UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

KIMBERLY DE AZEVEDO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À EPIDEMIOLOGIA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

KIMBERLY DE AZEVEDO

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS À EPIDEMIOLOGIA

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação, apresentado à disciplina TCC 2, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Cláudia Brunosi Medeiros

CORNÉLIO PROCÓPIO
2021

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Cornélio Procópio
Diretoria de Graduação
Departamento de Matemática
Curso de Licenciatura em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Kimberly de Azevedo

Equações Diferenciais Aplicadas à Epidemiologia

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação apresentado às 19h00 no dia 03 de dezembro de 2021, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná — UTFPR, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. O candidato foi arguido pela Banca Avaliadora composta pelos professores abaixo assinados. Após deliberação a Banca Avaliadora considerou o trabalho aprovado.

Prof. Me. Cláudia Brunosi Medeiros
(Orientador)

Profª. Drª. Glaucia Maria Bressan

Prof. Me. Rafael Prado da Silva

“A Folha de Aprovação assinada encontra-se na Coordenação do Curso”

Dedico este trabalho
à minha minha família e a minha orientadora

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter permitido que eu tivesse saúde determinação para não desanimar durante a realização deste trabalho.

A minha família, minhas irmãs que são a base de tudo que eu sou, que me fizeram chegar até o fim sempre me apoiando, ao meu maior exemplo de vida e pessoa, meu irmão, que um dia chegarei perto de onde ele está e serei um pouco como ele, a minha mãe que sempre me disse para seguir meu coração, aos meus tios que caminharam junto a mim em todo esse tempo.

Aos amigos, que sempre estiveram ao meu lado, que com certeza levarei para além da faculdade; Ana Claudia por estar literalmente todos os dias comigo me aguentando nos melhores e piores momentos você sempre se fez presente, Carol por sua alegria e calma todas as manhãs deixando as coisas mais leves e mais fáceis de aguentar, obrigada por me aturar dias bons e ruins, Lory por todas as conversas e conselhos que compartilhamos, todos as noites e dias estudando para matérias que tiravam nossa paz, Gabriela que em um momento todo errado apareceu para me mostrar a luz no fim do túnel, obrigada por me presentar com sua amizade todos os dias no passado, presente e já agradeço pelo futuro, pois nossa amizade virou parte literalmente da gente, Ronaldo que em todo tempo estava ali do meu lado, as vezes só para chorar e dizer como no final isso ia valer a pena. Paulinho, Eduardo que sempre me motivaram a nunca desistir pois nada era impossível.

Obrigada por fazerem esses anos realmente valerem a pena, por todos os choros, surtos, risadas e festas que compartilhamos, sem vocês nada seria possível dentro ou fora dessa universidade vocês são maravilhosos.

Aos professores, pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho no meu processo de formação profissional ao longo do curso, em especial ao professor Roberto Molina por ter acreditado em mim quando eu mesmo não acreditava, a minha incrível orientadora e amiga Cláudia Brunosi, obrigada por me escolher e permitir estar com você nesse tempo, é de extrema alegria poder dizer que você foi e sempre será minha orientadora e mais que isso, uma inspiração de pessoa, uma amiga, ao professor David Pereira por me mostrar que é possível ter uma didática impecável em tudo que se propõe a fazer e me mostrar que a educação pode ser incrível.

Às pessoas com quem convivi a longo desses anos de curso, que me incentivaram e que certamente tiveram impacto na minha formação acadêmica.

À UTFPR que foi mais que essencial no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos do curso.

RESUMO

AZEVEDO, Kimberly de. **Equações Diferenciais Aplicadas à Epidemiologia**. 2021. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021

O presente trabalho tem como finalidade estudar as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) aplicadas a Epidemiologia. O objetivo principal é apresentar modelos matemáticos estudados na Epidemiologia com enfoque em doenças transmissíveis, como os vírus que transmitem o HIV e o COVID-19. Primeiramente, apresenta-se os conceitos básicos de Equações Diferenciais Ordinárias e um breve histórico de epidemiologia, para melhor compreensão do assunto. Posteriormente, são estudadas as soluções numéricas e analíticas dos problemas apresentados.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias, Epidemiologia, HIV e COVID-19.

ABSTRACT

AZEVEDO, Kimberly de. . 2021. 51 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Cornélio Procópio, 2021

This work aims to study the Ordinary Differential Equation (ODE), applied to Epidemiology. The main objective is present studied mathematical models in epidemiology with focus on diseases like the HIV/AID and COVID-19. First, the basic concepts of Ordinary Differential Equations and a brief history of epidemiology are presented, for a better understanding of the subject. Subsequently, the numerical and analytical solutions of the problems presented are studied.

Keywords: Ordinary Differential Equation, Epidemioly, HIV and COVID-19.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais foram introduzidas primeiramente por estudos do cálculo por Fermat (1601-1665), Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716). Os primeiros entendimentos sobre derivadas foram surgindo, porém, suas soluções não eram fáceis de serem encontradas. Somente com Jakob Bernoulli (1654-1705) (EVES, 2004), que desenvolveu o método de separação de variáveis, e o qual mais tarde foi generalizado por Leibniz, a Integral e o Teorema fundamental do Cálculo foram de alguma ajuda e, ainda sim, somente em casos muito específicos.

No início do século XVII, as equações diferenciais começaram a ser aplicadas em problemas de astronomia e ciências físicas, estudadas por Bernoulli, que criou equações para os movimentos planetários com os princípios de gravidade feitos previamente por Newton.

No século XVIII, muito conhecimento sobre as técnicas de análise e solução haviam sido acumulados, porém, ainda existiam muitas equações que aparentemente não tinham soluções possíveis, isto é, até a chegada de Leonhard Euler (1707-1783), que demonstrou que utilizando a teoria das funções, poderia se chegar a compreensão das equações diferenciais.

Devido aos esforços e pesquisas destes estudiosos pôde-se elevar o conhecimento sobre as equações diferenciais, os quais resultaram em inúmeras aplicações e soluções para diversos problemas nas mais diferentes áreas. Por ser um campo da matemática que proporciona várias aplicações, favorecendo modelar diversas situações, como o estudo do crescimento populacional, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) são muito importantes para a modelagem matemática, em destaque para a epidemiologia matemática, já que, por meio dessas equações é possível descrever o comportamento do contágio de doenças e, pensar assim no mais importante: medidas para conter a disseminação entre a população. No entanto, deve-se ressaltar que para a modelagem ser bem-sucedida, deve primeiro entender os aspectos biológicos em questão (KERMACK; MCKENDRICK, 1932).

Neste contexto, pensando em aplicações para as equações diferenciais e vivenciando uma pandemia de COVID-19, decidiu-se estudar a modelagem necessária para obter maior informação e precisão sobre o desenvolvimento e contágio da doença nas comunidades, região e país, e assim analisar as medidas de controle, como vacinação ou outras medidas de contenção necessárias para erradicar a doença.

Assim, o presente trabalho tem como tema, um estudo sobre equações diferenciais ordinárias e sua aplicação na epidemiologia matemática usando para entender como as doenças se comportam em certos modelos. Desta maneira, o trabalho apresenta um estudo dos modelos matemáticos epidemiológicos, visando a análise de soluções analíticas e numéricas dos modelos: Suscetível- Infectado (SI), Suscetível-Infectado-Suscetível (SIS) e Suscetível-Infectado-Recuperado (SIR).

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

De acordo com Zill (2016) uma equação que possui as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas, em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial. Estas equações podem ser classificadas em tipo, ordem e linearidade.

Desde a segunda metade do século XIX, com o desenvolvimento do conhecimento médico sobre as causas das infecções, desenvolveu-se a teoria matemática dos fenômenos de grande escala. A publicação de Hamer de 1906 presumia que a ocorrência de uma epidemia depende de certos fatores, como o número de pessoas suscetíveis, o número de pessoas infectadas e a taxa de contato entre pessoas suscetíveis e infectadas. Vários modelos matemáticos usados para mostrar as condições físicas são baseados em equações diferenciais, o que levou ao estudo do mesmo modelo porque sua teoria considera a taxa de variação.

2.1 CLASSIFICAÇÃO

2.1.1 Classificação quanto ao tipo

Existem dois tipos de equações diferenciais. Se uma equação diferencial apresenta unicamente derivadas ordinárias de uma ou mais funções incógnitas, em relação a uma única variável independente é classificada como Equação Diferencial Ordinária, (EDO). Se uma equação envolve derivadas parciais de uma ou várias funções de duas ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP) (ZILL, 2016).

2.1.2 Classificação por ordem

A ordem de uma equação diferencial (EDO ou EDP) é a ordem da maior derivada na equação.

