UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

LUCINEIA REGINA TOCHETTO

ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

DISSERTAÇÃO

PATO BRANCO
2022

LUCINEIA REGINA TOCHETTO

ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

ANALYSIS OF ERRORS MADE IN THE PROBLEM SOLVING INVOLVING QUADRATIC EQUATIONS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Adilson da Silveira

PATO BRANCO

2022

LUCINEIA REGINA TOCHETTO

ANÁLISE DE ERROS COMETIDOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Trabalho de pesquisa de mestrado apresentado como requisito para obtenção do título de Mestra Profissional em Matemática para a Escola Básica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Área de concentração: Matemática.

Data de aprovação: 03 de Maio de 2022

Dr. Adilson da Silveira, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. Carlos Alexandre Ribeiro Martins, Doutorado - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dra. Silvana Matucheski, Doutorado - Instituto Federal do Paraná

Dedico este trabalho ao meu sublime orientador, por sua empatia e sua imensa contribuição para com esta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, Luiz e Aurora, por todo o incentivo e sacrifício para que a minha formação acadêmica fosse possível.

Ao meu esposo Leomar por todo o apoio aos meus projetos e palavras de incentivo.

Aos professores do mestrado pelos seus ensinamentos.

À Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPB, por manter e apoiar um programa de mestrado voltado às necessidades de formação continuada dos professores de Matemática que atuam na rede educação básica.

À Coordenação Nacional do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional, pelo apoio ao polo de Pato Branco - Paraná.

À Sociedade Brasileira de Matemática, por estar junto com o Profmat, apoiando o programa desde o seu início.

Aos colegas de mestrado por tornarem os dias de estudo mais leves e agradáveis.

Por último, mas não menos importante, meu agradecimento ao meu orientador por me convencer a voltar para o mestrado quando eu já havia decidido que não o terminaria, pela empatia durante toda a orientação, inclusive quando eu estava passando por uma gravidez de risco, e por toda a sua contribuição para com a dissertação.

RESUMO

TOCHETTO, L. R. Análise de erros cometidos na resolução de problemas envolvendo equações quadráticas. 2022. 74 f. Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR, 2022.

A presente pesquisa teve como objetivo analisar os erros cometidos por estudantes na resolução de problemas envolvendo as equações quadráticas. Participaram da pesquisa estudantes do ensino médio da rede particular de ensino. A coleta de dados se deu através da aplicação de um caderno contendo três questões envolvendo equações quadráticas. A análise de dados foi feita, então, a partir de quatorze questionários respondidos por estudantes da segunda e da terceira série, já que estes ainda estavam seguindo o sistema anterior à implementação da nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A análise dos dados se deu, de forma qualitativa, empregando-se a metodologia análise de erros, levando-se em conta a produção escrita dos estudantes em três questões de diferentes níveis de complexidade. A partir da produção escrita pode-se perceber que os erros não estão em encontrar a raiz das equações quadráticas, mas sim, em interpretar os enunciados, transcrever os dados para a linguagem matemática, manipular algebricamente os elementos algébricos e em executar operações aritméticas básicas. Para descrever os erros e categorizá-los, recorreu-se a diversos estudos de outros autores, em trabalhos que envolveram a análise de erros em diversos outros temas matemáticos. Desta forma, concluímos que os erros apresentados pelos estudantes se devem à defasagem nos conteúdos anteriores que servem de base para a aprendizagem do conteúdo acerca das equações quadráticas.

Palavras-chave: Análise de erros, equações quadráticas, ensino de matemática.

ABSTRACT

TOCHETTO, L. R. Analysis of errors made in the problem solving involving quadratic equations**.** 74 f. Master's Dissertation – Postgraduate Program in Mathematics in National Network. Federal Technological University of Paraná. Pato Branco, PR, 2022.

The present research aimed to analyze the errors made by students in solving problems involving quadratic equations. High school students from private schools participated in the research. The data collection occurred through the application of a notebook containing three questions involving quadratic equations. The data analysis was made, then, from fourteen questionnaires answered by students of the second and third series that were still following the system prior to the implementation of the new Common Curricular National Basis (CCNB). Data analysis was carried out in a qualitative way, using the error analysis methodology, taking into consideration the students' written production in three questions with different levels of complexity. From the written production, it is possible to realize that the errors are not about finding the roots of the quadratic equations but rather interpret the statements, transcribe data into math language, algebraically manipulate the algebraic elements and execute basic arithmetic operations. To describe the errors and categorize them, several studies by other authors were used in works that involved the analysis of errors in several other mathematical topics. In this way, we conclude that the errors performed by the students are due to the lag in the previous contents that serve as a basis for learning the content about quadratic equations.

Keywords: Error analysis, quadratic equations, mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O erro, ou seja, aquilo que não condiz com o que é esperado da produção escrita de um estudante (CURY, 2010) é fonte de reflexão por parte de todos os educadores (RIBEIRO, GODOY e ROLKOUSKI, 2020). Demasiada é sua importância para a educação e o ensino de matemática, que os erros vêm sendo tema de pesquisas na área da educação matemática.

Os estudos na área da análise de erros têm como principal contribuinte, a pesquisadora Helena Noronha Cury, que vem se dedicando ao longo dos anos ao estudo dos erros e é referenciada em praticamente todos os artigos que tratam desse assunto.

Em um artigo de Cury (2015), chamado *Erros, dificuldades e obstáculos no ensino e na aprendizagem de Matemática: um levantamento de trabalhos em anais*, a mesma mostrou haver um aumento nas produções sobre o assunto e citou que tal trabalho "pode auxiliar na busca de trabalhos específicos sobre o tema, para a realização de novas investigações, especialmente em cursos de mestrado ou doutorado da área de Ensino". Desta forma, evidencia que, devido ao grande número de trabalhos, que a área da análise de erros se mantém ativa e que novos trabalhos na área são necessários e bem vindos.

Sobre a análise de erros, Cury (2008), destaca que, na sua percepção, a análise de erros cometidos por estudantes no processo de resolução de situações-problema pode configurar-se tanto como metodologia de pesquisa, quanto como metodologia de ensino, firmando sua posição a partir de uma extensa revisão de literatura selecionando, a nível internacional, os trabalhos mais relevantes publicados sobre o tema. Neste estudo, também, esta autora posiciona o erro na resolução de problema como um elemento inerente ao processo de desenvolvimento e evolução do conhecimento matemático do estudante. A partir desta perspectiva, a autora aponta a importância do seu estudo do ponto de vista didático contribuindo na formação docente.

Considerando as opiniões, perspectivas, orientações, possibilidades de pesquisa indicadas por Cury (2008); considerando as informações sobre a possibilidade de enriquecimento do processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar que a mesma indica, e ciente da necessidade de formação continuada na docência, reconhece-se a importância de se analisar com cuidado os erros cometidos pelos estudantes na produção de suas respostas na resolução de problemas. É neste contexto que esta pesquisa é desenvolvida, motivada pela necessidade de integrar a formação continuada docente com o conhecimento matemático tendo como foco a aplicação de um recurso didático não convencional – a análise de erros. Portanto, o tema central deste estudo é a análise de erros.

Em termos metodológicos o delineamento da pesquisa identifica um estudo de natureza descritiva, desenvolvido a partir da análise de dados obtidos na resolução de um conjunto de três questões apresentadas a cada um dos estudantes que aceitou receber o material.

Para participar da pesquisa, respondendo às questões, foram convidados estudantes da 1ª, 2ª e 3ª série do Ensino Médio. Estudantes, estes, regularmente matriculados, do Colégio Nova Visão pertencente à Rede Particular de Ensino e localizado no Município de Coronel Vivida, Estado do Paraná, autorizados pelos seus responsáveis a participar da pesquisa.

Considerando a natureza dos participantes, o projeto de pesquisa foi submetido ao CEP – UTFPR, que após os trâmites autorizou a aplicação e o prosseguimento da mesma, conforme termo nº 3.946.347 aprovado em 31 de Março de 2020.

Do ponto de vista matemático foram escolhidas questões envolvendo equações quadráticas ou mais conhecidas como equações do 2º grau, conteúdo este pertencente na Matemática à grande área de Álgebra.

Conceitualmente, este tipo de equação algébrica aparece formalmente no 9º ano do Ensino Fundamental, no qual o estudante aprende a reconhecer tal equação, a classificar e encontrar suas raízes, os métodos de resolução, os aspectos gráficos e algumas aplicações. Porém, é no Ensino Médio que todos estes aspectos se integram como pré-requisitos para aplicações na Física, como por exemplo, na Mecânica dentro do estudo do movimento dos corpos (movimento retilíneo uniforme variado, queda livre, lançamento balístico), na Química, como por exemplo, na determinação de números quânticos dos elétrons, e na Biologia, em situações de evolução ou involução populacional, sem contar que tais equações aparecem como subproblemas dentro de uma infinidade de assuntos da própria matemática.

Cada uma das três questões escolhidas para compor o questionário tem característica distinta uma da outra, as quais serão detalhadas na seção específica sobre a metodologia.

Diante do exposto tais equações configuram-se como elemento fundamental na formação matemática do estudante, seja do ponto de vista específico ou transversal. Foi considerando esses aspectos e também a necessidade frequente dos estudantes em resolver tais equações que se escolheu este conteúdo específico para coletar os dados de base para a pesquisa.

Nesta pesquisa pretende-se responder à seguinte questão: Quais erros cometidos pelos estudantes podem ser identificados no processo de resolução de equações do segundo em uma incógnita?

No caminho para responder esta questão, o objetivo geral consiste em analisar as respostas apresentadas por estudantes do ensino médio, quando da resolução de problemas que envolvem conceitos relacionados às equações quadráticas, focando, especialmente, na discussão da natureza dos erros cometidos pelos estudantes.

Subsidiariamente, para auxiliar no cumprimento do objetivo geral, aponta-se como objetivos específicos: a) identificar os erros levando-se em conta critérios matemáticos; b) agrupar os erros em categorias, preparando-os para aplicação da análise de conteúdo a qual será aplicada para inferência e análise dos dados; c) apontar características desses erros, do ponto de vista matemático considerando: a aplicação de fórmula de resolução, manipulações numéricas em operações básicas, modelagem matemática, extração e aplicação dos dados do problema e a interpretação do texto.

Para a análise dos dados utilizar-se-á a análise de conteúdo numa perspectiva qualitativa. Esta abordagem será detalhada no segundo capítulo, na seção específica que trata do delineamento metodológico e descrição dos elementos da pesquisa.

Nos capítulos três, quatro e cinco pesquisa é apresentada a revisão de literatura sobre a análise de erros, considerando os conceitos principais, autores, descrição de trabalhos publicados na área, com o objetivo de informar sobre o referencial teórico que servirá de base para o trabalho e também um breve recorte sobre o ensino da álgebra e das equações quadráticas.

O sexto capítulo traz a descrição e análise dos dados que serviram de base para a pesquisa.

No sétimo capítulo, apresentam-se as considerações finais e as conclusões.

Por fim, deixa-se a lista de referências utilizadas para a elaboração e redação desta pesquisa.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Considerando que este trabalho está inserido no campo da Educação Matemática, para responder à questão proposta, optou-se pela realização de uma pesquisa descritiva, de natureza qualitativa apoiada principalmente no método de análise de conteúdo de acordo com Bardin (2011).

Segundo o que explica Godoy (1995), em um estudo descritivo o foco principal deve ser o de buscar o entendimento de um fenômeno ou problema da forma mais ampla possível. Por isso, em geral, a opção pela análise qualitativa dos dados coletados pode ser a mais indicada.

Diante disso faz-se a opção, então, nesta pesquisa, pela abordagem qualitativa apoiada principalmente no método de análise de conteúdo de acordo com Bardin (2011), porém sem abrir mão dos dados quantitativos necessários. Desta forma, conforme expressa Godoy (1995, p.61), "do ponto de vista metodológico, a melhor maneira para se captar a realidade é aquela que possibilita ao pesquisador "colocar-se no papel do outro", vendo o mundo pela visão dos pesquisados", acredita-se que a aplicação da análise qualitativa sobre os dados que serão coletadas poderá fornecer diversas informações importantes que não poderiam ser captadas simplesmente a partir do cálculo de índices matemáticos e estatísticos.

Sob esse ponto de vista, busca-se, a partir das respostas produzidas pelos estudantes, compreender como as resoluções dos problemas foram sendo desenvolvidas, possíveis dificuldades, lacunas na formação algébrica, ausência de pré-requisitos, para que se possa melhorar o entendimento do processo que possa ter contribuído para estes erros e não somente verificar quais os erros presentes na resolução. Pois, como afirma Godoy (1995, p.63) "os pesquisadores qualitativos estão preocupados com o processo e não simplesmente com os resultados ou produto".

Segundo o que afirma Trivinõs (2008), boa parte dos estudos desenvolvidos nesse campo são de natureza descritiva, buscando obter informações acerca das escolas, professores, da qualidade da educação oferecida, sobre as reformas curriculares e métodos de ensino, por exemplo. Porém, faz uma ressalva orientando que este tipo de estudo não deve ficar simplesmente na coleta, ordenação e classificação de dados. Uma das opções de estudo descritivo apontada por ele é o estudo descritivo e de correlação, não no sentindo estatístico, mas no sentido de estabelecer relações úteis entre as variáveis do processo para tomada de decisão e encaminhamentos a fim de sugerir mudanças importantes para a realidade em questão.

2.1 JUSTIFICATIVA, PROBLEMA DE PESQUISA E OBJETIVOS

Para que se possa fazer uma pesquisa é necessário que se tenha uma problemática, uma inquietação que gere uma questão a ser respondida. Segundo Deslandes et al. (1994, p. 17):

> Entendemos por pesquisa a atividade básica da Ciência na sua indagação e construção da realidade. É a pesquisa que alimenta a atividade de ensino e a atualiza frente à realidade do mundo. Portanto, embora seja uma prática teórica, a pesquisa vincula pensamento e ação. Ou seja, nada pode ser intelectualmente um problema se não tiver sido em primeiro lugar, um problema da vida prática.

Assim, a temática e a problemática da presente pesquisa surgiram de um problema da vida prática, com o objetivo de auxiliar a atividade de ensino frente aos desafios docentes que se apresentam no processo de ensino-aprendizagem da matemática escolar, no caso aqui, o interesse pelos erros observados no processo de resolução de equações quadráticas.

Dessa forma e juntamente com conversas junto ao orientador, sentimos a necessidade de investigar os erros cometidos pelos estudantes na resolução de problemas envolvendo equações quadráticas, para que desta forma pudéssemos identificar e analisar cada erro, compreendendo o que levou nossos estudantes a cometê-los.

Pesquisas realizadas por Cury, professora de disciplinas matemáticas em cursos superiores que analisa erros cometidos por estudantes da área de Ciências Exatas, constataram que as maiores dificuldades estão relacionadas a conteúdos de Ensino Fundamental (CURY e SILVA, 2008), por isso entendemos que é de grande valia estudar os conteúdos que estão na grade curricular deste nível de ensino, como é o caso das equações quadráticas. Já que, esses conteúdos aparecem nos conteúdos subsequentes, é fundamental que o estudante apresente a base necessária para conseguir compreender os conteúdos que estão por vir.

Partindo desta explanação, este trabalho buscará responder a seguinte questão: Quais erros cometidos pelos estudantes podem ser identificados no processo de resolução de equações do segundo em uma incógnita?

No que ser refere à Matemática é preciso identificar a natureza desses erros. Em relação às suas causas, este aspecto pode voltar-se para o processo de ensino-aprendizagem das equações quadráticas, auxiliando o professor a identificar possíveis lacunas ou pré-requisitos ausentes na experiência e conhecimento dos estudantes.

Para responder à questão proposta, a análise de erros apresenta-se como uma ferramenta viável, capaz de fornecer indícios sobre as causas desses erros, auxiliando na compreensão do que aconteceu durante o processo de ensino-aprendizagem, para que tais erros fossem cometidos. Essa identificação poderá servir de guia para detectar as principais dificuldades dos estudantes durante a resolução de problemas envolvendo equações quadráticas.

Assim, como anunciado anteriormente, o objetivo geral desta pesquisa é analisar as respostas apresentadas por estudantes do ensino médio, quando da resolução de problemas que envolvem conceitos relacionados às equações quadráticas, focando, especialmente, na discussão da natureza dos erros cometidos pelos estudantes.

