2 palitos, então criaram um padrão, multiplica por 2 a posição da figura e soma 1, assim descobrem quantos palitos possui na figura que procuram.

Trecho 11

[...] Professora: Diga aí como vocês resolveram. (Guiar/Apoiar)

Aluno J: Então pensamos na fórmula.

Professora: Que fórmula?

Aluno J: Descobrimos que sempre ia aumentado o dobro mais 1.

Professora: Como que vocês descobriram isso? (Guiar/ Apoiar)

Aluno J: Aqui na 1° figura é 3, sempre será esse 1 diferente então fizemos $2x$ *que* x*seria a figura mais 1.*

Professora: Beleza, essa fórmula vocês acham que tem haver com essa sequência aí?
Aluno J: Sim.

A professora executa ações de Guiar/Apoiar com a finalidade de que o grupo explique como fizeram. O grupo apresentou a conjectura que elaborou para descobrir a quantidade de palitos de uma figura. Note que esse grupo insistiu em criar uma fórmula para resolver a tarefa, pois na aula de matemática são habituados a relacionar um conteúdo com uma fórmula. Entretanto, nesta tarefa a fórmula foi elaborada por eles a partir de uma sequência de processos de raciocínio.

Desta maneira observa-se que as ações da professora auxiliaram o grupo a elaborar e validar suas conjecturas, conduzindo o grupo a elaborar uma fórmula geral que se constitui numa possibilidade de generalização.

7 DISCUSSÃO

Nesta pesquisa, afirmamos que o raciocínio matemático é essencial para aprendizagem matemática durante o período de escolar (NCTM, 2007; STYLIANIDES, 2007). Segundo Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012), um dos grandes desafios da matemática é desenvolver o raciocínio matemático nos alunos. Desta maneira é crucial discutir o papel desempenhado pelos professores na estimulação do raciocínio, especificamente as suas ações que podem auxiliar para o desenvolvimento do raciocínio nos alunos. Para isso, nesta pesquisa, assumimos as ações docentes discutidas por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) categorizadas e sintetizada no modelo de análise apresentado por Araman, Serrazina e Ponte (2019) na figura 1.

Os resultados do presente estudo apontam que os questionamentos realizados pela professora estão distribuídos pelas quatro categorias de ação. Discutimos as ações desempenhadas pela professora distribuídas nas quatro categorias de análise ao longo de cada um dos trechos analisados juntamente com os processos de raciocínio mobilizados pelos alunos durante a resolução.

As ações da professora iniciaram sempre com a de convidar, o que é natural, pois essa categoria tem a função de iniciar os alunos na discussão (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013). Mas em seguida foram sendo substituído por ações de Guiar/Apoiar, seja por meio de questionamentos que conduzam o pensamento dos alunos, seja chamando a atenção para fatos importantes ou, ainda, solicitando que os alunos expliquem como fizeram. Por exemplo, no trecho 3 do grupo alunos C, D, E, ações da professora de Guiar/Apoiar são observadas no momento que ela conduz o questionamento para aluno, para que ele observa que a conjectura de dobro não se encaixa no momento, a professora elabora diversos questionamentos que juntos conduzem o pensamento do aluno e ele refaz sua conjectura.

Nas ações de Informar/Sugerir, a professora, por diversas vezes, rediz respostas corretas dos alunos, também solicita que eles reavaliem algum ponto ou mesmo fornece explicações e informações. Essas ações são importantes, pois validam os pensamentos corretos dos alunos e os auxilia a reverem outros que não estejam corretos. Por exemplo, tais ações conduziram os alunos a elaborarem diversas conjecturas, como no trecho 1 do grupo alunos C, D, E, a professora sugeriu para o aluno utilizar outras formas de resolver a questão, que a mesma questão pode ser resolvida de várias maneiras que não tem uma forma padrão, e quando os alunos ainda insistem em utilizar fórmulas, a ação da professora de Informar/Sugerir realça que não tem necessidade de utilizar fórmulas e sim criar estratégias para chegar a uma solução.

As ações das categorias Guiar/Apoiar e Informar/Sugerir conduziram os alunos a validarem ou não as conjecturas que elaboraram ou, ainda, a refinarem as mesmas. Por exemplo, no trecho 10 do grupo alunos H, I, J, quando os alunos validam uma conjectura e, em seguida, elaboraram uma nova, os alunos não utilizam mais aquela conjectura de subtrair 1, pois percebem que é inválida, e percebem que é somar 1, então eles descartaram aquela conjectura inválida e elaboraram uma nova. A nova conjectura para descobrir quantos palitos tem na figura é: como eles sabem que de uma figura para outra aumentam 2 palitos, então criaram um padrão, multiplica por 2 a posição da figura e soma 1, assim descobrem quantos palitos possui na figura que procuram.