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

é dita uma equação diferencial de ordem *n*.

O proposito deste trabalho é apresentar conceitos sobre as Equações Diferenciais Ordinárias. Por isso, a partir, desse momento não falaremos mais sobre Equações Diferenciais Parciais (EDP).

2.1.3 Classificação por linearidade

Diz-se uma Equação Diferencial de ordem *n* é linear em $y, y', ...y^{(n-1)}$. Isso significa que uma equação diferencial ordinária de *n-ésima* ordem é linear quando for

$$a_n y^n + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.2}$$

onde $a_0, a_1, ..., a_n$ e g são funções de x.

2.2 SOLUÇÕES

Segundo Zill (2016), toda função ϕ, definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I, que quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo I. O intervalo I da solução pode ser um intervalo aberto (a, b), um intervalo fechado $[a, b]$.um intervalo infinito $[a, \infty)$ e assim por diante.

2.2.1 Solução explícita

Definição 2.2.1. *Uma solução na qual a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes é chamada de solução explícita.*

2.2.2 Solução Implícita

Definição 2.2.2. *Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária* (2.1)*, em um intervalo I, quando existe pelo menos uma função ϕ que satisfaça a relação, bem como a equação diferenciável em I.*

2.3 PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Segundo (ZILL, 2016), dado o problema

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', ...y^{(n-1)}) \tag{2.3}$$

sujeito a $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$, onde $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ são constantes reais especificadas, em algum intervalo I contendo x_0, é chamado de **problema de valor inicial** (PVI). Os valores de $y(x)$ e suas $n - 1$ derivadas em um único ponto $x_0 : y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$ são chamados de condições iniciais.

2.3.1 PVI de primeira e segunda ordem

Os casos

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \text{ sujeito a, } y(x_0) = y_0 \tag{2.4}$$

e

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \text{ sujeito a, } y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \tag{2.5}$$

são chamados de problemas de valor inicial de primeira e segunda ordem respectivamente. Na equação (2.4) é procurado uma solução da equação diferencial $y' = f(x, y)$ em um intervalo I que contenha x_0, de tal forma que uma curva integral passe pelo ponto (x_0, y_0). Já na equação (2.5) deseja-se determinar uma solução cujo gráfico não passe somente por um ponto (x_0, y_0) mas também que a inclinação da curva nesse ponto seja y_1.

Teorema 2.3.1 (Teorema de unicidade)**.** *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ que contém o ponto (x_0, y_0). Se $f(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe algum intervalo $I_0 : x_0 - h < x < x_0 + h, h > 0$, contido em $a \leq x \leq b$, é uma única função $y(x)$, definida em I_0, que é uma solução do problema de valor inicial.*

Demonstração: encontra-se (ZILL, 2016)

2.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Nesta seção encontram-se alguns métodos analíticos para a resolução das Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Para mostrar as suas soluções, em geral, é preciso identificar o tipo da equação diferencial, pois um método que funciona para uma equação de primeira ordem, pode não funcionar para outra. As equações diferenciais de primeira ordem, geralmente, oferecem informações necessárias para prever o comportamento de suas soluções (BASSANEZI; FERRIRA JUNIOR, 1988).

2.4.1 Variáveis Separáveis

De acordo com (ZILL, 2016) uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação separável ou de variáveis separáveis quando é possível escrevê-la da forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y). \tag{2.6}$$

Uma equação diferencial é chamada de separável quando é possível separar as funções da forma que cada função da igualdade dependa apenas de uma variável. Observe a equação (2.6), se $f(y) \neq 0$, temos

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx. \tag{2.7}$$

Considerando a equação diferencial escrita na forma (2.7), podemos aplicar integração direta em ambos os lados. Assim temos

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx \tag{2.8}$$

Se $g(x)$ é uma função contínua, então integrando ambos os lados temos que

$$y = \int g(x)dx = G(x) + c$$

em que $G(x)$ é a antiderivada (integral indefinida) de $g(x)$. Por exemplo, se $dy/dx = 1 + e^{2x}$, então a solução é $y = \int(1 + e^{2x})dx$ ou $y = \frac{1}{e^{2x}} + c$. Logo temos uma representação do método de separação de variáveis de uma EDO de primeira ordem.

2.4.2 Exemplo: Considere a equação $(1 + x)dy - ydx = 0$.

Solução: Dividindo por $(1+x)y$, podemos escrever $dy/y = dx/(1+x)$, da qual segue que

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$
$$ln|y| = ln|1 + x| + c_1$$
$$y = e^{ln|1+x|}.e^{c_1}$$
$$y = |1 + x|e^{c_1}$$
$$y = \pm e^{c_1}(1 + x).$$

Renomeando $\pm e^{c_1}$ como c_2, obtemos $y = c_2(1 + x)$.

2.4.3 Equação Linear

Definição 2.4.1. *De acordo com (ZILL, 2016) uma equação diferencial de primeira ordem é da forma*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = F(x) \tag{2.9}$$

onde

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$$

e

$$F(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}.$$

Método de Resolução

O método para resolver depende do extraordinário fato de que o lado esquerdo da equação pode ser transformado na forma de uma derivada exata de um produto pela multiplicação de ambos os lados de (2.9) por uma função especial $\mu(x)$,

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right] = \mu\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu}{dx}y = \mu\frac{dy}{dx} + \mu Py.$$

A igualdade prova que

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P.$$

A última equação pode ser resolvida por separação de variáveis. Integrando

$$\frac{d\mu}{\mu} = Pdx \text{ e resolvendo } ln|\mu(x)| = \int P(x)dx + c_1$$

aplique exponencial natural temos que

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx + c_1} = c_2 e^{\int P(x)dx}, \text{ com } c_2 = e^{c_1}$$

assim, podemos simplificar escolhendo $c_2 = 1$. A função

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{2.10}$$

é chamada um fator integrante para a equação (2.9).

Após multiplicar ambos os lados de (2.9) por (2.10) e, por construção, o lado esquerdo da equação é a derivada do produto do fator de integração e y:

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + P(x) e^{\int P(x)dx} y = e \int P(x)dx f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{P(x)dx} y\right] = e^{\int P(x)dx} f(x).$$

Assim descobrimos porque (2.10) é chamado de fator de integração. Podemos integrar ambos os lados da última equação,

$$e^{P(x)dx} y = \int e^{P(x)dx} f(x) + c$$

e resolver para y. O resultado é uma família de um parâmetro de soluções de (2.9):

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + ce^{-\int P(x)dx}$$

2.4.4 Equações Exatas

Definição 2.4.2. *De acordo com (ZILL, 2016), uma expressão diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata em uma região R do plano xy se corresponde à diferencial de alguma função $f(x,y)$ definida em R. Uma equação diferencial de primeira ordem da forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.11}$$

é chamada de equação exata se a expressão a esquerda for uma diferencial exata.

Teorema 2.4.1 (Critério para diferencial exata)**.** *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ contínuas e com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região R definida por $a < x < b$ e $c < y < d$. Então uma condição necessária e suficiente para que $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ seja uma diferencial exata é*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.12}$$

Demonstração: Suponha que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas para todo (x,y). Se a expressão $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ for exata, haverá alguma função f tal que, para todo x em R:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Logo,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x},\ N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A igualdade das derivadas parciais mistas é uma consequência da continuidade das derivadas parciais primeiras de $M(x,y)$ e $N(x,y)$.

A parte da suficiência do Teorema consiste em mostrar que há uma função f para a qual $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ sempre que (2.12) for válida. A construção da função f na verdade reflete um procedimento básico na resolução de equações exatas.

Método de Resolução

Determine se a igualdade dada em (2.12) é verdadeira. Se for, então existe f tal que $\partial f/\partial x = M(x,y)$. Para encontrar f integra-se $M(x,y)$ em relação a x e mantém y como constante, assim temos:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y). \tag{2.13}$$

onde a função arbitrária $g(y)$ é a constante de integração. Diferenciando agora (2.13) em relação a y e supondo $\partial f/\partial y = N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(x) = N(x,y)dx. \tag{2.14}$$

Isso dá

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \tag{2.15}$$

Finalmente integramos (2.15) em relação a y e substituímos o resultado em (2.13). A solução implícita da equação é $f(x,y) = c$

É importante entender que a expressão $N(x,y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ em (2.15) é independente de x pois

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

temos por hipótese que $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$. A demonstração é análoga, iniciando com a hipótese de que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$.