Para que o objetivo geral possa ser alcançado, elencamos alguns objetivos específicos para esta pesquisa:

a) identificar os erros levando-se em conta critérios matemáticos;

b) agrupar os erros em categorias, preparando-os para aplicação da análise de conteúdo a qual será aplicada para inferência e análise dos dados;

c) apontar características desses erros, do ponto de vista matemático considerando: a aplicação de fórmula de resolução, manipulações numéricas em operações básicas, modelagem matemática, extração e aplicação dos dados do problema e a interpretação do texto;

Desta forma, espera-se que o resultado deste trabalho sirva de subsídio para a comunidade docente de Matemática, que instigue a reflexão sobre a utilização da análise de erros de forma positiva e não apenas punitiva, que possa provocar mudanças na forma de ensinar para que esses erros não sejam tão recorrentes e para que os estudantes alcancem uma aprendizagem significativa, sendo capazes de acompanhar os conteúdos subsequentes que dependem deste e que as lacunas presentes nos conteúdos que servem de base para a resolução de problemas envolvendo equações quadráticas também possam ser preenchidas.

2.2 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Os participantes da pesquisa foram estudantes do Ensino Médio, pertencentes à 1ª, 2ª e 3ª série, regularmente matriculados, no Colégio Nova Visão localizado no Município de Coronel Vivida - Paraná.

O Colégio Nova Visão é uma instituição pertencente à rede particular de Ensino. As turmas, em geral, são pouco numerosas e devido à pandemia da Covid-19, nem todos os estudantes estavam frequentando a modalidade de ensino presencial.

A proposta inicial era coletar os dados através da aplicação de um questionário contendo três questões envolvendo equações quadráticas para um universo de até 50 estudantes. Porém, como no ano de 2020 a situação de pandemia colocou os estudantes no formato remoto de ensino, optou-se por não aplicar o questionário no ano de 2020. Nesse período como as aulas passaram a ocorrer, então, no formato online, por prudência, optou-se por adiar a aplicação do questionário, dado que as respostas poderiam sofrer muita influência, considerando que os estudantes teriam acesso a diversos materiais e inclusive às respostas de outros colegas. A aplicação foi adiada para o primeiro semestre de 2021, ocasião em que a mesma ocorreu.

Devido ao adiamento da aplicação, foram analisados somente os questionários retornados da 2ª e 3ª série, pois os estudantes da 1ª série estariam com o novo currículo, seguindo a BNCC, enquanto os demais ainda estariam com o currículo antigo. Essa diferença no currículo poderia impactar nos resultados da pesquisa e como o objetivo inicial não era analisar os erros sobre a perspectiva do currículo, optou-se por trabalhar apenas com os questionários de 2ª e 3ª série. Nesse contexto, foi coletado, um total de 14 questionários entre estudantes de 2ª e 3ª série.

2.3 AS QUESTÕES PARA A COLETA DOS DADOS

Para atender o objetivo principal deste trabalho, o qual consistiu em analisar os erros cometidos por estudantes do Ensino Médio, quando da resolução de problemas envolvendo equações quadráticas, focando, especialmente, na discussão da natureza dos erros cometidos pelos estudantes, utilizou-se um questionário contendo três problemas para coletar as respostas dos estudantes.

A escolha, elaboração e apresentação das três questões que entraram na composição do instrumento de coleta de dados, observou um grau decrescente de dificuldade. Ressalta-se que o termo dificuldade aqui empregado refere-se ao número de tarefas exigidas em cada questão. Porém, o estudante poderia escolher livremente a ordem de resolução.

A primeira questão: *Uma empresa dividiria seus dividendos de R$ 24.000,00, em partes iguais, entre os seus sócios. Como 5 sócios não quiseram receber os dividendos, o valor que eles receberiam foi distribuído aos demais e cada um então recebeu um acréscimo de R$ 400,00 em sua parte. Quantos sócios receberam parte do dividendo?*

Na sequência apresenta-se o processo de resolução destacando as tarefas necessárias em cada etapa.

Seja x o número de sócios e y o valor recebido inicialmente por cada sócio. A informação: “uma empresa dividiria seus dividendos de R$ 24.000,00, em partes iguais, entre os seus sócios”. Transcrevendo essa informação para a linguagem matemática, obtém-se a seguinte equação algébrica:

$$y = \frac{24000}{x}$$

Considerando a informação, “Como 5 sócios não quiseram receber os dividendos, o valor que eles receberiam foi distribuído aos demais e cada um então recebeu um acréscimo de R$ 400,00 em sua parte” Transcrevendo para a linguagem matemática chega-se à segunda equação:

$$\frac{24000}{x-5} = y + 400$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtém-se a expressão:

$$\frac{24000}{x-5} = \frac{24000}{x} + 400$$

Dividindo todos os termos por 100 para simplificar, ficamos com:

$$\frac{240}{x-5} = \frac{240}{x} + 4$$

Multiplicando os dois lados da equação por $(x-5)$:

$$240 = \left(\frac{240}{x} + 4\right).(x-5)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$240 = \frac{240x}{x} - \frac{1200}{x} + 4x - 20$$

$$240 = 240 - \frac{1200}{x} + 4x - 20$$

$$240 - 240 + 20 = -\frac{1200}{x} + 4x$$

$$20 = -\frac{1200}{x} + 4x$$

Multiplicando todos os termos por x:

$$20x = -\frac{1200}{x}.x + 4x.x$$

$$20x = -1200 + 4x^2$$

Somando $1200 - 4x^2$ em ambos os lados da equação resulta em:

$$20x + 1200 - 4x^2 = 0$$

Reorganizando os tem-se:

$$-4x^2 + 20x + 1200 = 0$$

Dividindo todos os termos da equação por 4 para simplificar a equação, obtém-se:

$$-x^2 + 5x + 300 = 0$$

Aplicando a fórmula quadrática para encontrar as raízes da equação quadrática, considerando que os coeficientes são: $a = -1$; $b = 5$ e $c = 300$, tem-se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-1).300}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1200}}{-2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{-2}$$

Para simplificar essa expressão, fatora-se o radicando, 1225, para obter a raiz quadrada de 1225, obtemos:

$$1225 = 5^2.7^2$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2.7^2}}{-2} = \frac{-5 \pm 35}{-2}$$

Assim, as raízes da equação quadrática são:

$$x_1 = \frac{-5 + 35}{-2} = \frac{30}{-2} = -15$$

$$x_2 = \frac{-5 - 35}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20$$

Como o número de sócios deve ser um número natural, a única raiz que satisfaz o problema dado é 20. Como a questão quer saber quantos sócios receberam parte do dividendo, basta descontar os 5 que não quiseram receber, o que pode ser representado algebricamente por: $x - 5 = 20 - 5 = 15$. Assim, 15 sócios receberam os dividendos.

Essa primeira questão, de fato é a mais complexa, pois o estudante precisa modelar a questão, organizar a mesma algebricamente, para em seguida resolver a equação de segundo grau que resulta dessa modelagem. Como há dois processos importantes, modelagem e resolução, essa primeira questão fornece duas classes importantes de erros, que podem servir de base para análise.

A segunda questão, de menor complexidade que a primeira, mas também considerada complexa, também necessita de modelagem algébrica e de posterior resolução da equação de segundo grau obtida.

O enunciado da segunda questão é o seguinte: *(FAAP – SP) Uma indústria produz, por dia, x unidades de um determinado produto, e pode vender tudo o que produziu ao um preço de R$ 100,00 a unidade. Se x unidades são produzidas a cada dia, o custo total, em reais, da produção diária é igual a* $x^2 + 20x + 700$. *Portanto, para que a firma tenha um lucro diário de R$ 900,00, o número de unidades produzidas (e vendidas) por dia, deve ser igual a quanto?*

Na sequência apresenta-se um possível caminho de resolução dessa questão.

Seja x o número de unidades produzidas e 100 reais o custo unitário.

Pode-se representar o CUSTO TOTAL, LUCRO e VALOR ARRECADADO na venda de x unidades pelas seguintes expressões:

CUSTO TOTAL: $x^2 + 20x + 700$

LUCRO: 900

VALOR ARRECADADO: $100x$

Como o lucro é obtido a partir da diferença entre o valor arrecadado e o custo total de produção, temos a seguinte equação:

$$\text{LUCRO} = \text{VALOR ARRECADADO} - \text{CUSTO TOTAL}$$

Ou seja: $900 = 100x - (x^2 + 20x + 700)$. Aplicando a regra de sinais:

$$900 = 100x - x^2 - 20x - 700$$

Agrupando os termos algébricos semelhantes chega-se à equação:

$$900 = -x^2 + 80x - 700$$

Subtraindo 900 dos dois lados da equação:

$$900 - 900 = -x^2 + 80x - 700 - 900$$

$$0 = -x^2 + 80x - 1600$$

Multiplicando ambos os lados da equação por (-1), para representar esta equação na forma usual, tem-se:

$$x^2 - 80x + 1600 = 0$$

Considerando que os coeficientes são $a = 1$, $b = -80$ e $c = 1600$ e, aplicando a fórmula quadrática de resolução para encontrar as raízes da equação, chega-se à expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-80) \pm \sqrt{(-80)^2 - 4.1.1600}}{2.1} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 6400}}{2}$$

$$= \frac{80 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{80 \pm 0}{2} = 40$$

A partir do valor encontrado conclui-se que para obter um lucro diário de 900 reais, é necessário que sejam vendidas 40 unidades diariamente. Note que boa parte da modelagem algébrica do problema já é apresentada no seu enunciado. Porém, são exigidas operações com termos algébricos até se chegar à forma final da equação quadrática e aplicar o processo de resolução a partir de um método escolhido. Sobre o método de resolução empregado este poderia ser soma e produto de raízes ou através da fórmula quadrática, que foi o escolhido para a pauta de resolução.

Como fontes naturais de erros no processo de resolução dessa questão, podem ser indicadas as operações com termos algébricos e a aplicação da fórmula quadrática de resolução ou a utilização de outra técnica, como por exemplo, soma e produto de soluções.

A terceira questão: *Quais são as raízes da equação* $x^2 - 5x + 6 = 0$*?* por sua vez, exigiu basicamente a aplicação de uma técnica de resolução. Dessa forma, o estudante poderia resolvê-la de forma mecânica, sem que dele fossem exigidas capacidades de modelagem e operações com termos algébricos. A seguir apresenta-se a resolução da mesma.

A partir dos coeficientes: $a = 1$; $b = -5$ e $c = 6$ da equação dada e, aplicando-se a fórmula quadrática de resolução, tem-se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Simplificando a última expressão dessa igualdade chega-se a:

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto o conjunto solução da equação dada é S={2;3}.

Se a aplicação da fórmula quadrática foi o processo escolhido pelo estudante, então a identificação dos coeficientes, as operações com potenciação, radiciação, soma e divisões de números reais deveriam ser observadas, as quais podem resultar em erros de operações numéricas.

Quanto à aplicação do questionário, esta se deu durante a aula da disciplina de Física, já que, a pesquisadora lecionava a disciplina para as turmas envolvidas e, desta forma, a aplicação ficou mais prática, sem que precisasse envolver outros professores em seus horários de aulas.

O tempo reservado para a aplicação do questionário foi de 2 horas-aula, porém, percebeu-se que a maioria dos estudantes necessitou de apenas uma hora-aula para responder o questionário.

Antes do início da aplicação, pediu-se que os estudantes deixassem toda e qualquer anotação na folha de respostas, para que desta forma se pudessem ter todas as anotações, com erros e acertos, da questão disponíveis para estudo. E, também assim, fosse possível extrair o máximo de detalhes da resolução e dos erros e acertos cometidos durante a resolução.

2.4 ANÁLISE DOS DADOS

Na sequência detalha-se o caminho percorrido para a análise dos dados obtidos a partir dos questionários recolhidos.

Com os questionários respondidos em mãos, seguindo os preceitos da análise de conteúdo já referida, foi feita uma primeira análise superficial das respostas, onde decidimos por usar os questionários de 2ª e 3ª série e descartar os de 1ª série, pelo motivo já citado anteriormente e também pelo fato de que os questionários de 2ª e 3ª série continham mais material para ser analisado.

Por se tratar de uma pesquisa de cunho qualitativo e tendo em vista que o objetivo da pesquisa era analisar as produções apresentadas por estudantes do Ensino Médio quando da resolução de problemas que envolvem conceitos relacionados às equações quadráticas, focando, especialmente, na discussão da natureza dos erros cometidos pelos estudantes o tratamento dos dados se deu sob a perspectiva da análise de erros, segundo o que orienta Cury (2008).

Ao se trabalhar com análise de erros, independentemente das teorias que fundamentam as pesquisas ou da forma como são apresentadas, o que está sendo analisado é o conteúdo da produção, aplicando-se assim a metodologia de análise do conteúdo (CURY, 2008). Portanto, os dados foram analisados sob a perspectiva da análise de erros, através da metodologia de análise de conteúdo, baseando se em Bardin (2011).

Segundo Bardin (2011) a análise de conteúdos acontece em três etapas. A primeira delas, a análise prévia, onde o material é organizado e os dados categorizados. A segunda, a exploração do material, na qual as hipóteses são elaboradas. E, por fim, o tratamento dos resultados, etapa na qual o pesquisador, baseando-se no referencial teórico, dá sentido à interpretação feita na etapa anterior.

Desta forma, na primeira etapa após a coleta dos dados, as produções dos estudantes foram classificadas e agrupadas de acordo com suas características, como por exemplo, questionários sem produção alguma, produções que apresentam todas as respostas corretas e produções parcialmente corretas ou incorretas, ou seja, que apresentem erros que serão nossa base de dados.

Após essa primeira classificação, foi feita uma nova classificação (categorização) subdividindo os erros de acordo com o tipo de erro.

Na segunda etapa, os erros foram explorados mais a fundo, investigando-se a sua causa de forma a tecer hipóteses sobre o que levou ao surgimento dos mesmos.

Na última etapa, as hipóteses foram confrontadas com o referencial teórico de forma a dar credibilidade e sentido às interpretações feitas na etapa anterior.

Como forma de manter o anonimato dos participantes, os mesmos foram nomeados de A01 até A14.

Na sequência apresentam-se informações sobre a análise de erro como instrumento para a investigação da aprendizagem da matemática a partir da produção dos estudantes.

3 O ERRO PRESENTE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO UM INSTRUMENTO PARA A INVESTIGAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Os objetivos deste capítulo são apresentar argumentos sobre a importância que o erro presente na resolução de um problema tem para a investigação aprendizagem, sendo a análise de erros ferramenta fundamental para tal investigação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), por sua vez, evidenciam a importância da Matemática no ensino fundamental como ferramenta para compreender o mundo e instigar o entusiasmo, o esmero e o desenvolvimento da capacidade de solucionar problemas, colocando como ponto de partida para desenvolver essa Matemática a resolução de problemas (BRASIL, 1998). Para autores como Cury e Silva (2008) e Kliemman e Dullius (2017) a resolução de problemas é a forma de ensino que mais contribui para o ensino e aprendizagem da matemática, evidenciando o que fora abordado pelos PCN's.

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) apresenta como competência geral a formulação e resolução de problemas com base nos conhecimentos das diferentes áreas, reforçando o que já estava contemplado nos PCN's, mostrando assim, que um dos objetivos do ensino e da aprendizagem é que o conhecimento adquirido em sala de aula seja capaz de auxiliar o educando a atuar frente à problemas. Assim, mediante a importância que os problemas apresentam tanto durante o ensino da Matemática, quanto na resolução de problemas fora da sala de aula é que surge também a necessidade de estudar a fundo como os educandos desenvolvem a resolução desses e o que isso nos diz sobre o processo de ensino-aprendizagem.

Se pensarmos na resolução de um problema matemático, não teremos como produto disso somente a resposta final, mas toda uma solução, um encaixar de ideias que nos faz chegar até ela. Solução essa que pode estar correta ou não, que pode apresentar diferentes formas de resolução e levar ao mesmo produto final. Assim, uma resolução fora dos padrões esperados nos traz muitas informações, que podem ser analisadas através da análise de erros.

Para iniciarmos a nossa discussão sobre a análise de erros, primeiramente precisamos definir o significado de erro, mais especificamente o que é o erro dentro da resolução de questões em Matemática.

Para Cury (2010) o erro relacionado à solução de um problema é entendido como:

> O que não corresponde à produção esperada de um estudante (ou professor) que já deve ter tido contato com os conteúdos apresentados na referida questão ou com estratégias de resolução de problemas em Matemática. É, portanto, um referencial que toma como suposta verdade o conhecimento institucional, ou seja, o que a instituição "Escola" espera ver apresentado por estudantes (ou professores) de um determinado nível de ensino, em suas produções escritas em Matemática (CURY, 2010, p. 2).

É nesse ponto, quando a resposta dada pelo estudante não é a esperada, que muitas vezes descartamos o erro. Ao esperarmos uma resposta, que supostamente consideramos verdadeira, inúmeras vezes descartamos uma das partes mais importantes do processo de ensino e aprendizagem, o erro. Com o erro podemos verificar quais conteúdos não foram aprendidos, aquilo que foi compreendido de forma equivocada e encontrar o descompasso entre o ensino e a aprendizagem.