Essas ações da professora contribuem para o que está estabelecido na literatura que define raciocínio matemático como a capacidade de usar informações já conhecidas para obter, de forma justificada, novas conclusões (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; MATA-PEREIRA; PONTE, 2017).

Por fim, com as ações de Desafiar a professora conseguiu que os mesmos refletissem e reavaliassem suas formas de pensar, levando-os a tentar generalizar a conjectura, mesmo que seja em outro exemplo, e apresentar algumas justificativas para o que fizeram. Por exemplo, no trecho 5 do grupo alunos C, D, E a professora observa a dificuldade dos alunos ao encontrar uma maneira mais fácil de descobrir a quantidade de palitos além somente a conjectura da adição de 2 em 2. A professora conduz um desafio (ação de Desafiar), de descobrir quantos palitos tem na figura 49, sem precisar ficar somando de 2 em 2, pois seria uma solução muito demorada e cansativa. Assim a professora desafia os alunos a pensarem de outra maneira. Segundo Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013), tais ações colocam o aluno na situação de avançar em seu entendimento por meio da formação de conexões, do raciocínio, da argumentação e da avaliação.

Tendo em consideração o raciocínio matemático, as ações da professora auxiliaram em alguns processos. Ao questionar constantemente o que acontecia de uma figura para outra, os alunos puderam identificar um padrão, onde sempre somava de dois em dois, assim esse processo de raciocínio de examinar semelhanças e diferenças entre objeto matemático ou prováveis relações (JEANNOTTE; KIERAN, 2017), que podem elaborar uma conjectura, um processo de raciocínio que possibilita analisar as relações matemáticas, investigar alguns pontos semelhantes com o objetivo de desenvolver afirmações (MATA-PEREIRA; PONTE, 2012).

De acordo com Lannin, Ellis e Elliot (2011), uma justificação é válida quando composta por uma sequência lógica de afirmações que se baseiam em outros conhecimentos já determinados e encaminham a uma conclusão. Neste caso, os alunos partiram de conhecimentos já existentes que, mediados pelas ações da professora, os conduziram à conclusão de que *"Descobrimos que sempre ia aumentado o dobro mais 1",* observa-se que as ações da professora auxiliaram o grupo a elaborar e validar suas conjecturas, conduzindo o grupo a elaborar uma fórmula geral que se constitui numa possibilidade de generalização.

De fato, é necessário destacar que a tarefa apresenta potencial para o raciocínio matemático, uma vez que os alunos desenvolveram conjecturas, fizeram validação das mesmas, abandonaram as que consideram erradas e elaboraram outras, ou mesmo refinaram algumas. Além disso, procuraram justificar suas formas de pensar e avançaram no sentido de organizar uma fórmula geral, ainda que a testassem apenas nos exemplos dados, numa tentativa de generalização. Entretanto, como visto, além do potencial da tarefa exploratória, as ações da professora ao discutir ideias matemáticas com os alunos se mostram fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático, como afirma Araman; Serrazina e Ponte (2019).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados analisados apontam que é possível envolver os alunos em processos de raciocínio matemático, apesar de esses dados correspondam apenas à discussão de uma tarefa, inserida numa sequência de tarefas, eles são indicativos dessa possibilidade. Devem ser realizados estudos mais continuados que permitam evidenciar que é possível manter aquele envolvimento em todas as aulas de Matemática.

As evidências apresentadas permitem ainda apresentar a importância do papel da professora na forma como promove interações entre os alunos e com os alunos e em como os leva a desenvolver diferentes processos de raciocínio matemático (JEANOTTE; KIERAN, 2017; STYLIANIDES, 2009), tendo sido possível identificar esses processos com base nas leituras dos artigos que abordam esse tema.

A relevância das tarefas como ponto de partida para a aprendizagem dos alunos no ensino de matemática também é discutida. Assim a tarefa exploratória e de investigação apresenta clareza nos conceitos, desenvolve o raciocínio matemático e requerem que os processos de raciocínio, como conjectura e a generalização sejam empregados.

Desta maneira, as ações da professora nas quatro categorias de análise são adequadamente distribuídas e articuladas, foram fundamentais para estes processos, pois, direta ou indiretamente, enriqueceram e ampliaram o raciocínio matemático dos alunos.