2.4.6 Equações Homogêneas

Segundo (ZILL, 2016), se uma função f tiver a propriedade $f(tx,ty) = t^{\alpha}f(x,y)$ para algum número real α, então f será chamada de função homogênea de grau α. Diz-se que uma equação diferencial de primeira ordem na forma diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{2.16}$$

é homogênea se ambos os coeficientes M e N forem funções homogêneas de grau idêntico, ou seja,

$$M(tx,ty) = t^{\alpha}M(x,y) \text{ e } N(tx,ty) = t^{\alpha}N(x,y).$$

Além disso, se M e N são funções de grau α, também podemos escrever

$$M(x,y) = x^{\alpha}(1,u) \text{ e } N(x,y) = x^{\alpha}N(1,u), \text{ onde } u = \frac{y}{x},$$

e

$$M(x,y) = y^{\alpha}(v,1) \text{ e } N(x,y) = y^{\alpha}N(v,1), \text{ onde } v = \frac{x}{y}.$$

Método de Resolução

A equação diferencial homogênea do tipo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é resolvida por meio de substituição algébrica, que segue da seguinte maneira: faz-se $y = ux$ ou $x = vy$, onde y e v são as novas varáveis independentes e a equação homogênea transforma-se em uma equação separável de primeira ordem. Então seja $y = ux$, logo, sua diferencial será $dy = udx + xdu$. Substituindo em (2.16), tem-se

$$M(x,ux)dx + N(x,ux)[udx + xdu] = 0.$$

Se a função homogênea for de grau n, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} x^{n}M(1,u)dx + x^{n}N(1,u)[udx + xdu] &= 0 \\ [M(1,u)dx + uN(1,u)]\,dx + xN(1,u)du &= 0 \end{aligned}$$

assim,

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0.$$

O método aplicado, com a substituição conveniente transforma uma equação diferencial homogênea em uma equação diferencial separável.

2.4.8. Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n. \tag{2.17}$$

Onde n é um número real qualquer, é chamada de equação de Bernoulli. Observe que para $n = 0$ e $n = 1$, a equação é linear. Para $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a substituição $u = y^{1-n}$ reduz qualquer equação da forma a uma equação linear.

Método de Resolução

A fim de resolver a Equação de Bernoulli vamos supor que $y \neq 0$ e então podemos dividir a equação (2.17) por y^n, ou seja

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y.y^{-n} = f(x)y^n.y^{-n} \tag{2.18}$$

ou ainda, somando os expoentes das bases iguais y, temos:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{n-1} = f(x). \tag{2.19}$$

Para resolver uma Equação de Bernoulli, vamos utilizar o método do fator integrante, porém este método se aplica apenas em uma EDO linear. Para isto vamos realizar uma mudança de variáveis de modo a reescrever a equação (2.19) como uma EDO linear que tem a forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{2.20}$$

Observe (2.19) e (2.20), note a diferença nos termos y e y^{1-n} que multiplicam $P(x)$, o que nos leva a pensar em reescrever (2.19), substituindo y^{1-n} por um termo linear. Fazemos então:

$$w = y^{1-n} \tag{2.21}$$

derivando (2.21), usando a "regra do tombo"e derivação implícita obtemos o termo:

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}. \tag{2.22}$$

Agora isolamos

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)}\frac{dw}{dx} \tag{2.23}$$

e substituindo (2.21) e (2.23) na (2.19) temos que

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dw}{dx} + P(x)w = f(x) \tag{2.24}$$

que é uma equação linear na função w.

Assim, para resolver (2.24) utilizamos o método do fator integrante e depois voltamos a variável y fazendo $y^{1-n} = w$, que é a solução geral da EDO no intervalo I (em que $f(x)$ e $P(x)$ são contínuas).

2.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

2.5.1 Problemas de Valor de Contorno

Segundo (ZILL, 2016), um outro tipo de equação diferencial linear de segunda ordem ou superior no qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em pontos diferentes. Um problema como:

Resolver:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x)$$

Sujeita:

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1$$

é chamado de problema de valor de contorno (PVC).

2.5.2 Equações Homogêneas e não-homogêneas

Uma equação diferencial linear de ordem n da forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.25}$$

com $g(x) = 0$ é chamada de homogênea, caso contrário é chamada de não-homogênea.

2.5.1 Principio da Superposição para equações homogêneas

Teorema 2.5.1. *Sejam $y_1, y_2, ..., y_k$ soluções da equação diferencial homogênea de ordem n* (2.25) *em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y_1 = c_1y_1(x) + cy_2(x) + ... + c_ky_k(x) \tag{2.26}$$

onde $c_i, i = 1, 2, 3, ..., k$ são constantes arbitrárias, é também uma solução do intervalo.

Demonstração: Vamos provar caso $k = 2$. Seja L o operador diferencial definido em $L = a_n(x)dy/dx^n + a_{n-1}(x)dy/dx^{n-1} + ... + a_1(x)dy/dx + a_0(x)$ e sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da equação homogênea $L(y) = 0$. Se definirmos $y_1 = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ então a linearidade de L temos:

$$L(y) = Lc_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1.0 + c_2.0 = 0.$$

2.5.4 Dependência e Independência Linear

Para (ZILL, 2016) um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I, se houver constantes $c_1, c_2, ..., c_n$ não todas nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo. Já o conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo I, se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x no intervalo forem $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Se o conjunto de funções for linearmente dependente em um intervalo, há constantes c_1 e c_2 que não são ambas nulas, de forma, que para todo x no intervalo, $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$. Se supormos que $c_1 \neq 0$, temos que

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x).$$

Melhor dizendo, se duas funções são linearmente dependentes, então uma função será simplesmente um múltiplo constante de outra. Então para qualquer constante c, podemos escrever

$$(-1).f_1(x) + c f_2(x) = 0.$$

Para todo x no intervalo. Logo, o conjunto de funções é linearmente dependente, pois pelo menos uma das constantes $(c_1 = -1)$ não é zero. Por isso, podemos concluir que duas funções são linearmente independentes quando não são múltiplas de uma da outra em um intervalo.

2.5.5 Soluções de equações diferenciais

Definição 2.5.1. *Suponha que cada uma das funções $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ tenha pela menos $n-1$ derivadas. O determinante*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}_{i \times j}$$

o Wronskiano.

Teorema 2.5.2. *Se o Wronskiano for diferente de zero, então o conjunto de soluções será linearmente independente no intervalo. O determinante do teorema é denominado Wronskiano das funções.*

Demonstração: Vamos provar para o caso $n = 2$.

Seja Y uma solução de y_1 e y_2 soluções linearmente independentes de $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ em um intervalo I. Suponha que $x = t$ seja um ponto I para o qual $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Suponha também que $Y(t) = k_1$ e $Y'(t) = k_2$. Se examinarmos agora as equações

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1 \tag{2.27}$$

$$C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2, \tag{2.28}$$

podemos determinar unicamente C_1 e C_2, desde que o determinante dos coeficientes satisfaça

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.29}$$

Mas esse determinante é simplesmente o Wronskiano calculado em $x = t$, e, por hipótese, $W \neq 0$. Se definirmos $G(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, observaremos que $G(x)$ satisfaz a equação diferencial, uma vez que é uma superposição de duas soluções conhecidas; $G(x)$ satisfaz as condições iniciais

$$G(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) = k_1 \text{ e } G'(t) = C_1y_1'(t) + C_2y_2'(t) = k_2, \tag{2.30}$$

e $Y(x)$ satisfaz a mesma equação linear e as mesmas condições iniciais. Como a solução desse problema de valor inicial linear é única, Teorema 2.3.1, temos $Y(x) = G(x)$ ou $Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Teorema 2.5.3. *Seja $y_1, y_2, ..., y_n$ um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem n em um intervalo I. Então a solução geral da equação no intervalo é*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) \tag{2.31}$$

onde $c_i, i = 1, 2, 3, ..., n$ são constantes arbitrárias

Demonstração: encontra-se (ZILL, 2016).

Soluções de Equações Não-Homogêneas

Teorema 2.5.4. *Seja y_p uma solução particular qualquer de equação diferencial linear não homogênea de ordem n, em um intervalo I, e seja $y_1, y_2, ...y_n$ um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada a*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

em I. Então, a solução geral da equação no intervalo é

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) + y_p$$

onde $c_i, i = 1, 2, ..., n$ são constantes arbitrárias.

Demonstração: Seja L o operador diferencial definido por

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^n + ... + a_1(x)D + a_0(x)$$

e sejam $Y(x)$ e $y_p(x)$ soluções particulares da equação não homogênea $L(y) = g(x)$. Se definirmos $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, então, pela linearidade de L, temos

$$L(u) = L[Y(x) - y_p(x)] = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Isso monstra que $u(x)$ é uma solução da equação homogênea $L(y) = 0$. Logo, pelo Teorema 2.5.3, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$ e, portanto,

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x)$$

ou

$$Y(x) = [c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) + y_p(x)].$$

3 MÉTODOS NUMÉRICOS

Dentro das Equações Diferenciais existem importantes problemas relacionados com a solução de modelos matemáticos aplicados, uma vez que as equações requerem cálculos de maior complexidade para serem solucionadas, nem toda equação diferencial pode ser resolvida analiticamente , trazendo muitas vezes apenas uma aproximação da real solução. Assim os métodos numéricos mostram uma alternativa simples e eficiente na solução dos modelos, quando comparados aos analíticos.