Visando dar a devida importância aos erros cometidos, a análise de erros ganha novos espaços no campo das pesquisas. Ao explorarmos diferentes resoluções podemos encontrar nelas diferentes erros, repletos de significados e à investigação destes significados dá se o nome de análise de erros. Que pode ser tanto uma metodologia de ensino, quando o erro é usado em sala de aula para promover o aprendizado, ou metodologia de pesquisa, quando é utilizado para compreender como se dá a apropriação do saber (CURY, 2008). Como metodologia de pesquisa a análise de erros tem diversos pontos em comum com temas da Educação, Educação Matemática e da Matemática (CURY, 2008).

A análise de erros não é uma tarefa simples, não é só corrigir e encontrar os erros, é preciso que se tenha em mente que existiram vários fatores, que somados ao longo da jornada escolar do estudante o fizeram cometer esses erros. Para isso, precisamos saber compreendê-los e distingui-los, para só assim explorá-los. Assim, para utilizar os erros para pesquisar é necessário ter um objetivo, como cita Cury (2008):

> O trabalho investigativo sobre as respostas pode levar em conta, em um primeiro momento, a tarefa inicial de correção, mas é necessário ter um objetivo nessa pesquisa, levantando questões (ou hipóteses) que possam ser investigadas (CURY, 2008, p. 63).

Ao levarmos em conta todo o processo de uma resolução, desde o seu início até a resposta final, fazemos muito mais do que uma simples correção, onde apenas se verifica o resultado final. Observando a resolução de forma esmiuçada podemos entender como está se dando o processo de ensino e aprendizagem, lembrando que para isso é necessário ter um objetivo, caso contrário se tornará apenas uma correção para obtenção de nota e se levará em conta somente o acerto ou o erro, ou seja, estamos considerando somente o conhecimento institucional citado por Cury (2010) e não o processo que levou a este erro.

Segundo Spinillo et al. (2014) a falsa ideia de que erro deve ser corrigido favorecendo apenas a resposta final faz com que se aceite apenas as formas de resolução corriqueiros, desconsiderando outras formas de resolução.

A ideia que se tentou formar até agora acerca da análise de erros, é de que o erro não é uma coisa negativa e se bem utilizado pode se tornar uma importante ferramenta de ensino. Porém, sem se traçar objetivos com relação aos erros, acabamos formando o que Cury (2010) chama de efeito cascata, pois ao considerar o “erro construtivo” e se pensar que o estudante tem que errar para aprender e assim deixar o erro acontecer de forma demasiada, sem nenhuma intervenção, estamos apenas reprovando ou qualificando o estudante, para muitas vezes aprová-lo sem que o mesmo tenha os conhecimentos necessários para o grau de ensino que ele está (CURY, 2010).

Levando em conta o processo de resolução podemos descobrir estratégias, dificuldades e tecer hipóteses sobre estes erros (CURY e SILVA, 2008), além do mais, os erros possuem associações com mecanismos de obtenção do conhecimento e demonstram como os indivíduos organizam seus pensamentos (SPINILLO et al. 2014). É nesse sentido que os erros se tornam uma ferramenta para o ensino-aprendizagem, pois eles nos dizem muito mais do que somente “o estudante não aprendeu determinado conteúdo”.

Ao utilizar os erros para tecer hipóteses sobre o conhecimento e não somente atribuir uma nota aos estudantes, podemos nos deparar, com as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes, pois essas dificuldades emergem na produção escrita (CURY, 2008).

À vista disso, a resolução de uma questão funciona como um espelho, refletindo as dúvidas, frustrações e compreensões acerca de um determinado conteúdo. E desta maneira a análise de erros se torna um importante instrumento para a aprendizagem, seja ela como metodologia de pesquisa ou de ensino.

4 O ENSINO DA ÁLGEBRA E DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

A partir da leitura dos documentos oficiais, como por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), percebe-se que os mesmos focam na resolução de problemas e na formalização do pensamento algébrico. Em relação às equações de segundo grau ou quadráticas, tal documento se refere a métodos de resolução, porém enfatiza a resolução por fatoração, o qual não é um método geral. A escolha das questões que compõem o questionário aplicado justifica-se pelo fato de que deve ser observado se as questões são resolvidas pelo fato do aluno dominar o conteúdo, ou se são realizadas de forma mecânica. Além do mais, desta forma pode-se observar o conhecimento algébrico que deveria ter sido adquirido pra formar a base para o ensino das equações de segundo grau. Na sequência, em tópico específico, caracteriza-se a equação do segundo grau como elemento matemático, os principais métodos de resolução e algumas aplicações. Este aspecto está voltado para possíveis leitores que não estejam totalmente familiarizados com o assunto.

Retomando a questão dos documentos oficiais e o que dizem a respeito do ensino da Matemática, tem-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs):

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o estudante valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1998, p. 15).

A partir desse trecho, vê-se que os conteúdos matemáticos precisam extrapolar a sala de aula. Precisam estar apreendidos para poderem ser utilizados pelos estudantes como instrumento para entender e explorar o seu mundo real, o seu dia a dia. Além do mais, não deve prender o estudante à repetição de exemplos, mas sim, desenvolver a capacidade do mesmo de resolver problemas, atendendo, inclusive situações em que o mesmo tenha que modelar o problema e só depois resolver a equação correspondente.

Como o foco deste trabalho está sobre os erros observados na resolução de problemas envolvendo equações quadráticas, destaca-se a seguir os objetivos propostos pelos PCNs no que se refere ao ensino da Álgebra e das equações quadráticas.

No terceiro ciclo (6° e 7° ano) o objetivo proposto para o currículo de Matemática no que diz respeito à Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico levando o estudante a:

> - reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; - traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; - utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p. 64)

No quarto ciclo (8° e 9° ano) o objetivo proposto para o currículo de Matemática no que diz respeito à Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico levando o estudante a:

> - produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades -, identificando as equações, inequações e sistemas; - resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; - observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. (BRASIL, 1998, p. 81)

Vemos que um dos objetivos do ensino da Álgebra é que ela seja utilizada pelo estudante para resolver situações-problemas. Para isso, é preciso que o mesmo vá construindo a base do pensamento algébrico desde o terceiro ciclo. O educando deverá ser capaz de identificar dentro de determinadas situações-problema a relação entre variáveis e por meio de equações e/ou inequações chegar a uma solução para o seu problema.

O objetivo ainda cita a compreensão dos procedimentos envolvidos, o que evidencia que o aprendizado da Álgebra não pode ser algo mecânico e baseado apenas em repetição. É preciso criar no estudante a capacidade de desenvolver seu próprio raciocínio, assim diante de uma situação-problema ele será capaz de desenvolver sua solução e também de verificar a validade desta.

Os PCNs, em seus objetivos, abordam o ensino da Álgebra e todo o raciocínio que se espera que o estudante desenvolva frente a esse conteúdo e apesar de citar praticamente só as equações de primeiro grau, ele faz uma breve menção às equações de segundo grau em outro tópico do documento. No tópico sobre “Conceitos e Procedimentos” o documento cita:

> Resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 1998, p. 88)

Apesar de não constar especificamente as equações quadráticas nos objetivos, para resolver uma situação-problema envolvendo as equações quadráticas, o estudante precisa ter desenvolvido todas as habilidades citadas pelos objetivos. Seja para uma situação-problema envolvendo equação de primeiro ou segundo grau, o conhecimento básico necessário acerca da Álgebra é o mesmo, é necessário identificar variáveis, estabelecer leis de dependência das variáveis, reconhecer equações e saber manipulá-las. Assim, é necessário que os objetivos propostos para o ensino da Álgebra tenham sido assimilados pelos educandos, para assim conseguir chegar até a equação de segundo grau.

Quanto ao processo de resolução das equações quadráticas, os PCNs abordam amplamente a resolução por meio da fatoração.

A atualização da matriz curricular em âmbito nacional se deu em 2017 com a aprovação da Base Nacional Curricular Comum (BNCC).

Após um longo período de estudos e debates, audiências públicas envolvendo autoridades na área educacional, discussões envolvendo segmentos da sociedade civil, especialistas em Educação, chegou-se ao texto final da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), editada pelo Governo Federal em 2017, compreendendo-se que a mesma

> [...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação...orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. (BRASIL, 2018, p. 7)

A Base Nacional Comum Curricular foi formulada baseada no conceito de competências. Em seu texto define:

> [...] competência como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e sócio

> emocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 9)

Para desenvolver um conjunto de dez competências, como exigência prévia, o estudante deve ser capaz de manifestar certas habilidades relacionadas ao entendimento, à manipulação e aplicação dos conteúdos matemáticos.

Resumindo, este documento constitui-se em um referencial nacional dos objetos de conhecimento, das competências e das habilidades que precisam ser desenvolvidas ao longo da educação básica, na formação dos estudantes, para que se possa garantir um conjunto a aprendizagens, buscando o seu desenvolvimento integral por meio da integralização das dez competências gerais.

A BNCC, como apontado anteriormente, orienta que, para cada conteúdo específico, deve haver a articulação entre competências gerais e habilidades específicas que o estudo de todo e qualquer conteúdo precisa desenvolver.

Dentre as competências gerais solicitadas pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular), consta a formulação e resolução de problemas com base nos conhecimentos das diferentes áreas e para cada nível de ensino.

Segundo este documento, no ensino fundamental o estudante deverá ser capaz de:

> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2018, p. 267).

Na apresentação de resolução o estudante poderá utilizar para expressar suas respostas, em determinadas situações, a linguagem algébrica. Essa linguagem está descrita nas competências gerais da BNCC para o ensino médio e sua utilização objetiva, por exemplo, desenvolver a habilidade de:

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (BRASIL, 2018, p. 531).

Além do mais, a finalidade da Álgebra dentro da BNCC é de buscar desenvolver o pensamento algébrico, que segundo o documento é “essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos" (BRASIL, 2018, p. 270), devendo "enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações" (BRASIL, 2018, p.270).

A BNCC recomenda que o estudante, ao completar o ensino fundamental, deve ser capaz de estabelecer a relação entre variável e função e entre incógnita e equação, onde as técnicas de resolução de equações e inequações não devem ser os objetos de estudo, mas sim, desenvolvidas como uma forma de representar e resolver problemas. Já no ensino médio, o estudante deverá, através das equações e inequações, ser capaz de resolver situações-problema.

Desta forma, o estudante não deve aprender as resoluções de forma mecanizada, por meio da repetição, mas deve aprender a usá-las como ferramenta para a resolução de situações-problemas, dotando essas resoluções de sentido.

4.1 Equações Quadráticas ou do 2º Grau

Em matemática designa-se uma expressão que contém coeficientes, incógnitas com respectivos expoentes, sinais operatórios separando seus termos e um sinal de igualdade, como sendo uma equação. Na sequência, destacam-se alguns aspectos sobre a equação quadrática ou do 2º grau enquanto objeto matemático, bem como os principais métodos de resolução.

Pode-se observar adiante no texto, na parte referente a análise da produção dos estudantes, quais métodos de resolução são utilizados.

Do ponto de vista matemático uma equação do 2º grau ou equação quadrática em uma variável pode ser representada na seguinte forma geral: $ax^2+bx+c=0$, na qual $a\neq 0$. Os números reais a, b e c são chamados coeficientes da equação quadrática.

A resolução desse modelo matemático implica em buscar um número real α tal que ao ser substituído no lugar da variável x, torne a sentença uma identidade. Em geral esse número α é chamado raiz ou zero da equação.

Dependendo do problema ao qual este tipo de equação está vinculado, o mesmo poderia impor ao estudante a tarefa primária de obter o modelo quadrático associado. Porém, não é comum se exigir do estudante realizar essa etapa relativa a modelagem, fato facilmente comprovado consultando-se os livros didáticos utilizados nas escolas. Por outro lado, em se tratando de aplicações à Física, por exemplo, a tarefa de encadear expressões advindas de leis até obter uma expressão que se traduz em uma equação do segundo grau é uma tarefa até certo ponto bem comum. A seguir apresentam-se alguns exemplos a acerca desse aspecto.

Considerando que o instrumento de coleta de dados (questionário) para a presente pesquisa foi aplicado durante as aulas da disciplina de Física, considerando os processos de aplicação e resolução de equações quadráticas e, considerando que de fato, as situações problema e a utilização dos processos de resolução das mesmas ensejou a questão de pesquisa para esse trabalho, optou-se por apontar algumas situações de aplicações na Física ocorre esse tipo de equação.

Na Física, saber resolver uma equação quadrática é de suma importância quando o assunto é, por exemplo, movimento dos corpos. Porém, muitas vezes alguns exercícios sobre outros assuntos da disciplian também acabam recaindo em uma equação quadrática, durante o processo de resolução. Na sequência apresentam-se alguns exemplos desse aspecto.

Começando, uma breve referência ao movimento dos corpos pelo Movimento Uniformemente Variado (MUV), onde temos um movimento com aceleração constante, de forma que a velocidade varia de forma constante para intervalos de tempos iguais, temos a seguinte função horária, que relaciona o espaço com o tempo:

$$S(t) = S_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

Nesta equação S_o é a posição inicial, v_o a velocidade inicial, a a aceleração e t o tempo quando o móvel está na posição $S(t)$. Logo, quando queremos encontrar o tempo t para uma dada posição $S(t)$ obtém-se uma equação quadrática e necessitamos encontrar suas raízes. Além do mais, precisamos compreender o significado dessas raízes, pois, como se trata do tempo só são aceitáveis valores maiores ou iguais a zero.

Note ainda, que teremos uma equação quadrática completa, no caso de S_o e v_o serem diferentes de zero.

O Movimento de queda-livre, é outro caso que, sendo um MUV, também tem a posição do corpo em função do tempo representado pela função acima, a diferença é que como a posição se trata da altura do corpo, é comum ser representada pela letra h e como não estamos falando de qualquer aceleração, e sim da aceleração gravitacional, nos referimos a ela pela letra g. Assim temos:

$$h(t) = h_o + v_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Considerando a altura em relação ao solo como referência, a aceleração é negativa devido ao referencial adotado.

Partindo para o lançamento de projéteis, podemos decompor o movimento em movimento horizontal e vertical. Na análise do movimento vertical utilizamos a mesma função usada para queda-livre, pois também se trata de um MUV, logo também necessitamos de conhecimentos sobre as equações quadráticas para dominarmos essa pequena área do estudo dos movimentos.

Questão 1: MUV: Fonte: Próprio autor

Um móvel em movimento uniforme variado obedece à função $S = -12 + 2t + 2t^2$, no SI. Determine o instante em que o móvel passa pela origem.

Sendo um movimento uniforme variado, o móvel obedece a seguinte função horária para o espaço:

$$S(t) = S_o + v_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

Comparando com a função do enunciado temos:

$$S_o = -12m$$

$$v_o = 2m/s$$

$$a = 4\ m/s^2$$

Como queremos saber o instante em que o corpo passa pela origem, queremos encontrar o valor de t, para o qual $S = 0$. Assim, temos a equação:

$$0 = -12 + 2t + 2t^2$$

Podemos dividir por 2 ambos os lados da equação, e então obtemos:

$$0 = -6 + t + t^2$$

Resolvendo utilizando a fórmula quadrática de resolução, onde os coeficientes são: $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$, obtemos:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1}$$

$$t_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$t_2 = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Assim, $t_1 = 2$ e $t_2 = -3$, porém, o tempo sempre deve ser maior ou igual a zero. Portanto, um móvel que parte da posição $-12m$, com velocidade inicial de $2m/s$ e aceleração constante de $2m/s^2$, passa pela origem $(S = 0)$ no instante $t = 2s$.

Questão 2: Queda-livre Fonte: PUCC

Um vaso de flores cai livremente do alto de um edifício. Após ter percorrido 320 cm, ele passa por um andar que mede 2,85 m de altura. Quanto tempo ele gasta para passar por esse andar? Desprezar a resistência do ar e assumir g = 10 m/s^2.

a) 1,0s

b) 0,80s

c) 0,30s

d) 1,2s

e) 1,5s

Para calcular o tempo para o vaso de flores, passar pelo andar, pode-se utilizar a equação:

$$h' = h_o' + v_o' t + \frac{1}{2} g t^2$$

Mas para isso é preciso saber a velocidade v'_o com que inicia a passagem pelo andar.