Desse modo, este trabalho contribui de maneira pessoal para minha formação acadêmica, pois ao explorar sobre o raciocínio matemático e seus processos, fez me raciocinar sobre as alternativas de promover a aprendizagem matemática no aluno. Assim os estudos referentes aos processos de raciocínio e as ações da professora propicia boas perspectivas em relação ao ensino de matemática e é crucial para o desenvolvimento do raciocínio do aluno.

REFERÊNCIAS

ALISEDA, A. Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. **Synthese**, Netherlands, n. 134, p. 25-44, 2003.

AZEVEDO, A. **O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções**. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação, especialização Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2009.

BELL, C. Proofs without words: a visual application of reasoning and proof. **MathematicsTeacher**, Reston, VA, v.104, n. 9, p. 690-695, 2011.

BOAVIDA, A. et al. **A experiência matemática no ensino básico**. Lisboa: DGIDC-ME, 2008

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRODIE, K. **Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms**. 1. ed. New York, NY: Springer, 2010.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Justificando generalizações geométricas na formação inicial de professores dos primeiros anos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 33, n. 63, p. 88- 108, abr. 2019.

CARRAHER, D.; MARTINEZ, M.; SCHLIEMANN, A. Early algebra and mathematical generalization. ZDM **Mathematics Education**, 40, p. 3-22. 2008.

COFFLAND, D. (2012). Closing on proof: Questions about closure on sets of numbers provide a context for hypotheses and proofs. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v.17, n. 8, p. 494-500, 2012.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018.

FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Teachers attending to students' mathematical reasoning: Lessons from an after-school research program. **Journal of MathematicsTeacher Education**, Netherlands, v. 14, n. 1, p. 49-66, 2011.

HENRIQUES, A. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação.** 2010. 446 f. Tese (Doutoramento em Educação, Didáctica da Matemática) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

GALBRAITH, P. Mathematics as reasoning. **The Mathematics Teacher**, v.88, n. 5, p. 412- 417, 1995.

JEANNOTTE, D; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, 2017.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER, F. (Ed.), **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. p. 707-762 . Reston, VA: NCTM, 2007.

LANNIN, J. Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. **Mathematical thinking and learning**, v. 7, n. 3, p. 231-258, 2005.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston,** VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

MATA-PEREIRA, J., PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **EducationalStudies in Mathematics**, n. 2, v. 96, p. 169-186, out. 2017.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: uma investigação no 3.º ciclo. **Quadrante**, v. XXI, n. 2, p. 81-110, 2012.

MATA-PEREIRA, J. PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, v. 32, n. 62, 2018.

MORAIS, C.; SERRAZINA, L.; PONTE, J. P. Mathematical Reasoning Fostered by (Fostered) Transformations of Rational Number Representations. **Acta Scientiae**, Canoas (RS), v. 20, n. 4, p. 552-570, jul./ago. 2018.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2007.

OLIVEIRA, P. **A investigação do professor, do matemático e do aluno: uma discussão epistemológica**. (Dissertação de Mestrado), Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2002.

OLIVEIRA, P. O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. **Educação e Matemática**, 100, p. 3-9, 2008.

PÓLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics** (Vol. I). New Jersey: Princeton University Press, 1954.

PÓLYA, G. **Mathematics and plausible reasoning**. Vol 2, Patterns of Plausible Inference. New Jersey: Princeton University Press, 1954.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC-ME.2009.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, p. 11-34, 2005.

PONTE, J. P**.** Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática**.** In: PONTE, J. P. (org). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa**, 2005.**

PONTE, J. P. Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. Únion: Revista Iberoamericana de Investigación Matemática. N. 21, p. 13-30, março de 2010.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, 22(2), 55-81

RADFOR, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n.1, p.37-70, 2003.

RIVERA, F; BECKER, J. Algebraic reasoning through patterns. **Mathematics Teacher in the Middle School**, Reston, VA, v. 15, n. 4, p. 213-221, 2009.

RUSSEAL, S. **Mathematical Reasoning in the Elementary Grades**. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), Developing mathematical reasoning in grades K-12 (NCTM Yearbook) (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM, 1999.

STEEN, L. Twenty questions about mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), **Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12** (Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics. p. 270–285, 1999.

STYLIANIDES, G. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinkingand Learning**, v. 11, n.4, p. 258-288, 2009. doi: 10.1080/10986060903253954.

TREVISAN, A. L.; RIBEIRO, A. J. ; PONTE, J. P. Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-based Teacher Education Program. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, p. 1-14, 2020.