3.1 MÉTODO DE DIFERENÇAS-FINITAS

O uso do método de diferenças finitas vem da busca para resolver numericamente as equações diferenciais estudadas. A técnica tem como fundamento a discretização do continuo, ou seja, dividir em pequenas partes a região onde está procurando a solução. Para fazer uso da mesma é necessário representá-la por expressões algébricas. Para chegar em uma solução numérica pelo método de diferenças finitas, é necessário, antes de tudo, discretizar a região onde procura-se uma resolução, e por conseguinte substituir as derivadas presentes na equação diferencial pelas aproximações alcançadas.

Assumindo que $y(x)$ têm derivadas até a ordem $n+1$, então a função pode ser escrita como:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + ... + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi), \tag{3.1}$$

sendo h o espaçamento entre os prontos discretos do domínio considerado. Se $n = 1$ na equação (3.1), tem-se a fórmula avançada da aproximação em diferenças finitas, com erro de ordem dois, logo aproximação de primeira ordem, é dada por:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \tag{3.2}$$

Tomando $n = 2$, para $\pm h$, temos que:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x), \tag{3.3}$$

$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x). \tag{3.4}$$

Subtraindo a equação (3.3) da (3.4), obtém-se a fórmula centrada para aproximação em diferenças finitas.

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}. \tag{3.5}$$

As fórmulas fornecem uma aproximação para a derivada na qual o erro é da ordem h^2, assim a aproximação é de primeira ordem.

3.2 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Segundo Chapra (2013) os métodos de Runge-Kutta alcançaram a exatidão de uma abordagem por série de Taylor sem exigir cálculos de derivadas parciais de ordem superior. Há muitas variações, mas todas podem ser postas na forma geral:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \tag{3.6}$$

onde ϕ é chamada função incremento, a qual pode ser interpretada como representativa da inclinação em um intervalo. A função incremento pode ser escrita na forma geral

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + ... + a_n k_n \tag{3.7}$$

onde os *a's* são constantes e os *k's* são

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_i, y_i) \\
k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1}\, k_1 h + q_{n-1,2}\, k_2 h + ... + q_{n-1,n-1}\, k_{n-1} h)
\end{aligned}$$

onde os *p's* e os *q's* são constantes. Observe que os *k*'s são relações de ocorrência. Isto é, k_1 aparece na equação para k_2, e assim por diante. Como cada k é um cálculo da função, essa recorrência torna o método Runge-Kutta eficiente para cálculos computacionais.

Métodos de Runge-Kutta de segunda ordem

A versão de segunda ordem da equação (3.6) é:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2) h \tag{3.8}$$

onde

$$k_1 = f(t_i, y_i) \tag{3.9}$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \tag{3.10}$$

os valores para a_1, a_2, p_1 e q_{11} são calculados igualando-se a equação (3.8) à expansão em série de Taylor até os termos de 2º grau. Dessa forma, três equações poder ser deduzidas para calcular as quatro constantes desconhecidas. As três equações são:

$$a_1 + a_2 = 1 \tag{3.11}$$

$$a_2 p_1 = 1/2 \tag{3.12}$$

$$a_2 q_{11} = 1/2. \tag{3.13}$$

Como são três equações com quatro incógnitas, essas equações são ditas indeterminadas. Assim, devemos escolher um valor para uma das incógnitas para determinar as outras três. Então, se definirmos um valor para a_2, podemos resolver simultaneamente as outras duas, da forma:

$$a_1 = 1 - a_2 \tag{3.14}$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2} \tag{3.15}$$

Como a escolha de um valor para a_2 é infinito, existe também um infinito número de métodos de Runge-Kutta de segunda ordem.

Método de Runge-Kutta de quarta ordem

Segundo Chapra (2013) os métodos Runge-Kutta mais populares são os de quarta ordem. Da forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

onde

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$
$$k_3 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$
$$k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3 h)$$

Enquanto outras fórmulas de quarta ordem são facilmente obtidas, o algoritmo resumido é tão amplamente utilizado e reconhecido como uma valiosa ferramenta computacional que muitas vezes é referido como o método de Runge-Kutta de quarta ordem ou o clássico método de Runge-Kutta. Observe que para EDO's que são uma função apenas de t, e que k_2 depende de k_1, k_3 depende de k_2 e k_4 depende de k_3 (BOYCE; DIPRIMA, 2002).

4 EPIDEMIOLOGIA

Segundo (PEREIRA, 2001) o significado etimológico do termo epidemiologia deriva do grego *Endemiólogos* (*Epi*-sobre, *Demo*-população e *Logos*-Estudo). Assim, de forma simplificada, o termo "Epidemiologia "significa o estudo da população, voltado para o campo da saúde pode ser entendido como o estudo sobre o que afeta a população.

De acordo com (LAST, 2001) a epidemiologia é o estudo da distribuição e dos determinantes de estados ou eventos relacionados à saúde em populações específicas, e sua aplicação na prevenção e controle dos problemas de saúde. Ou seja, podemos perceber que a epidemiologia não está apenas relacionada ao estudo das doenças e sim com as mudanças para melhoria da saúde populacional. Na área de Epidemiologia, primeiro entende-se as causas da doença e só depois prevê seu curso e finalmente desenvolve maneiras de controlá-las. A epidemiologia baseia seus objetivos na descrição, avaliação e análise dos problemas de saúde da população com construções de hipóteses sobre a distribuição de uma doença para poder possibilitar planejamentos e execuções para uma avaliação de prevenções (BRITO, 2012).

4.1 UM BREVE HISTÓRICO

Para (ALMEIDA FILHO, 1986), o termo epidemiologia foi usado pela primeira vez como título de pesquisa de pragas na Espanha no século XVI, e não foi reutilizado até 1802 por Juan Villalba no livro *"Epidemiologia España "*, que descreve o que se sabe até agora de todas as epidemias.

Pioneiro nos estudo John Snow (1813-1858) é considerado o pai da Epidemiologia. Porém apenas nas décadas seguintes, houve diversas contribuições para o estudo da Epidemiologia de principais escritores como de Claude Bernard, Rudolf Virchow, Louis Pasteur e Robert Koch nas áreas de fisiologia, patologia e bacteriologia. (ALMEIDA FILHO, 1986)

De acordo com (FARIAS, 2018), no início dos anos 1960, com a introdução da tecnologia de computação eletrônica, a pesquisa epidemiológica passou pelas mais profundas mudanças em sua curta história. Neste momento, houve a possibilidade de armazenar os dados coletados a respeito da doença e criar assim uma base de dados.

As epidemias sempre estiveram presente na história de forma significativa, causando inúmeras mortes. Tais doenças que foram responsáveis por eliminar grande parte da população em uma determinada região e época. Entre as pandemias pode-se citar a peste bubônica, que no século XIV, matou entre 75 a 200 milhões de pessoas na Europa, a cólera, a primeira epidemia global, que em 1817, matou mais de 100 mil pessoas, e por sofrer mutações não é considerada uma epidemia erradicada, a gripe espanhola que matou entre 40 e 50 milhões de pessoas, em 1918, que assolou a Europa e o Brasil e a síndrome da imunodeficiência humana (HIV) que até hoje já matou 22 milhões de pessoas desde 1981.

O HIV não possui cura até os dias de hoje, apenas tratamento que inibe a multiplicação do vírus na pessoa infectada, sua forma de prevenção é o uso de camisinhas, a utilização de seringas e agulhas descartáveis e o uso de luvas para manipular feridas e líquidos corporais, entre outros.

Atualmente sofre-se com a pandemia causada pela Sars-CoV-2, conhecida como COVID-19, um vírus que teve inicio no fim de 2019 e até hoje já matou mais de 4,9 milhões de pessoas em todo mundo, a mesma é transmita via gotículas de tosse ou espirro, com a contaminação direta ou indireta, quando as pessoas tocam em alguma superfície infectada e levam a mão aos olhos, boca ou nariz. O COVID-19 não possui qualquer tratamento para cura, porém com o grande impacto em todo mundo, há uma corrida para imunização de toda população.

Devido a não existência de uma forma de imunização e a grande demanda de espaço em hospitais, que o sistema de saúde é incapaz de suportar, o isolamento social se faz necessário para que o contágio de pessoas diminua. Em consequência da facilidade de infecção e à falta de tratamento específico para a doença, as medidas preventivas de contato entre pessoas evitam a propagação da pandemia e permitem que o sistema médico cuide de todos os pacientes já infectados.