Tomando como referencial o alto do prédio, onde $h = 0$, então g é positiva. Assim é possível calcular a velocidade usando a equação de Torricelli:

$$v^2 = v_o^2 + 2.g.\Delta h$$

Sendo $\Delta h = 3{,}20m$, $v_o = 0$ e $g = 10m/s^2$, temos:

$$v^2 = 0^2 + 2.10.3{,}20$$

$$v^2 = 64$$

$$v = \sqrt{64}$$

$$v = 8\,m/s$$

A velocidade ao final dos 3,20m é a mesma com que o vaso inicia a passagem pelo andar, assim, $v'_o = 8\,m/s$. Agora, basta calcular o tempo gasto para o vaso passar pelo andar. Como $h'_o = 3{,}20m$, $h' = 3{,}20 + 2{,}85 = 6{,}05m$, da primeira equação da resolução:

$$6{,}05 = 3{,}20 + 8t + \frac{1}{2}\,10t^2$$

$$0 = -2{,}85 + 8t + 5t^2$$

Utilizado a fórmula quadrática, para resolver essa equação, cujos coeficientes são $a = 5$,$b = 8$ e $c = -2{,}85$ tem-se:

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4.5.(-2{,}85)}}{2.5}$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 57}}{10}$$

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{121}}{10}$$

$$t = \frac{-8 \pm 11}{10}$$

Assim, os valores que t pode assumir são $t_1 = 0{,}3$ e $t_2 = -1{,}9$. Mas como o tempo não pode assumir valores negativos, somente uma das raízes da equação satisfaz o que foi pedido pelo enunciado. Portanto, o tempo necessário para o vaso passar pelo andar é de 0,3s, letra c.

Questão 3: Lançamento de projéteis. Fonte: UERJ

Um projétil é lançado segundo um ângulo de 30º com a horizontal e com uma velocidade de 200 m/s. Supondo a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 e desprezando a resistência do ar, concluímos que o menor tempo gasto por ele para atingir a altura de 480 m acima do ponto de lançamento será de:

a) 8 s
b) 10 s
c) 9 s
d) 14 s
e) 12 s

Tratando-se de um lançamento oblíquo, e sendo $v_o = 200m/s$, decompondo o vetor velocidade para encontrar o módulo da velocidade com que o projétil é lançado na horizontal, temos:

$$v_{o_y} = v_o.sen\ 30° = 200.0{,}5 = 100m/s$$

Considerando o ponto de lançamento como $h_o = 0$, queremos encontrar o valor de t, para o qual $h = 480m$, considerando $g = 10m/s^2$.

Usando a função horária $h = h_o + v_{o_y}t - \frac{1}{2}gt^2$, obtemos a equação:

$$480 = 0 + 100t - \frac{1}{2}10t^2$$

$$-5t^2 + 100t - 480 = 0$$

Dividindo todos os membros da equação por 5 para simplificar, ficamos com:

$$-t^2 + 20t - 96 = 0$$

Utilizado a fórmula de Bháskara para resolver essa equação cujos coeficientes são $a = -1$,$b = 20$ e $c = -96$:

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.(-1).(-96)}}{2.(-1)}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 384}}{-2}$$

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$t = \frac{-20 \pm 4}{-2}$$

Assim, os valores que t pode assumir são $t_1 = 8s$ e $t_2 = 12s$. Ou seja, o projétil atinge a altura de 480m, em dois momentos, primeiramente ao subir $(t_1 = 8s)$ e depois quando está caindo $t_2 = 12s)$. Como o exercício pede o menor tempo gasto para atingir a altura de 480m, a resposta é a letra a, 8 segundos.

Ressalta-se que durante o estudo dos conteúdos da disciplina de Física há inúmeras outras situações que se utilizam de equações quadráticas como subproblemas. Os casos apresentados servem para ilustrar a importância que as equações quadráticas têm no contexto do estudo de muitos conteúdos na Física.

Um ponto importante a destacar é que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), Brasil (2018), orienta que o início do estudo das equações quadráticas a partir do oitavo ano do ensino fundamental, a partir de equações do segundo grau incompletas, ou seja, da forma $ax^2=b$, com $a\neq0$, empregando-se como método de resolução, o processo de fatoração ou o processo de aplicação das operações inversas, especialmente a radiciação. Em seguida, no nono ano, a BNCC recomenda a resolução de equações do segundo grau empregando-se os processos anteriores, adicionando-se a estes o emprego de fórmulas de resolução, em especial a conhecida fórmula quadrática de resolução ou fórmula de Bháskara.

Retomando a discussão acerca da tarefa principal que o estudante teria ao manipular essas equações, qual seja de tentar encontrar uma raiz ou zero da mesma, chega-se ao ponto crucial que são os métodos de resolução.

A seguir detalham-se alguns métodos de resolução para equações quadráticas, evitando alongar a discussão sobre os méritos de um ou outro método, aspecto este que não é o foco deste trabalho.

O trabalho de Pinho et al (2019), destaca diversos métodos empregados na resolução de equações quadráticas completas e incompletas, focando no método de completar quadrados.

Em referência ao matemático indu Al-Khwarizmi, Pinho et al (2019) destacam que, considerando Boyer (1974), na sua obra Al-jabr Wa'l muqabalah, este matemático classifica as equações em seis tipos básicos e que o mesmo desenvolve métodos algébricos de resolução de acordo com a característica da equação. No primeiro capítulo do livro, Al-Khwarizmi destaca equações que na forma de escrita atual teriam a forma $ax^2=bx$, sendo a e b números reais. No segundo capítulo trata equações com a forma $ax^2=c$, sendo a e c números reais. O terceiro capítulo mostra a resolução de equações cujas raízes eram iguais, ou seja, quando $bx=c$, sendo b e c números reais. No quarto capítulo, analisa o caso de quadrados e raízes iguais a números, ou seja, $ax^2+bx=c$, considerando a, b e c números reais. O caso de quadrados e números iguais a raízes, ou seja, equações da forma $ax^2+c=bx$, sendo a, b e c números reais, aparece no capítulo cinco. No sexto capitulo ensina como resolver equações da forma $bx + c= ax^2$, com a, b e c números reais, ou seja, o caso de raízes e números iguais a quadrados.

O método descrito por Al-Khwarizmi para resolver esses grupos de equações é conhecido como método geométrico e uma descrição completa desse método pode ser encontrada em Boyer (1974, p.158). Esse método é conhecido hoje como o método de completar quadrados.

Conforme destacado no trabalho de Pinho et al (2019), no método recém destacado, apresentados por Al-Khwarizmi, apenas as raízes positivas eram consideradas, pois nessa época os números negativos ainda não eram conhecidos. Por isso as equações $ax^2+bx+c=0$ e $bx+c=0$, não aparecem na sua obra, pois as mesmas não possuem soluções positivas se todos os coeficientes forem positivos.

Em Boyer (1974), encontra-se o relato que o também matemático indu conhecido como Bháskara apresentou uma retórica para resolver equações quadráticas.

No século XVI, o matemático Françõis Viète (1540-1603), apresentou uma fórmula geral de resolução para equações do tipo $x^2+2ax=b$, construída através de uma mudança de variáveis. Em Pinho et al (2019), estão descritos os passos dessa construção, a qual muito se assemelha à fórmula geral que hoje conhecemos como fórmula de Bháskara.

Apesar de muitos autores criticarem a denominação “fórmula de Bháskara” para a resolução geral de equações quadráticas, pois muitos acreditam que tal fórmula foi compilada por ele e não criada, a denominação é muito utilizada nos livros didáticos. Assim, neste trabalho vamos utilizar o termo “fórmula de Bháskara”, assim como fórmula quadrática de resolução, cuja expressão permite o cálculo das raízes de qualquer equação quadrática da forma $ax^2+bx+c=0$, com a, b e c números reais. Ressalta-se que quanto ao número de raízes, qualquer equação do segundo possui: i) duas raízes reais e distintas ou ii) duas raízes reais e iguais ou iii) não possui raízes reais, sendo estas opções mutuamente excludentes.

O emprego da fórmula quadrática de resolução permite, em certo ponto, discutir a existência de raízes e também a unicidade. A seguir, apresenta-se a forma geral da fórmula quadrática, utilizada atualmente para se resolver uma equação da forma $ax^2+bx+c=0$, com a, b e c números reais.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nesta fórmula a, b e c são os coeficientes e a análise do termo b^2-4ac, presente no radicando da expressão, permite discutir sobre a existência e unicidade de soluções.

Após a exposição sobre as equações quadráticas e os principais métodos de resolução, a seguir, partindo dos pressupostos sobre os estudos envolvendo a análise de erros, chega-se ao ponto principal da pesquisa que é a análise das produções dos estudantes, ao resolverem três questões envolvendo equações quadráticas e os possíveis erros cometidos pelos mesmos.

5 ESTUDOS NA ÁREA DE ANÁLISE DE ERROS

Neste capítulo apresentamos a interpretação dos dados, pois, apesar de serem analisados diferentes assuntos, a categorização dos erros se assemelha, já que, os erros advêm da base.

Há diversos artigos na área de análise de erros matemáticos, utilizando essa análise como metodologia de pesquisa em que os autores apresentam e discutem seus resultados.

Praticamente todos os trabalhos abordam os erros de forma qualitativa, apresentando os resultados de seus estudos frente ao processo de ensino aprendizagem. Destacamos abaixo uma visão geral sobre alguns destes trabalhos.

Brum e Cury (2013) apresentam em seu artigo um resultado parcial de uma pesquisa feita com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental, nesta pesquisa eles trabalham com a resolução de questões algébricas.

Entre os resultados obtidos por Brum e Cury (2013) está a dificuldade que os estudantes possuem em traduzir os problemas da linguagem natural ou figurada para a linguagem matemática, não conseguindo equacionar o problema dado.

Outro ponto é a falta de interpretação e a falta de pré-requisitos, pois segundo os autores os estudantes desconhecem a propriedade distributiva, ocorrendo troca de operações e a adição de termos não semelhantes e possuem dificuldades perante equações fundamentais.

Silva e Buriasco (2005) trabalharam com estudantes da 4ª série do ensino fundamental e detectaram que os estudantes compreendiam o enunciado, mas não conseguiam traduzi-lo corretamente para a linguagem matemática o que vai ao encontro dos resultados obtidos por Brum e Cury (2013).

Outro ponto interessante citado por Silva e Buriasco (2005) é que para solucionar um problema os educandos estabelecem relações entre conceitos aprendidos anteriormente e estratégias utilizadas, e com isso acabam por generalizar conceitos e criar falsas regras.

Os autores citam como principal foco da dificuldade de compreender o enunciado o “macete” ensinado pelos professores, onde se ensina a utilizar palavras-chave bloqueando-se o processo de elaboração pessoal e fazendo com que os erros aconteçam.

Um apontamento interessante feito por Silva e Buriasco (2005) é de que mesmo tendo resolvido a questão de forma incorreta os estudantes apresentam conhecimentos e alguns erros acontecem simplesmente por falta de atenção.

O erro cometido devido à desatenção citado por Silva e Buriasco (2005) também está presente nos resultados de Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014), Ramos, Curi (2014) e Kliemann e Dullius (2017).

Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014), investigam questões de Radiciação de simulados da Prova Brasil, trabalhando com estudantes do 9º ano. Em suas análises os autores observaram que os estudantes ainda não compreenderam os objetos matemáticos de estudo, que eram pré-requisitos para as resoluções das questões, estando este resultado de acordo com os estudos de Brum e Cury (2013).

A pesquisa também mostrou que os estudantes sabem resolver um caso particular envolvendo determinado conceito, o que segundo os autores demonstra que eles devem ter aprendido a resolvê-lo de forma mecânica.

Se compararmos a análise feita acima com a crítica feita por Silva e Buriasco (2005) sobre palavras-chave, podemos verificar que o aprendizado foi mecânico e sempre que o estudante se deparar com uma situação diferente daquela sistematizada pelo professor ele irá cometer o erro, pois não aprendeu o conceito e sim a aplicá-lo em um caso específico de forma ordenada e mecânica.

Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014) ainda falam que é evidente a quantidade de erros em operações elementares, erro que também foi levantado por Brum e Cury (2013).

Kliemann e Dullius (2017) ao trabalhar com a análise de erros na resolução de problemas matemáticos, com estudantes de 5º ano e com questões retiradas da Prova Brasil, reportam além do erro por falta de atenção, o erro por falta de leitura, o que leva os estudantes a não compreenderem o que leem.

Outro ponto importante citado pelos autores são os erros de compreensão do enunciado, que segundo os autores,

> ocorre quando o estudante seleciona os dados, mas não entende o que, de fato, o problema pede que se faça com os mesmos. O estudante não possui capacidade de interpretar o enunciado dentro do contexto. Entende-se que ele não está habituado a fazer a leitura pelas “entrelinhas” ou seja, decodificar o que realmente está sendo pedido para ser realizado. Faz a leitura de forma rápida sem raciocínio e focam apenas na oralidade e não no teor explicativo do conteúdo. (KLIEMANN e DULLIUS, 2017, p. 170)

Por fim, apresentamos o trabalho de Ramos e Curi (2014) o qual se trata de uma investigação de doutorado com estudantes do 1º ano do Ensino Médio, envolvendo função polinomial de segundo grau.

Assim como Brum e Cury (2013), Ramos e Curi (2014) reconhecem que alguns dos erros se dão pelo fato dos estudantes não saberem as propriedades distributivas.

Erros devido à falta de compreensão dos enunciados e utilização de estratégias incorretas, também se fizeram presentes neste estudo, assim como nos demais, já apresentados.

Segundo os autores, as dificuldades são oriundas do Ensino Fundamental e os estudantes resolvem as questões sem levar em consideração o enunciado.

Com relação às funções polinomiais de segundo grau as dificuldades estão em distinguir e relacionar variáveis dependentes e independentes, encontrar os zeros das funções, pois não realizam corretamente o estudo dos sinais e interpretar os gráficos (RAMOS E CURI, 2014).

Para Ramos e Curi (2014) esses erros se tornam sistemáticos pois, a correção é feita através da repetição de exercícios e desta forma o estudante não é capaz de discernir as relações entre a forma correta ou errada.

Assim, “o erro é um indicador das lacunas do processo de aprendizagem e dos itens nos quais os estudantes têm mais dificuldades” (SIMONETTI, PERUZZO, NOVAES, 2014). E chegar a um resultado correto não indica que o estudante aprendeu o conteúdo, da mesma forma que não chegar ao resultado não significa que ele não aprendeu.

6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A descrição e análise de dados serão apresentadas neste tópico através da apresentação da resolução dos participantes, nomeados de A01 até A14, com posterior análise das resoluções e a categoria de erros em que cada um dos erros cometidos se enquadra.

Resoluções em branco ou sem erros não serão apresentadas no trabalho, já que, nosso objetivo é analisar os erros presentes nas resoluções. Porém, apresentaremos a quantidade de questionários em branco ou com as respostas totalmente corretas e os respectivos participantes que apresentaram esses tipos de resolução.

Para a descrição e análise de dados começaremos pela questão 03 do questionário, pelo fato de que ela exigia apenas que fossem encontradas as raízes da equação dada e também pelo fato de que o conhecimento necessário para a resolução da questão seria necessário para as questões 1 e 2.

Em seguida, será analisada a questão 02, por ser menos complexa e por fim a questão 03.

6.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 03

Questão 03: Quais são as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$?

A questão 03 apresentou 6 respostas corretas (A03, A04, A05, A06, A07, A09 e A11), nenhuma em branco e 7 com algum erro.

Começando pela resolução de A01 (Figura 1), se pode perceber que o estudante relaciona os coeficientes corretamente, porém ao usar a fórmula:

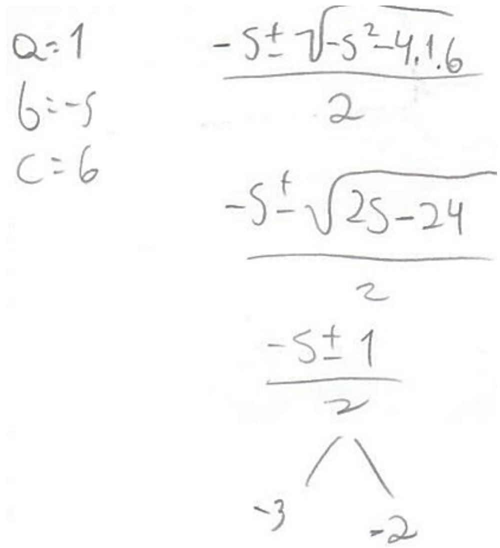
$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}},$$

se esqueceu de acrescentar o sinal negativo do coeficiente (essa afirmação é feita, pois em outra questão, que será apresentada mais adiante, o mesmo usa o sinal corretamente, logo usa a fórmula de maneira correta), logo ele usa $-\mathrm{b} = -5$, quando deveria constar $-\mathrm{b} = -(-5)$, cometendo um erro por desatenção.

Outro erro cometido, foi ao considerar $\mathrm{b}^2 = -5^2 = 25$, quando o correto seria $\mathrm{b}^2 = (-5)^2 = 25$, assim, podemos considerar o erro na potenciação como um erro de generalização de conceitos, já que o participante considera que $-5^2 = (-5)^2 = 25$.

Ao chegar, nas supostas raízes, apenas apresenta o resultado, mas não verifica sua validade, o que poderia tê-lo feito rever os seus erros.

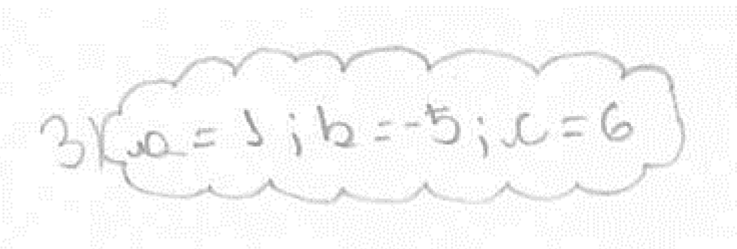
Figura 1: Resolução do participante A01, referente à questão 03



Fonte: Autoria própria.

A02 em sua resolução (Figura 2) apenas encontrou os coeficientes a, b e c, pelas respostas das outras questões, que serão apresentadas mais adiante, se pode ver que lembra parte da equação de Bháskara. Mas, como não concluiu a questão, não será feita a análise de erros, já que não há erros explícitos na questão.

Figura 2: Resolução do participante A02, referente à questão 03

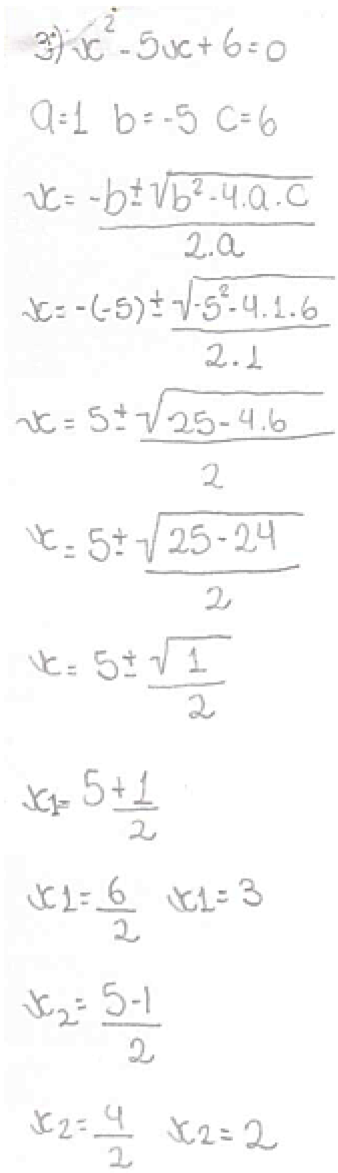


Fonte: Autoria própria.

A08, em sua resolução (Figura 3), apresenta a resposta correta, porém apresenta erro na resolução.

Ao considerar $b^2 = -5^2 = 25$, quando o correto seria $b^2 = (-5)^2 = 25$, cometeu erro na potenciação, um erro de generalização de conceitos, já que o participante considera que $-5^2 = (-5)^2 = 25$. Erro este, também presente na resolução de A01. Outro erro cometido foi que ao representar a divisão, onde $-(-5)$ fica de fora do dividendo, porém, ao final ele realiza a operação corretamente.

Figura 3: Resolução do participante 08, referente à questão 03



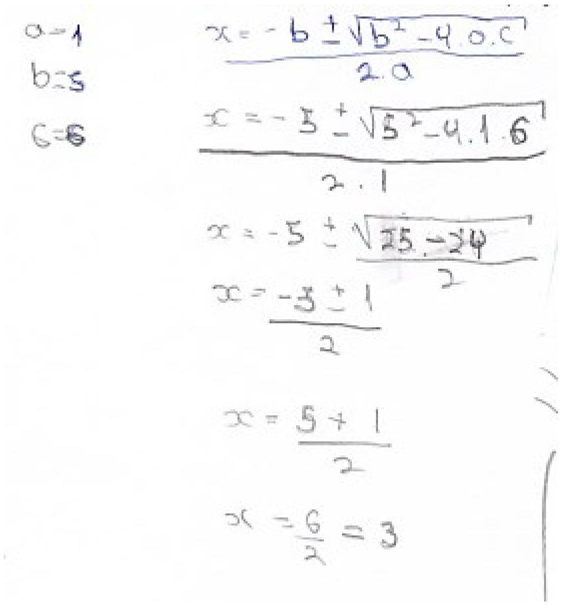
Fonte: Autoria própria.

Analisando a resolução de A10 (Figura 4), verificamos que o mesmo considerou o coeficiente $\mathrm{b} = 5$, quando o correto seria $\mathrm{b} = -5$, logo cometeu um erro ao determinar o sinal do coeficiente.

Depois, considerou $\mathrm{x} = \frac{-5\pm1}{2} = \frac{5+1}{2}$, cometendo um erro nas operações básicas, seja por desconhecer o significado do símbolo $\pm$, ou por generalizar o "jogo de sinal". Por fim, como encontrou apenas uma raiz, podemos considerar o erro em encontrar as raízes da equação de segundo grau, já que, era esperado por parte do estudante de que ele encontrasse duas raízes.

Outro erro foi em relação ao traço da divisão, ora o traço ultrapassa até mesmo o sinal de igualdade, ora deixa de abranger parte do dividendo.

Figura 4: Resolução do participante A10, referente à questão 03

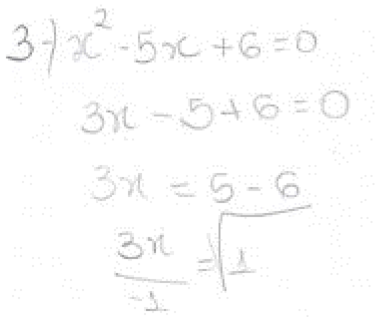


Fonte: Autoria própria.

Diferentemente da resolução dos demais, A 12 (Figura 5) tentou encontrar as raízes simplificando a equação (cortando o x), porém, fez isso só nos primeiros dois termos da equação, considerando que $\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 6 = 3\mathrm{x} - 5 + 6$, aqui temos dois erros, erro de simplificação da equação e erro por desatenção. O erro de simplificação ocorreu ao dividir os dois primeiros termos da equação por x e não dividir o terceiro termo. Já o erro por desatenção ocorreu pois o 3 parece ter surgido pelo 3 da numeração da questão.

Além do mais, A12 considerou também que $3\mathrm{x} = 5 - 6 \Rightarrow \frac{3\mathrm{x}}{-1} = \sqrt{1}$, aqui temos um erro de radiciação, aparentemente por se tratar de uma equação com x^2, o estudante tira a raiz, e para fugir do radicando negativo na raiz, divide os dois lados por -1 ,considerando, portanto que fosse válido fazer $\frac{\sqrt{-1}}{-1} = \sqrt{1}$.

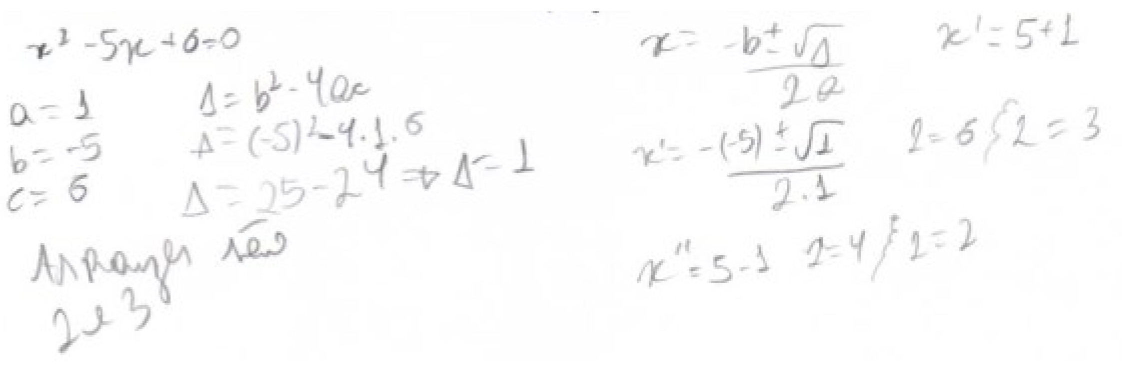
Figura 5: Resolução do participante A12, referente à questão 03



Fonte: Autoria própria.

A13 (Figura 6) apresentou as raízes corretamente, e seu desenvolvimento também está correto, porém apresentou alguns erros de formalismo matemático, pois apresentou 2=6} 2=3 e 2=4} 2=2, o que além de apresentar erro na equivalência não faz sentido.

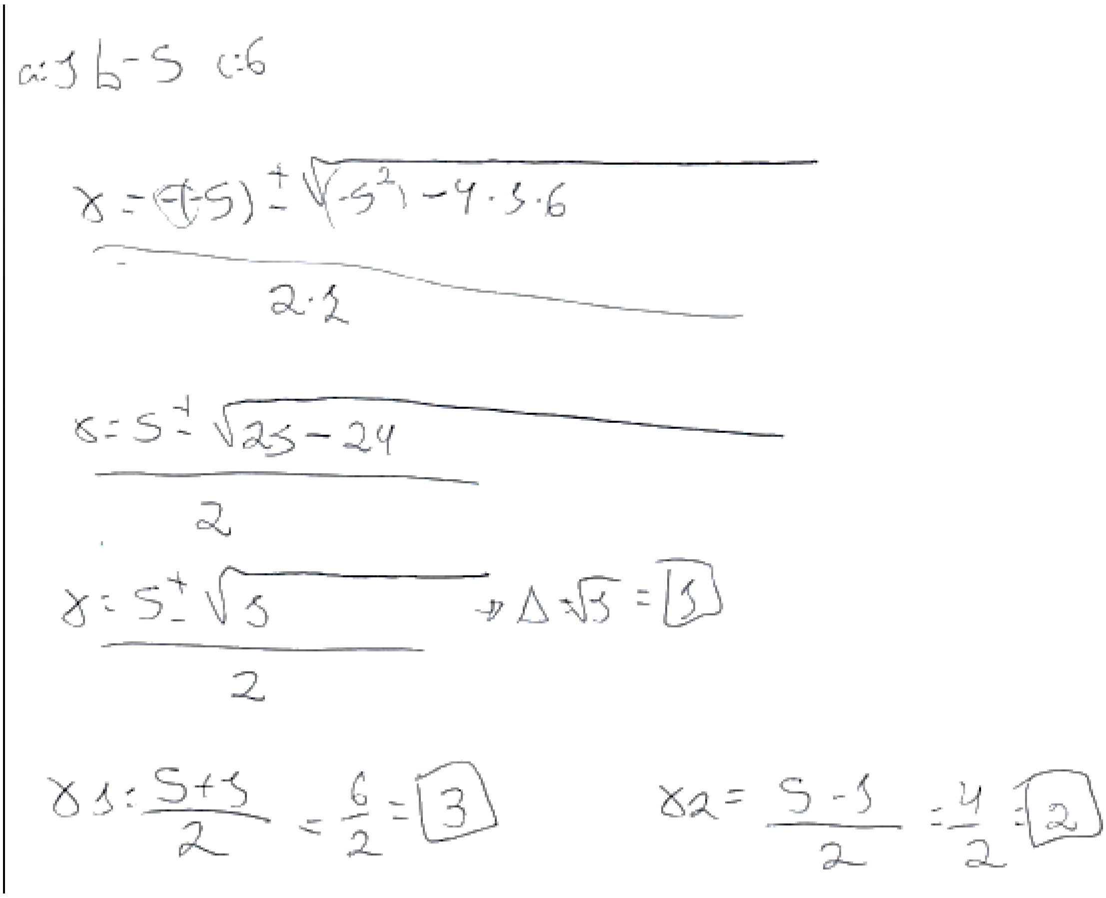
Figura 6: Resolução do participante A13, referente à questão 03



Fonte: Autoria própria.

Por fim, A14 (Figura 7) apresentou as raízes corretamente, porém considerou $(-5^2) = 25$, quando o correto seria $(-5)^2 = 25$, logo, cometeu um erro de generalização de conceitos, erros também cometidos por A01 e A08.

Figura 7: Resolução do participante A14, referente à questão 03



Fonte: Autoria própria.

6.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 02:

Questão 02: (FAAP - SP) Uma indústria produz, por dia, x unidades de um determinado produto, e pode vender tudo o que produziu ao um preço de R$ 100,00 a unidade. Se x unidades são produzidas a cada dia, o custo total, em reais, da produção diária é igual a $x^2 + 20x + 700$. Portanto, para que a firma tenha um lucro diário de R$ 900,00, o número de unidades produzidas (e vendidas) por dia, deve ser igual a quanto?

Das 14 respostas à questão 02, 4 estavam corretas (A09, A10, A11, A13) e as demais apresentaram algum erro. Abaixo detalhamos e classificamos os erros de cada um dos 10 estudantes.

Começando por A01 (Figura 8), percebemos que o mesmo tentou resolver a questão algebricamente, porém considerou a variável x como sendo o número de unidades $(x = 100)$ e não o preço por unidade, cometendo um erro relacionado à interpretação das variáveis algébricas.

Ao equacionar algebricamente o problema, considerou o lucro igual ao custo, escrevendo $900 = x^2 + 20x + 700$, e após escreve $x^2 + 20x - 200$, mostrando que o estudante não levou em conta a receita e que também, se esqueceu de igualar a última expressão citada, a zero. Cometendo um erro de equacionamento algébrico e também de interpretação do problema.

Após, substituiu $x = 100$ na equação por ele encontrada, obtendo $900 = 10000 + 2000 + 700$.

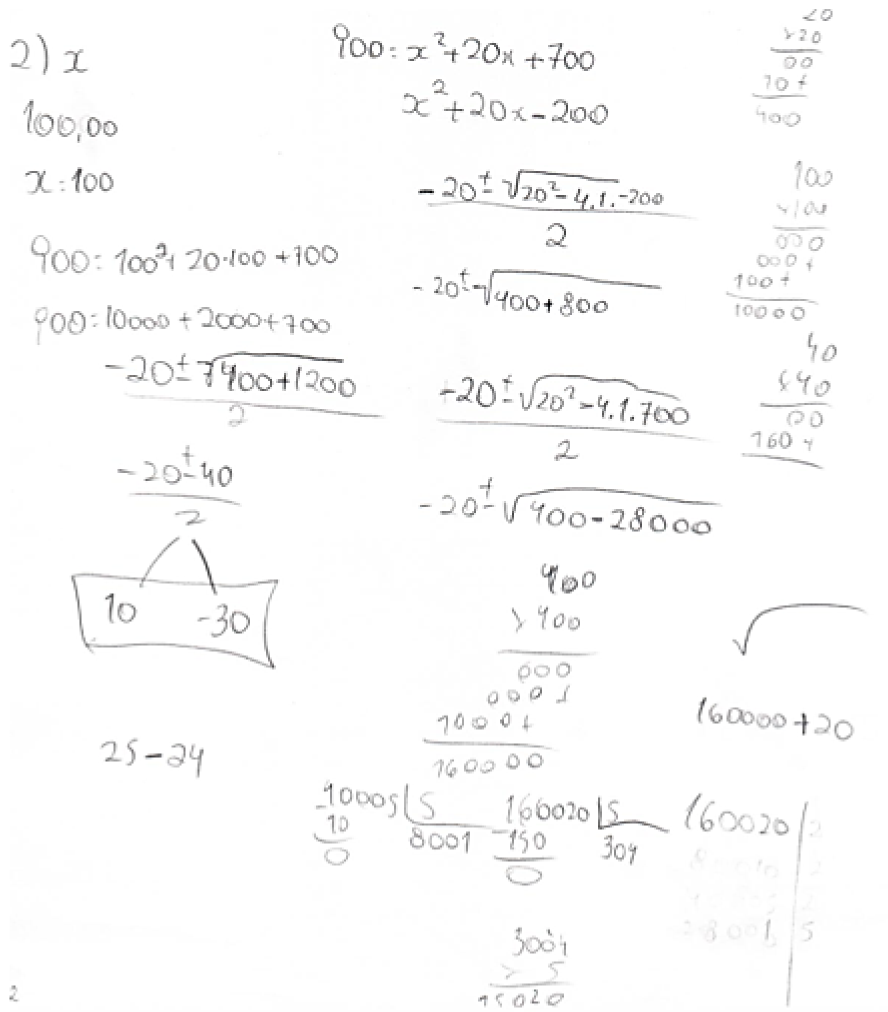
Na sua resolução, também utilizou Bháskara para encontrar as possíveis raízes da equação, chegando a $-20 \pm \sqrt{400 + 800}$, esquecendo-se de dividir por 2, cometendo um erro por desatenção, erro que se repete novamente ao tentar encontrar as raízes da equação do custo total.

Depois, tentou usar outros valores na raiz, mostrando que o estudante estava confuso em relação com o que estava fazendo e estava em busca de uma raiz exata, ao usar um valor aleatório (1200) ele encontra as raízes 10 e -30, não chegando à conclusão alguma.

Também tentou encontrar as raízes da equação do custo total, chegando a $\frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.1.700}}{2}$, como chegou a um valor negativo na raiz, não prosseguiu.

Desta forma, fica evidente o erro na interpretação do problema, já que o estudante tentou várias estratégias para a sua resolução.