4.2 EPIDEMIOLOGIA MATEMÁTICA

Segundo (BRAUER, 2017), a tendência para a matemática em epidemiologia foi consideravelmente fortalecida na década de 1980, quando um modelo matemático para a distribuição de múltiplas doenças foi proposto. Portanto, o campo da epidemiologia encontrou uma identidade temporária dentro da matemática, comprovando que sua autonomia como disciplina de estrutura científica estava consolidada. Isso foi necessário na pesquisa de saúde / doença que usa a matemática.

Para a epidemiologia, a matemática é um poderoso mito ideológico indispensável para enfrentar a experiência clínica ou experimento de demonstração que está na base da pesquisa médica. Já em 1938, João Paulo antevia tal proposta, que na época era ignorada pelo Instituto de Medicina, o que pode ser devido à falta de prestígio devido ao nível de conhecimento epidemiológico da época.

Em função da existência das doenças, as pesquisas começaram a identificar cada tipo de epidemia, determinar a causa e encontrar formas de controlá-la. A modelagem matemática é uma ferramenta para auxiliar nesta pesquisa. Isso inclui a conversão de situações reais em modelos matemáticos que, após análise, podem fornecer resultados que podem ser explicados e aplicados na realidade (BRAUER, 2017).

5 MODELAGEM MATEMÁTICA EM EPIDEMIOLOGIA

Na perspectiva de Luiz (2012), a modelagem matemática da epidemiologia é completada com o estudo das equações que descrevem a interação entre a população e o meio ambiente, para que a doença seja analisada em detalhes. Essa pesquisa é importante pelo fato de que quanto mais sabemos sobre a doença e como ela se espalha, mais eficazes esses métodos podem prevenir a propagação da doença, e até mesmo o estudo de medidas preventivas, como os exercícios preventivos.

Um dos primeiros estudos conhecidos sobre epidemiologia foi Daniel Bernoulli, realizado em 1790 para estudar a propagação da varíola. A partir daí, aliada a pesquisas mais aprofundadas na área médica, outras situações a respeito das doenças podem ser analisadas com mais detalhes.(FARIAS, 2018)

Hammer, em 1906, analisou o caso da taxa de transmissão da doença por meio do contato entre indivíduos suscetíveis e infectados, que foi chamado de "Lei de Ação em Massa". Ao mesmo tempo, Ronald Ross conduziu um estudo sobre a malária para mostrar que ela é transmitida pela picada de um mosquito infectado. Mais tarde, em 1908, ele desenvolveu um modelo matemático mais detalhado para estudar esta doença. No entanto, um dos modelos mais relevantes que mais influenciam o desenvolvimento de modelos matemáticos é o modelo SIR (susceptibilidade-infecção-recuperação), que foi estudado por Kermack e McKendrick em 1927 (LUIZ, 2012).

Desde então, vários outros modelos matemáticos de epidemiologia têm sido estudados, o chamado modelo de compartimento. Eles usam esse nome porque a população é dividida em diferentes compartimentos (ou categorias), que indicam o estado em que o indivíduo está localizado. Por exemplo, as seguintes classes podem ser mencionadas:

- Imunidade Passiva (M): Pessoas com forte imunidade porque recebem anticorpos de suas mães;

- Transmissão Vertical (T): Pessoas com esta doença são adquiridas por mães infectadas;

- Suscetíveis (S): Indivíduos saudáveis que são suscetíveis à doença;

- Infectados (I): indivíduos que têm a doença e podem transmiti-la a pessoas suscetíveis por transmissão direta;

- Portadores (P): Pessoas que foram infectadas, mas não espalharam a doença durante o período de incubação;

- Removidos (R): Indivíduos que foram infectados devido ao isolamento, curaram (independentemente de terem ganho imunidade) ou morreram, mas não são mais portadores da doença (FARIAS, 2018).

No estudo de modelos compartimentais, segundo Anderson (1992) pode-se dizer que o modelo SI, como a sigla sugere, leva em conta o fato que após o indivíduo ser infectado jamais se recuperará de doença, um exemplo bem concreto que pode-se tomar como exemplo o vírus HIV, Farias (2018),aponta que o modelo SIS é usado para descrever doenças nas quais pessoas suscetíveis adquirem a doença, são infectadas e não podem obter imunidade após a recuperação e se tornam suscetíveis novamente. Já no modelo SIR, alguns indivíduos suscetíveis contrairão a doença, serão infectados e ganharão imunidade após a recuperação, neste caso, o período de incubação e isolamento não são considerados.

5.1 MODELOS MATEMÁTICOS

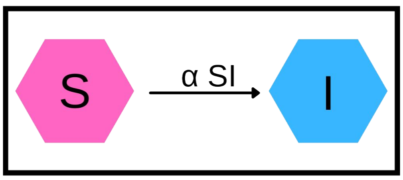
Como visto a população é dividida em classes que mostram o estado em que os indivíduos se encontram no desenvolvimento de doença. Assim, podemos escrever a população total N como a soma dos indivíduos das classes, ou seja: $N = S + I + R$, tal que N é constante, isto é, não é considerado taxas de natalidade e mortalidade.

5.1.1 Modelo SI

No modelo SI, os indivíduos sucessíveis uma vez infectados não serão recuperados ou imunizados, como é o caso da AIDS. O modelo mostra que o a fração de indivíduos infectados aumenta exponencialmente.

Por esse modelo, pode-se dizer que a epidemia só termina quando toda a população for infectada. Diferente dos outros modelos, o modelo SI, representado no fluxograma na Figura 1, ao escrever a população total não realiza a soma com o R, pois, como dito, o indivíduo nunca se recupera da doença.

Figura 1 – Fluxograma do modelo SI.



Fonte:Autoria própria

A fim de encontrar a solução analítica do modelo SI, não consideramos os nascimentos e nem as mortes. Segundo (BOYCE; DIPRIMA, 2002), se S é a proporção de indivíduos suscetíveis e I a proporção de indivíduos infectados, de tal forma que $S + I = 1$, a taxa de indivíduos infectados é proporcional ao número de contatos entre as pessoas suscetíveis e as infectadas, conforme o modelo:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha IS \tag{5.1}$$

com α sendo o fator de proporcionalidade. Admitindo $S = 1 - I$, a equação pode ser escrita como

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(1 - I).$$

Utilizando variáveis separáveis para resolver e considerando, $I(0) = I_0$ temos que

$$\int \frac{dI}{I(1-I)} = \int \alpha dt.$$

Aplicando soma de frações parciais, segue que

$$\frac{1}{I(1-I)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{1-I} = \frac{A - IA + BI}{I(1-I)}$$
$$\frac{1 + 0.I}{I(1-I)} = \frac{A - IA + BI}{I(1-I)}$$

Logo

$$\begin{cases} -A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \longrightarrow -1 + B = 0 \longrightarrow B = 1.$$

Portanto

$$\int \frac{dI}{I(1-I)} = \int \alpha dt = \int \frac{1}{I} + \frac{1}{1-I} dI$$

$$\begin{aligned}
ln(I) - ln(1-I) &= \alpha t + k_1 \\
ln\left(\frac{I}{1-I}\right) &= \alpha t + k_1 \\
e^{ln\left(\frac{I}{1-I}\right)} &= e^{\alpha t + k_1} \\
\frac{I}{1-I} &= e^{\alpha t}.k_1 \\
I &= e^{\alpha t}.k_1 - Ie^{\alpha t}.k_1
\end{aligned}$$

Considere $e^{k_1} = k_2$, assim

$$\begin{aligned}
I + Ie^{\alpha t}.k_2 &= e^{\alpha t}.k_2 \\
I(t) &= \frac{e^{\alpha t}.k_2}{1 + e^{\alpha t}.k_2}
\end{aligned}$$

Aplicando a condição inicial $I(0) = I_0$, tem-se que $k_2 = \frac{I_0}{1-I_0}$. Dessa forma, a solução analítica é dada por

$$I(t) = \frac{I_0}{e^{-\alpha t}(1 - I_0) + I_0}.$$

O modelo SI também foi resolvido numericamente usando diferenças-finitas e o método de Euler, para tempo adimensional igual a dez e a condição inicial para infectados igual a $0,1$. A equação utilizada para a recursividade foi