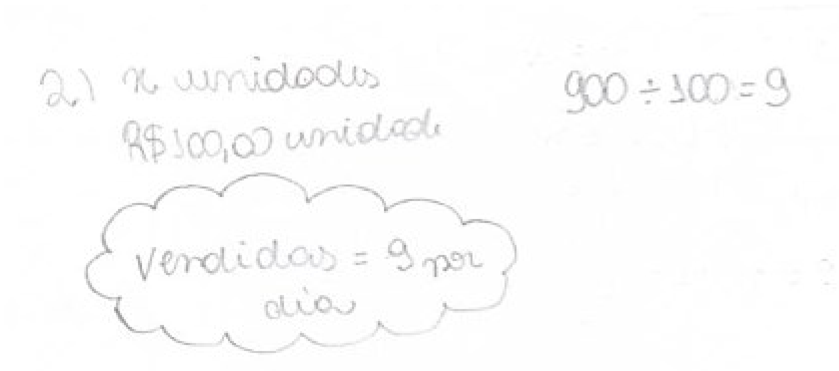
Figura 8: Resolução do participante A01, referente à questão 02



Fonte: Autoria própria.

A02 (Figura 9), em sua resolução, apenas dividiu o lucro pelo preço unitário, não levando em consideração o custo e a receita, assim, podemos considerar que o estudante cometeu um erro de interpretação do problema.

Figura 9: Resolução do participante A02, referente à questão 02



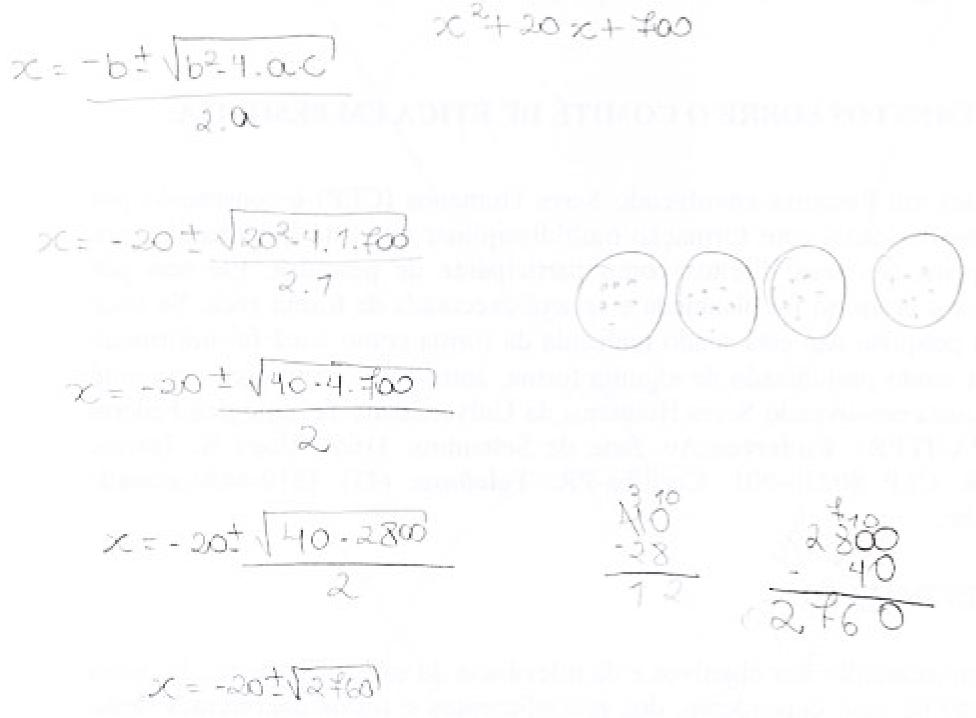
Fonte: Autoria própria.

Quanto à resolução de A03 (Figura 10), podemos notar que o mesmo desconsiderou toda a problemática e tentou encontrar as raízes da equação de segundo grau que representava o custo total, ficando evidente o erro de interpretação do problema, erro presente também na resolução de A01.

Analisando a referida solução apresentada, percebe-se que o estudante cometeu um erro aritmético na subtração ao considerar $40 - 2800 = 2760$, não levando em conta que o minuendo era menor que o subtraendo.

Ocorreu também um erro por desatenção, já que, esqueceu a divisão por 2 no último passo e também erro no traço da divisão, pois o termo -20 não está incluído no dividendo.

Figura 10: Resolução do participante A03, referente à questão 02

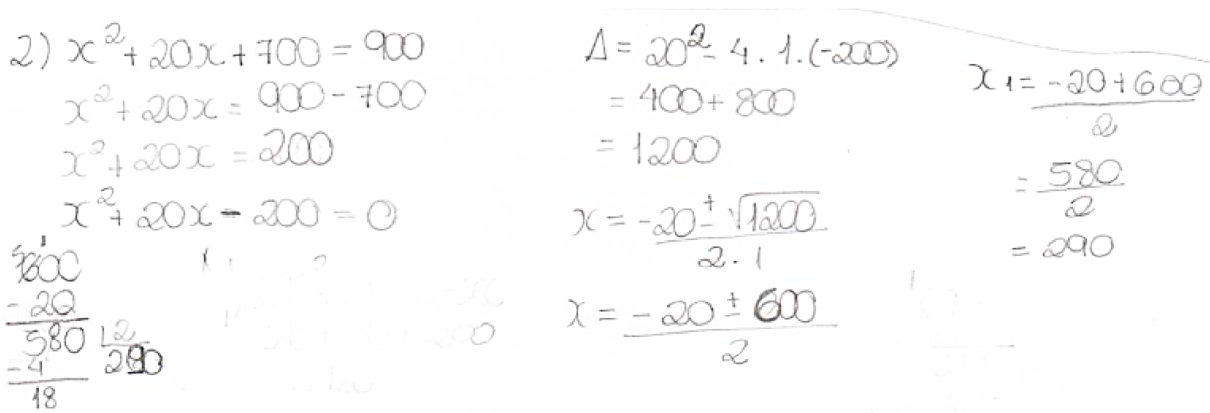


Fonte: Autoria própria.

Na análise da resolução de A04 (Figura 11), verificamos que o mesmo desconsiderou a receita ao igualar o custo total ao lucro, ocorrendo um erro de interpretação do problema, mesmo erro cometido por A01.

Por fim, cometeu um erro aritmético na radiciação ao considerar $\sqrt{1200} = 600$.

Figura 11: Resolução do participante A04, referente à questão 02



Fonte: Autoria própria.

A05 (Figura 12), por sua vez, interpretou corretamente o problema ao considerar o custo total igual a diferença entre a receita e o lucro. Porém, cometeu um erro de desatenção ao escrever 1000 ao invés de 100x, mas chegou corretamente na equação para resolver o problema, bastava apenas encontrar as raízes da equação, porém o estudante não finalizou a resolução.

Figura 12: Resolução do participante A05, referente à questão 02

$$x^2 + 20x + 700 = 100x - 900$$
$$x^2 + 20x - 1000 + 700 + 900 = 0$$
$$x^2 - 80x + 1600 = 0$$

Fonte: Autoria própria.

A06 (Figura 13) comete em sua resolução o mesmo erro cometido por A01 e A04, pois, desconsiderou a receita e igualou o custo total ao lucro, ocorrendo um erro de interpretação do problema.

Após considerou $\sqrt{1200} = 40$, cometendo um erro aritmético de radiciação. Ao encontrar uma raiz positiva e outra negativa desconsiderou o valor negativo, mostrando que apesar do estudante ter resolvido o problema de forma errada, ele tem noção que por se tratar da quantidade de produtos vendidos, o valor não pode ser negativo, logo o estudante entende o significado das raízes de uma equação de segundo grau.

Figura 13: Resolução do participante A06, referente à questão 02

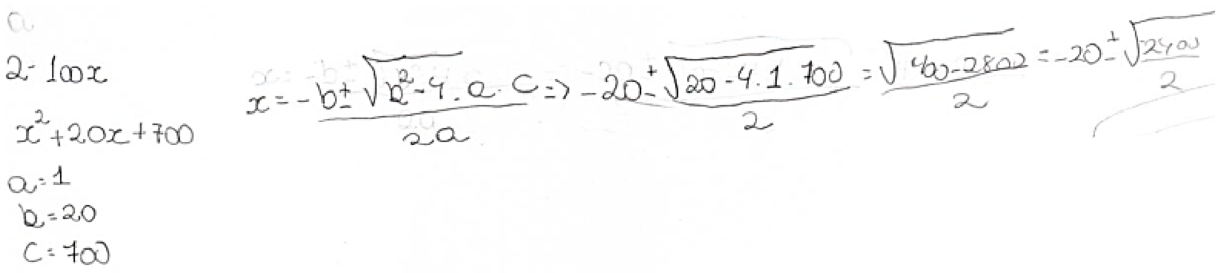
Questão 2

$$x^2 + 20x + 700 = 900$$
$$x^2 + 20x - 200 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.1.(-200)}}{2} \Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{400+800}}{2} \Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{1200}}{2}$$
$$x = \frac{-20 \pm 40}{2} \qquad \cancel{x_1 = \frac{-20-40}{2} = -30} \qquad x_2 = \frac{-20+40}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Fonte: Autoria própria.

A07 (Figura 14) escreveu $100x$, demonstrando que sabia calcular a receita, porém depois tentou calcular as raízes da equação que representava o custo total, assim como A01 e A03, mas parou ao encontrar um radicando negativo. Demonstrando que não soube interpretar corretamente o problema, assim temos um erro de interpretação do problema. O erro com relação ao traço da divisão também se fez presente nessa resolução.

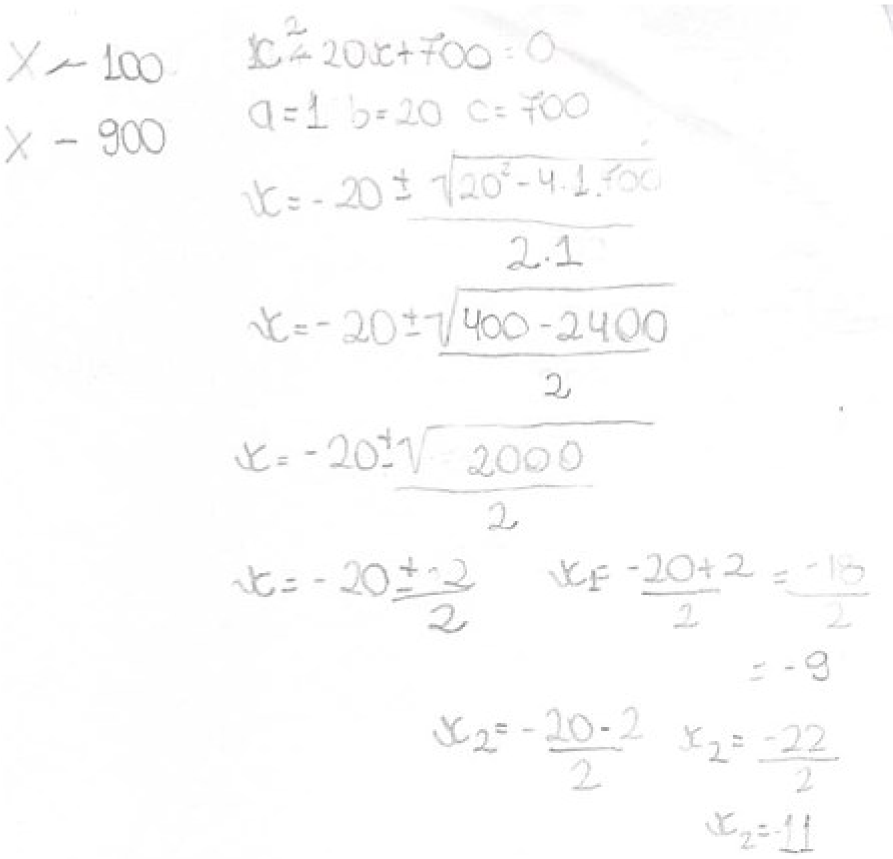
Figura 14: Resolução do participante A07, referente à questão 02



Fonte: Autoria própria.

A08 (Figura 15) apenas calculou as raízes da equação que representava o custo total, apresentando um erro de interpretação do problema, assim como A01, A03 e A07. Ao tentar calcular as raízes da suposta equação considerou $4.1.700 = 2400$, cometendo um erro de multiplicação, erro aritmético. Depois considerou $400 - 2400 = 2000$, cometendo novamente um erro aritmético com relação à subtração. Além do mais, o erro com relação ao traço da divisão se fez presente.

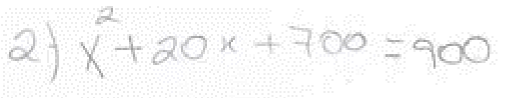
Figura 15: Resolução do participante A08, referente à questão 02



Fonte: Autoria própria.

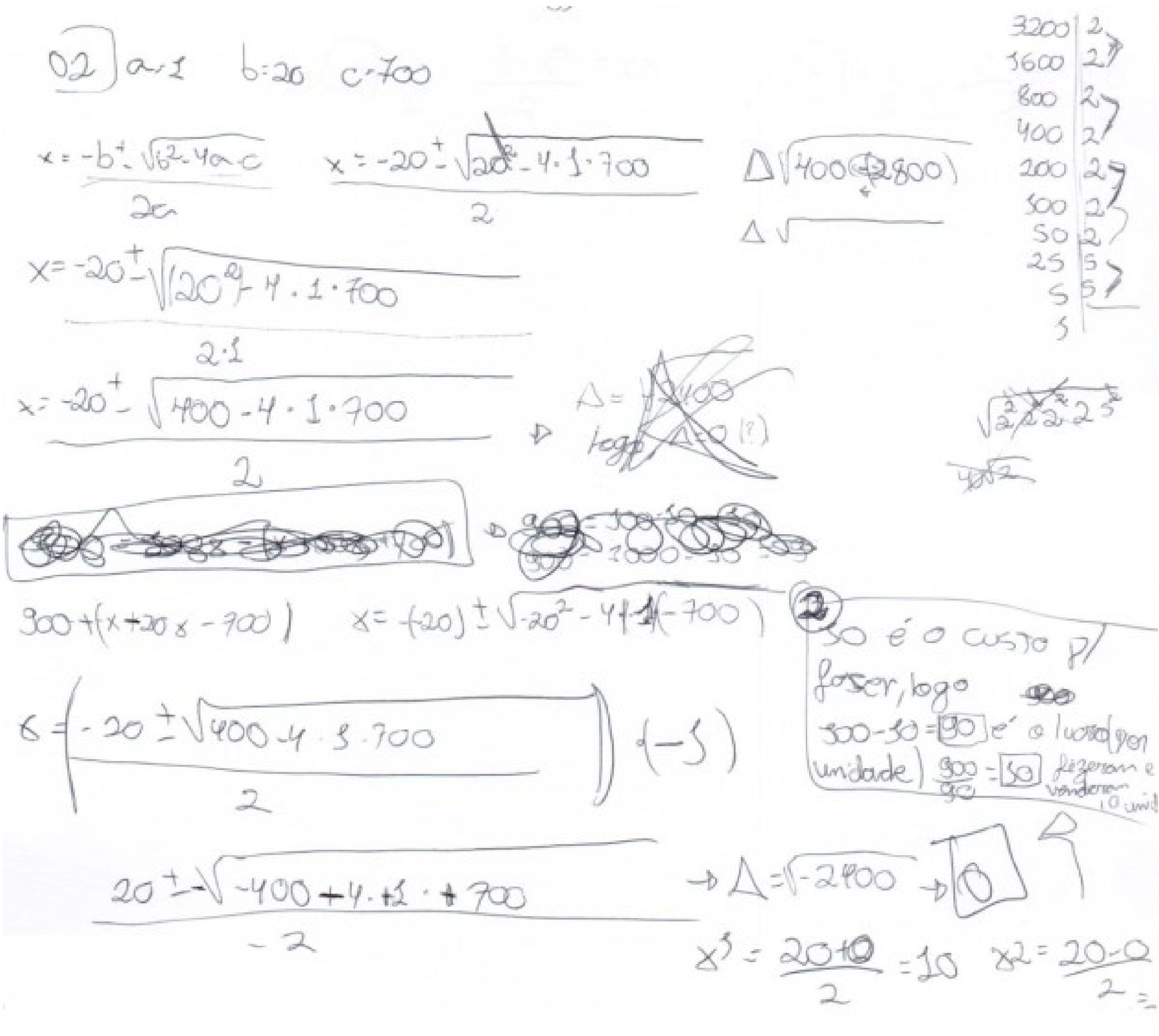
A12 (Figura 16) apenas considerou o custo total igual ao lucro $x^2 + 20x + 700 = 900$, logo cometeu um erro de interpretação do problema, assim como A01, A04 e A06.

Figura 16: Resolução do participante A12, referente à questão 02



Fonte: Autoria própria.

Figura 17: Resolução do participante A14, referente à questão 02



Fonte: Autoria própria.

A14 (Figura 17) fez várias tentativas de resolução. Primeiramente o estudante cometeu um erro de interpretação do problema, já que apenas tentou calcular as raízes da equação de segundo grau que representa o custo total, mesmo erro cometido por A01, A03, A07 e A08. E em outro momento soma o custo total com o lucro, porém só escreve $900 + (\mathrm{x} + 20\mathrm{x} - 700)$, se esquecendo de elevar o x ao quadrado, o que seria um erro por desatenção e também não estabelece uma relação de equivalência para com a receita. Como na resposta final o estudante apresenta que o lucro é o valor de venda menos o custo para a produção, podemos concluir que ele apesar de entender a relação entre o custo, lucro e receita, comete erros de resolução por não conseguir representar isso de forma algébrica.

Além do mais, há um erro aritmético de radiciação, pois o estudante considera $\sqrt{-2400} = 0$.

Em outro momento ele comete um erro na radiciação ao tentar tirar o sinal negativo da raiz, multiplicando tudo por -1:

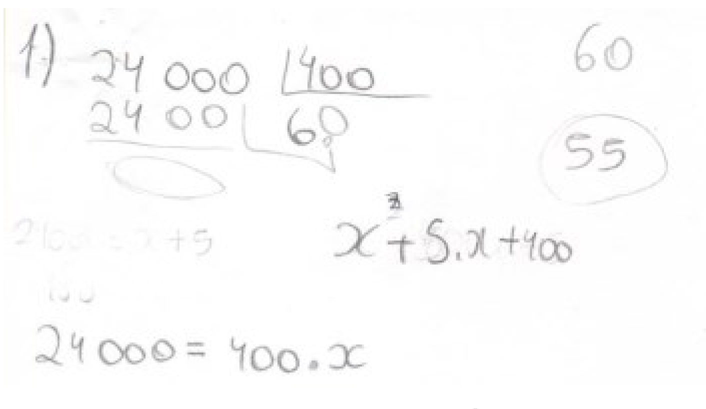
$$\frac{-20 \pm \sqrt{400-4.1.700}}{2} .(-1) = \frac{20 \pm -\sqrt{-400+4.+1.+700}}{-2}$$

6.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 01:

Questão 01: Uma empresa dividiria seus dividendos de R$ 24.000,00, em partes iguais, entre os seus sócios. Como 5 sócios não quiseram receber os dividendos, o valor que eles receberiam foi distribuído aos demais e cada um então recebeu um acréscimo de R$ 400,00 em sua parte. Quantos sócios receberam parte do dividendo?

A01 (Figura 18) cometeu um erro de interpretação do problema, já que escreveu $24000 = 400.\mathrm{x}$ e assim considerou que havia 60 sócios. Por fim descontou os 5 que não quiseram receber e escreveu a função $\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} + 400$. Logo o erro está na representação algébrica do problema apresentado.

Figura 18: Resolução do participante A01, referente à questão 01

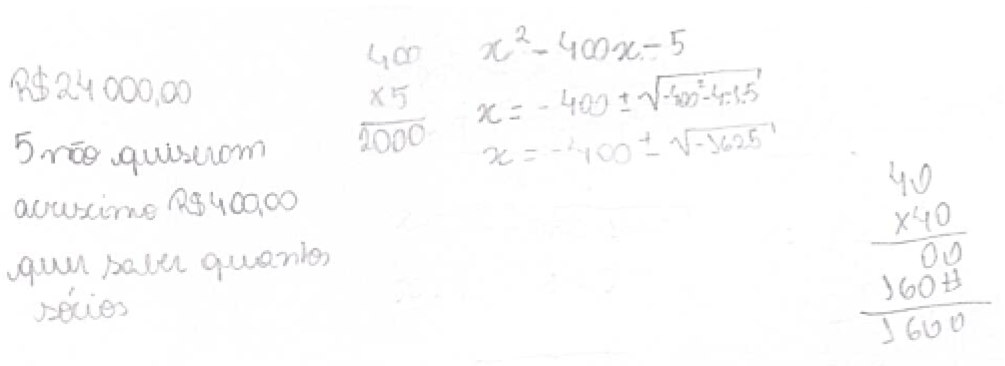


Fonte: Autoria própria.

A02 (Figura 19) cometeu um erro de interpretação do problema, mais especificamente um erro de representação algébrica, pois representou o problema pela expressão $\mathrm{x}^2 - 400\mathrm{x} - 5$.

Ao tentar resolver a equação se esqueceu de dividir por $2\mathrm{a}$ e comete erros com relação ao sinal dos coeficientes. Além do mais comete erros aritméticos ao considerar $-400^2 - 4.-1.-5 = -1625$. E erros de formalismo matemático, ao não colocar os valores negativos entre parênteses.

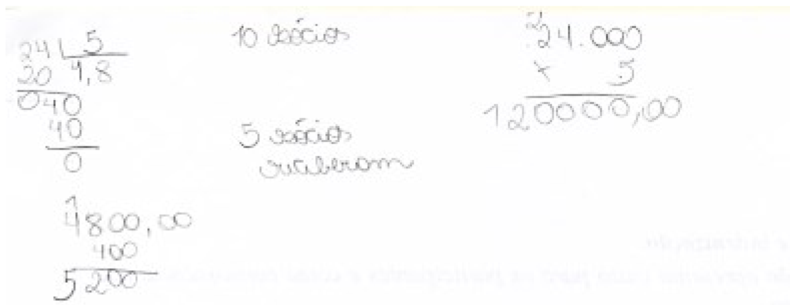
Figura 19: Resolução do participante A02, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

A03 (Figura 20) cometeu um erro de interpretação do problema, pois foi dividindo 24 por 5, que seriam os 24000, após somou 4800 com 400, também multiplicou 24000 por 5 e simplesmente afirmou que haviam 10 sócios e 5 receberam os dividendos.

Figura 20: Resolução do participante A03, referente à questão 01

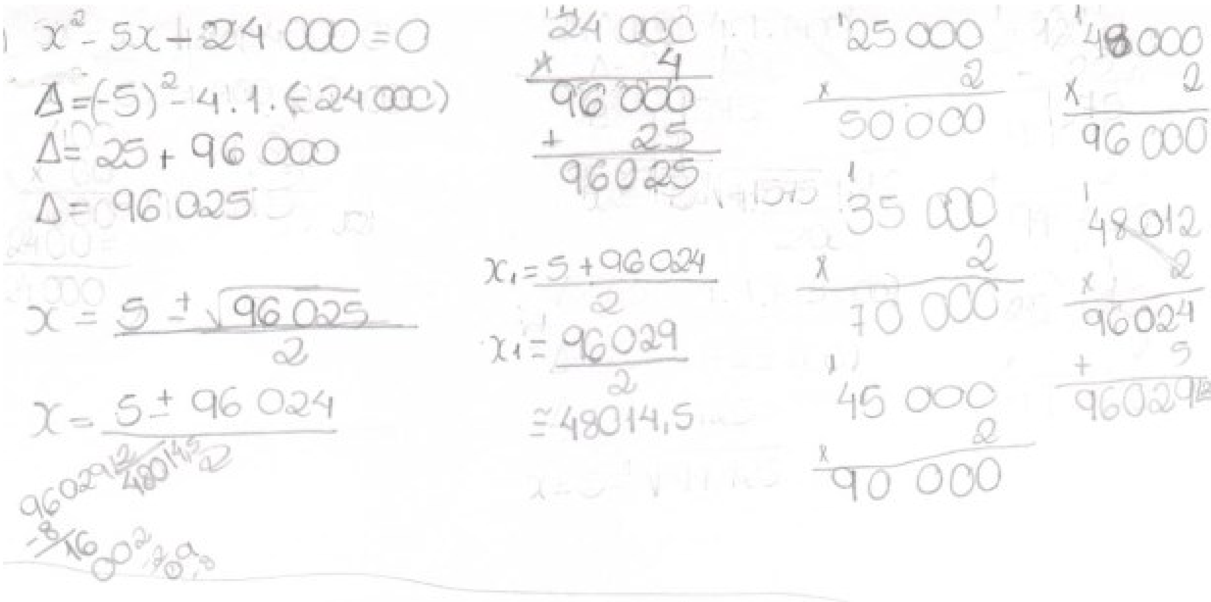


Fonte: Autoria própria.

A04 (Figura 21) cometeu um erro de interpretação do problema, pois representou o problema pela equação $x^2 - 52 - 24000 = 0$, cometendo dessa forma um erro de representação algébrica.

Tentando achar as raízes da equação trocou $\sqrt{96025}$ por 96024, ignorando a raiz e cometendo um erro na radiciação. Além do mais, fez várias multiplicações por 2 que não fazem muito sentido.

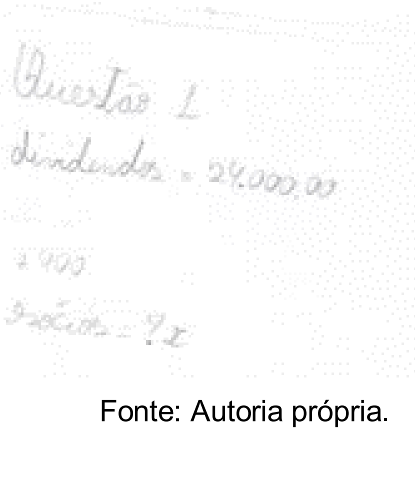
Figura 21: Resolução do participante A04, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

A06 (Figura 22) apenas tirou alguns dados e não apresentou resolução, logo, não temos dados para fazer a análise de erros.

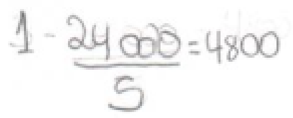
Figura 22: Resolução do participante A06, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

A07 (Figura 23) apenas dividiu 24000 por 5, assim, temos um erro de interpretação do problema.

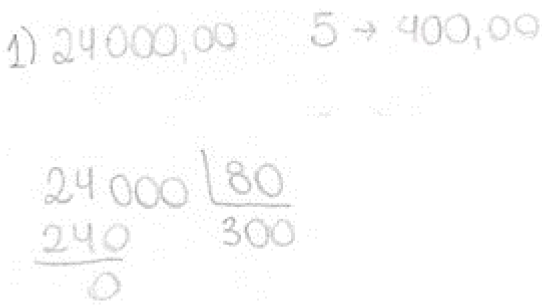
Figura 23: Resolução do participante A07, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

A08 (Figura 24) apenas dividiu 24000 por 80, cometendo um erro de interpretação do problema.

Figura 24: Resolução do participante A08, referente à questão 01



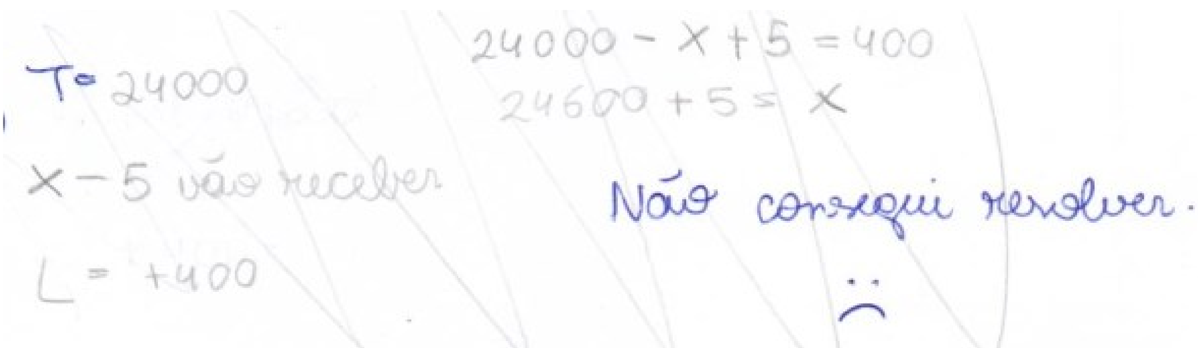
Fonte: Autoria própria.

A09 (Figura 25) comete um erro de interpretação do problema e erro ao equacionar algebricamente o problema, já que possivelmente ocorreu um erro em interpretar as variáveis.

Também considerou 24000+400 = 24600, erro aritmético por desatenção.

Por fim o estudante afirma "não consegui resolver".

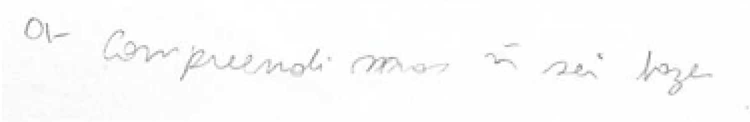
Figura 25: Resolução do participante A09, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

A11 (Figura 26) não apresentou resolução, mas afirmou “compreendi, mas não sei fazer”.

Figura 26: Resolução do participante A11, referente à questão 01



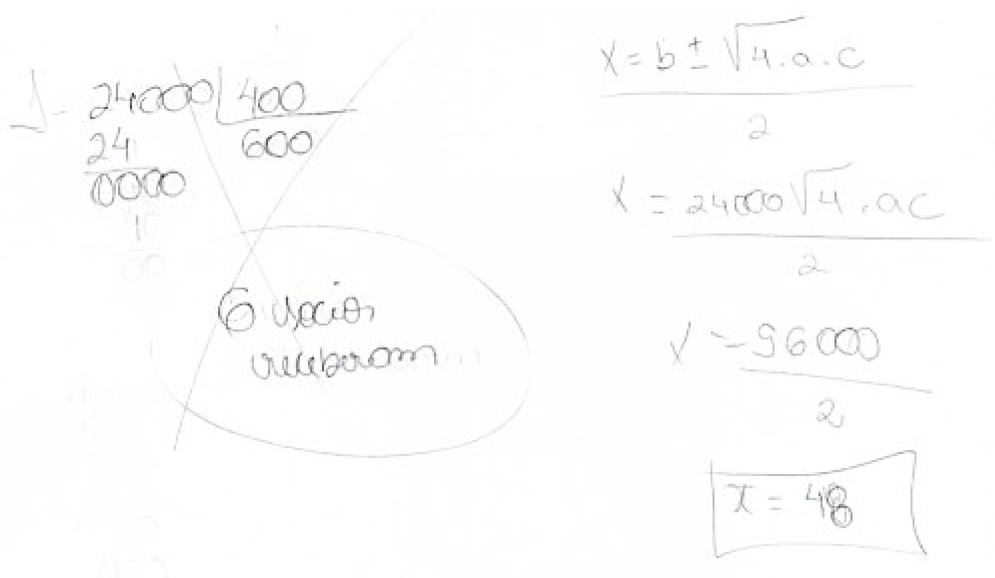
Fonte: Autoria própria.

A12 (Figura 27) apresentou um erro de interpretação do problema, dividiu 24000 por 400 obtendo como resposta 600. Logo tem-se um erro aritmético, pois o correto seria 60. A partir desse resultado afirma que 6 sócios receberam os dividendos.

Após tentou usar Bháskara, mas cometeu erros na fórmula e também usou coeficientes aleatórios retirados do exercício, já que não tinha nenhuma equação de segundo grau presente na resolução.

Além do mais, multiplicou 24000 por 4, não respeitando a ordem das operações, cometendo erros aritméticos.