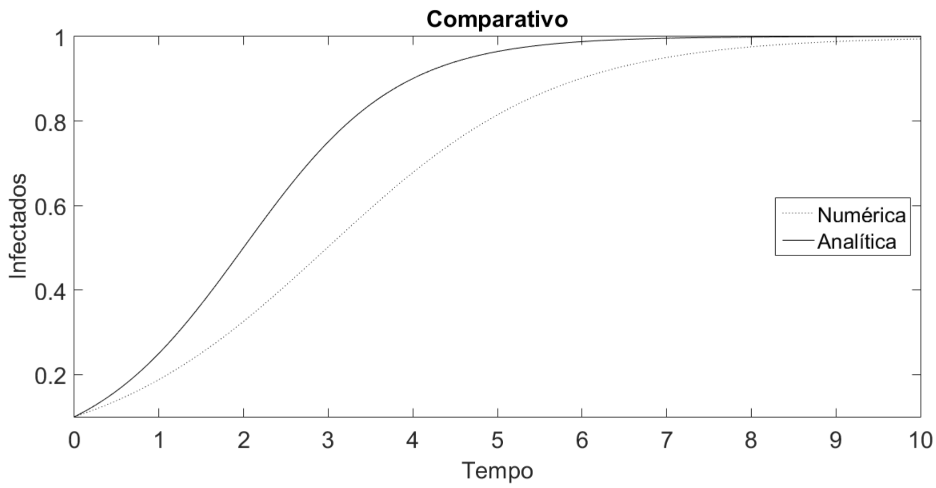
$$I^{k+1} = I^k + \Delta t \ \ \alpha I^k(1 - I^k) \tag{5.2}$$

onde Δt é o espaçamento temporal.

Vale destacar que o limite para o número de suscetíveis, também, é igual a $N - \beta/\alpha$, pois o processo epidêmico tende estabilizar, não havendo mais a propagação da doença, que compara as soluções numérica e analítica, dos indivíduos suscetíveis e infectados.

O gráfico dado na Figura 2 compara a solução numérica, obtida após $6,254$ iterações, feitas no Matlab, com erro absoluto igual a $9,9981.10^{-6}$, com a solução analítica dada pela equação (5.2). Note que as soluções representam comportamentos diferentes, logo para que houvesse similaridade entre as soluções, considerou-se 10.000 iterações e erro igual a $1,6508.10^{-7}$, conforme mostra a Figura 3, dada no programa que se encontra no Apêndice A.

Figura 2 – Comparativo entre as soluções analíticas e numérica (6.254 iterações)

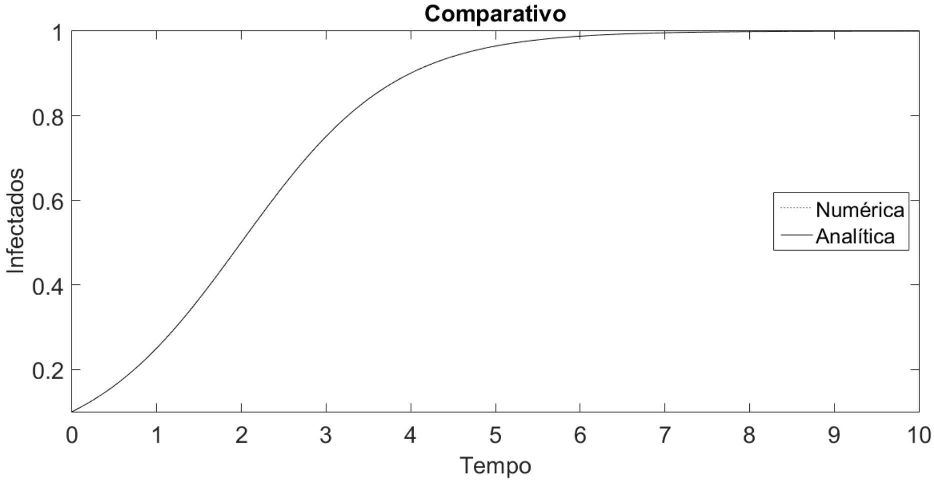


Fonte:Autoria própria

5.1.2 Modelo SIS

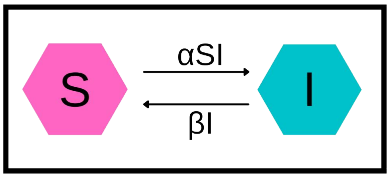
No modelo SIS, os indivíduos suscetíveis adquirem a doença, tornam-se infectados e, após a recuperação, não adquirem imunidade, voltando a ser suscetíveis novamente, como é o caso das doenças como a dengue, gripe ou malária. O período de incubação da doença é relativamente pequeno. É chamado de modelo SIS uma vez que o caminho típico da transmissão da doença é de S, passando por I, até S novamente. Conforme o fluxograma dado na Figura 4.

Figura 3 – Comparativo entre as soluções analíticas e numérica (10.000 iterações)



Fonte:Autoria própria

Figura 4 – Fluxograma do modelo SIS



Fonte:Autoria própria

O modelo envolve dois parâmetros importantes: α e β, com α a taxa de transmissão da doença, como a transmissão se dá com o contato entre os indivíduos suscetíveis e infectados, então a variação de suscetíveis em relação ao tempo pode ser modelada por αSI. Seja β a taxa de recuperação da doença, levando em conta que a variação dos indivíduos infectados com relação ao tempo é proporcional ao próprio número de indivíduos infectados pode ser modelado por βI (LUIZ, 2012).

Podemos observar que uma fração dos indivíduos suscetíveis, através do contato com infectados adquirem a doença e passam a ser também infectados, da mesma forma que os infectados, ao se recuperarem, voltam a classe dos suscetíveis por não adquirirem a imunidade. Conseguimos descrever a dinâmica da uma doença com essas características pelo sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI + \beta I \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I \end{cases} \quad \text{onde}, \alpha, \beta > 0 \ \text{ e } N = S(t) + I(t) \tag{5.3}$$

Seja $R_0 = \dfrac{\alpha S}{\beta}$, a taxa de reprodução básica que significa o número médio de infecções causadas por um indivíduo infectado, onde $\dfrac{1}{\beta}$ é o tempo médio que um indivíduo permanece infectado e αS é a taxa de propagação da doença. Então temos que:

Se $R_0 > 1$ e $I \neq 0$ então $\dfrac{dI}{dt} > 0$ e $\dfrac{dS}{dt} < 0$, mostra que a epidemia se propaga pela população.

Se $R_0 < 1$ e $I \neq 0$ então $\dfrac{dI}{dt} < 0$ e $\dfrac{dS}{dt} > 0$, mostra que o contágio diminui.

Se $I = 0$ então $N = S$ e todos os indivíduos são saudáveis, então não existe doença.

Resolvendo analiticamente o modelo SIS com população constante e considerando o sistema dado em (5.3) , se $N = S + I$ então $S = N - I$ substituindo o valor de S em $\dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \alpha(N-I)I - \beta I \\
\frac{dI}{dt} &= I\alpha\left[N - I - \frac{\beta}{\alpha}\right] \\
I' &= I\alpha\left[\left(N - \frac{\beta}{\alpha}\right) - I\right] \\
I' &= I\alpha N - I\beta - I^2\alpha \\
I' &- I(\alpha N - \beta) = -I^2\alpha.
\end{aligned}
$$

A equação é do tipo Bernoulli, podendo ser resolvida, de tal forma que se encontre

$$I(t) = u.v \tag{5.4}$$

assim,

$$
\begin{aligned}
I' - I(\alpha N - \beta) &= -I^2\alpha \\
u'v + uv' - uv(\alpha N - \beta) &= -\alpha(uv)^2 \\
u(v' - v\alpha N + v\beta) + u'v &= -\alpha u^2 v^2.
\end{aligned}
$$

Primeiramente considera-se

$$v' - v\alpha N + v\beta = 0$$

logo

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} &= v\alpha N + v\beta \\
\int \frac{dv}{v} &= \int (\alpha N - \beta) dt \\
ln(v) &= (\alpha N - \beta)t
\end{aligned}
$$

$$v = e^{(\alpha N - \beta)t}.$$

Em seguida,

$$u'v = -\alpha u^2 v^2.$$

Como temos que $I(t) = u.v$ então

$$\frac{du}{dt} e^{(\alpha N - \beta)t} = -\alpha u^2 (t(e^{(\alpha N - \beta)2t)})$$

ou ainda,

$$\int u^{-2} du = -\alpha \int e^{(\alpha N - \beta))t} dt. \tag{5.5}$$

Considere $u = (\alpha N - \beta))t$ e $\dfrac{-1}{N - \dfrac{\beta}{\alpha}} du = -\alpha dt$ na equação (5.5), então

$$\frac{-1}{N - \dfrac{\beta}{\alpha}} \int e^u du = \frac{-1}{\dfrac{\alpha N - \beta}{\alpha}} e^{(\alpha N - \beta)t} + k_3.$$