Figura 27: Resolução do participante A12, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

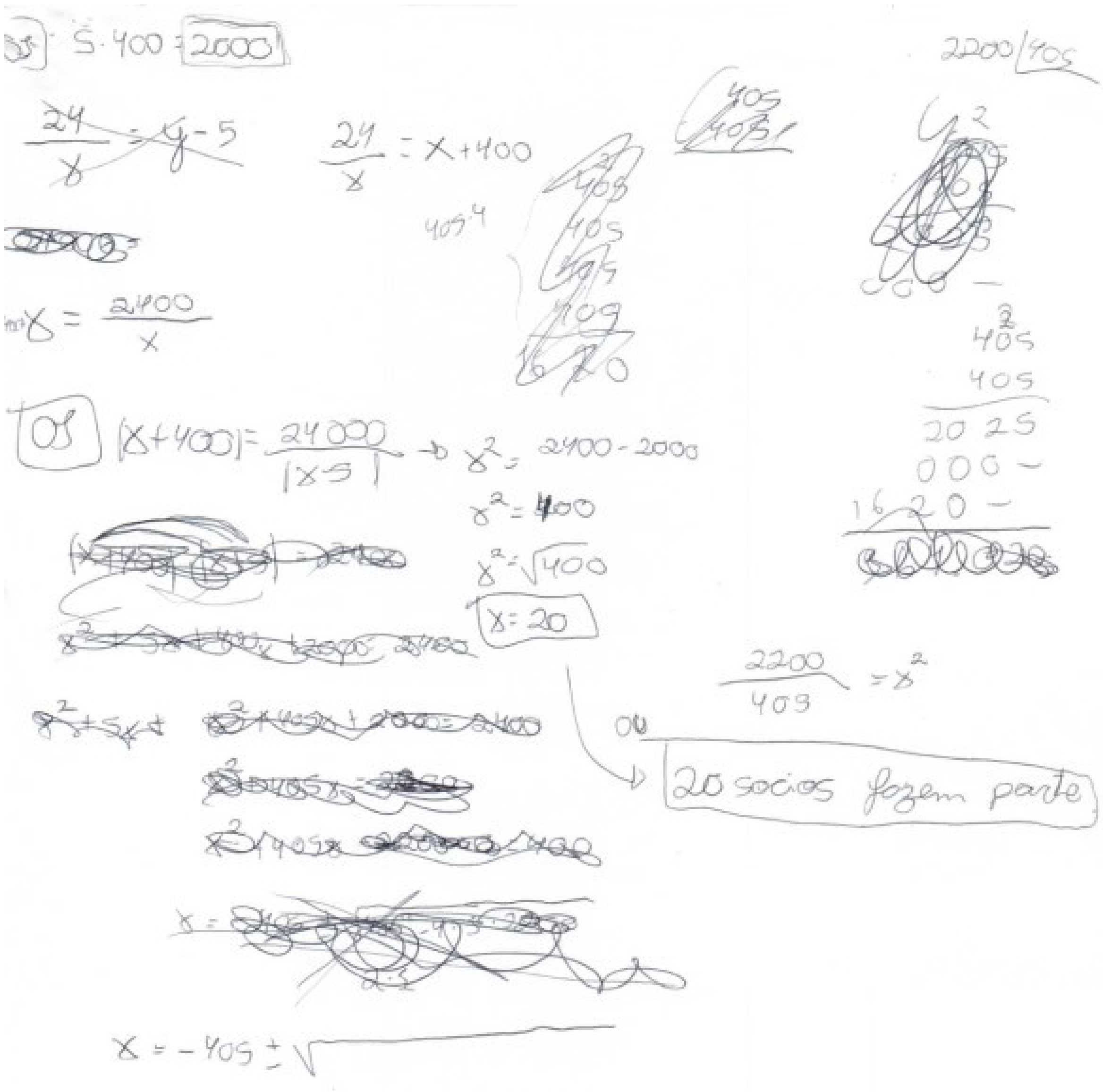
A14 (Figura 28) cometeu erros de interpretação do problema. Primeiramente escreveu $5.400\ = 2000$, sendo que foi acrescentado 400 reais a todos os sócios que receberam os dividendos. Após tentou equacionar o problema algebricamente, porém equacionou de forma errada, cometendo um erro de equacionamento algébrico.

Em uma segunda tentativa começa pelo caminho certo, porém não faz distinção entre as variáveis (número de sócios e valor recebido por cara sócio), chamando ambos de γ. Assim, comete um erro relacionado as variáveis algébricas.

Após considera $(\gamma + 400).(\mathrm{x} - 5) = \gamma^2 + 2000$, cometendo um erro com relação à propriedade distributiva da multiplicação.

Porém, o estudante conhecia a propriedade distributiva, já que analisando a parte que o estudante rasurou, ele desenvolveu a propriedade corretamente, apenas cometendo um erro por desatenção, ao escrever $(\gamma + 5)$ onde deveria ser $\gamma - 5)$. Porém ao chegar em uma equação estranha e difícil de resolver resolve fazer a multiplicação sem usar a propriedade distributiva, cometendo o erro do parágrafo acima.

Figura 28: Resolução do participante A14, referente à questão 01



Fonte: Autoria própria.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente tópico objetiva, através do referencial teórico, dar sentido à interpretação dos erros feita durante a descrição e análise de dados do tópico anterior. Desta forma, concluímos a última etapa da análise de conteúdos, já que, a metodologia aplicada para a análise de erros é a metodologia de análise de conteúdos (CURY, 2008).

O primeiro aspecto a pontuar é que praticamente todos os estudantes que tentaram resolver as questões, tentaram o emprego da fórmula quadrática de resolução. Este aspecto enfatiza o caráter mecânico nas tentativas de resolução, dado que o mesmo invariavelmente envolve a extração de dados e a manipulação dos mesmos em fórmula fechada.

Iniciando nossas considerações quanto à resolução das questões, inicia-se pela questão 03. Nesta, o estudante necessitava apenas encontrar as raízes da equação dada. Observou-se que ocorreram erros por desatenção, erros estes caracterizados nos estudos de Silva e Buriasco (2005), Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014), Ramos, Curi (2014) e Kliemann e Dullius (2017). Vale ressaltar que estes erros não indicam que os estudantes não tinham conhecimento do assunto, mas que os mesmos simplesmente ocorreram por falta de atenção, conforme explica Silva e Buriasco (2005).

Outros erros cometidos, ainda considerando a questão 3, foram os operatórios como no caso da potenciação. Tais erros foram cometidos pelo fato do estudante generalizar os conceitos e criar falsas regras, como Silva e Buriasco (2005) citam em seu estudo. Também foram encontrados erros em operações básicas, assim como levantado por Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014) e Brum e Cury (2013). Para Fonseca e Amorim (2017), boa parte do insucesso no desempenho dos estudantes na resolução desse tipo de equações se dá pelas dificuldades apresentadas perante às operações básicas.

No contexto dos erros relacionados às operações, também foram encontrados erros de radiciação, o que segundo o estudo de Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014), pode significar que os estudantes ainda não compreenderam os objetos matemáticos de estudo, que eram pré-requisitos para a resolução das questões, o que também está de acordo com os estudos de Brum e Cury (2013).

Além disso, foram encontrados erros de escrita matemática e também erros de simplificação de equações, erro em determinar o sinal dos coeficientes e erro na aplicação da fórmula quadrática, na tentativa de encontrar as raízes da equação de segundo grau e erro no traço da divisão. Também foi possível observar que a quase a totalidade dos estudantes utilizou a fórmula quadrática para encontrar as raízes da equação, porém não se atentaram ao sinal dos coeficientes ou não sabiam o significado das raízes da equação, o que pode tê-los levado a cometer alguns dos erros descritos anteriormente.

Em relação à questão 02, em que era necessário relacionar as equações quadráticas a outros conteúdos para resolver o problema, necessitando ao estudante compreender a relação entre receita, custo e lucro, os erros mais cometidos foram com relação à interpretação do enunciado, pois o estudante considerava o custo igual ao lucro, ou então calculava a raiz da expressão dada, sem ao menos ter uma equação e pelo simples fato de aparecer um termo com x^2 no enunciado.

Os erros de interpretação encontrados nesta questão podem estar na dificuldade que os estudantes possuem em traduzir os problemas da linguagem natural ou figurada para a linguagem matemática, não conseguido desta maneira, equacionar o problema dado, como citam Silva e Buriasco (2005) e Brum e Cury (2013) ou então pelo fato de não compreenderem os objetos matemáticos de estudo, que eram pré-requisitos para a resolução das questões (SIMONETTI, PERUZZO E NOVAES, 2014; BRUM E CURY, 2013).

Também foi identificado erro em equacionar (modelar) algebricamente o problema dado, o que está ligado com o erro de interpretação do enunciado. Este aspecto está de acordo com o que é apresentado no estudo e nos dados de Silva e Buriasco (2005) e Brum e Cury (2013), acima citados. Esse tipo de erro por desatenção também se fez bastante presente nessa questão, assim como os erros aritméticos com relação às operações de subtração, multiplicação e radiciação. Alguns destes erros operatórios mostram que os estudantes possuem dificuldades com relação à operação de subtração quando o minuendo é menor que o subtraendo. Assim, os erros relacionados às operações aritméticas básicas reportados por Simonetti, Peruzzo e Novaes (2014) e Brum e Cury (2013) se mostram mais uma vez presentes no presente estudo.

Por fim, outro erro cometido nessa questão foi o erro relacionado à interpretação das variáveis algébricas, o que vai de acordo com o trabalho de Ramos e Cury (2014). Neste trabalho os autores apontam que com relação às funções polinomiais de segundo grau as dificuldades estão em distinguir e relacionar variáveis dependentes e independentes. No nosso caso, a dificuldade foi em interpretar quais eram as variáveis presente no problema, o que está diretamente ligado ao fato de que os estudantes possuem dificuldades em traduzir os problemas da linguagem natural para a linguagem matemática, mais especificamente, para a linguagem algébrica.

Finalmente chegamos à discussão da questão 01, em que ao resolver a situação problema, o estudante deveria relacionar o problema envolvido com as equações quadráticas, sem que estas tivessem sido mencionadas, e a partir da modelagem, através das operações com termos algébricos deveria solucionar o problema. Essa questão era a mais complexa, pois necessitava que o estudante tivesse um bom domínio algébrico para a sua resolução.

Todos os questionários com erros, demostraram erros por falta de interpretação do enunciado, erro que esteve presente e já foi embasado teoricamente durante as considerações acerca da questão 02 e que contribuíram de forma direta para que alguns dos demais erros ocorressem.

Também se repetiram os erros em representar algebricamente o problema dado, ou seja, erro em equacionar e manipular algebricamente o enunciado, erro por desatenção, erro de interpretação de variáveis, erros aritméticos, erro no sinal do coeficiente e erro de formalismo matemático.

Para Fonseca e Amorim (2017, p.34) erros de cálculo e manipulações algébricas refletem “na aprendizagem dos demais conteúdos matemáticos”, assim “é necessário preparar o estudante para interpretar suas estratégias de resoluções, identificar seus próprios erros e superar suas dificuldades para não persistir usando estratégias erradas” (FONSECA e AMORIM, 2017, p.34).

Outro erro que ocorreu em um dos questionários foi o erro em escrever a fórmula de Bháskara e em outro o erro na propriedade distributiva da multiplicação. Com relação ao erro na propriedade distributiva, Brum e Cury (2013) e Ramos e Curi (2014) reconhecem que alguns dos erros se dão pelo fato dos estudantes não saberem as propriedades distributivas, nesse caso o estudante sabia a propriedade pois primeiramente tentou resolver o problema aplicando a propriedade distributiva, mas por encontrar um resultado que não era o esperado, decide fazer a multiplicação de forma errada e sem aplicar a propriedade, o que indica que o estudante aprendeu como aplicar a propriedade, mas não deu sentido ao aprendizado, já que ao se deparar com um resultado insatisfatório, resolveu a multiplicação sem aplicar a propriedade distributiva.

Ao analisarmos as três questões em conjunto, verificamos que o problema não está em encontrar as raízes das equações quadráticas, já que, ao analisarmos as resoluções da questão 03, percebemos que na maioria das vezes isso é feito de maneira mecânica e sempre utilizando-se da fórmula de Bháskara, porém nem sempre sabem o significado das raízes, ou sequer tiram a prova real para validar os resultados.

Também foi possível perceber que quando surge um "x^2", logo os estudantes associam a resolução à fórmula de Bháskara, o que nem sempre é necessário ou suficiente para resolver o problema.

Outra constatação é o fato da maioria dos estudantes terem dificuldade em interpretar as situações-problema, pois falta conhecimento de conteúdos anteriores, como os conhecimentos algébricos, assim, não conseguem transcrever os problemas da linguagem natural para a linguagem matemática. Essa dificuldade, pode estar associada não somente à falta de pré-requisitos matemáticos, mas também à dificuldade de interpretação de texto, o que faz com que o estudante leia o problema, mas não tenha noção do que ele está pedindo e dessa forma, não consiga modelar a solução para a situação-problema.

Além do mais, a falta de domínio dos conteúdos de matemática básica, faz com que tenhamos um efeito cascata, onde conteúdos subsequentes não sejam assimilados, pois o anterior, que deveria estar bem assimilado por parte do estudante não está bem sintetizado, fazendo que os conteúdos que estão por vir apresentem defasagem de aprendizagem.

O efeito cascata, citado acima pode ser observado através do fato de que, o conhecimento algébrico que deveria servir de apoio ao estudante para resolver situações-problemas, tornando sua resolução mais simples, não está bem formalizado, tornando todos os conteúdos que vêm na sua sequência e que dele dependem, inclusive o conteúdo relacionado às equações quadráticas, mal sintetizado pelos estudantes, criando-se um déficit na aprendizagem. Esse "déficit apresentado reflete o quanto os estudantes, embora no Ensino Médio, não conseguem dominar operações básicas, que deveriam ter aprendido no Ensino Fundamental" (FONSECA e AMORIM, 2017, p.49).

Por fim, conclui-se que as dificuldades de aprendizagem referente às equações quadráticas, está relacionada ao déficit relacionado à conteúdos anteriores, que servem de base para o aprendizado das equações quadráticas e de tantos outros conteúdos da matemática. Assim, "é importante tentar sanar tais dificuldades a fim de obter um bom desempenho na aprendizagem dos conteúdos de matemática (FONSECA e AMORIM, p.48, 2017).

Diante dos expostos acerca das resoluções das questões propostas, podemos concluir que o ensino das equações quadráticas apresenta lacunas no processo de ensino e aprendizagem. Pois, os educandos não são capazes de utilizar o conhecimento adquirido sobre as equações quadráticas para resolver problemas envolvendo as mesmas. Desta forma, não se atinge o principal objetivo do ensino da matemática, o de utilizar o conhecimento para resolver problemas.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011;

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Edgar Blucher, Rio de Janeiro, 1974;

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998;

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EIEF_110518_versaofinal_sitepdf. Acesso em: 20 Set. 2021;

BRUM, Lauren Darold, CURY, Helena Noronha. Análise de erros em soluções de questões de álgebra: uma pesquisa com estudantes de ensino fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. v. 2, n. 1, p. 45-62, 2013;

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos estudantes. Belo Horizonte: Autêntica, 2008;

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros.** In: X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade. Salvador – BA, 7 a 9 de julho de 2010. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Disponível em: http://www.lematec.net.br/CDS/ENEM10/artigos/PA/Palestra20.pdf. Acesso em: 21/04/2018;

CURY, Helena Noronha. Erros, dificuldades e obstáculos no ensino e na aprendizagem de Matemática: um levantamento de trabalhos em anais. **Acta Scientiae**, v.17, n.2, p. 357-370, maio/ago. 2015;

CURY, Helena Noronha, SILVA, Priscila Nitibailoff da. Análise de erros em resolução de problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Teconologia.** v. 1, n. 1, p.85-97, jan./abr. 2008;

DESLANDES, Suely Ferreira, NETO, Otavio Cruz, GOMES, Romeu, et.al. Pesquisa social: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ : Vozes, 1994;

FERRARO, Nicolau Gilberto; SOARES, Paulo Toledo. **Física Básica**. 2.ed.. São Paulo: Atual, 2004;

FONSECA, Simone de Jesus da, AMORIM, Marta Élid. Análise de erros cometidos por estudantes do ensino médio ao resolver questões de matemática financeira. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, n. 1, p.34-50, 2017;

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. - São Paulo : Atlas, 2008;

GODOY, Arilda Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Admin*istração de Empresas*,** v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995;

KLIEMANN, Geovanna Luiza, DULLIUS, Maria Madalena. Análise de erros na resolução de problemas matemáticos. **Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemática** v.13 (28), p. 166-180, jul./dez. 2017;

MARTINI, Glorinha. et al. **Conexões com a Física**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 1.

PINHO, Jackson Moraes; VERNES, Gilson da Silva Vernes; SEIBERT, Tania Elisa **A resolução de equações do segundo grau com ênfase no método de completar quadrados**. XXV Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul (EREMATSUL). FACCAT – Taquara, RS, 2019;

RAMOS, Maria Luisa, CURI, Edda. Modelo de análise didática dos erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial de 2^{o}grau. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis – SC, v. 9, n. 1, p. 27-42, 2014;

RIBEIRO, Vivian de Paula, GODOY, Elenilton Vieira, ROLKOUSKI, Emerson, **Boletim online de Educação Matemática.** Florianópolis - SC, v. 8, n. 16, p. 112-133, dezembro/2020;

SILVA, Marcia Cristina Nagy, BURIASCO, Regina Luzia de. Análise da produção escrita em matemática: algumas considerações. **Revista Ciência e Educação.** v. 11, n.3, p. 499-512, 2005;

SIMONETTI, Djerly, PERUZZO, Jefferson, NOVAES, Bárbara Winiarski Diesel. **Análise de erros:** resoluções de estudantes do 9º ano em questões que envolvem radiciação. XII Encontro Paranaense de Educação Matemática – Campo Mourão – PR, 4 a 6 de setembro de 2014. Disponível em: http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/COMUNICACOES/CCTitulo/CC012.PDF. Acesso em: 15/05/2018;

SPINILLO, Alina Galvão. O erro no processo de ensino-aprendizagem da matemática: errar é preciso? **Boletim Gepem (Online)** ISSN: 2176-2988. n. 64, p. 1-15, jan./jun. 2014;

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** 1 ed. São Paulo, SP: Atlas, 2008.