Assim

$$
\begin{aligned}
\int u^{-2} du &= -\alpha \int e^{(\alpha N - \beta)t} dt \\
\frac{-1}{u} &= \frac{-\alpha}{\alpha N - \beta} e^{(\alpha N - \beta)t} + k_3
\end{aligned}
$$

$$u = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha e^{(\alpha N - \beta)t} + k_3}. \tag{5.6}$$

Dessa forma substituindo (5.6) em (5.4) segue que

$$I(t) = e^{(\alpha N - \beta)t} \frac{\alpha N - \beta}{\alpha e^{(\alpha N - \beta)t} + k_3}$$

Considerando que $I(0) = I_0$ tem-se

$$I(0) = e^0 \frac{\alpha N - \beta}{\alpha e^0 + k_3} \longrightarrow I_0 = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + k_3}$$

logo

$$k_3 = \frac{\alpha N - \beta}{I_0}.$$

Assim, a solução analítica pode ser escrita como

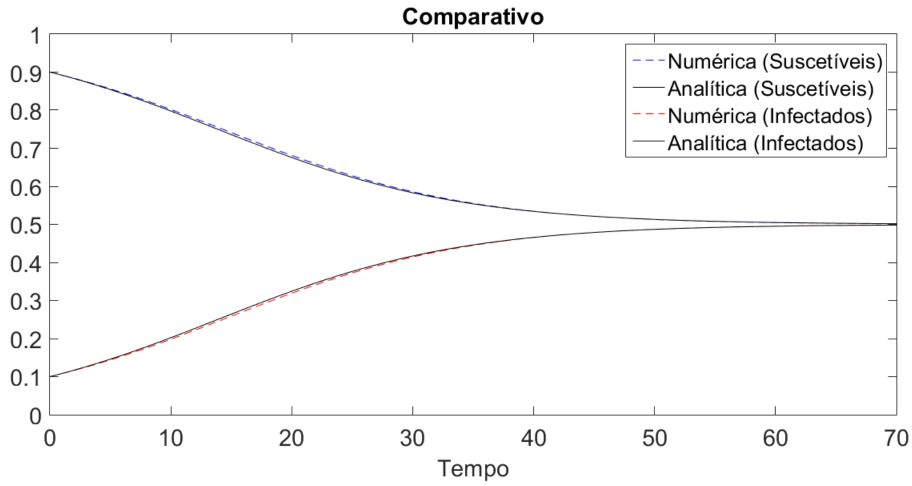
$$I(t) = \frac{\alpha N - \beta}{\alpha + \left[(\alpha N - \beta)\frac{1}{I_0} - \alpha^2\right] e^{-(\alpha N - \beta)t}}.$$

Analogamente, conseguimos encontrar a solução analítica para $S(t)$ como

$$S(t) = \frac{\left(\frac{-\beta + \alpha S_0}{S_0 - N})\right) N e^{(\beta - \alpha N)t} - \beta}{-\alpha + \left(\frac{-\beta + \alpha S_0}{S_0 - N}\right) e^{(\beta - \alpha N)t}}$$

Vale ressaltar que o limite para o número de suscetíveis, também é igual a $N - \beta/\alpha$, pois o processo epidêmico tenta estabilizar, não havendo mais propagação da doença, isso pode ser verificado pelas soluções apresentadas na Figura 5, que compara as soluções numérica e analítica, dos indivíduos suscetíveis e infectados, obtidas após 71 iterações e com erro absoluto igual a $1,8269.10^{-4}$, dada no programa que se encontra no apêndice B.

Figura 5 – Comparativo entre as soluções analíticas e numérica para o modelo S.I.S.



Fonte:Autoria própria

5.1.3 Modelo SIR

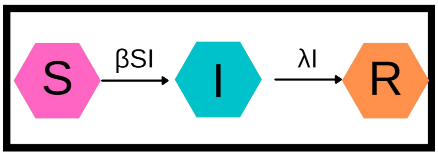
No modelo SIR a doença é transmitida pelo contato direto entre os hospedeiros que se tornam imune depois de uma simples infecção, como é o caso do sarampo, rubéola,caxumba e o COVID-19.

O modelo SIR considera que o individuo pode passar por estágios de suscetibilidade (S), infecção (I) e removidos (R) (LUIZ, 2012). No presente trabalho utilizaremos o modelo SIR para o COVID-19, pois utilizamos como referência o trabalho de (JO et al., 2020).

Segundo QUADROS (2013), o modelo SIR considera a população de tamanho constante em função do tempo, e assume que não existem emigração nem imigração no grupo considerado e, que a população tem igual probabilidade de contato.

O fluxograma da Figura 6 representa o modelo SIR, em qualquer instante t temos que $N = S(t) + I(t) + R(t)$.

Figura 6 – Modelo SIR



Fonte:Autoria própria

Considerando a variação da população recuperada é proporcional à população infectada, o sistema de equações diferenciais que descreve a dinâmica desta epidemia é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\alpha SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I & \text{Condições iniciais: } R(0) = 0, I(0) = I_0, S(0) = S_0 = N - I_0 \\ \dfrac{dR}{dt} = \beta I \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$ é a taxa de transmissão que determina a taxa que novas infecções surgem e β varia de 0 a 1 mostra a taxa de recuperação.

Uma epidemia cresce se o número de indivíduos infectados aumenta, ou seja, $\frac{dI}{dt} > 0$, com $I \neq 0$. Assim,

$$\frac{dI}{dt} > 0 \iff \alpha SI - \beta I > 0 \iff \frac{\alpha S}{\beta} > 1$$

e

$$\frac{dI}{dt} < 0 \iff \alpha SI - \beta I < 0 \iff \frac{\alpha S}{\beta} < 1$$

Seja $R_0 = \dfrac{\alpha S}{\beta}$ a taxa de reprodução, o número médio de infecções causadas pela introdução de um indivíduo doente no meio de uma população sem imunidade, onde $\dfrac{1}{\beta}$ é o tempo médio que um indivíduo permanece infectado e αS é a taxa de propagação da doença. Assim, se $R_0 > 1$ a epidemia permanecerá na população, e se $R_0 < 1$ a doença desaparece, podemos dizer que quanto maior a taxa de recuperados relativamente à taxa de infecção, mais rapidamente a epidemia acabará. Conhecendo R_0 e β, pode-se determinar a taxa de infecção α.

No modelo SIR aproximamos $S \sim 1$, desde que S seja grande o suficiente comparado com I. Então, a equação diferencial é aproximadamente

$$\frac{dI}{dt} \sim (\alpha(t) - \beta(t))I,$$

com a solução analítica para essa aproximação dada por (JO et al., 2020) como

$$I(t) = I(0)e^{\int_0^t(\alpha(s)-\beta(s))ds}$$

Considerando as condições iniciais $S(0) = S_0 \geq 0, I(0) = I_0 \geq, R(0) = R_0 = 0.$

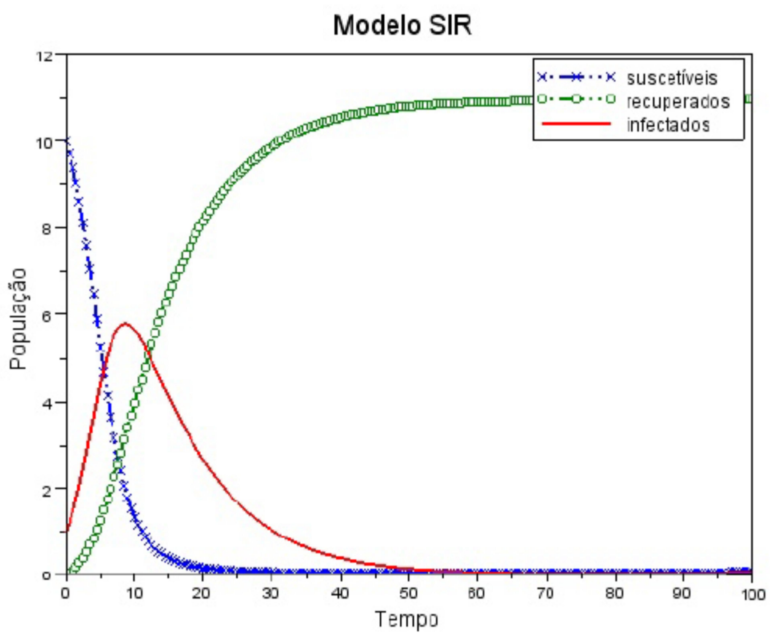
Assim, N é constante, que com a condição inicial $N = S_0 + I_0$, leva a $S(t) + I(t) + R(t) = N.$

Para qualquer instante de tempo t, a população é conservada.

As condições iniciais e os parâmetros utilizados no sistema foram tirados do modelo de (QUADROS, 2013). Consideramos então $S_0 = 10$ e $I_0 = 1$, os parâmetros $\alpha = 0.05$ e $\beta = 0.1$ e $\Delta t = 0.1$ e apresenta $E = 10^{-4}$, calculado pela fórmula $E = |max(I_1) - max(I_2)|$, onde I_1 é o máximo da função para $\Delta t = 0.1$ e I_2 é o máximo da função para $\Delta t = 0.1/2$. Os gráficos obtidos da simulação numérica estão mostrados na Figura 7.

Observa-se que como $R_0 = 5,5 > 1$ o número de suscetíveis $S(t)$ diminui à medida que o número de recuperados $R(t)$ aumenta.

Figura 7 – Variação temporal do número de suscetíveis S(t), do número de infectados I(t) e do número de recuperados R(t) com $R_0 = 5,5$.



Fonte: Dissertação (QUADROS, 2013) (p.41)

Note que, é esperado, quando $t \longrightarrow 0$, que $S(t) \longrightarrow 0$ e $R(t) \longrightarrow N$, pois se o número de suscetíveis diminui, consequentemente o número de infectados aumenta, os quais, em seguida, passam a ser removidos, e a epidemia é extinta. Logo a epidemia termina antes que todos os indivíduos suscetíveis adquiram sejam infectados.

6 CONCLUSÃO

A ciência foi impulsionada a obter formas mais propicias sobre o controle de doenças transmissíveis. Podemos definir que a epidemiologia tem papel primordial ao desempenhar técnicas de estudos em métodos de controle, cada vez mais adaptável no sentido de vetar grandes consequências negativos a saúde populacional. Assim é necessário que a epidemiologia tenha sua base formadas em hipóteses matemáticas para concepção de modelos que sejam capazes de quantificar alguns aspectos do fenômenos biológicos.

Neste trabalho foi estudado sobre as Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações a Epidemiologia, realizando uma pesquisa bibliográfica sobre Equações Diferenciais, Epidemiologia, e Modelagem Matemática, com aplicação em modelos epidemiológicos do tipo SI, SIS e SIR, procurando resolve-los analiticamente e numericamente, para analisar possíveis situações de doenças transmissíveis, no caso o COVID-19. Foi usado para a resolução numérica as técnicas de diferenças-finitas e o método de Runge-Kutta.

Nos modelos Suscetível-Infectado (SI) e Suscetível-Infectado-Suscetível (SIS) as soluções numéricas foram comparadas perfeitamente com as soluções analíticas de forma satisfatória, o que pôde ser demonstrado no desenvolvimento com o software MATLAB. No caso do modelo SIS não foi considerado taxa de natalidade e/ou mortalidade, por este motivo optamos por utilizar o modelo com população constante. No modelo Suscetível-Infectado-Recuperado (SIR) usamos dados obtidos no trabalho de (QUADROS, 2013), para estudar a solução numérica. É importante ressaltar que o modelo SIR utilizado neste trabalho é da forma mais simples, existem modelos mais elaborados que se aproximam mais da realidade e envolvem mais variáveis, e assim mais equações. Porém, quanto mais real o modelo mais complexa é sua solução.

Os modelos SI, SIS, e SIR servem de parâmetro, para comprovar como um modelo epidemiológico é formulado e a partir do mesmo, fazer simulações e análises. Neste sentido, a complexidade dos estudos efetuados mostra o quão as modelagens e procedimentos numéricos desenvolvidos são importantes para o estudo computacional da epidemiologia, medicina e outras ciências.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA FILHO, Naomar de. Bases históricas da epidemiologia. scielo, v. 2, p. 304 – 311, 09 1986. Citado na página 31.

BASSANEZI, Rodney Carlos; FERRIRA JUNIOR, Wilson Castro. **Equações Diferenciais: com aplicações**. [S.l.]: Harbra, 1988. Citado na página 17.

BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de contorno. **Rio de Janeiro**, v. 2, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 34.

BRAUER, Fred. Mathematical epidemiology: Past, present, and future. **Infectious Disease Modelling**, v. 2, p. 113–127, 2017. Citado na página 32.

BRITO, Monique Araújo de. Bonita r, beaglehole r, kjellstrom t. epidemiologia básica. são paulo: Grupo editorial nacional; 2010. **Ciência & Saúde Coletiva**, Associação Brasileira de Pós-Graduação em Saúde Coletiva, v. 17, 2012. Citado na página 31.

CHAPRA, Steven C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas-3**. [S.l.]: AMGH Editora, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática/howard eves; tradução: Hygino h. **Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP**, v. 844, p. 63, 2004. Citado na página 13.

FARIAS, Ayrton Veleda. **Um estudo da modelagem epidemiológica SIR usando conceitos de derivadas de ordem inteira e fracionária**. 2018. Tese (Doutorado) — Dissertaçao. Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul-FURG, 28 de, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.

JO, Hyeontae et al. Analysis of covid-19 spread in south korea using the sir model with time-dependent parameters and deep learning. **medRxiv**, Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

KERMACK, William Ogilvy; MCKENDRICK, Anderson G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. ii.—the problem of endemicity. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character**, The Royal Society London, v. 138, n. 834, p. 55–83, 1932. Citado na página 13.

LAST, John M. **A dictionary of epidemiology**. 4ª edição. ed. [S.l.]: Oxford university press, 2001. Citado na página 31.

LUIZ, Mônica Helena Ribeiro. Modelos matemáticos em epidemiologia. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2012. Citado 3 vezes nas páginas 33, 37 e 41.

PEREIRA, Maurício Gomes. Epidemiologia: teoria e prática. In: **Epidemiologia: teoria e prática**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 596–596. Citado na página 31.

QUADROS, ALESSANDRA SENA. Modelos epidemiológicos para propagação de informação. 2013. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 45.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. ed. [S.l.]: Cengace Learning, 2016. Citado 9 vezes nas páginas 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 24 e 25.

A APENDICE

Modelo SI

```
% I : individuos infectados
% S : individuos suscetiveis
% S+I=1
clc
close all
clear all
n=10000; %iterações
p=1.6508*10^-7; %erro
a=1.1; % fator de proporcionalidade
tempo=10; % tempo
dt=tempo/n; % espaçamento temporal
I(1)=0.1;
for i=1:(n-1)
I(i+1)=I(i)+dt*a*I(i)*(1-I(i)); %solução numérica
i,erro=abs(I(i+1)-I(i))
if erro<p
t=linspace(0,tempo,i+1);
for j=1:(i+1)
A(j)=I(1)/(exp(-a*t(j))*(1-I(1))+I(1)); %solução analítica
end
plot(t,I,'b:',t,A,'r-')
break
end
end
t=linspace(0,tempo,i+1);
for j=1:(i+1)
A(j)=I(1)/(exp(-a*t(j))*(1-I(1))+I(1));
end
plot(t,I,'k:',t,A,'k-')
legend('Numérica','Analítica')
xlabel('Tempo','Fontsize',22)
ylabel ('Infectados','Fontsize',22)
title('Comparativo','Fontsize',22)
set(gca,'FontSize',22)
```

B APÊNDICE

Modelo SIS

```
% S : individuos suscetíveis
% I : individuos infectados
clc
close all
clear all
n=71; %iterações
p=1.8269*10^-4; %erro
a=0.2; %taxa de transmissão
b=0.1; %taxa de recuperação
tempo=70; %tempo
dt=tempo/n; %espaçamento temporal
I(1)=0.1; %numero de infectados no inicio da pandemia
S(1)=1-I(1); %numero de suscetíveis
N=I(1)+S(1); %numero total
for i=1:(n-1)
S(i+1)=S(i)+dt*(-a*S(i)*I(i)+b*I(i)); %solução numérica
I(i+1)=I(i)+dt*(a*S(i)*I(i)-b*I(i)); i
erroI=abs(I(i+1)-I(i))
erroS=abs(S(i+1)-S(i))
if (erroS<p)|(erroS<p)
t=linspace(0,tempo,i+1);
for j=1:(i+1)
aux=(-b+a*S(1))/(S(1)-N);
AS(j)=(aux*N*exp((b-a*N)*t(j))-b)/(-a+aux*exp((b-a*N)*t(j))); %solução analítica
AI(j)=(a*N-b)/(a+((a*N-b)/I(1)-a)*exp(-(a*N-b)*t(j)));
end
plot(t,S,'b–',t,AS,'k-',t,I,'r',t,AI,'k-')
legend('Numérica (Suscetíveis)','Analítica (Suscetíveis)','Numérica (Infectados)','Analítica (Infectados)')
xlabel('Tempo','Fontsize',22)
title('Comparativo','Fontsize',22)
set(gca,'FontSize',22)
break
end
end
```